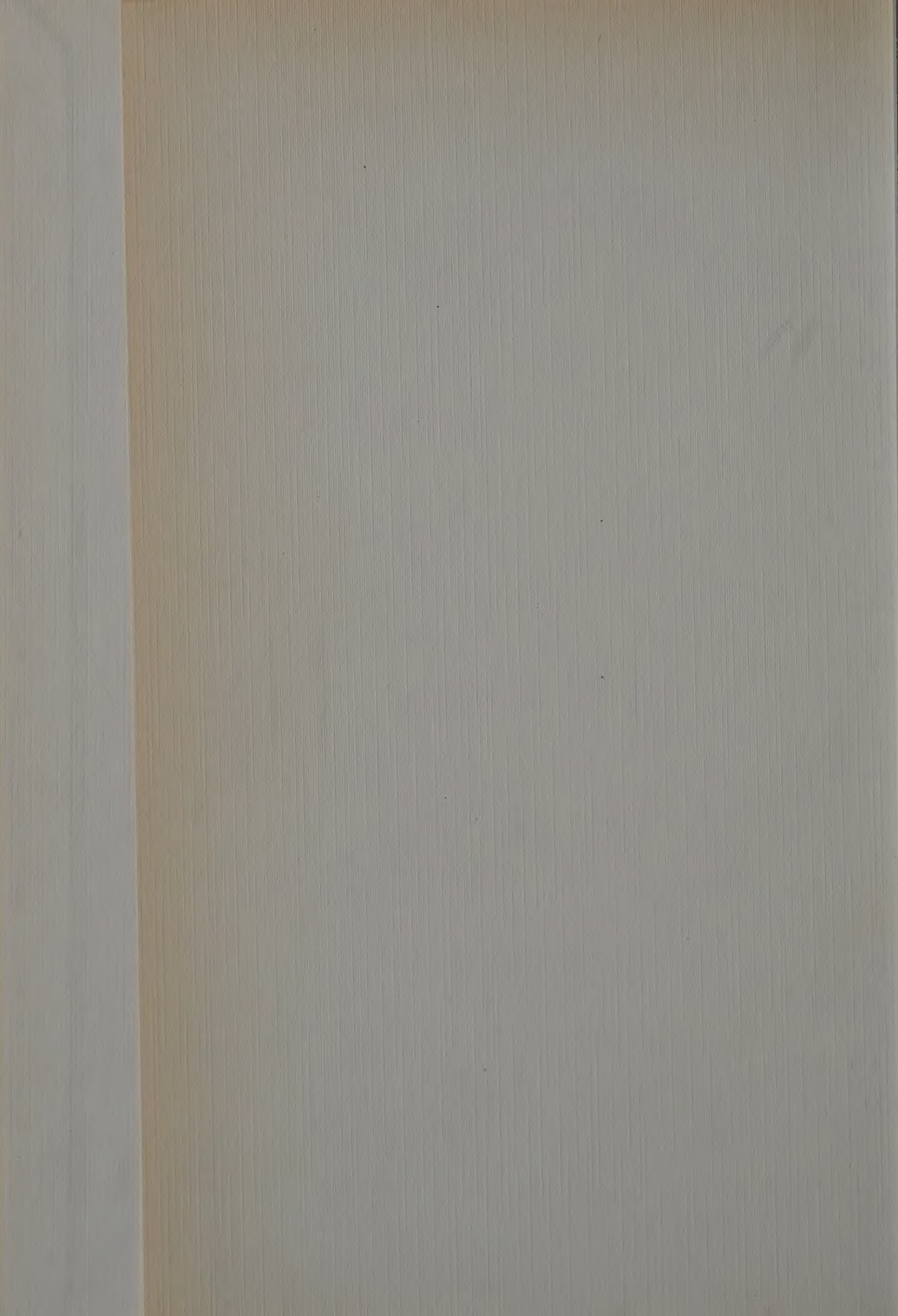


UNIVERSITY OF ILLINOIS
AT CHICAGO
801 S. MORGAN
CHICAGO, IL 60607



ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXXVI

1929(VII)

SERIE SESTA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IX



ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGRAFO DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1929 (VII)

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 6 gennaio 1929 (Anno VII)

Presidenza del sen. prof. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Geometria. — *Un paradosso topologico.* Nota I⁽¹⁾ del Socio F. SEVERI e di B. SEGRE.

In un lavoro recente di uno di noi⁽²⁾ è stato osservato che la varietà reale di C. Segre, V_1^6 , dello spazio S_8 , che costituisce il *modello minimo*⁽³⁾ su cui si possono rappresentare biunivocamente (si sottintende sempre in modo continuo) *senza eccezione* i punti complessi del piano (cioè i valori di due variabili complesse), può altresì riferirsi doppiamente alla V_4^3 , dello spazio S_5 , riempita dalle corde di una superficie F reale di Veronese. Ed è stato anche osservato che la superficie F divide la V_4^3 in *due regioni*, di cui F costituisce il comune contorno. Ora questa circostanza paradossale, che nel lavoro citato è spiegata con un'argomentazione non esauriente, viene qui esaminata a fondo. La circostanza apparisce paradossale, poichè si è condotti *a priori* ad asserire che una varietà a 4 dimensioni non possa esser divisa in due parti se non da una varietà a 3 dimensioni, e non da una superficie.

(1) Presentata nella seduta del 6 gennaio 1929.

(2) B. SEGRE, *Sobre algunas representaciones reales del plano complejo* (« Rev. mat. Hispano-Americana », 1928, p. 137), n. 4, nota (5) a piè di pagina.

(3) Cioè il modello di minimo ordine, come la sfera (o una quadrica ellittica) è il modello di minimo ordine su cui si può distendere una variabile complessa. Tali questioni sono state trattate da F. SEVERI nelle sue *Conferenze di geometria algebrica* (Roma, Tipo-lit. del Genio civile, 1927). Queste conferenze, pubblicate solo parzialmente, saranno complete fra breve.

Le due regioni di V_4^3 , alle quali si allude, son quelle che possono chiamarsi dei punti *interni* e dei punti *esterni* rispetto ad F (cfr. col. n. 1). I primi sono i punti di V_4^3 da cui escono due piani tangenti complesso-coniugati di F ; i secondi quelli da cui escono due piani tangenti reali. La regione dei punti interni rappresenta biunivocamente, senza eccezione, le coppie dei punti complesso-coniugati di un piano reale (che può immaginarsi riferito ad F con una trasformazione birazionale reale, priva di elementi eccezionali); la regione dei punti esterni e dei punti di F rappresenta biunivocamente, senza eccezione, le coppie dei punti reali del piano. La rappresentazione estende insomma, nel modo più naturale, la nota rappresentazione doppia, dovuta a Klein, dei punti complessi di una retta coi punti interni ad un disco piano contornato da una conica.

L'analisi che ci accingiamo a svolgere, mostra che le due regioni son proprio distinte dal punto di vista della connessione; cioè non si può passare dall'una all'altra con un cammino continuo, senza traversare F (n. 2). Si tratta di precisare quello che *a priori* viene fatto di affermare: che non si possa passare da una coppia di punti reali del piano, variabili con continuità, ad una coppia di punti complesso-coniugati, senza che i due punti reali vengano prima a coincidere.

La spiegazione del paradosso sta tutta nel fatto che per la V_4^3 , la F è luogo di punti doppi conici (a cono tangente *irriducibile*), cosicchè la V_4^3 non è una varietà topologicamente *omogenea* ⁽¹⁾ nei punti di F (n. 3). Ed è appunto soltanto per una varietà omogenea che si può affermare, come trovassi dimostrato al n. 6 (Nota II), che essa non può essere divisa in due parti se non da una varietà avente dimensione inferiore di un'unità ⁽²⁾.

Altro apparente paradosso, che trova qui la sua completa spiegazione, è quello (al precedente collegato) che una varietà reale, che rappresenti biunivocamente, senza eccezione, le coppie (non ordinate) dei punti complessi di un piano (o più generalmente di una varietà algebrica irriducibile a $k \geq 2$ dimensioni, priva di punti multipli), è necessariamente *dotata di punti multipli*.

In questi paradossi si era anche imbattuto (com'è detto al n. 4) il Comessatti.

L'ultima proprietà accennata apparisce *a priori* un paradosso, perchè quando si dice « varietà delle coppie di punti di una V_k algebrica » si ha

(1) Per ciò che concerne i concetti topologici che qui si usano, rimandiamo alle citate *Conferenze*. Una varietà V_n è *omogenea* se l'intorno di un suo punto qualunque è una sola cellula n -dimensionale, che lo annette come punto *interno*. Una varietà omogenea è necessariamente *chiusa* in senso topologico.

(2) Una parte della dimostrazione del n. 6 poggia sull'ipotesi che le varietà di cui trattasi sieno analitiche. Ma il teorema vale certamente sotto ipotesi più generali. Per esempio B. SEGRE, nella Nota *Costruzione di una curva semplice sghemba di Jordan, ecc.*, presentata all'Accademia in questa stessa seduta, lo stabilisce nei riguardi dello spazio ordinario e della curva da lui studiata.

l'impressione che tale varietà sia definita invariantivamente rispetto a tutte le trasformazioni birazionali; mentre lo è soltanto nei riguardi delle trasformazioni birazionali che ne forniscano modelli, i quali la rappresentino biunivocamente, senza eccezioni. Non c'è pertanto da meravigliarsi che ognuno di tali modelli possieda di necessità certe singolarità proiettive⁽¹⁾.

1. Dato un piano reale π , riferiamolo nel modo noto⁽²⁾ ad una superficie reale di Veronese F , in guisa che si corrispondano i punti reali di π e di F ; la V_4^3 delle corde di F rappresenta allora, senza eccezioni, la varietà delle coppie (non ordinate) dei punti di π . Questa V_4^3 passa doppiamente per F , in ogni punto di F avendo un cono quadrico tangente *irriducibile* (di vertice il piano ivi tangente ad F). È facile verificare che i punti reali di V_4^3 interni alle singole coniche di F , sono pure interni a ciascuno dei suddetti cono quadrici, e costituiscono un'unica *varietà reale* W a 4 dimensioni (appartenente alla V_4^3), che può — nel senso indicato — dirsi *interna alla superficie di Veronese* F .

2. La parte reale V di V_4^3 è un continuo a 4 dimensioni connesso e chiuso, il quale, dalla falda reale della superficie F , è spezzato in due varietà W e W^* , rispettivamente immagini delle coppie di punti complesso-coniugati e delle coppie di punti reali e distinti di π .

Per stabilire rigorosamente il fatto asserito, s'introducano in S_5 coordinate proiettive omogenee $x_{ik} \equiv x_{ki}$ ($i, k = 1, 2, 3$), di guisa che l'equazione di V_4^3 sia

$$(1) \quad \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

i punti (reali) di V ottenendosi in corrispondenza ai valori reali delle x_{ik} che soddisfanno a quest'equazione. Le equazioni di F si ottengono annullando i vari complementi algebrici X_{ik} degli elementi x_{ik} del determinante che figura nella (1), ed anzi basta aggiungere alla (1) le equazioni

$$(2) \quad X_{11} = 0, \quad X_{22} = 0, \quad X_{33} = 0,$$

essendo notoriamente, in virtù della (1),

$$(3) \quad X_{22} X_{33} - X_{23}^2 = 0, \quad X_{33} X_{11} - X_{31}^2 = 0, \quad X_{11} X_{22} - X_{12}^2 = 0.$$

(1) Le considerazioni dei numeri da 1 a 5 inclusivo (Nota I) sono di B. SEGRE, le altre (Nota II) di F. SEVERI.

(2) Cfr. G. VERONESE, «Mem. dei Lincei», t. 19 (3), 1883-84, p. 344; C. SEGRE, «Atti della R. Acc. di Torino», t. 20, 1885, p. 487; E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* (Messina, Principato, 1923), cap. XVI.

Ora, sempre che alle x_{ik} si diano valori reali, dalle (3) risulta che in ogni punto di V non situato su F è soddisfatta una almeno delle disuguaglianze

$$(4) \quad X_{11} > 0 \quad , \quad X_{22} > 0 \quad , \quad X_{33} > 0 ,$$

le altre potendo eventualmente ridursi ad uguaglianze; oppure una almeno delle disuguaglianze

$$(5) \quad X_{11} < 0 \quad , \quad X_{22} < 0 \quad , \quad X_{33} < 0 ,$$

le altre potendo eventualmente ridursi ad uguaglianze.

Le (4), (5), insieme alla (1) rappresentano rispettivamente le varietà W e $W^{*(1)}$, e non si può passare con continuità da un punto della prima ad un punto della seconda, senza che per un punto intermedio abbiano ad essere verificate le (2) [oltre alla (1)], ossia senza attraversare la superficie F .

3. Se intersechiamo V con uno S_3 reale, segante F in 4 punti reali, otteniamo in uno spazio ordinario la falda reale di una superficie del 3° ordine con 4 punti doppi conici; essa è da questi 4 punti spezzata in due parti, l'una interna e l'altra esterna ai 4 coni quadrici in essi tangenti alla superficie. Questo fatto che (come qui vien dimostrato al n. 6, Nota II) non può mai presentarsi per una varietà omogenea, si presenta ora, appunto perchè detta falda reale non è omogenea, in quanto l'intorno di un punto doppio conico, su d'una superficie reale, non è omeomorfo ad una cellula a due dimensioni.

Analoghe considerazioni possono applicarsi a V ; e si conclude che l'apparente paradosso osservato risiede semplicemente in ciò: che la varietà V non è omogenea.

4. Nelle citate Conferenze del prof. Severi trovasi precisato il fatto, di frequente invocato nell'*Analysis situs*, da Poincaré in poi, che una varietà reale priva di punti multipli e di punti contorno è necessariamente omogenea⁽²⁾. Usufruendo di questa proposizione, si vede che:

(1) Vedi B. SEGRE, loc. cit., p. 140.

(2) Un punto semplice P di una varietà reale M_k , di dimensione k , è caratterizzato dalla condizione seguente. Definita una corda impropria di M_k come una retta limite di ogni insieme di rette congiungenti coppie di punti M_k , situate in un qualunque intorno di P , le corde improprie di M_k uscenti da P riempiono una stella in un determinato S_k , che dicesi lo spazio tangente ad M_k in P . Fra le corde improprie son comprese le rette contenenti le semirette tangenti, che sono le semirette limiti di ogni insieme di semirette proiettanti da P i punti di M_k situati in un qualunque intorno di P . Una retta tangente è costituita da due semirette tangenti opposte. Qualora le corde improprie pel punto semplice P siano tutte e sole le rette tangenti, P è un punto interno (in senso metrico-proiettivo) ad M_k . Se invece le semirette tangenti formano soltanto una parte della stella di centro P , nello S_k tangente, P è un punto semplice terminale o punto contorno (in senso metrico-

Non è possibile costruire una varietà algebrica priva di punti multipli, che rappresenti senza eccezioni le coppie non ordinate dei punti complessi di un piano π .

Intanto, se una tale varietà \mathfrak{V} esiste, si può sempre supporre che su essa la trasformazione antibirazionale involutoria α immagine del coniugio di π , sia pure il coniugio, cioè che \mathfrak{V} sia reale. Infatti la α , ove non sia il coniugio, è in ogni caso su \mathfrak{V} biunivoca senza eccezioni, e pertanto, se $|A|$ è il sistema delle sezioni iperpiane di \mathfrak{V} , ed $|\bar{A}|$ il suo trasformato mediante α , il sistema $|A + \bar{A}|$ è irriducibile, semplice, privo di varietà fondamentali, mutato in sé da α , e dotato di varietà unite, onde i suoi elementi possono biunivocamente riferirsi agli iperpiani di uno S_r , in modo che all'antiproiettività subordinata da α entro $|A + \bar{A}|$, risponda in S_r il coniugio. E con questo si trasforma \mathfrak{V} nel modo voluto.

Ora l'assurdità della fatta ipotesi risulta da ciò, che la parte reale della varietà trasformata, essendo priva di punti multipli, è necessariamente omogenea, in virtù della proposizione ricordata; e d'altro canto essa risulta omeomorfa alla varietà non omogenea $V^{(1)}$.

5. La natura della proprietà dimostrata nel numero precedente, resta meglio illuminata dalle seguenti considerazioni.

L'intorno di r^o ordine di un punto P su d'una varietà analitica \mathfrak{V} , è un ente algebrico (che, ad esempio, può pensarsi come l'insieme delle rette tangenti in P a \mathfrak{V}); come tale ammette un ordine invariante relativo, nel senso della definizione posta dal prof. Severi ⁽²⁾. Applicando ad una varietà

proiettivo). Si dimostra che punti interni e punti contorno, definiti in tal modo proiettivamente, son punti interni e punti contorno anche in senso topologico. Tutto ciò trovasi nelle citate Conferenze.

La condizione che un punto P di M_k sia semplice, equivale a quest'altra: un S_{n-k} , dell'ambiente S_n di M_k , genericamente prossimo a passare per P , contiene al più un sol punto dell'intorno di P in M_k (al più uno, se P è un punto contorno; sempre uno, se P è un punto interno). Da ciò l'asserzione del testo.

Va però osservato che una varietà reale può essere omogenea, anche se possiede punti non semplici. Basta che ogni suo punto sia origine di una sola falda analitica reale (come accade sempre, quando la varietà è analitica ed ogni suo punto è semplice ed interno). Giova rilevare, a questo proposito, che un punto doppio di una varietà analitica reale, a cono tangente irriducibile, è origine di una sola falda analitica complessa, e di due falde analitiche reali. Analogamente per punti di maggior molteplicità.

(1) Il ragionamento precedente ci è stato gentilmente comunicato dal prof. COMESSATTI, in seguito alla pubblicazione della Nota di B. SEGRE citata. (Veggasi anche, a proposito dello stesso teorema, il numero seguente di questa Nota ed il n. 9 della Nota II). Tuttavia la conclusione non era parsa del tutto tranquillante al COMESSATTI, in base ad una concezione totalmente invariante della « varietà delle coppie », che, come s'è detto nell'introduzione, è, nel fatto, illusoria. Il COMESSATTI era pure pervenuto, indipendentemente da noi, alla spiegazione del primo paradosso, risiedente nella non omogeneità della V , ammettendo però come intuitivo quel che si dimostra ai nn. 6 e sgg. della Nota II.

(2) Cfr. SEVERI, Conferenze cit., § VIII, n. 23.

analitica una trasformazione analitica che sia biunivoca, senza eccezioni, gl'intorni di 1° ordine di due punti omologhi risultano riferiti in una corrispondenza birazionale, priva di elementi eccezionali, ond'essi hanno lo stesso ordine invariantivo relativo.

L'ordine invariantivo dell'intorno di 1° ordine di un punto P che sia semplice per la varietà, vale ovviamente 1; mentre invece detto ordine risulta uguale a 2 se il punto P è doppio conico per la varietà, in quanto che — come trovasi osservato nelle citate Conferenze ⁽¹⁾ — una quadrica irriducibile di S_7 non può mai riferirsi birazionalmente, senza eccezioni, ad uno spazio lineare. Da qui, avuto anche riguardo al n. 1, discende che

Una varietà analitica i cui punti sieno in corrispondenza analitica, biunivoca senza eccezioni, colle coppie non ordinate dei punti complessi di un piano, ammette necessariamente come superficie multipla il luogo dei punti che corrispondono alle coppie di punti coincidenti del piano.

Questa proposizione, si applica anche al caso che la varietà analitica rappresenti nel modo indicato solo una parte (a 4 dimensioni) delle coppie di punti del piano.

Fisica matematica. — *Sulla propagazione delle onde nei mezzi con assorbimento selettivo.* Nota ⁽²⁾ del Corrisp. G. GIORGI.

Mi propongo mostrare con un esempio come il calcolo di fenomeni fisici che dovrebbero dipendere da matrici di ordine infinito si possa ricondurre a matrici finite combinate con operatori funzionali normali.

Sia un sistema di onde piane che si propagano nel senso delle x positive in un mezzo omogeneo e isotropo con assorbimento selettivo. Siano E_y, E_z, M_y, M_z le componenti rispettivamente del vettore elettrico e del vettore magnetico secondo gli assi Oy, Oz . Se il mezzo è « regolare » i due sistemi di vettori (E_y, M_z) ed (E_z, M_y) si propagano ognuno per proprio conto. Consideriamone quindi uno solo, e siano E, M i due valori dei vettori medesimi, fra loro perpendicolari, in un piano di ascissa x , all'epoca t ; e similmente, siano E', M' i corrispondenti valori, per l'ascissa $x + \delta x$, alla stessa epoca t .

La propagazione sia unilaterale, nel senso delle x positive ⁽³⁾. Allora, se E, M si suppongono conosciute per tutti i valori del tempo antecedenti

(1) Cfr. SEVERI, Conferenze cit., § VIII, pp. 64-65.

(2) Presentata nella seduta del 6 gennaio 1929.

(3) Si ricorderà che qualunque propagazione di tipo generico, può scindersi in due unilaterali di questo tipo, una pel verso $+Ox$, una pel verso $-Ox$.

all'epoca attuale t , restano determinati E' , M' alla stessa epoca. La dipendenza è funzionale e lineare; e può esprimersi sotto la forma

$$(1) \quad \begin{cases} E' = pE + qM \\ M' = rE + sM \end{cases}$$

dove p, q, r, s sono operatori funzionali che, in conseguenza di teoremi già dimostrati⁽¹⁾ si possono associare biunivocamente a simboli della forma

$f\left(\frac{d}{dt}\right)$, e che soddisfano alle condizioni di *normalità* e di *successione*⁽²⁾.

Scrivendo compendiosamente le (1) così

$$(E', M') = \Phi_{\delta x}(E, M)$$

sarà $\Phi_{\delta x}$ il simbolo di una trasformazione lineare nelle due variabili E, M , rappresentabile per mezzo della matrice

$$(2) \quad \Phi_{\delta x} = \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}.$$

Quando δx tende verso zero, la matrice tende verso l'unità, il che vuol dire che p, s tendono verso il valore uno, mentre q, r tendono verso zero.

Si riconosce così che le condizioni dell'elemento di spazio di spessore δx , occupato dal mezzo assorbente selettivo, sono le stesse di quelle di un elemento di una linea elettrica di seconda specie, con distribuzione comunque intrecciata, ma continua e uniforme, di resistenze, conduttanze, induttanze e capacità, lungo la quale si propaghi una perturbazione elettrica, e di cui ho dato altrove la teoria⁽³⁾.

Secondo questa teoria, se δx è piccolo di ordine tale che siano da trascurare i termini in δx^3 e successivi, la matrice assume la forma

$$(3) \quad \Phi_{\delta x} = \begin{vmatrix} 1 + A\delta x^2 & B\delta x \\ C\delta x & 1 + D\delta x^2 \end{vmatrix}$$

dove A, B, C, D sono elementi « finiti », cioè operatori che non contengono δx ; e in virtù della condizione di unimodularità, a cui soddisfa sempre la matrice di un trasduttore qualunque, sono legati dalla relazione

$$(4) \quad A + D - BC = 0.$$

(1) V. G. GIORGI, *On the functional dependence of physical variables*, « Proceedings of the International Mathematical Congress in Toronto of 1924 », vol. II, sect. III, pp. 31-56.

(2) Cfr. la Memoria citata, art. 21 e art. 26; e l'altra mia *Sugli integrali dell'equazione di propagazione in una dimensione*, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », tomo 52, 1928, pp. 265-312.

(3) G. GIORGI, *Filtri d'onda e linee infinite, soggette a correnti variabili di forma qualunque*, « Atti del Congresso Internazionale di Telegrafia e Telefonia, tenuto in Como nel settembre 1927 ».

Avendo supposto la propagazione unilaterale, le due funzioni del tempo $E(t)$, $M(t)$ non possono venire entrambe arbitrariamente date, ma una determina l'altra, nella stessa guisa che all'origine di una linea elettrica infinita il voltaggio e l'ampérage non sono due funzioni del tempo indipendenti l'una dall'altra. Se indichiamo con G l'operatore funzionale che applicato alla $E(t)$ permette di ottenere la $M(t)$, esso operatore corrisponde a quello che in una linea prende il nome di ammettenza funzionale, e che nella Nota ultimamente citata ho dimostrato assumere la forma

$$(5) \quad G = \sqrt{\frac{C}{B}}.$$

Si ha dunque questa relazione funzionale

$$(6) \quad M(t) = \sqrt{\frac{C}{B}} E(t).$$

Il comportamento del mezzo di fronte a una radiazione che incida sulla sua superficie resta così definito. In particolare, se $\sqrt{C/B}$ si riduce a uno scalare (cioè se facendo il rapporto C/B , il simbolo operatorio d/dt resta eliminato), la componente normale del raggio viene assorbita totalmente o parzialmente, secondo la natura del mezzo adiacente attraverso cui il raggio proviene, ma non avvengono riflessioni selettive. In caso contrario si può verificare il fenomeno della riflessione colorata, come alla superficie del rame.

Investighiamo ora l'effetto del mezzo per trasparenza. Nelle linee elettriche ho chiamato « rapporto di trasmissione » relativo a un tratto di linea PQ, l'operatore che applicato, sia al voltaggio sia all'ampérage esistente in un punto P, permette di ricavare rispettivamente i medesimi elementi (funzioni del tempo) nel punto Q. Questo operatore, per il caso della propagazione unilaterale, è lo stesso tanto per il voltaggio quanto per l'ampérage, e in una linea uniforme dipende solo dalla distanza fra i due punti considerati. Se questa distanza δx è piccola, sempre nel senso di poter trascurare i termini del terzo ordine, ho dimostrato che l'operatore assume la forma

$$(7) \quad S_{\delta x} = \frac{2}{2 + BC\delta x^2 + \delta x \sqrt{4BC + B^2 C^2 \delta x^2}}.$$

Volendo di qui dedurre ciò che avviene al raggio luminoso dopo oltrepassato uno strato finito, di lunghezza s , si deve porre $\delta x = \frac{s}{n}$, e formare l'espressione

$$(8) \quad S_x = (S_{\delta x})^n = \left(\frac{1}{1 + \frac{s^2}{2n^2} BC + \frac{s}{n} \sqrt{BC + B^2 C^2 \frac{s^2}{4n^2}}} \right)^n$$

e quindi passare al limite per $n \rightarrow \infty$.

Il risultato è

$$(9) \quad S = e^{-i\sqrt{BC}}.$$

Da questo operatore dipendono tutte le caratteristiche d'assorbimento del mezzo. Se il simbolo operatorio d/dt che compare in B e in C, e quindi nell'operatore S, viene sostituito con una variabile complessa, e si considera l'andamento di S quando questa variabile percorre l'asse immaginario, cioè quando assume valori $i\omega$, con ω reale qualunque, risultano determinate, con le stesse formole che ho dato pei filtri d'onda, le zone spettrali in cui la trasmissione avviene liberamente, e quelle in cui si verifica assorbimento. Le zone sono a margini netti quando B, C hanno forma tale che, espresse in funzione di $i\omega$ risultano immaginari puri, ciò che corrisponde al caso ideale di un mezzo non dissipativo (energia luminosa che non si trasforma in calore interno del corpo); in questo caso le radiazioni non trasmesse vengono riflesse indietro: è il fenomeno che si verifica in certi mezzi diroici. I valori di ω che rendono negativo il rapporto C/B (che nell'ipotesi fatta è sempre reale) sono quelli che corrispondono alle zone d'assorbimento; quelli che lo rendono positivo determinano le zone di libero passaggio; quelli infine che rendono C/B nullo o infinito sono i valori critici di separazione. Come caso limite, dallo spettro di bande si può arrivare allo spettro di righe.

Zone a margini non netti sono quelle che si verificano generalmente nei mezzi, come le ordinarie soluzioni colorate, in cui l'assorbimento è in relazione con lo spettro di molecola. Questo caso corrisponde a quello dei filtri che nel loro interno hanno resistenze ohmiche non tutte trascurabili; in questo caso B, C, espressi in funzione di $i\omega$, non sono più immaginari puri, ma quantità complesse di carattere più generale.

In ogni caso interessa rilevare questo, che le proprietà selettive del mezzo, e l'attitudine a dare origine a spettri d'assorbimento, e quindi anche di emissione, di un tipo o di un altro, e quelle stesse che riguardano la riflessione, possono venire tutte identificate per mezzo di due soli operatori funzionali normali (e quindi soggetti alla legge della moltiplicazione commutativa), e ultimamente per mezzo di due funzioni di variabile complessa. L'insieme di questi due operatori equivale alla matrice infinita di Heisenberg.

Se non erro, è questa la prima dimostrazione che le proprietà quantitative, indissolubilmente legate alla natura degli spettri atomici, possono venire ricondotte a rappresentazioni matematiche dove intervengono solamente enti fra loro commutativi.

Matematica. — *Sopra alcuni integrali di campo nel piano complesso.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. U. CISOTTI.

1. *Interpretazione geometrica di $d\bar{z}^2$.* — Se $z = x + iy$, ($i = \sqrt{-1}$) con x e y reali, si ha:

$$(1) \quad dz = dx + i dy.$$

Risulta da questa relazione che, riferendosi al piano complesso $z = x + iy$, la parte reale dx e il coefficiente dy dell'unità immaginaria di dz sono le componenti cartesiane dello spostamento infinitesimo dal punto z al punto $z + dz$. Da (1), quadrando, si ottiene:

$$(2) \quad d\bar{z}^2 = dx^2 - dy^2 + 2i dx dy.$$

Si consideri ora il piano complesso $\zeta = \xi + i\eta$, essendo

$$(3) \quad \zeta = z e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Questa relazione definisce una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano z e quelli del piano ζ , dedotto dal precedente mediante una rotazione di un angolo di 45° , attorno all'origine, nel senso antiorario.

Da (3) si ricava:

$$d\zeta = e^{-i\frac{\pi}{4}} dz, \quad d\bar{\zeta}^2 = -i d\bar{z}^2,$$

ma è

$$d\bar{\zeta}^2 = d\bar{\xi}^2 - d\bar{\eta}^2 + 2i d\bar{\xi} d\bar{\eta};$$

per questa e per la (2), dalla precedente si deducono le seguenti relazioni tra elementi reali:

$$d\bar{\xi}^2 - d\bar{\eta}^2 = 2 dx dy, \quad 2 d\bar{\xi} d\bar{\eta} = -dx^2 + dy^2.$$

Per quest'ultima, la (2) può scriversi:

$$(4) \quad d\bar{z}^2 = 2i(dx dy + i d\xi d\eta).$$

Da questa la seguente interpretazione geometrica di $\frac{d\bar{z}^2}{2i}$: la parte reale ($dx dy$) e il coefficiente dell'unità immaginaria ($d\xi d\eta$) sono le aree di due rettangoli infinitesimi coi lati rispettivamente paralleli: uno agli assi x e y e

(1) Presentata nella seduta del 6 gennaio 1929.

l'altro alle bisettrici (cioè agli assi ξ e η) e aventi diagonale comune lo spostamento infinitesimo $d\zeta$.

2. *Integrali di campo.* — Sia

$$Z(\zeta) = X(x, y) + iY(x, y)$$

una funzione di $\zeta = x + iy$, tale che le funzioni reali X e Y sieno integrabili in un'area C del piano ζ . Poniamo:

$$(5) \quad \int_C Z dC = \int_C X dC + i \int_C Y dC,$$

ove i due integrali del secondo membro hanno noto significato.

Operiamo un cambiamento regolare di variabile, passando dal piano $\zeta = x + iy$ a un altro piano complesso $\zeta = \xi + i\eta$ e sia Γ l'area di quest'ultimo che corrisponde biunivocamente, e conformemente, a C . Tra due elementi corrispondenti dC e $d\Gamma$ si hanno, notoriamente, le relazioni:

$$(6) \quad dC = \left| \frac{d\zeta}{d\zeta} \right|^2 d\Gamma, \quad d\Gamma = \left| \frac{d\zeta}{d\zeta} \right|^2 dC.$$

Ne conseguono le seguenti relazioni integrali:

$$(7) \quad \int_C Z dC = \int_{\Gamma} Z \left| \frac{d\zeta}{d\zeta} \right|^2 d\Gamma, \quad \int_{\Gamma} Z d\Gamma = \int_C Z \left| \frac{d\zeta}{d\zeta} \right|^2 dC;$$

si intende che in ognuno di questi integrali la funzione Z va espressa mediante l'affissa del corrispondente campo di integrazione.

3. *Applicazione idromeccanica.* — Sia f il potenziale cinetico di un moto piano di un fluido nel piano ζ ; la velocità complessa risulta definita da $\frac{df}{d\zeta}$ com'è noto⁽¹⁾, per cui il quadrato del valore della velocità è $\left| \frac{df}{d\zeta} \right|^2$; ne segue che

$$\frac{1}{2} \int_C \left| \frac{df}{d\zeta} \right|^2 dC = T$$

rappresenta la forza viva specifica (per unità di densità) della massa fluida che occupa, nel piano del moto, l'area C . Applicando la seconda delle (7), col porre in essa $Z = 1$, $\zeta = f$, si ottiene:

$$\Gamma = \int_{\zeta} \left| \frac{df}{d\zeta} \right|^2 dC = 2T,$$

(1) Cfr. ad es. la mia *Idromeccanica piana*, Milano, Tamburini, 1921, parte prima, p. 62.

dove ora Γ rappresenta l'area del piano f corrispondente all'area C del piano \bar{z} ; dunque: l'area di una qualunque porzione di piano del potenziale cinetico f misura il doppio dell'energia cinetica specifica spettante al velo fluido che ricopre la parte del piano \bar{z} che è in corrispondenza conforme colla porzione di piano f considerata.

4. *Definizione di $\int Z d\bar{z}^2$.* — Applicando alle (6) e (7) la (3), che fornisce $\left| \frac{d\zeta}{d\bar{z}} \right| = 1$, e tenendo conto di (4), si è condotti a porre:

$$(8) \quad \int_C Z d\bar{z}^2 = 2(i-1) \int_C Z dC.$$

In particolare, per $Z = 1$, si ha:

$$(9) \quad \int_C d\bar{z}^2 = 2(i-1) C.$$

5. *Trasformazione di integrali.* — Se $F(\bar{z})$ è funzione di \bar{z} e la sua derivata $F'(\bar{z})$ è integrabile in C , si ha:

$$\int_C F' dC = \int_C \frac{\partial F}{\partial x} dC = - \int_s F \cos(nx) ds = \int_s F dy,$$

essendo: s il contorno di C , n la direzione della normale in un generico punto di s volta verso C e il verso di integrazione lungo s essendo antiorario rispetto al campo C . D'altra parte si ha pure:

$$\int_C F' dC = \frac{1}{i} \int_C \frac{\partial F}{\partial y} dC = i \int_s F \cos(ny) ds = i \int_s F dx.$$

Da questa e dalla precedente, sommando, si ottiene:

$$2 \int_C F' dC = i \int_s F (dx - i dy) = i \int_s F d\bar{z},$$

avendo posto $\bar{z} = x - iy$. Ponendo nella (8) $Z = F'$ si ottiene, per la precedente, la formola seguente:

$$(10) \quad \int_C F'(\bar{z}) d\bar{z}^2 = -(1+i) \int_C F(\bar{z}) d\bar{z}.$$

Se, in particolare, è $F = \bar{z}$ e quindi $F' = 1$, tenendo presente la (9) si ottiene:

$$2(i-1) C = -(1+i) \int_C \bar{z} d\bar{z},$$

ossia

$$\int_s \bar{z} d\bar{z} = -2iC.$$

6. *Applicazione a un campo circolare.* - Sia C il cerchio $0 \leq |z| \leq R$; allora una funzione regolare $F(z)$ è sviluppabile in serie di Taylor:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} F^{(n)}(0).$$

In particolare, essendo sulla circonferenza s ,

$$z = Re^{i\theta}, \quad \bar{z} = Re^{-i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

si ottiene:

$$F(Re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{n!} F^{(n)}(0) e^{in\theta}, \quad d\bar{z} = -iRe^{-i\theta} d\theta;$$

per cui

$$\begin{aligned} \int_s F(z) d\bar{z} &= -iR \int_0^{2\pi} d\theta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{n!} F^{(n)}(0) e^{i(n-1)\theta} = \\ &= -2\pi i R^2 F'(0) = -2iCF'(0). \end{aligned}$$

Per questa la (10) fornisce nel caso di un cerchio:

$$\int_C F'(z) dz^2 = 2(i-1)CF'(0),$$

ovvero, ponendo $F'(z) = Z(z)$, si ricava:

$$Z(0) = \frac{1}{2(i-1)C} \int_C Z(z) dz^2.$$

Per un qualunque cerchio di centro $z = a$ si ha, più in generale:

$$(11) \quad Z(a) = \frac{1}{2(i-1)C} \int_C Z(z-a) dz^2.$$

La quale è una nuova forma di una nota proprietà delle funzioni armoniche.

7. *Applicazione a un campo qualunque.* - Tenendo conto delle (6), (7) e (8) si ottiene la seguente estensione della formula (11):

$$(12) \quad Z(a) = \frac{1}{2(i-1)\Gamma} \int_C Z(z-a) \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|^2 dz^2$$

dove C è un'area qualsiasi del piano z , Γ l'area del cerchio del piano ζ che è corrispondente rappresentazione di C e $\zeta = \zeta(z)$ è la relazione che permette di ottenere tal corrispondenza.

Geometria. — *Un esempio di trasformazione birazionale cubica inerente a un complesso lineare.* Nota ⁽¹⁾ del CORRISP. G. FANO.

1. — In questa Nota espongo un esempio di trasformazione birazionale dello spazio inerente a un complesso lineare ⁽²⁾. La trasformazione è notissima; ma questa sua particolare proprietà non fu ancora, per quanto mi consta, esplicitamente rilevata.

Si tratta della trasformazione involutoria che nasce dal far corrispondere fra loro in doppio modo le coppie di punti « coniugati » rispetto a una cubica sghemba γ^3 , ossia appartenenti a una stessa corda di questa e coniugati armonici rispetto ai due punti comuni alla cubica e a questa corda; perciò anche coniugati rispetto alla rete delle quadriche passanti per γ^3 ⁽³⁾. La cubica stessa è la sola curva fondamentale; ad ogni suo punto corrisponde l'intera tangente alla cubica nel punto stesso. Ai piani corrispondono le superficie cubiche ϕ^3 aventi γ^3 come asintotica; alle rette, cubiche sghembe incontranti γ^3 in 4 punti (i punti di contatto delle 4 tangenti di γ^3 incontrate dalla retta considerata). Se una retta si appoggia a γ^3 in un punto K, la cubica corrispondente si spezza nella tangente a γ^3 nel punto stesso K e in una conica residua; se quella retta, per di più, è contenuta nel piano osculatore a γ^3 nel punto K, è dunque un « raggio osculatore » (« Schmiegungsstrahl ») di γ^3 , dalla cubica corrispondente si stacca la tangente a γ^3 in K contata 2 volte, e rimane come parte residua un'altra retta, che è pure un « raggio osculatore », luogo dei punti coniugati a quelli del primo raggio. Questi raggi osculatori sono rette del complesso lineare definito dalla cubica γ^3 (rispetto al quale si corrispondono i punti di γ^3 e i relativi piani osculatori); e precisamente quelle rette del complesso che si appoggiano a γ^3 . In particolare, ai 3 raggi osculatori uscenti da un punto qualunque P dello spazio non appartenente a γ^3 (raggi contenuti nel piano π polare di questo punto rispetto al complesso, e diretti alle 3 intersezioni di questo piano con γ^3) corrisponderanno 3 raggi osculatori passanti per il punto P' coniugato di P, e che staranno a loro volta nel piano polare di questo punto; all'elemento P (π) appartenente al complesso corrisponde dunque un elemento consimile, e si tratta perciò di trasformazione birazionale « inerente » al complesso lineare.

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 ottobre 1928.

(2) Cfr. le mie Note in questi « Rendiconti ».

(3) Trasformazione già considerata da STAUDT (*Beiträge zur Geometrie der Lage*, III, 1860, p. 321), e ampiamente studiata da CREMONA, STURM, REYE. V. in particolare REYE, *Geometrie der Lage*, 4^a ediz., vol. 2^o (1907), p. 180 e sg.

Alle rette del complesso lineare corrispondono le ∞^3 cubiche del complesso medesimo appoggiate a γ^3 in 4 punti. Poichè le rette del complesso sono caratterizzate dall'incontrare la sviluppabile delle tangenti di γ^3 secondo quaderne equianarmoniche, ne segue che *per ogni cubica sghemba esiste un sistema ben definito di ∞^3 altre cubiche sghembe, appartenenti allo stesso complesso lineare della prima, e incontranti questa in 4 punti. Le quattro intersezioni formano su ciascuna delle due cubiche una quaderna equianarmonica.*

2. — A un piano generico π , incontrante γ^3 in 3 punti distinti A, B, C , corrisponde una superficie φ^3 avente questi stessi 3 punti come doppi; contenente le 3 rette BC, CA, AB , le tangenti a γ^3 nei punti A, B, C , nonchè le 3 rette che passano rispettivamente per questi stessi punti e si appoggiano alle tangenti negli altri due (1). Inoltre, indicato con P il polo del piano π rispetto al complesso lineare, saranno contenuti in π i 3 raggi osculatori PA, PB, PC ; sicchè la φ^3 corrispondente conterrà i raggi osculatori rispettivamente coniugati a questi, i quali passeranno per il punto P' coniugato di P , e staranno pure in un piano, del quale costituiranno l'intersezione con φ^3 . Se il piano π è tangente alla cubica γ^3 , anche sulla φ^3 risultano infinitamente vicini due dei tre punti doppi; se π è osculatore a γ^3 in un suo punto K , la φ^3 è una « rigata di Cayley », a direttrici infinitamente vicine, luogo dei raggi osculatori coniugati a quelli che passano per K .

Le superficie φ^3 del tipo più generale qui incontrato si possono rappresentare sul piano in modo che i soliti 6 punti fondamentali, comuni alle cubiche immagini delle loro sezioni piane, siano a coppie (AA', BB', CC') infinitamente vicini, e sopra rette (immagini a lor volta delle 3 rette di cui sopra passanti per P') concorrenti in un punto. Fra le reti di cubiche sghembe esistenti sopra queste φ^3 , ve ne sono due (che indicheremo con M_1, M_2), mutuamente residue rispetto a quadriche, che non passano per alcuno dei 3 punti doppi; esse hanno per immagini nel piano la rete delle rette, e quella delle quintiche passanti doppiamente per i 6 punti fondamentali AA', \dots . Altre 2 reti di cubiche, pure residue rispetto a quadriche (e che indicheremo con N_1, N_2), passano invece per tutti tre i punti doppi della φ^3 ; esse hanno per immagini la rete delle coniche passanti per A, B, C , e la rete delle quartiche passanti doppiamente per A, B, C , e con un ramo tangente rispettivamente alle rette AA', \dots . Le cubiche delle reti M_1 e N_2 , e così quelle di M_2 e N_1 hanno 4 intersezioni. La φ^3 ha come asintotica una cubica γ^3 della rete N_2 e una cubica δ^3 della rete N_1 ; e ai complessi lineari (distinti) definiti da queste cubiche appartiene rispettivamente un fascio di cubiche M_1 e un fascio di cubiche M_2 , le quali dovranno perciò segare rispettivamente γ^3 e δ^3 in quaderne equianarmoniche. Anzi γ^3 avrà per immagine l'unica quartica della rete corrispon-

(1) Queste ultime sei rette stanno perciò sopra una medesima quadrica.

dente a N_2 , che ha in A, B, C altrettante cuspidi; quartica che dalle rette appartenenti al fascio delle 3 tangenti cuspidali è appunto incontrata in quadernie equianarmoniche. La superficie φ^3 è dunque coniugata di un piano rispetto a una cubica sghemba in due modi diversi; e in questi due modi (rispetto a γ^3 , e rispetto a δ^3) le corrisponde sempre un medesimo piano⁽¹⁾. Le sue 6 rette passanti, a due a due, per uno soltanto dei punti doppi costituiscono complessivamente le tangenti delle 2 cubiche in quei punti.

Il complesso lineare determinato dalla cubica γ^3 (o δ^3) ha a comune col complesso di 6° grado delle tangenti di φ^3 una congruenza (6,6) composta di due congruenze (3,3), una delle quali si compone dei raggi osculatori di γ^3 (o δ^3) mentre l'altra si compone delle tangenti a un fascio di cubiche della rete M_1 (o M_2).

Le cubiche γ^3 e δ^3 hanno a comune, oltre ai tre punti doppi della superficie φ^3 , altri due punti. Si può rappresentare la prima colle equazioni:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \lambda^3 : \lambda^2 : \lambda : 1$$

e in modo che le equazioni della seconda risultino:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \mu^3 : \mu : \mu^2 : 1.$$

Si hanno i 5 punti comuni dando ai parametri il valore comune 0, oppure ∞ , oppure +1, oppure anche rispettivamente le 2 radici cubiche immaginarie dell'unità positiva.

Le equazioni della trasformazione cubica in parola determinata ad esempio dalla prima di queste cubiche sono⁽¹⁾:

$$\begin{aligned} \rho x'_1 &= 2 x_2^3 + x_1^2 x_1 - 3 x_1 x_2 x_3 \\ \rho x'_2 &= x_2^3 x_3 - 2 x_1 x_3^2 + x_1 x_2 x_4 \\ \rho x'_3 &= -x_2 x_3^2 + 2 x_2^2 x_1 - x_1 x_3 x_4 \\ \rho x'_4 &= -2 x_3^3 - x_1 x_4^2 + 3 x_2 x_3 x_4. \end{aligned}$$

Le φ^3 del tipo considerato dipendono da 15 parametri, essendo soggette soltanto ad avere 3 punti doppi e alla condizione che le 3 rette complanari non passanti per questi punti formino fascio. Due qualunque di esse sono omografiche in 12 modi; queste omografie risultano dal riferire proiettivamente una delle due reti M_1 e M_2 dell'una superficie a una arbitraria delle reti analoghe dell'altra, in modo che si corrispondano i punti doppi delle 2 superficie, in ordine qualsiasi, e inoltre i due punti da cui escono 3 rette complanari.

3. — Non mi è riuscito finora di stabilire se questa trasformazione cubica possa ottenersi come prodotto di altre, inerenti allo stesso complesso lineare, ciascuna delle quali muti una congruenza lineare speciale contenuta nel complesso in altra consimile.

(1) A. CANTONE, «Rend. Acc. di Napoli», 15, (1886), p. 181.

* Indicherò infine la trasformazione di contatto del piano che è immagine di questa trasformazione cubica nella rappresentazione veduta dello spazio punteggiato sul sistema degli elementi di un piano. Delle 2 rette incidenti p_0 e r_0 , una si può assumere tangente a γ^1 , l'altra semplicemente incidente; allora γ^1 avrà per immagine una conica k (passante per A , o tangente alla retta a , di cui alla mia Nota di p.). Le ∞^3 cubiche corrispondenti alle rette del complesso avranno per immagini curve piane di 6° ordine e 6ª classe, con 2 punti tripli infinitamente vicini (nell'elemento Aa), e 4 cuspidi variabili in corrispondenza alle 4 rette p tangenti a ognuna di quelle cubiche (analogamente, con 4 flessi variabili); di più esse saranno tangenti alla conica k in quattro punti variabili. Da queste condizioni il loro sistema ∞^3 è completamente definito. I sistemi Ω corrispondenti ai punti o alle rette si comporranno di quelle fra queste ∞^3 curve, che sono per di più tangenti a una fissa tra esse in un punto variabile. Congruenze di cubiche appartenenti a un complesso lineare possono dunque avere come immagini sistemi Ω già alquanto complessi.

Geometria. — *Un problema della teoria delle congruenze di rette con applicazioni al problema della rappresentazione sferica di una superficie non euclidea ed a un teorema di Bianchi e di Blaschke.*
Nota⁽¹⁾ del Corrisp. G. FUBINI.

Cominciamo dal problema di determinare le congruenze K di rette le cui sviluppabili tagliano una superficie data σ in un sistema di linee u, v prefissato. (Se le u, v sono coniugate, il problema si riduce a un problema classico, già risolto p. es., dal Darboux). Se ξ, η, ζ sono proporzionali ai coseni direttori della retta (di una delle congruenze K cercate) uscente da un punto x, y, z di σ (e se si esclude il caso banale che σ sia falda focale di K), potremo porre (con le usuali notazioni della geometria metrica):

$$(1) \quad \xi = X - b^1 x_1 - b^2 x_2 \quad (\text{e analoghe in } y, z),$$

ove b^s è un sistema *controvariante*. Indicando con $e_{11} = e$, $e_{12} = f$, $e_{22} = g$ i coefficienti dell'elemento lineare di σ , con e^{ij} gli elementi reciproci, con x_{rs} e b_{rs} derivate covarianti, e con D_{ij} i coefficienti della seconda forma di Gauss, si ha:

$$\begin{aligned} \xi_u &= X_u - \sum b_{r1} e^{rs} x_s - \sum b^s x_{s1} = X_u - \sum \frac{\partial b^s}{\partial u} x_s - \sum b^s \left(x_{s1} + \begin{Bmatrix} 1 & s \\ 1 \end{Bmatrix} x_u + \begin{Bmatrix} 1 & s \\ 2 \end{Bmatrix} x_v \right) \\ &= -X \sum b_s D_{s1} - x_v \sum e^{s2} (b_{s1} + D_{s1}) - x_u \sum e^{s1} (b_{s1} + D_{s1}). \end{aligned}$$

(1) Presentata nella seduta del 6 gennaio 1929.

Se le $u = \text{cost.}$ sono sviluppabili di K , se cioè è nullo il determinante (x_u, ξ, ξ_u) , sarà pertanto:

$$(2) \quad \sum e^{2s} D_{1s} + b^2 \sum b^s D_{1s} + b_{-1}^2 = 0 \quad \text{ove} \quad b_{-1}^2 = \sum b_{s1} e^{s2} = \frac{\partial b^2}{\partial u} + \sum_s \left\{ \begin{matrix} 1 & s \\ 2 \end{matrix} \right\} b^s.$$

Una equazione che, pur non scrivendola, *indicheremo con (2)_{bis}*, si ottiene scambiando u con v , 1 con 2. Le (2), (2)_{bis} danno 2 equazioni del primo ordine nelle incognite b^1, b^2 , a cui è ridotto il nostro problema.

Supponiamo che σ sia una sfera, che cioè $X = x$ e analoghe, e che $D_{rs} = -e_{rs}$. Tali equazioni si riducono alle

$$(3) \quad b_{-1}^2 = b^2 b_1, \quad b_{-1}^2 = b_1 b_2.$$

L'altro punto X' , in cui la retta considerata incontra la sfera, è il punto

$$(4) \quad X' = X + (\alpha - 1) \xi = \alpha X + (1 - \alpha) \sum b^s X_s$$

ove (per le $SX'^2 = 1, \alpha \neq 1$) α è un parametro determinato dalla:

$$(5) \quad (\alpha + 1) + (\alpha - 1) \sum b_s b^s = 0.$$

Essendo le u, v sviluppabili della congruenza considerata, esisteranno delle funzioni λ, λ', L, L' tali che:

$$(6) \quad X + \lambda X_u = X' + \lambda' X'_u; \quad X + L X_v = X' + L' X'_v \quad (\text{e analoghe in } y, z).$$

Dalle $1 = SX'(X' + \lambda' X'_u) = SX'(X + \lambda X_u) = x + (1 - \alpha) \lambda b_1$ e dalla $1 = SX(X' + \lambda' X'_u)$ si trae:

$$(7) \quad \lambda = \frac{1}{b_1} \quad \text{e similmente} \quad L = \frac{1}{b_2}$$

$$(7)_{bis} \quad 0 = \frac{\alpha_u}{\alpha - 1} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \quad \text{e similmente} \quad 0 = \frac{\alpha_v}{\alpha - 1} + \frac{1}{L} + \frac{1}{L'}.$$

(Si noti che $SXX'_u = (SXX')_u - SX'X_u = \alpha_u + (\alpha - 1) b_1$ ove $b_1 = 1 : \lambda$).

Se in più le u, v sono coniugate (cioè ortogonali) sulla sfera ($\epsilon_{12} = f = 0$), le (3) danno: $b_{21} = b_1 b_2 = b_{12}$. Esiste pertanto in tal caso una funzione $\varphi = -\log \psi$ tale che $b_1 = \varphi_u$, $b_2 = \varphi_v$. E le (3) diventano:

$$(8) \quad \psi_{12} = 0 \quad \left[b_1 = -\frac{\psi_u}{\psi} = \frac{1}{\lambda}; \quad b_2 = -\frac{\psi_v}{\psi} = \frac{1}{L} \right].$$

Ad ogni soluzione della (8), che è l'equazione stessa cui soddisfano le X, Y, Z , corrisponde una soluzione del nostro problema⁽¹⁾; la (8) è la stessa

(1) Ciò che si può dedurre anche dalle (6). Infatti, se le u, v sono ortogonali per la figura descritta dal punto X , esse sono ortogonali anche per la figura descritta dal

equazione che si trova per il problema di determinare le superficie S , che hanno le u, v come immagini sferiche delle linee di curvatura. Ad ogni soluzione di (8) corrisponde quella superficie S , per cui $\psi = Xx + Yy + Zz$ è la distanza (algebraica) W dall'origine al piano tangente nel punto (x, y, z) di S ; ed è precisamente $x = \psi X + \sum \psi^s X_s = \psi [X - \sum b^s X_s] = \psi \xi$, cosicchè:

$$(9) \quad X' = X + 2\psi' x \quad (\psi\psi' = \alpha - 1) \quad (\text{e analoghe in } y, z).$$

La ψ' si può anche definire osservando che dalla $SX'^2 = 1$ segue:

$$(10) \quad W + 2\psi'\rho = 0 \quad (2\rho = x^2 + y^2 + z^2).$$

Data una superficie S , potremo definire le ψ', X' mediante le (9), (10), e quindi un'altra superficie luogo del punto (x', y', z') mediante la:

$$(9)_{bis} \quad X = X' + 2Wx' \quad (\text{e analoghe in } y', z'),$$

analogamente a (9). Ne segue $SX'dx' = 0$, che cioè X', Y', Z' sono i coseni direttori della normale ad S' e che $W' = SX'x' = \psi'$. Dalla $SX^2 = 1$ si trae la $W' + 2W\rho' = 0$, ove $2\rho' = x'^2 + y'^2 + z'^2$, analoga alla (10). E infine si trova:

$$(11) \quad x' = x : 2\rho \quad (\text{e analoghe in } y, z).$$

Dunque: Se le sviluppabili di una congruenza K determinano su una sfera σ dei sistemi ortogonali, questi sono le immagini sferiche delle linee di curvatura di due superficie S, S' trasformate per (11), cioè per raggi vettori reciproci l'una dell'altra. E viceversa le immagini sferiche di due tali superficie danno tutte e sole le corrispondenze della sfera in se stessa, tali che quel sistema di linee sferiche che si conserva ortogonale in tale corrispondenza corrisponda alle svilup-

punto X' . Cosicchè anche le X', Y', Z' soddisferanno a un'equazione $t_{uv} - \frac{\partial \log \sqrt{e'}}{\partial v} t_u - \frac{\partial \log \sqrt{g'}}{\partial v} t_v = 0$, analoga alla (8) cui soddisfano le X, Y, Z . Derivando la prima delle (6) rispetto a v , e tenendo conto di tale equazione di Laplace, si trova una formola $aX_u + bX_v = a'X'_u + b'X'_v$ (e analoghe) ove $a = \lambda_v + \lambda \frac{\partial \log \sqrt{e}}{\partial v}$, $b = 1 + \lambda \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u}$. Perciò il punto $aX_u + bX_v$ si trova sull'intersezione dei piani $SXx = 0$, $SX'x = 0$ ed ha quindi coordinate proporzionali alle $\lambda X_u - LX_v$ che, per le (6), sono uguali alle $\lambda' X'_u - L'X'_v$. Se ne deduce in particolare che $\frac{\lambda_v}{\lambda} + \frac{\partial \log \sqrt{e}}{\partial v} + \frac{1}{L} + \frac{\lambda}{L} \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u} = 0$. Confrontando con l'equazione ottenuta scambiando le u, v , si deduce appunto: $\lambda = -\frac{\phi}{\phi_u}$, $L = -\frac{\phi}{\phi_v}$, ove ϕ soddisfa ad (8).

pabili della congruenza delle rette congiungenti punti omologhi. Ora queste corrispondenze della sfera in se stessa si ottengono nel modo più naturale, facendo le immagini sferiche di una superficie Σ dello spazio iperbolico mediante parallele di Lobacevskij. Ciò che si può enunciare anche così: *Se consideriamo σ come assoluto di una metrica iperbolica, le normali non euclidee ad una superficie qualsiasi Σ incontrano σ in due punti X, X' , che, per il teorema precedente, sono le immagine sferiche di due superficie trasformate l'una dall'altra mediante l'inversione (11) per raggi vettori reciproci. E viceversa. La corrispondenza tra i punti X, X' dedotta da una superficie non euclidea Σ era stata caratterizzata dal Bianchi come una trasformata di Ribaucour della sfera σ in se stessa e dal Blaschke come la corrispondenza che lega le immagini sferiche di due superficie euclidee trasformate di Ribaucour. Tutti questi teoremi (facili a provare direttamente) si possono dedurre dal precedente senza calcolo alcuno⁽¹⁾.*

Vogliamo studiare queste rette, partendo dalla superficie Σ , di cui indicheremo con $Edu^2 + Gdv^2$ l'elemento lineare non euclideo, riferito alle linee di curvatura. Conservando le notazioni che il Bianchi usa per la geometria iperbolica, osserveremo che le normali non euclidee a Σ incontrano la sfera assoluto σ nei due punti

$$(12) \quad X = (\xi_1 + \varepsilon x_1) : (\xi_0 + \varepsilon x_0) \quad , \quad X' = (\xi_1 - \varepsilon x_1) : (\xi_0 - \varepsilon x_0)$$

con $\varepsilon = \pm 1$, osservando che le altre coordinate Y, Z si deducono dalle X , sostituendo 2 oppure 3 all'indice 1. Si ha poi:

$$(13) \quad SdX^2 = edu^2 + gdv^2 \quad \text{ove} \quad e = E \left(1 + \frac{\varepsilon}{r_2} \right)^2 : (\xi_0 + \varepsilon x_0)^2 \quad ;$$

$$g = G \left(1 + \frac{\varepsilon}{r_1} \right)^2 : (\xi_0 + \varepsilon x_0)^2,$$

(1) P. es., ricordando la (non semplice) decomposizione di una trasformata di Ribaucour in una inversione per raggi vettori reciproci e in una trasformazione di Combescure. Essi si possono dimostrare direttamente osservando che la normale e le tangenti di curvatura in un punto di una superficie euclidea S_1 , trasformata di Ribaucour di un'altra superficie S'_1 , incontrano la normale e la corrispondente tangente di curvatura nel punto omologo di S'_1 e che i tre punti di intersezione sono nel piano equidistante dai punti considerati su S_1 ed S'_1 . Sulla sfera euclidea σ otterremo, come immagine delle linee di curvatura delle S_1 ed S'_1 due sistemi ortogonali di linee u, v ; tangenti omologhe a tali linee saranno incidenti; cioè le u, v saranno le sviluppabili della congruenza delle rette congiungenti punti omologhi di σ ; la quale congruenza sarà normale nella geometria per cui σ è l'assoluto. Viceversa, se X, X' sono i punti ove le normali non euclidee a una superficie Σ incontrano σ , alle linee di curvatura di Σ corrispondono le sviluppabili della congruenza delle rette congiungenti i punti X, X' ; i piani focali di questa, essendo coniugati rispetto a σ , determinano sia in X che in X' una coppia di direzioni ortogonali; e le tangenti a due omologhe di queste direzioni (una uscente da X , l'altra X'), giacendo nello stesso piano principale, saranno incidenti; proprio come nel caso precedente.

(l'altro elemento lineare SdX'^2 deducendosi con lo scambio di ϵ in $-\epsilon$). Si trova che $1, \xi_i + \epsilon x_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$) soddisfano a una stessa equazione di Laplace⁽¹⁾ e che quindi anche le quantità proporzionali $[1 : (\xi_0 + \epsilon x_0)]$, $1, X, Y, Z$ soddisfano a una stessa equazione di Laplace; evidentemente la $t_{12} = 0$ (ove la derivata covariante è relativa alla forma $edu^2 + gdv^2$), che coincide con la (8). È pure facile provare che:

$$\frac{\psi}{\psi_u} X_u + X = -\frac{\psi'}{\psi_v} X'_v + X' \quad ; \quad -\frac{\psi}{\psi_v} X_v + X = -\frac{\psi'}{\psi_u} X'_u + X',$$

ove

$$(14) \quad \psi = 1 : (\xi_0 + \epsilon x_0) \quad ; \quad \psi' = 1 : (\xi_0 - \epsilon x_0)$$

cioè che valgono le (6) ed (8) e che si ritorna alle formole precedenti. Se ne conclude: Il problema di costruire una superficie Σ non euclidea per cui è data una delle immagini sferiche delle linee di curvatura u, v (è data p. es., $edu^2 + gdv^2$) è equivalente al problema analogo nello spazio euclideo, cioè alla integrazione della (8). Infatti ogni soluzione ψ della (8) determina una tale superficie Σ , come è facile riconoscere⁽²⁾.

Ci chiediamo infine quando la corrispondenza tra i punti X, X' della sfera σ (cioè la corrispondenza tra le immagini sferiche di due superficie euclidee S, S' trasformate per raggi vettori reciproci, ossia tra le immagini di Lobacevskij di una superficie non euclidea Σ) è una corrispondenza equivalente, cioè è la corrispondenza tra le immagini sferiche di due superficie euclidee applicabili od anche la corrispondenza tra le due immagini di Clifford di una superficie dello spazio ellittico⁽³⁾. In tal caso il rapporto $K':K$ delle

(1) Ciò è evidente a priori perchè le loro derivate prime, rispetto alla u od alla v sono proporzionali alle derivate prime delle $1, x_i$; le quali 5 quantità soddisfano a una stessa equazione di Laplace, perchè le u, v sono linee di curvatura di Σ .

(2) Assunta ψ' come incognita ausiliaria, dalle (12) e (14) si traggono i valori delle ξ e delle x : p. es. $2\xi_0 = \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\psi'}$, $2\xi_1 = \frac{X}{\psi} + \frac{X'}{\psi'}$, ecc. Dalla relazione quadratica che lega le ξ [o da quella che lega le x] si trae $\alpha - 1 = 2\psi\psi'$, che determina ψ' , perchè $\alpha = SXX'$ è determinata dalla (5) in cui alle b si diano i valori dati da (8). Dalla $SX dX' = -SX' dX + d(SXX') = -2\psi' d\psi + d(1 + 2\psi\psi') = 2\psi d\psi'$ si trae che $\xi_0 dx_0 - \xi_1 dx_1 - \xi_2 dx_2 - \xi_3 dx_3 = 0$, ossia che ξ è il piano tangente alla superficie Σ luogo del punto x . Si trova anche facilmente che i punti x, x_u, ξ, ξ_u sono complanari, cioè che le $v = \text{cost.}$ sono linee di curvatura; e altrettanto si prova per le $u = \text{cost.}$

In più si trova che, se $Adu^2 + Bdv^2$ è l'elemento lineare della superficie euclidea S , l'elemento lineare (non euclideo) della Σ vale

$$\frac{1}{4} S \left(\frac{dX}{\psi} - \frac{dX'}{\psi'} \right)^2 + \frac{d\psi d\psi'}{\psi\psi'} = \frac{1}{4} \left(\frac{1+2\rho}{r_2 W} - 2 \right)^2 Adu^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1+2\rho}{r_1 W} - 2 \right)^2 Bdv^2.$$

(3) Cfr. la mia tesi di laurea in « Ann. della R. Scuola Norm. Super. di Pisa », vol. IX (1900) oppure le *Lezioni* del BIANCHI (3^a ediz., vol. II, p. 603).

curvature di S' , S vale (cambiato, se occorre, di segno) il rapporto delle aree di due elementi infinitesimi omologhi di S , S' , cioè vale $\pm 4 \rho^2$. Adottando parametri differenziali rispetto all'elemento lineare di S , e osservando che K' vale $4 \rho^2 K + 4 \rho^2 \Delta_2 \log \rho$, se ne trae che nelle nostre ipotesi sarà $\Delta_2 \log \rho = 0$ ossia $\rho \Delta_2 \rho - \Delta_1 \rho = 0$ oppure $2 K \rho^2 + \rho \Delta_2 \rho - \Delta_1 \rho = 0$.

Posto $\rho = q$, $W = p$, queste due equazioni diventano (esplicitando i parametri):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} r_1 r_2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} (r_1 + r_2) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} = 0, \quad (r_i \text{ raggi di curvatura}),$$

ove $\varphi = p \log q$ oppure $\varphi = p \log \frac{p^2}{q}$. Per i risultati di Weingarten il problema da noi posto equivale a trovare le superficie che hanno l'elemento lineare $2q(d\varphi_1)^2 + 2p d\varphi_1 d\varphi_2 + (d\varphi_2)^2$. Nel primo caso, come mi ha gentilmente fatto osservare il prof. Terracini, posto $q = 2 \cdot (v^2 + u^2)$ ed $u = p : q$, questo elemento lineare diventa

$$4u^2 \frac{du^2 + dv^2}{(u^2 + v^2)^2} = (\alpha\beta + 1)^2 F(\alpha) F_1(\alpha) d\alpha d\beta$$

$$\left(\text{ove } u + iv = \alpha, \quad u - iv = -\frac{1}{\beta}, \quad F(\alpha) = \frac{i}{\alpha^2}, \quad F_1(\beta) = \frac{i}{\beta^2} \right)$$

e appartiene perciò a una *superficie minima* elicoidale non reale.

Nel secondo caso, posto $u = q : p^2$, $v = p : q$, l'elemento lineare diventa:

$$(du^2 + 2 du dv + 2 u dv^2) : u^2 \quad (\text{che appartiene a una superficie di rotazione})^{(1)}.$$

Sarebbe forse interessante studiare le corrispondenti superficie sia nella geometria iperbolica che nella ellittica.

(1) Le linee $2v + \log u = -\log q = \text{cost.}$ ed $u = \text{cost.}$ sono le deformate dei meridiani e dei paralleli.

Meccanica. — *Considerazioni sulla guida dell'aeroplano nella nebbia.* Nota ⁽¹⁾ del Socio G. A. CROCCO.

La guida di un aeroplano nella nebbia è difficile anche in aria calma non soltanto all'atterraggio — ove solo speciali condizioni di illuminazione del terreno possono favorirla — ma anche in pieno volo per la mancanza di punti di riferimento.

Durante il volo si sviluppano infatti accelerazioni dovute al moto vario, dirette longitudinalmente e lateralmente, che componendosi con l'accelerazione della gravità generano una risultante la cui direzione — detta spesso *verticale apparente* — non coincide più con la direzione della *verticale terrestre* ma ne può notevolmente differire, anche se la sua intensità rimanga sensibilmente invariata. Ne segue che il guidatore, assoggettato a questa forza risultante che egli non può discriminare dal suo peso, confonde la sensazione della verticale apparente con quella della verticale terrestre e non può orientarsi se non attraverso la visione di punti di riferimento esterni.

Mancandogli questa visione nella nebbia il guidatore perde l'istinto della verticale terrestre e può trovarsi col suo aeroplano pericolosamente inclinato in avanti e di fianco senza averne nessuna sensazione fisica.

La guida di un aeroplano nella nebbia non può quindi aver luogo se non attraverso le indicazioni di speciali strumenti che sostituiscano la visione dei punti esterni di riferimento: e mediante una scuola di *guida indiretta* che abitui il pilota a servirsene correntemente e con sicurezza.

La necessità di questi strumenti è più sentita per quanto concerne la *stabilità laterale*.

Tutti gli aeroplani ben costrutti sono infatti dotati di sufficiente *stabilità longitudinale*, onde, pur richiedendosi nella nebbia la massima attenzione all'altimetro ed all'indicatore di velocità, difficilmente può occorrere una situazione pericolosa se il pilota non tenti manovre eccezionali: cosicchè la necessità di un indicatore di verticale non è così sentita come per quanto concerne l'assetto trasversale.

In questo secondo caso manca generalmente una sufficiente stabilità laterale e il pilota deve avere a sua disposizione gli strumenti necessari per la guida indiretta.

Uno degli strumenti più completi per tale scopo è il cosiddetto *orizzonte artificiale*, fondato sul principio che il piano di un toro giroscopico, sostenuto esattamente per il suo baricentro a mezzo di una culla emisferica cen-

(1) Presentata nella seduta dell'11 novembre 1928.

trale, assume e mantiene la posizione orizzontale, comunque temporaneamente s'inclini il suo supporto.

A bordo di un aeroplano questo strumento in definitiva finisce anche esso col risentire la verticale apparente e non la terrestre: ma a causa della grande inerzia giroscopica durante le inclinazioni temporanee e spesso alter-nate dell'apparecchio, esso segna con pratica approssimazione l'orizzonte vero. Questi strumenti sono tuttavia pesanti, complessi, delicati e costosi.

Più usato negli aeroplani è uno strumento assai semplice ed economico, detto *indicatore di virata* che si adopera in connessione con un comune *inclinometro* trasversale.

In questo strumento il giroscopio è disposto col suo asse rotante lungo l'asse longitudinale dell'aeroplano ed è vincolato nel piano delle ali ai movimenti angolari dell'aeroplano stesso; mentre nel piano di simmetria dell'apparecchio l'asse, libero di rotare, è trattenuto da una molla antagonista. Per modo che è possibile trasmettere a un indice i movimenti di questo asse, e segnare le forze di reazione che il giroscopio oppone mentre il suo asse partecipa al movimento angolare di virata.

Lo strumento segna pertanto la velocità angolare della virata: e rivela qualsiasi rotta curvilinea.

Ci proponiamo in questa Nota di segnalare una nuova proprietà di questo strumento, non ancora nota, almeno correntemente; e di indicarne in conseguenza l'utile e razionale impiego, durante il volo nella nebbia, al posto dell'orizzonte artificiale.

Abbiamo accennato che l'indicatore di virata si adopera in connessione con un *inclinometro* trasversale. L'*inclinometro* consiste in un livello a bolla d'aria o in un tubo ricurvo di vetro pieno di fluido viscoso contenente una pallina pesante. Quest'*inclinometro* sulla terra segnerebbe la verticale vera, ma in aeroplano segna soltanto la verticale apparente, e cioè la risultante della forza di gravità e dell'accelerazione laterale (forza centrifuga).

Predisposto l'*inclinometro* in modo che la pallina o la bolla risultino al centro dello strumento quando il piano di simmetria dell'aeroplano a terra risulti verticale, il conservare in volo la pallina o la bolla centrata non vorrà significare che il piano di simmetria si mantenga verticale, ma soltanto che *la verticale apparente è compresa nel piano di simmetria*.

In questo caso il piano alare può risultare comunque inclinato sull'orizzonte e l'apparecchio trovarsi in conseguente movimento permanente di virata; ma la virata soddisfa alla speciale condizione che la componente del peso lungo il piano alare è eguale ed opposta alla componente della forza centrifuga; e dicesi *virata corretta*.

Ora suppongasi che, agendo sugli *alettoni* regolatori della inclinazione trasversale, il pilota mantenga in modo continuo l'*inclinometro* a zero. È possibile in tal caso dimostrare che l'aeroplano assume in ogni caso, cioè qua-

lunque siano le posizioni medie degli organi di comando⁽¹⁾, un moto di regime stabile e permanente, che è appunto la *virata corretta*.

(1) La dimostrazione può farsi per i piccoli angoli richiamando le equazioni generali del movimento laterale. Ci riferiremo a quelle da noi stessi impiantate nel 1912 (Cap. G. A. Crocco, *La stabilità laterale degli aeroplani*. « Rendiconti dello Stabilimento aeronautico del Genio », vol. I, 1912, p. 108) e cioè, adottando le stesse notazioni:

$$(1) \quad \begin{cases} \psi' + K\psi - i\gamma + r = Y \\ H\psi + \gamma'' + R\gamma' + Ir = M \\ Q\psi + J\gamma' + r' + Sr = N \end{cases}$$

che abbiamo dedotte da quelle del 1912 ponendo $F = E = 0$, perchè trascurabili, e introducendovi l'azione degli organi di comando in Y, M, N .

In queste equazioni ψ rappresenta l'angolo dell'asse longitudinale dell'aeroplano con la velocità (angolo d'incidenza nel piano XY); γ l'angolo di rollio, ossia dell'asse normale al piano alare con la verticale; r la velocità angolare con cui rota l'asse longitudinale durante la virata; ψ', γ', r' sono le prime derivate di ψ, γ, r ; mentre γ'' è la seconda derivata di γ . Inoltre K, H, Q sono coefficienti aerodinamici relativi all'incidenza ψ ; R ed J coefficienti aerodinamici relativi alla rotazione γ ; S, I coefficienti analoghi relativi alla rotazione r ed infine i è eguale al quoziente dell'accelerazione della gravità g per la velocità propria V .

Tutti questi coefficienti si trovano esattamente definiti nella pubblicazione citata. Ciò posto se ω è la velocità angolare della virata, cioè la velocità con cui rota il raggio di curvatura della traiettoria descritta dal mobile, l'accelerazione centrifuga che si sviluppa per piccoli valori di γ , sarà ωV .

Ma ω è la somma della rotazione dell'asse longitudinale, r , più la rotazione della tangente alla traiettoria rispetto a questo asse che è definita precisamente da Ψ' .

L'accelerazione centrifuga sarà quindi

$$\omega V = (\psi' + r) V.$$

Se il pilota mantiene a zero l'inclinometro trasversale, egli soddisferà implicitamente, qualunque siano Y, M, N , alla condizione $\omega V = g\gamma$; cioè

$$\psi' - i\gamma + r = 0$$

ed in tal caso la prima delle equazioni (1) si ridurrà a

$$\psi = \text{costante} = \frac{Y}{K}$$

e la stessa equazione di condizione, poichè $\psi = \text{costante}$ e $\psi' = 0$, diverrà $r = i\gamma$ cioè sciogliendosi dal simbolo i :

$$g \cdot \gamma = V r.$$

Questa relazione, introdotta nelle due equazioni residue, fornirà le due condizioni simultanee:

$$\begin{aligned} \gamma'' + R\gamma' + Ir &= M_1 \\ (J + i)\gamma' + Si\gamma &= N_1, \end{aligned}$$

le quali, ponendo:

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 e^{st}$$

si scinderanno nelle equazioni del moto di regime:

$$\begin{aligned} Ii\gamma_0 &= M_1 \\ Si\gamma_0 &= N_1 \end{aligned}$$

Questo moto di regime risulta determinato dall'angolo del timone di direzione: mentre la posizione degli alettoni rimane vincolata dalla condizione di mantenere nel moto di regime la virata corretta.

In particolare se l'angolo dei timoni è zero il moto risulta piano e l'inclinazione trasversale nulla.

Il mantenere l'inclinometro a zero è dunque una condizione sufficiente per la guida nella nebbia, perchè qualunque sia l'ignota posizione del timone di direzione l'aeroplano, se non prosegue una rotta rettilinea, *virata correttamente di moto uniforme*.

Qui interviene l'*indicatore di virata* che col movimento del suo indice ne rivela l'esistenza e permette quindi di apprezzare l'entità della virata ed in particolare — mantenendo l'indice a zero per mezzo del timone di direzione — di tenere la rotta rettilinea.

La proprietà che passiamo ad indicare consentirà di conoscere anche l'assetto trasversale del piano alare.

Il giroscopio dell'indicatore di virata è mantenuto in moto da due getti d'aria soffiati tangenzialmente e provocati dalla depressione generata da un tubo Venturi esposto al suolo relativo. Poichè la velocità dei getti d'aria, e quindi del giroscopio, è proporzionale alla radice quadrata della depressione e quest'ultima a sua volta al quadrato della velocità relativa dell'aeroplano, in definitiva la velocità angolare del giroscopio risulterà proporzionale alla velocità dell'aeroplano rispetto all'aria.

Poichè d'altra parte le indicazioni del giroscopio sono proporzionali al momento di reazione, e questo è proporzionale al prodotto della velocità

che forniranno γ_0 nel modo appresso indicato; e nelle altre due

$$\gamma_1 e^{Nt} (x^2 + Rx + Ii) = 0$$

$$\gamma_1 e^{Nt} ((J + i)x + Si) = 0$$

le quali non potranno venir soddisfatte che da $\gamma_1 = 0$.

Rimarrà pertanto $\gamma = \gamma_0$.

Scriviamo ora più particolarmente le equazioni del 'moto di regime, riprendendo la $r = \dot{\gamma}$ e ponendo

$$Y = A\xi \quad ; \quad \dot{M} = B\chi \quad ; \quad N = C\xi$$

dove A, B, C sono costanti dell'apparecchio; ξ è l'angolo del timone di direzione; χ quello degli alettoni.

Le equazioni del moto di regime divengono:

$$Sr_0 = \left(C - \frac{AQ}{K} \right) \xi$$

$$Ir_0 = B\chi - \frac{AH}{K} \xi.$$

La prima di esse determina r_0 e quindi γ_0 . La seconda di esse vincola, qualunque sia II, la posizione degli alettoni necessaria a mantenere costante γ_0 e a soddisfare contemporaneamente alla condizione di virata corretta. Se $\xi = 0$ anche $r_0 = 0$ e $\gamma_0 = 0$. In questo caso particolare il moto è rettilineo ed il piano alare orizzontale: in tutti gli altri casi il moto è circolare uniforme. Rimane così dimostrato l'asserto.

angolare propria per la proiezione sul piano alare della velocità angolare della virata, che diremo $\omega \cos \gamma$ essendo γ l'angolo d'inclinazione trasversale potremo in definitiva ritenere le reazioni η del giroscopio proporzionali a $V\omega \cos \gamma$ dove V è la *velocità propria* dell'aeroplano ed ω la velocità angolare della virata.

Se supponiamo ora che l'aria sia calma il mobile in virata corretta descrive un cerchio col piano alare costantemente inclinato in basso verso l'asse verticale del cerchio. La risultante delle forze aerodinamiche sarà costantemente perpendicolare al piano alare; e, se il mobile non perde quota, la sua componente verticale sarà eguale al peso, mentre quella orizzontale eguaglierà la forza centrifuga.

Ne risulterà l'eguaglianza delle accelerazioni proiettate:

$$g \sin \gamma = V\omega \cos \gamma$$

dove g è l'accelerazione della gravità, $V\omega$ l'accelerazione centrifuga.

In questa relazione V è la velocità propria dell'apparecchio che coincide in aria calma con la velocità rispetto al suolo.

Se l'aria non è calma e vi è un vento di velocità w , la virata corretta dà luogo ad un movimento cicloidale che si può immaginare risultante da una rotazione di velocità angolare ω con velocità tangenziale V e da una traslazione uniforme di velocità w . In tal caso per i principi di relatività classica, le accelerazioni rimangono invariate, e quindi sussiste sempre la relazione precedente, che risulta perciò *indipendente dal vento*.

Ragguagliandola a quella che fornisce le reazioni del giroscopio, si otterrà dunque in ogni caso:

$$\eta = g \sin \gamma;$$

e, se si dispone lo strumento in modo da fornire indicazioni angolari α proporzionali a $\sin \gamma$, si avrà in definitiva

$$\alpha = \gamma$$

se la costante di proporzionalità dello strumento si pone eguale a g .

Ne risulta la seguente proprietà: un *indicatore di virata*, con opportuna scelta delle costanti di strumento, *quando l'aeroplano si trova in virata corretta indica direttamente l'inclinazione trasversale dell'apparecchio*.

Esso sostituisce pertanto l'indicatore d'orizzonte e fornisce al pilota, nella nebbia, un preciso riferimento circa la sua posizione rispetto alla verticale. Per ciò basta che sia tenuto costantemente a zero l'inclinometro trasversale.

Meccanica. — *Su un metodo grafico per lo studio del centraggio degli aeroplani.* Nota del Corrisp. A. CROCCO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Saggio sopra la rifrazione astronomica a Roma.* Nota ⁽¹⁾ del Socio G. ARMELLINI.

1. Come è noto il calcolo della rifrazione astronomica si fonda sopra una formola nella quale figurano la pressione barometrica, la temperatura e lo stato igrometrico dell'aria ed inoltre una costante C detta « costante di rifrazione », costante dipendente dall'indice di rifrazione dell'atmosfera e che gli astronomi determinano sperimentalmente per mezzo di osservazioni celesti. In realtà però il valore di questa costante determinato accuratamente da Bessel, non coincide con i valori trovati a Poulkovo o dedotti dalle osservazioni di Greenwich e di altre specole ⁽²⁾. Più particolarmente nelle tavole di rifrazione pubblicate dal Radau nel tomo XIX degli « Annali » dell'Osservatorio di Parigi fu adottato il valore $C = 60''.4455$, ma ora la « Connaissance des Temps » di Parigi ha adottato il valore $C = 60''.154$, diminuendo così di circa un terzo di secondo l'antico valore della costante, che pure sembrava determinato fino alla quarta cifra decimale! Nè basta: nel recentissimo catalogo stellare dell'Osservatorio di Abbadia ⁽³⁾, per citare un altro esempio, gli astronomi sono stati costretti a rialzare di circa mezzo secondo il valore di C portandolo a $60''.615$, onde si va diffondendo la persuasione che C vari un poco secondo le condizioni climatiche delle varie regioni, analogamente a quanto avviene per l'assorbimento della luce stellare nell'atmosfera, e ciò rende consigliabile ad ogni specola di determinare il valore di C per la località dove risiede.

2. Mosso da queste ragioni, mi sono proposto di eseguire un primo saggio in materia con lo scopo precipuo di verificare se a Roma siano applicabili le comode tavole di rifrazione della « Connaissance des Temps », calcolate come abbiamo detto col valore $C = 60''.154$.

A tale fine mi sono servito di coppie di stelle fondamentali ed ho formato ogni coppia con una stella australe S_1 di cui osservavo a sud la culminazione meridiana e con una stella circumpolare S_2 di cui osservavo a nord la culminazione meridiana inferiore, la quale aveva luogo a breve intervallo di tempo dalla prima. Le due stelle erano scelte in modo che queste culmi-

(1) Presentata nella seduta del 6 gennaio 1929.

(2) Cfr. p. es. W. VALENTINER, *Handwörterbuch der Astronomie*, vol. III, 2.

(3) Cfr. « Comptes Rend. de l'Ac. des Sciences » (30 juillet 1928, p. 265).

nazioni avvenissero a bassa altezza sull'orizzonte, ma sempre superiore a 10° , giacchè al di sotto il valore teorico della rifrazione diviene un po' incerto per poter essere paragonato col valore dato dalle osservazioni.

Ciò posto, indichiamo con ζ_1 la distanza zenitale per cui avviene la culminazione di S_1 e con ζ_2 la corrispondente per S_2 , la quale ultima distanza zenitale è evidentemente contata verso nord ed ha quindi segno negativo, secondo le note convenzioni astronomiche. Avremo allora, chiamando con δ_1 e δ_2 le declinazioni delle due stelle:

$$(1) \quad \zeta_1 - \zeta_2 = 180^\circ - \delta_1 - \delta_2 - \sum R$$

dove $\sum R$ indica la somma delle rifrazioni corrispondenti alle distanze zenitali ζ_1 e ζ_2 , somma che chiameremo brevemente col nome di « rifrazione totale osservata ». Ora, poichè le declinazioni δ_1 e δ_2 sono conosciute dai cataloghi stellari, ne segue che se noi misuriamo col cerchio meridiano l'arco $\zeta_1 - \zeta_2$, la (1) ci permetterà di ricavare la rifrazione totale che potremo così confrontare col suo valore teorico. È inutile aggiungere che ζ_1 e ζ_2 s'intendono corretti dai piccoli errori del « run » dei microscopi, dalla flessione del cannocchiale ⁽¹⁾ ecc.

3. In pratica ho scelto otto coppie di stelle fondamentali, e cioè quattro da osservarsi nell'estate e quattro nell'inverno, secondo lo schema qui sotto indicato:

a) Coppie estive:

- I. ϵ Aquari - Br. 1147
- II. ν Aquari - α Ursae Maioris
- III. υ Capricorni - 166 B. Camelopardalis
- IV. ψ Capricorni - 3 H Ursae Maioris

b) Coppie invernali:

- V. β Fornacis - β Ursae Minoris
- VI. 12 Eridani - γ Ursae Minoris
- VII. τ Eridani - 19 Ursae Minoris
- VIII. g Eridani - η Draconis

Ho osservato ogni coppia almeno quattro volte, in posizioni reciproche dello strumento meridiano di Ertel dell'Osservatorio del Campidoglio e cioè due volte con la vite di ascensione a ponente (W) e due con la vite a levante (E). Per la determinazione di ζ_1 e ζ_2 leggevo i quattro microscopi micrometrici situati al pilastro di levante; e, poichè il meridiano del Campidoglio è munito di due cerchi, utilizzavo così ora l'uno ora l'altro cerchio,

(1) Per la flessione del cannocchiale, trattandosi di un primo saggio, è stato preso il valore determinato dal Respighi, $f = 0',94 \cos h$ dove h è l'altezza sull'orizzonte.

TABELLA I.

Coppia	Data	T	H	Rifrazione osservata	Posizione	
	1928					
I	Agosto	14	25.5	760.3	2'53".3	W
	»	15	26.5	59.6	51 .2	W
	»	16	26.8	58.0	48 .7	E
	»	18	26.5	56.6	54 .4	E
II	Agosto	14	25.5	760.3	5' 8".1	W
	»	15	26.5	59.6	10 .4	W
	»	16	26.8	58.0	5 .3	E
	»	18	26.5	56.6	10 .0	E
III	Agosto	19	27.0	757.6	3'26".9	E
	»	20	26.7	58.9	25 .4	W
	»	21	26.5	59.5	27 .9	W
	»	23	25.6	59.0	26 .6	E
IV	Agosto	19	27.0	757.6	4'35".0	E
	»	20	26.7	58.9	35 .8	W
	»	21	26.5	59.5	37 .7	W
	»	22	25.6	58.0	36 .2	E
V	Novembre	26	10.5	747.1	5'19".2	W
	»	28	8.1	49.5	20 .8	W
	»	29	7.0	56.0	23 .6	W
	Dicembre	6	7.5	64.5	29 .4	E
	»	7	8.5	63.3	25 .5	E
VI	Novembre	26	10.5	747.1	4'58".4	W
	»	28	8.1	49.5	55 .5	W
	»	29	7.0	56.0	58 .7	W
	Dicembre	6	7.5	64.5	67 .3	E
	»	14	8.5	49.9	57 .4	E
VII	Dicembre	20	4.0	761.0	3'43".8	E
	»	26	6.1	64.1	49 .2	W
	1929					
	Gennaio	5	6.5	58.5	45 .5	W
	»	6	4.3	62.3	43 .9	E
	1928					
VIII	Dicembre	19	5.0	762.4	8'34".8	E
	»	20	4.0	61.0	35".8	E
	»	26	6.1	64.1	38 .2	W
	1929					
	Gennaio	5	6.5	58.5	34 .6	W

ciò che aumenta l'esattezza del risultato. Inutile aggiungere che aereavo ampiamente la sala meridiana, la quale è fornita di cinque grandi finestre, in modo che riuscivo a ridurre la temperatura interna t_i — letta su due termometri a nord ed a sud dello strumento — a superare generalmente soltanto di uno o due gradi la temperatura esterna t_e ; ed anzi, tenendo conto della irradiazione delle pareti, la differenza tra la temperatura dell'atmosfera all'interno ed all'esterno era certamente minore.

4. Ciò posto, i risultati delle mie osservazioni sono riuniti nella Tabella I, dove riporto anche la temperatura T , media tra t_e e t_i e la pressione barometrica H ridotta alla temperatura T .

5. Ed ora, per eseguire un primo saggio sopra l'applicabilità delle tabelle di rifrazione della « Connaissance » all'atmosfera di Roma, prendiamo la rifrazione media osservata per ciascuna coppia e confrontiamola col valore teorico calcolato per la temperatura T_m , media delle T , e per la pressione H_m , media delle H , alle quali ciascuna coppia è stata osservata. Eseguendo i calcoli otteniamo la seguente

TABELLA II.

Coppia	Rifrazione osservata	Rifrazione calcolata	Coppia	Rifrazione osservata	Rifrazione calcolata
I	2'51".9	2'50".8	V	5'23".7	5'22".8
II	5 8 .4	5 6 .1	VI	4 59 .5	4 55 .9
III	3 26 .7	3 25 .1	VII	3 45 .6	3 46 .5
IV	4 36 .2	4 33 .5	VIII	8 35 .8	8 34 .7

6. Come risulta da questa ultima tabella, le rifrazioni che io ho osservato a Roma — corrette ben inteso dalla flessione dello strumento — appaiono maggiori di quelle calcolate, e tale incremento, lievemente sensibile per le coppie invernali, risulta più netto per le coppie estive.

Diciamo subito che non sarebbe possibile di spiegare la divergenza osservata con la così detta « rifrazione di camera » e cioè con la rifrazione complementare prodotta dalla diversa temperatura dell'aria all'interno ed all'esterno della sala meridiana⁽¹⁾. Infatti è noto che se la differenza di temperatura è piccola, se la stella è più alta di 10° sopra l'orizzonte e se si adopera nel calcolo la temperatura dell'atmosfera nell'interno della sala, la correzione dovuta alla rifrazione di camera è trascurabile.

(1) Sopra la rifrazione di camera esistono importanti lavori di Bakluyzen, Nyren, Helmert, ecc. (cfr. VALENTINER, op. cit., vol. III).

Ora, per tener conto anche dell'effetto prodotto sui termometri dall'irradiazione delle pareti, si è presa come temperatura dell'atmosfera interna la media T tra la temperatura dei termometri interni t_i e quella dei termometri esterni t_e , le quali due temperature erano molto vicine tra loro, sebbene t_i si sia sempre mantenuta un poco maggiore di t_e , tanto nell'estate che nell'inverno.

Certamente la temperatura dell'atmosfera interna fu sempre assai prossima a T ; ma, in ogni caso, se si volesse assumerla eguale a t_e le differenze tra le rifrazioni calcolate ed osservate verrebbero di poco attenuate, mentre assumendola invece eguale a t_i - come sembra più probabile - le differenze stesse vengono aumentate, essendo sempre $t_i > T > t_e$.

Va pure esclusa l'influenza di una deviazione dello zenit rifrazionale rispetto allo zenit astronomico giacchè, per stelle di altezza superiore a 10° , una tale perturbazione produce errori che ben raramente superano $0''.5$.

In conclusione sembra probabile l'ipotesi che a Roma la costante di rifrazione C abbia un valore lievemente maggiore di $60''.154$ ed anzi che essa vari un poco con le stagioni, fenomeno che merita di essere messo meglio in luce con ulteriori ricerche, data la sua connessione con altre questioni astronomiche moderne. Per ora, sebbene questo primo saggio sia insufficiente per ricavare il valore di C con la dovuta attendibilità, pure eseguendo il calcolo col metodo dei minimi quadrati troviamo, per Roma, $C = 60''.51$; e cioè un valore compreso da un lato tra $C = 60''.15$ oggi adottato dalla « Connaissance » e $C = 60''.61$ trovato ora ad Abbadia e, d'altro lato, molto prossimo all'antico valore dato dal Radau $C = 60''.44$ negli « Annali » dell'Osservatorio di Parigi.

Geologia. — *Il riaffioramento lontano e a grande altezza della sinclinale mummulitica capovolta di Valdieri.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. S. FRANCHI.

La grande linea di dislocazione detta « Colle di Tenda-Argentera », già indicata nella Carta geologica al 400.000 delle Alpi Occidentali, avente direzione media nord-50° est, separa due amplissime regioni molto differenti per costituzione geologica e per struttura tettonica.

La parte che stà ad occidente di detta linea, compresa fra di essa ed il Massiccio cristallino delle Alpi Marittime, sul quale si appoggia, e coi movimenti del quale è stata solidale, detta perciò autoctona, comprende tutta la serie dei terreni dall'Eotrias al Priaboniano, e si osserva costantemente, sebbene con sviluppi un po' diversi, dai limiti con le Valle dell'Ubaye fin sopra a Vinadio.

Al disotto di questo abitato, la valle Stura si allarga considerevolmente, a causa della singolare morfologia del Massiccio, il quale presentando numerosi e ampi affioramenti di testate gneisiche perfettamente levigate dai ghiacciai presso il fondo valle ed in mezzo ad esso, ha pure ampie superfici a quote relativamente basse (1600-1700) che sono state ricoperte dai terreni secondari ed in parte dall'Eocene.

Così mentre sopra Vinadio la serie autoctona è monoclinale e di una grande semplicità, a valle di detto abitato, per il naturale allargamento della zona dei terreni suddetti, possono trovar posto accidentalità tettoniche singolarissime, delle quali qualcuna è già stata descritta in una precedente Nota, pubblicata nei resoconti dell'Accademia dell'anno 1927 ⁽²⁾.

L'ampiezza della zone di questi terreni secondari è tale che vi può trovar posto una importante linea di dislocazione pressochè parallela alla grande linea Tenda-Argentera, e che taglia dal lato meridionale la collina del Podio di Demonte e si estende fin presso Aisone, separando una zona di terreni eocenici molto contorti e profondamente metamorfosati, dal Cretaceo con calcari marmorei tabulari bianchi, i quali, per grandi estensioni, a monte di Aisone, sono parte integrante della serie autoctona. Si tratta di una linea di frattura secondaria, ma importante, che viene a tagliare la serie autoctona, senza però oltrepassare l'abitato di Aisone.

Questa accidentalità presenta qualche analogia, sebbene sia di essa molto più semplice, con quelle descritte da A. Rivière tra Sospello, Saorgio e

(1) Presentata nella seduta del 6 gennaio 1929.

(2) S. FRANCHI, *Enigmi tettonici nei monti di Valdieri*. Seduta 4 novembre 1927.

Fontan⁽¹⁾, le quali giungono al confine franco-italiano dell'alta valle Roja, oltrepassandolo di poco.

Altre accidentalità tettoniche che si osservano in questa zona di terreni secondari, fra la grande linea Tenda-Argentera ed il Massiccio cristallino, sono le pieghe enigmatiche dei monti di Valdieri, del cui enigma io ho cercato di dare una spiegazione, la quale è dimostrata giusta dai risultati delle ricerche fatte quest'anno in Valle Stura, i quali sono appunto oggetto della presente Nota.

Nel versante destro di questa valle, a nord del Colletto della Madonna, dovevano trovarsi i limiti fra l'Eocene, proseguimento di quello del Colletto stesso e delle sinclinali capovolte (σ e σ' della precedente Nota) ed il Cretaceo a *facies* cristallina dell'anticlinale retroversa α' della Cima delle Piastre.

Nelle gite compiute nella decorsa campagna geologica, mi è stato possibile seguire nettamente, sopra l'estensione di quattro o cinque chilometri, attraverso i rapidi contrafforti scendenti dall'alta costiera Cima delle Piastre-Punta Ghiramagna-Cima della Cialancia, il limite tra il Cretaceo a *facies* cristallina e l'Eocene sottostante, costituito da scisti, talora un po' carboniosi e alquanto metamorfici, con arenarie e lenti di calcari marmorei.

Quello della fig. 1 è uno schizzo preso stando a Demonte, e rappresenta un tratto di quel limite, che si vede estendersi verso destra, penetrando nel Vallone di Bergemolo. Il proseguimento delle ricerche in questo vallone, oltre a darmi la conferma della interpretazione data nella mia precedente Nota delle pieghe enigmatiche di Valdieri, doveva svelarmi fatti nuovi di singolare importanza per la tettonica della regione.

La fig. 2 è la riproduzione di uno schizzo da me preso stando alla quota di 1600 m., alle falde di Monte Chiot Fontanile, in alto del versante sinistro del Vallone di Bergemolo. Esso è un vero profilo geologico naturale, di una grande semplicità di linee, esattamente rilevate, ma di spiegazione tettonica difficilissima.

Camminando sul crinale, fra la testa Cialancion ed il Colle dell'Arpion, nel tratto *m-n* si cammina proprio sul fondo della sinclinale capovolta, mentre si vedono gli scisti eocenici scendere a sinistra, per un certo tratto, nel Vallone del Desertetto.

Una anticlinale di Cretaceo retroversa che si origina in mezzo a terreni del Giurese e del Trias, in grande prossimità delle masse gneissiche del Massiccio cristallino!

Gli affioramenti di Eotrias addossantisi regolarmente sugli gneis, con pendenza di 45° verso nord, a poca distanza e le dolomie tipiche del Trias indicate nel profilo della fig. 2 bastano a darci un'idea delle diffi-

(1) A. RIVIERE, *Recherches sur la tectonique des régions de la Roja et de la Beverd.* Paris, 1828.

coltà che deve presentare la spiegazione di questo profilo, per la quale occorreranno ricerche minute in tutta la regione circostante, le quali potranno condurci probabilmente alla constatazione di qualche importante linea di dislocazione, fra il Trias ed i terreni più giovani, in corrispondenza delle zone di carnirole indicate nel profilo.



Fig. 1. — Calcari marmorei dell'anticlinale retroversa α^2 soprastante all'Eocene della sinclinale capovolta σ^2 di Valdieri, nella falda orientale della Testa Cialancion.
(Schizzo preso dall'abitato di Demonte).

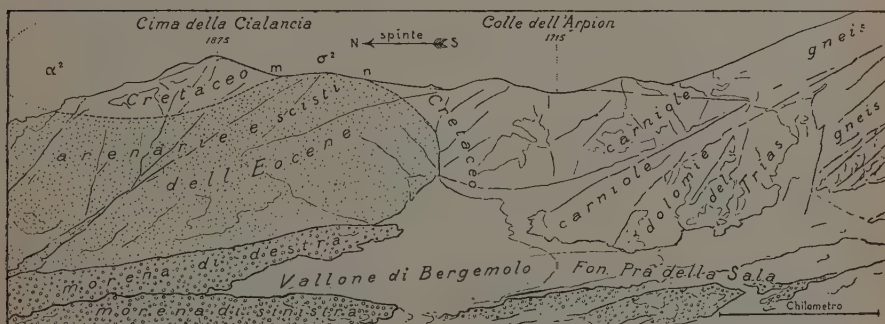


Fig. 2. — Riaffioramenti della sinclinale nummulitica capovolta σ^2 e dell'anticlinale di Cretaceo retroversa α^2 di Valdieri, a grande altezza e a poca distanza dal Massiccio cristallino.
(Schizzo di profilo geologico naturale preso stando alla quota di circa 1600 m., alle falde del Chiot Fontanile).

Ma altri fatti sono del pari, se non ancora più inesplicabili. Dato il rapido innalzamento del fondo della sinclinale capovolta, dal livello del Gesso a Valdieri (720 m.), al Colle dell'Arpion a circa 1700 m., se esso avesse proseguito in egual misura, gran parte del contrafforte del Monte Ciapel, che limita a sinistra il vallone di Bergemolo, dovrebbe essere costituito da scisti eocenici.

Invece esso è completamente costituito da calcari marmorei tabulari cretacei e forse in parte giuresi, salvo che nella sua parte più bassa, tra i piedi del Monte Chiot e Saretto; per cui si deve dedurre che, nell'attraversare il Vallone di Bergemolo, la sinclinale nummulitica capovolta si sia abbassata notevolmente, per terminare sotto quel contrafforte. Nessun affioramento di Eocene esiste infatti nell'adiacente vallone di Bergemoletto, e, dati i limiti dell'Eocene nel contrafforte destro del vallone di Bergemolo, credo che si possa escludere che questo terreno abbia una prosecuzione neanche in profondità, sotto il fondo di quel vallone.

Finora non è possibile farci un esatto concetto della tettonica, certamente molto complessa dei terreni giuresi, cretacei ed eocenici a ridosso del massiccio cristallino, neanche con la guida sicura dei caratteri litologici, molto distinti, dell'Eocene, in qualche punto anche fossiliferi.

La mancanza di fossili e la grande uniformità dei tipi litologici del Cretaceo e del Giurese rendono il compito molto arduo.

La constatazione di questa sinclinale nummulitica capovolta, completamente immersa nel Cretaceo, per un'estensione di parecchi chilometri a levante, ed estesa per oltre sette chilometri a ponente del Gesso, ha un grande interesse come fenomeno tettonico dei terreni che si addossano ai gneis del Massiccio cristallino; ma ne ha uno di portata maggiore per la dimostrazione che è data dal profilo della fig. 2, dell'esistenza di spinte dirette da sud verso nord nelle suddette masse calcaree, spinte che non pare possano essere originate dalle masse gneissiche, date le pendenze che in esse si osservano, verso nord.

Il fatto ha poi una certa importanza, perchè esso costituisce un primo argomento nettamente contrario all'ipotesi emessa anni addietro da un valoroso studioso del versante meridionale delle Alpi Marittime, che i terreni secondari lo abbiano scavalcato partendo dal versante italiano di essi ⁽¹⁾.

I noti carreggiamenti dell'Ubayé e quello del Colle di Tenda potevano considerarsi argomenti in favore di tale ipotesi, ma il presente profilo del Colle dell'Arpion non sembra con essa compatibile.

Un altro fatto importante è il rapido avvicinamento della sinclinale nummulitica capovolta al Massiccio cristallino, dalla valle del Gesso, dove ne dista circa 4 km., al vallone di Bergemolo dove non ne dista più di 500 m., e ciò nel percorso di circa km. 8.

Un profilo interessantissimo, passante per Demonte, tocca i due Massicci cristallini delle Alpi Marittime e Dora - Val Maira.

A nord della linea Tenda-Argentera questo Massiccio, tutto il Mesozoico a *facies* cristallino ripiegato, il Permo-carbonifero disposto a ventaglio,

(1) LÉON BERTRAND, *Sur l'extension originale probable des nappes de charriage alpines dans les Alpes-Maritimes*. « Bull. Soc. geol. France » (4) VIII, pp. 136-143.

carreggiato sull'Eotrias (M. Mouri), con cui si inizia la serie di pieghe imbricate del Colle di Tenda (Zona del Brianzone) limitata poi dalla linea Colle di Tenda-Argentara.

A sud di questa linea la secondaria Podio-Angau-Aisone, quindi il Trias e il Giurese sovrapposti direttamente agli gneis dell'Argentara e, più arretrata, la piega retroversa di Cretaceo della figura 2 sovrapponesi, in modo ancora incerto al Trias e di nuovo ai gneis suddetti, a maggior distanza.

Geologia. — *La inesistenza delle grandi falde dette «Nappe du Mont Rose» e «Nappe du Grand St. Bernard» nelle Alpi Occidentali.* Nota del Corrip. S. FRANCHI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Geometria. — *Determinazioni varie delle normali proiettive di una superficie.* Nota ⁽¹⁾ di E. BOMPIANI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. È noto che in ogni punto (regolare) di una superficie (dello spazio ordinario) esiste una retta, invariante per applicabilità proiettive (e quindi in particolare per collineazioni) detta *normale proiettiva* ⁽²⁾. Di questa retta, introdotta inizialmente dal Fubini per via analitica (in seguito ad una opportuna normalizzazione delle coordinate), sono state date varie costruzioni geometriche: nessuna di esse, ed io stesso ne ho date alcune ⁽³⁾, mi sembra avere quella semplicità che dovrebbe competere ad un elemento geometrico fondamentale. Mi pare di soddisfare a questa condizione col procedimento qui esposto. Il quale, come si vedrà, si giova di costruzioni al finito: ciò ritengo debba sempre farsi per dare ai procedimenti differenziali un significato preciso.

2. Sia σ un pezzo di superficie ad asintotiche distinte; C una curva tracciata su σ ; P_0 e P due punti di C. Le asintotiche uscenti da P_0 e da P determinano una *maglia asintotica* i cui vertici indichiamo con P_0, P_1, P_2 .

(1) Presentata nella seduta del 6 gennaio 1929.

(2) Cfr. p. es. la *Geometria Proiettiva Differenziale* (G. P. D.) di FUBINI-ČECH (Bologna, Zanichelli, 1926-27), t. I, p. 87.

(3) L'ultima nella Nota: *Fascio di quadriche di Darboux e normale proiettiva in un punto di una superficie.* [«Rendic. Lincei», vol. VI, ser. 6^a, 1927].

La corda $P_0 P_1$ e la tangente in P_1 all'asintotica per questi due punti determinano un piano; un altro piano si ha scambiando P_1 con P_2 e questi due piani determinano una retta per P_0 (dipendente da P). Al variare di P su C si ha un cono di vertice P_0 , di cui è generatrice la tangente in P_0 a C : *il piano tangente al cono lungo questa generatrice contiene la normale proiettiva* (sicchè due di questi piani, al variare della tangente in P_0 , la determinano).

Altre costruzioni simili darò in seguito.

3. Dimostriamo l'affermazione ora fatta.

Riferiamo σ alle sue asintotiche (linee u , $dv = 0$ e linee v , $du = 0$). Le coordinate proiettive omogenee $x^i(u, v)$ dei suoi punti soddisfano tutte al sistema ⁽¹⁾

$$(1) \quad \begin{cases} x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v + n x \\ x_{vv} = \theta_v x_v + \gamma x_u + v x \end{cases} (\beta \gamma \neq 0)$$

ove $\theta, \beta, \gamma, n, v$ sono funzioni di u e v ; e p. es. $\theta_u = \frac{\partial \theta}{\partial u}$.

Se si passa dalle x^i alle $\bar{x}^i = \rho x^i$ (con $\rho(u, v)$ finita e $\neq 0$) com'è lecito trattandosi di coordinate omogenee, θ si altera (in relazione alla scelta arbitraria di ρ); e se, come si può, si prende $\theta = \log \beta \gamma$ le x^i soddisfacenti ad (1) si dicono le *coordinate normali di Fubini*. In tal caso la congiungente i punti x (di coordinate x^i) e x_{uv} è la normale proiettiva di Fubini in x . Ci riferiremo quindi, per semplicità di scrittura, a coordinate normali.

Dalle (1) si ricava per derivazione

$$(2) \quad \begin{aligned} x_{uuu} &= \beta x_{uv} + [1] ; & x_{uuv} &= \theta_u x_{uv} + [1] ; & x_{uvv} &= \theta_v x_{uv} + [1] ; \\ x_{vvv} &= \gamma x_{uv} + [1] \end{aligned}$$

ove $[1]$ indica una combinazione lin. omog. di x, x_u, x_v di cui non c'interessano i coefficienti (diversi da equazione ad equazione).

La curva C sia rappresentata dando u e v in funzione di un parametro t ; può suppersi $t = 0$ in P_0 : i valori delle x, u, v e delle loro derivate s'intenderanno sempre calcolate per $t = 0$. Per un punto P di C si avrà

$$P = x + A_1 t + \frac{1}{2} A_2 t^2 + \frac{1}{3!} A_3 t^3 + \dots$$

ove

$$A_1 = x_u u' + x_v v' ; A_2 = x_{uu} u'^2 + 2 x_{uv} u' v' + x_{vv} v'^2 + x_{uu} u'' + x_{vv} v'' ; \dots$$

(1) Cfr. p. es. *G. P. D.*, t. I, p. 90.

Il punto P_1 appartenente all'asintotica u per P_0 e all'asintotica v per P ha l'espressione

$$P_1 = x + R_1 t + \frac{1}{2} R_2 t^2 + \frac{1}{3!} R_3 t^3 + \dots$$

con

$$R_1 = x_u u' ; R_2 = x_{uu} u'^2 + x_{uv} u'' ; R_3 = \dots$$

e l'analogo punto P_2 (scambiando le asintotiche)

$$P_2 = x + S_1 t + \frac{1}{2} S_2 t^2 + \frac{1}{3!} S_3 t^3 + \dots$$

con

$$S_1 = x_v v' ; S_2 = x_{vv} v'^2 + x_{vv} v'' ; S_3 = \dots$$

La tangente in P_1 all'asintotica u che vi passa è individuata da P_1 e da

$$P_{1u} = x_u + R_{1u} t + \frac{1}{2} R_{2u} t^2 + \frac{1}{3!} R_{3u} t^3 + \dots$$

Il piano dei punti P_0, P_1, P_{1u} è anche quello dei punti $x, x_u + x_{uu} u' t, x_u u'' - x_{uu} u'^2 + (x_{uv} u'' - 2x_{uu} u' u'') t/3$ omissi i termini in t d'ordine ≥ 2 .

Per un punto $\lambda x_u + \mu x_v + \sigma x_{uv}$ appartenente al loro piano, si trova sempre fino ai termini del 1° ordine in t , tenendo conto delle (1) e (2)

$$\sigma = 2\mu u' t/3 = 2\mu du/3.$$

Se lo stesso punto deve appartenere al piano $P_0 P_2 P_{2v}$ deve aversi analogamente

$$\sigma = 2\lambda v' t/3 = 2\lambda dv/3.$$

Quindi un punto che insieme ad x individua la retta d'intersezione dei due piani è

$$x_u u' + x_v v' + \frac{2}{3} x_{uv} u' v' t + \text{termini d'ordine } \geq 2 \text{ in } t.$$

Il piano tangente al cono descritto da questa retta lungo la generatrice $t=0$ è il piano dei punti

$$x, x_u u' + x_v v', x_{uv}$$

cioè il piano passante per la tangente in P_0 a C e per la normale proiettiva in P_0 .

4. Altre costruzioni simili alla precedente conducono pure a determinare in modo semplice la normale proiettiva.

Ferme restando le denominazioni adottate si consideri il piano di P e della tangente in P_1 all'asintotica v ($du=0$) che vi passa, cioè il piano dei punti $P P_1 P_{1v}$: questo e l'analogo $P P_2 P_{2u}$ si tagliano in una retta per P .

Variando P su C si ha una rigata che ha per generatrice parabolica in P_0 la tangente a C : il piano tangente alla rigata lungo questa generatrice parabolica contiene la normale proiettiva.

Ai tre punti $P_1 P_2 P_{12}$ possono sostituirsi i punti $x + R_1 t$, $x_v + R_{1v} t$, $x_{vv} v'^2 + x_v v'' + M t$ ove s'è posto

$$3M = 3x_{uvv} u' v'^2 + x_{vvv} v'^3 + 3x_{uv} u' v'' + 3x_{vv} v' v'' + x_v v'''$$

(sempre trascurando termini d'ordine ≥ 2 in t); e per un punto $\lambda x_u + \mu x_v + \sigma x_{uv}$ appartenente al loro piano dev'essere

$$\sigma = \left(-\frac{\lambda}{3} v' + \mu u' \right) t.$$

Se lo stesso punto deve appartenere al piano $P P_2 P_{2u}$ dev'essere

$$\sigma = \left(\lambda v' + \frac{\mu}{3} u' \right) t;$$

quindi un punto che con P individua la retta cercata è

$$Q(t) = x_u u' + x_v v' + \frac{4}{3} x_{uv} u' v' t + \text{termini d'ordine } \geq 2 \text{ in } t.$$

Al variare di P su C la rigata descritta dal punto $\rho P(t) + Q(t)$ ha per piano tangente in (ρ, t) quello dei punti $P, Q, \rho \frac{dP}{dt} + \frac{dQ}{dt}$ e perciò per $t = 0$ quello dei punti $x, x_u u' + x_v v', x_{uv}$, indipendentemente da ρ : e questo prova quanto s'è detto.

5. È istruttivo, per la cautela da adoperare nei procedimenti infinitesimali quando si abbia a che fare con elementi di 2° ordine (o superiore), osservare quanto segue. Si proietti da P_0 la retta ora determinata relativa a P e si cerchi la posizione limite di questo piano quando $P \rightarrow P_0$. Si potrebbe pensare di ottenere in questo modo il piano $x, x_u u' + x_v v', x_{uv}$: ciò non è: anzi detta posizione risulta indeterminata. La ragione è nel fatto che la generatrice parabolica $x, x_u u' + x_v v'$ (tangente in P_0 a C) ha per punto singolare proprio P_0 .

Se si spinge l'analisi di quella posizione limite ad un ordine più elevato si trova il piano dei tre punti

$$x, x_u u' + x_v v', x_{uu} u'^2 - \frac{2}{3} x_{uv} u' v' + x_{vv} v'^2 + x_u u'' + x_v v''$$

che non coincide affatto con quello determinato prima.

Con le notazioni

$$T = |X, x, x_u, x_v|, \quad N_1 = |X, x, x_u, x_{uv}|, \quad N_2 = |X, x, x_v, x_{uv}|$$

i cui secondi membri simboleggiano determinanti costruiti con le x^i e con le coordinate correnti X^i , e

$$(3) \quad \delta^2 u = d^2 u + \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial u} du^2, \quad \delta^2 v = d^2 v + \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial v} dv^2$$

il piano ora trovato ha l'equazione

$$\{ du \delta^2 v - dv \delta^2 u + \beta du^3 - \gamma dv^3 \} T - \frac{2}{3} du dv (N_1 du + N_2 dv) = 0$$

e dipende dall'elemento del 2° ordine E_2 di C in P_0 .

Questo piano non coincide col piano osculatore a C se non quando

$$du d^2 v - dv d^2 u + \beta du^3 - \gamma dv^3 = 0.$$

Questa è l'equazione differenziale del sistema assiale associato alla congruenza delle normali proiettive⁽¹⁾, di cui si ha dunque una genesi diretta.

6. Ritorniamo alla normale proiettiva. Costruiamo in P la retta intersezione del piano P, P_v, P_r (cioè della tangente in P all'asintotica v e di P_r) col piano P, P_u, P_s . Al variare di P si ha una rigata: la generatrice relativa a P_0 , tangente a C , è parabolica e il piano tangente lungo essa contiene la normale proiettiva.

Anche qui, se si proietta da P_0 la generatrice per P e si fa poi tendere $P \rightarrow P_0$ si trova come posizione limite il piano di equazione

$$(4) \quad \{ du \delta^2 v - dv \delta^2 u + \beta du^3 - \gamma dv^3 \} T - \frac{4}{3} du dv (N_1 du + N_2 dv) = 0.$$

È interessante notare che i piani (3) e (4) dipendono dall' E_2 di C in P_0 : ma il piano coniugato armonico del piano tangente ($T = 0$) rispetto ad essi è proprio il piano contenente la normale proiettiva ($N_1 du + N_2 dv = 0$) e quindi non dipende che dalla tangente in P_0 a C .

7. Diamo un'ultima costruzione di questo piano.

Si determini in P il piano delle due rette costruite nei nn. 4 e 6: la sua posizione limite quando $P \rightarrow P_0$ su C è il piano contenente la tangente a C e la normale proiettiva in P_0 .

8. Segnalo infine una rapida ricostruzione dei fondamenti della teoria di Fubini.

Stabilita la nozione di asintotiche e quindi le (I) che la traducono si prova immediatamente l'invarianza delle forme differenziali elementari⁽²⁾ o

(1) Cfr. p. es. la mia Appendice II in *G. P. D.*, t. II, p. 688; o « *Annali di Matematica* », 1923-24.

(2) Come nella mia Nota: *Le forme elementari e la teoria proiettiva delle superficie* [*« Boll. Unione Matem. Ital. »*, a. V, n. 4-5, 1926].

delle equivalenti forme normali del Fubini. I procedimenti esposti nei numeri precedenti danno poi la normale proiettiva (quindi la normalizzazione del Fubini) e su di essa si costruisce in modo invariante il punto $x_{uv}^{(1)}$; la polare della normale proiettiva rispetto alla quadrica di Lie taglia le tangenti asintotiche nei rimanenti vertici x_u, x_v del tetraedro normale di Fubini relativo al punto x . Infine la costruzione data da E. Bortolotti ⁽²⁾ precisa il significato invariante del punto unità.

Meccanica. — *Sul principio di Hamilton.* Nota di G. VITALI, presentata ⁽³⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Il *principio di Hamilton* della meccanica classica può essere scritto in modo che soddisfi alle seguenti due condizioni:

1^a. Sia evidente l'invarianza (necessaria) dell'integrale di cui si deve annullare la variazione, per una sostituzione invertibile sulla variabile di integrazione.

2^a. Il sistema delle equazioni di Eulero in cui si traduce l'annullarsi della variazione dell'integrale si muta in uno equivalente quando si eseguisce sotto l'integrale una sostituzione invertibile sul sistema di 4 coordinate costituito inizialmente dalle tre coordinate cartesiane e dal tempo.

Questo io dimostro nella presente Nota (nn. 1 e 2).

In seguito dimostro il fatto noto che per moti lenti il principio di Hamilton è traducibile con sufficiente approssimazione nel sistema delle equazioni delle geodetiche di uno spazio il cui elemento lineare è espresso per gli elementi che figurano nel problema ordinario, e per una costante c sufficientemente grande (n. 3).

1. Supposte fissate le unità di lunghezza e di tempo, ed un sistema di assi cartesiani x_1, x_2, x_3 nel nostro spazio — considerato come euclideo — ed indicata con t la misura del tempo, il moto di un punto materiale in un campo conservativo è definito — come si sa — da un sistema di equazioni

$$(1) \quad \frac{d^2 x_n}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_n} \quad (n = 1, 2, 3),$$

dove U è una funzione determinata dalle x_1, x_2, x_3 . (In tutto questo la scelta dell'unità di massa non ha alcuna influenza).

(1) Come nella mia Nota: *Nozioni di Geometria proiettivo-differenziale*, ecc. [*« Rendic. Lincei »*, vol. XXXIII, ser. 5^a, 1924].

(2) *Coordinate locali nella geometria proiettivo-differenziale*, ecc. [*« Rendic. Lincei »*, vol. VII, ser. 6^a, 1928].

(3) Nella seduta del 6 gennaio 1929.

Le (1) sono — come è noto ⁽¹⁾ — le equazioni di Eulero relative all'annullarsi della variazione di

$$(2) \quad \int L dt,$$

con

$$(3) \quad L = \frac{ds^2}{dt^2} + 2U,$$

e

$$(4) \quad ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2,$$

per tutte le variazioni nulle agli estremi di integrazione delle x_1, x_2, x_3 .

È anche noto che dalle (1) consegue la relazione

$$(5) \quad U - \frac{1}{2} v^2 = \text{costante} \quad \left(v = \frac{ds}{dt} \right),$$

(teorema della *conservazione della energia*).

Il criterio variazionale a cui è così ridotto il problema del moto in un campo conservativo è conosciuto sotto il nome di *principio di Hamilton*.

2. Indichiamo con x_4 la variabile t . Allora

$$(6) \quad L dt = \frac{ds^2}{dx_4} + 2U dx_4 = \frac{d\sigma^2}{dx_4},$$

con

$$(7) \quad d\sigma^2 = ds^2 + 2U dx_4^2.$$

Nel 2° membro di (6) le x_1, x_2, x_3 si devono pensare funzioni di x_4 , e, se noi poniamo

$$(8) \quad x_4 = x_4(\tau),$$

con $x_4(\tau)$ funzione invertibile di una nuova variabile τ , vediamo che tutte le x_1, x_2, x_3, x_4 risultano funzioni di τ , ed abbiamo

$$(9) \quad L dt = M[\tau] d\tau$$

con

$$(10) \quad M[\tau] = \left(\frac{d\sigma}{d\tau} \right)^2 : \left(\frac{dx_4}{d\tau} \right).$$

È evidente che $M[\tau]$ è un 1-variante per le sostituzioni invertibili su τ ⁽²⁾, e che quindi l'integrale

$$(11) \quad \int M[\tau] d\tau$$

è invariante per tali sostituzioni.

(1) Vedi T. LEVI-CIVITA, *Fondamenti di meccanica relativistica*, (Zanichelli, 1928), p. 1.

(2) Cioè per $\tau = \tau(\tau')$ si ha $M[\tau'] = M[\tau] \cdot \frac{d\tau}{d\tau'}$.

Consideriamo una sostituzione invertibile

$$(12) \quad x_n = x_n(u_1, u_2, u_3, u_4) \quad (n = 1, 2, 3, 4),$$

per tale sostituzione si ottiene

$$(13) \quad d\sigma^2 = \sum_{p,q}^4 g_{pq} du_p du_q,$$

$$(14) \quad dx_4 = \sum_{p=1}^4 \frac{\partial x_4}{\partial u_p} du_p,$$

in cui le g_{pq} sono funzioni delle u_1, u_2, u_3, u_4 .

Per la sostituzione (12) la $M[\tau]$ diventa allora una espressione costruita, con legge determinata, a mezzo delle u_n funzioni della τ , e noi la indicheremo con

$$(15) \quad M[u; \tau].$$

Più particolarmente la (15) contiene le u_n e le $u'_n = \frac{du_n}{d\tau}$ e di queste ultime è funzione omogenea di 1° grado.

La (15) è - come risulta dalla sua struttura - un invariante rispetto alle sostituzioni invertibili sulle u_n , ed è un 1-variante rispetto alle sostituzioni invertibili sulla τ .

Le equazioni di Eulero relative all'annullarsi della variazione di

$$(16) \quad \int M[u; \tau] d\tau$$

per tutte le variazioni nulle agli estremi di integrazione delle u_1, u_2, u_3, u_4 :

$$(17) \quad E_n[u] = \frac{\partial M[u; \tau]}{\partial u_n} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial M[u; \tau]}{\partial u'_n} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, 4),$$

hanno per primi membri un sistema covariante ad un indice, voglio dire, per una sostituzione invertibile che porta dalle variabili u_n alle variabili x_n si mutano colla legge

$$E_m[v] = \sum_n^4 E_n[u] \cdot \frac{\partial u_n}{\partial x_m}.$$

Ciò dimostra che il sistema delle (17) ha un significato indipendente dal sistema prescelto delle variabili u_n . Allora per riconoscerne il significato possiamo ritornare alle variabili x_n , e troviamo

$$E_n[x] = 2 \frac{\partial U}{\partial x_n} : x'_4 - 2 \frac{d}{d\tau} (x'_n : x'_4) = 2 x'_4 \left[\frac{\partial U}{\partial x_n} - \frac{d^2 x_n}{dx_4^2} \right] \quad (n = 1, 2, 3)$$

$$E_4[x] = \frac{d}{d\tau} \left[\frac{U x'_4 - x'_4}{x_4} - \frac{d\sigma^2}{dx_4} \right] = \frac{d}{d\tau} \left[2U - \sum_{n=1}^3 \left(\frac{dx_n}{dx_4} \right)^2 \right]$$

e ricordando che la x_4 non è altro che la variabile t , si vede che le

$$E_n[x] = 0 \quad (n = 1, 2, 3)$$

diventano le (1) e che la

$$E_4[x] = 0$$

diventa la (5).

Si conclude che il principio di Hamilton per il moto di un punto materiale in un campo conservativo consiste nell'annullamento della variazione di (16), per tutte le variazioni delle u_1, u_2, u_3, u_4 che si annullano agli estremi di integrazione.

Sotto questa veste il principio di Hamilton appare invariante per tutte le sostituzioni invertibili sulle variabili u_n e per tutte le sostituzioni invertibili sulla variabile τ .

3. Sia c una costante molto grande, e poniamo

$$(18) \quad d\sigma_0^2 = dx_4^2 - \frac{d\sigma^2}{c^2} = (1 - \beta) dx_4^2 - \frac{ds^2}{c^2} \quad \left(\beta = \frac{2U}{c^2}\right).$$

Le equazioni di Eulero relative all'annullarsi della variazione di

$$(19) \quad \int d\sigma_0$$

per tutte le variazioni nulle agli estremi di integrazione delle x_1, x_2, x_3, x_4 , ossia le equazioni delle geodetiche dello spazio che ha per quadrato dell'elemento lineare l'ultimo membro di (18), sono

$$(20) \quad \frac{d^2 x_n}{d\sigma_0^2} = \frac{\partial U}{\partial x_n} \left(\frac{dx_4}{d\sigma_0} \right)^2 \quad (n = 1, 2, 3),$$

$$(21) \quad (1 - \beta) \frac{dx_4}{d\sigma_0} = K \text{ (costante)}.$$

Tenendo conto della (21), le (20) diventano

$$\frac{d^2 x_n}{dx_4^2} \cdot \gamma^2 + \frac{dx_n}{dx_4} \cdot \frac{d\gamma}{dx_4} \cdot \gamma = \frac{\partial U}{\partial x_n} \gamma^2 \quad \left(\gamma = \frac{K}{1 - \beta}\right),$$

ossia, dividendo per γ^2

$$(22) \quad \left[\frac{d^2 x_n}{dx_4^2} - \frac{\partial U}{\partial x_4} \right] + \frac{dx_n}{dx_4} \cdot \frac{d \log \gamma}{dx_4} = 0.$$

Osservo che

$$\frac{d \log \gamma}{dx_4} = \frac{2}{c^2 (1 - \beta)} \left(\sum_1^3 \frac{\partial U}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dx_4} \right)$$

e che quindi per moti relativamente lenti e più precisamente per moti per cui $\frac{v^2}{c^2}$ è trascurabile, ed U e le sue derivate parziali siano della stessa grandezza di v , le (22) si riducono alle (1), mentre la (21) si riduce alla (5).

Si conclude che per moti abbastanza lenti, il principio di Hamilton può essere espresso con sufficiente approssimazione dall'annullarsi della variazione di (19) in cui c è una costante abbastanza grande.

Anche in questa forma approssimata il principio di Hamilton ha gli stessi caratteri invariantivi che si sono notati nella forma precedente.

Questa forma è però particolarmente notevole perchè identifica il problema del moto di un punto materiale in un campo conservativo, almeno per moti lenti, col problema della ricerca delle geodetiche in uno spazio di dato elemento lineare.

Matematica. — *Sopra l'equivalenza di due equazioni che si presentano nella determinazione della terna principale del Vitali per una superficie generica dello spazio hilbertiano.* Nota di M. PREVIATTI BORTOLOZZI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

I. — Consideriamo un determinante del terzo ordine

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & y_{11} & z_{11} \\ x_{12} & y_{12} & z_{12} \\ x_{22} & y_{22} & z_{22} \end{vmatrix},$$

che supporremo diverso da zero, ed indichiamo con X^{rs}, Y^{rs}, Z^{rs} i reciproci di x_{rs}, y_{rs}, z_{rs} .

Poniamo poi

$$\Omega(\lambda) = \begin{vmatrix} [X, X] - \lambda & [X, Y] & [X, Z] \\ [X, Y] & [Y, Y] - \lambda & [Y, Z] \\ [Z, X] & [Z, Y] & [Z, Z] - \lambda \end{vmatrix},$$

dove

$$\begin{aligned} [X, X] &= 2 X^{11} X^{22} - X^{12} X^{12} + 2 X^{22} X^{11} \\ [X, Y] &= 2 X^{11} Y^{22} - X^{12} Y^{12} + 2 X^{22} Y^{11} \text{ ecc.} \end{aligned}$$

Tenendo conto delle relazioni

$$X^{rs} x_{pq} + Y^{rs} y_{pq} + Z^{rs} z_{pq} \begin{cases} = 1, & \text{se la coppia } rs \text{ e la } pq \text{ sono uguali} \\ = 0, & \text{nei casi rimanenti} \end{cases}$$

(1) Nella seduta del 16 dicembre 1928.

ed analoghe per y e \tilde{x} , si ha, moltiplicando per righe:

$$\Omega(\lambda) \cdot \Delta = \begin{vmatrix} 2X^{22} - \lambda x_{11} & -X^{12} - \lambda x_{12} & 2X^{11} - \lambda x_{22} \\ 2Y^{22} - \lambda y_{11} & -Y^{12} - \lambda y_{12} & 2Y^{11} - \lambda y_{22} \\ 2Z^{22} - \lambda \tilde{x}_{11} & -Z^{12} - \lambda \tilde{x}_{12} & 2Z^{11} - \lambda \tilde{x}_{22} \end{vmatrix}.$$

Ora moltiplichiamo questo ultimo determinante ancora per Δ , ma combinando le sue colonne colle righe di Δ , e, ponendo

$$A_{rs, pq} = x_{rs} x_{pq} + y_{rs} y_{pq} + \tilde{x}_{rs} \tilde{x}_{pq},$$

si ha

$$\Omega(\lambda) \cdot \Delta^2 = \begin{vmatrix} -\lambda A_{11, 11} & -\lambda A_{11, 12} & 2 - \lambda A_{11, 22} \\ -\lambda A_{12, 11} & -1 - \lambda A_{12, 12} & -\lambda A_{12, 22} \\ 2 - \lambda A_{22, 11} & -\lambda A_{22, 12} & -\lambda A_{22, 22} \end{vmatrix},$$

ed indicando con $P(\lambda)$ il determinante che ha per elementi i contrari degli elementi dell'ultimo determinante, si ha:

$$(I) \quad P(\lambda) = -\Omega(\lambda) \cdot \Delta^2.$$

II. - La relazione (I) prova che le equazioni

$$(2) \quad P(\lambda) = 0 \quad \text{ed} \quad \Omega(\lambda) = 0$$

sono equivalenti.

Le equazioni (2) si presentano nella determinazione della terna principale di Vitali per le superficie generiche dello spazio hilbertiano⁽¹⁾.

Più precisamente $P\left(\frac{2}{\rho}\right) = 0$ è l'equazione a cui il Vitali⁽²⁾ ha dapprima condotto il problema. L'Aliprandi⁽³⁾ invece conduce il problema alla $\Omega(\lambda) = 0$ e per dimostrare l'equivalenza dei due procedimenti dimostra che le due equazioni (2) sono equivalenti. Alla dimostrazione diretta, che l'Aliprandi dà di questo fatto, si può sostituire quella che ho esposto in questa Nota e che mi sembra molto più semplice.

(1) G. VITALI, *Sopra alcuni invarianti associati ad una varietà e sopra i sistemi principali di normali delle superficie* (« Annales de la Société Polonaise de mathématique »), Cracovie, t. VII, 1928, pp. 43-67), e G. ALIPRANDI, *Determinazione della terna principale del Vitali di una superficie generica, considerata come terna autopolare del cono geodetico* (« Rend. della R. Acc. dei Lincei », vol. VIII, serie 6^a, 2° sem. fasc. n. 9, Roma, 1928, pp. 356-359).

(2) Vedi G. VITALI, loc. cit., p. 56.

(3) Vedi G. ALIPRANDI, loc. cit.

Geometria. — *Sur une forme quadratique intrinsèque par rapport à l'hypersurface dans l'espace projectif à plusieurs dimensions.*
Nota di J. KANITANI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. FUBINI.

Soit

$$\frac{K_{\sigma\tau\rho} du^\sigma du^\tau du^\rho}{H_{\sigma\tau} du^\sigma du^\tau}$$

l'élément linéaire projectif d'une hypersurface, et posons

$$E_{ij} = H^{\sigma\lambda} H^{\tau\mu} K_{i\sigma\tau} K_{j\lambda\mu},$$

où H^{ij} est le complément algébrique de H_{ij} divisé par le déterminant $|H_{ij}|$ qu'on suppose de ne pas être nul.

Alors, la forme quadratique

$$E_{\sigma\tau} du^\sigma du^\tau$$

est un invariant. Nous allons chercher sa signification géométrique. Cela devient très simple pour les surface dans l'espace projectif à trois dimensions, car dans ce cas, on a la relation

$$E_{ij} = \lambda H_{ij}.$$

Mais cette relation n'est pas satisfaite, en général, pour les hypersurfaces dans l'espace projectif à plus que trois dimensions.

Le cône des tangentes asymptotiques et le cône des tangentes de Darboux en un point P de l'hypersurface sont définis par

$$H_{\sigma\tau} Z^\sigma Z^\tau = 0,$$

$$K_{\sigma\tau\rho} Z^\sigma Z^\tau Z^\rho = 0.$$

Considérons une courbe C passant par P. Le cône quadratique polaire K d'un point quelconque sur la tangente à la courbe C en P par rapport au cône des tangentes de Darboux est défini par

$$K_{\sigma\tau\rho} du^\sigma Z^\tau Z^\rho = 0,$$

où les du^i sont les différentielles des u^i prises suivant la courbe C.

(1) Nella seduta del 1° giugno 1928.

Maintenant, considérons le faisceau des cônes quadratiques

$$(K_{\sigma\tau\rho} du^{\rho} + \nu H_{\sigma\tau}) Z^{\sigma} Z^{\tau} = 0.$$

Les valeurs de ν qui correspondent aux cônes singuliers de ce faisceau, sont déterminées par l'équation

$$(1) \quad \begin{vmatrix} K_{1\lambda\rho} du^{\rho} + \nu H_{1\lambda} & \dots & K_{1n\rho} du^{\rho} + \nu H_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{n\lambda\rho} du^{\rho} + \nu H_{n\lambda} & \dots & K_{nn\rho} du^{\rho} + \nu H_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

qui est de degré n par rapport à ν .

Désignons par ν_1, \dots, ν_n les n racines de cette équation, et par K_1, \dots, K_n les cônes singuliers du faisceau. En multipliant l'équation (1) par le déterminant $|H^{ij}|$, on obtient

$$\begin{vmatrix} H^{1\lambda} K_{1\lambda\rho} du^{\rho} + \nu \dots H^{n\lambda} K_{1\lambda\rho} du^{\rho} \\ \dots \\ H^{1\lambda} K_{n\lambda\rho} du^{\rho} \dots H^{n\lambda} K_{n\lambda\rho} du^{\rho} + \nu \end{vmatrix} \\ = \nu^n - \frac{1}{2} E_{\sigma\tau} du^{\sigma} du^{\tau} \nu^{n-2} + \dots \\ = 0.$$

Il résulte de là que

$$\nu_1 + \dots + \nu_n = 0 \\ (\nu_1)^2 + \dots + (\nu_n)^2 = E_{\sigma\tau} du^{\sigma} du^{\tau}.$$

Or, considérons une hyperquadrique qui a en point P le contact de deuxième ordre avec l'hypersurface donnée, et le contact de troisième ordre avec la courbe C. Cette hyperquadrique coupe l'hypersurface suivant une variété de dimensions $n-1$, pour laquelle le point P est un point singulier, tel que les tangentes en P à cette variété forment un cône cubique V défini par l'équation

$$(2) \quad \left(\frac{1}{3} K_{\sigma\tau\rho} - \frac{1}{2} H_{\sigma\tau} a_{\rho} \right) Z^{\sigma} Z^{\tau} Z^{\rho} = 0,$$

où les coefficients a_i sont assujettis à la condition que

$$a_{\sigma} du^{\sigma} = \frac{2 K_{\sigma\tau\rho} du^{\sigma} du^{\tau} du^{\rho}}{3 H_{\sigma\tau} du^{\sigma} du^{\tau}}.$$

D'après (2), pour l'équation du cône quadrique polaire K' d'un point quelconque sur la tangente à C en P par rapport au cône V, on a

$$\left(K_{\sigma\tau\rho} du^{\rho} - \frac{1}{2} a_{\rho} du^{\rho} H_{\sigma\tau} - a_{\sigma} H_{\rho\tau} du^{\rho} \right) Z^{\sigma} Z^{\tau} = 0.$$

Soit p, q, q', q_i les hyperplans polaires d'un point quelconque sur une tangente conjuguée à la tangente à C en P, par rapport au cône asymptotique, et par rapport aux cônes K, K', et K_i. Ces hyperplans sont définis par

$$H_{\sigma\tau} \delta u^\tau Z^\sigma = 0,$$

$$K_{\sigma\tau\rho} du^\rho \delta u^\tau Z^\sigma = 0,$$

$$K_{\sigma\tau\rho} du^\rho \delta u^\tau Z^\sigma - \frac{1}{2} a_\rho du^\rho H_{\sigma\tau} \delta u^\tau Z^\sigma = 0,$$

$$K_{\sigma\tau\rho} du^\rho \delta u^\tau Z^\sigma + v_i H_{\sigma\tau} \delta u^\tau Z^\sigma = 0,$$

où les δu^i sont les différentielles des u^i prises suivant la direction conjuguée à celle de C.

Il résulte de là que $E_{\sigma\tau} du^\sigma du^\tau$ est égal à un neuvième du produit du carré de l'élément linéaire projectif et la somme des carrés des n rapports anharmoniques $(p, q, q', q), \dots, (p, q, q', q_n)$.

Matematica. — *Sulla rappresentazione conforme delle aree piane pluriconnesse appartenenti a superficie di Riemann.* Nota di F. CECIONI, presentata dal Socio E. BERTINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Transports superficiels.* Nota di DE MIRA FERNANDES, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Ricerca di un'espressione razionale per le potenze di una matrice del terzo ordine.* Nota di S. MARTIS in BIDDAU, presentata dal Corrisp. G. GIORGI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Nouvelles solutions de l'équations de Volterra.* Nota di POPOVICI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *I simboli di Riemann nel calcolo differenziale assoluto generalizzato.* Nota di I. SACILLOTTO, presentata dal Corrisp. U. AMALDI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Le identità di Bianchi per i simboli di Riemann nel calcolo assoluto generalizzato.* Nota di G. VITALI, presentata dal Corrisp. U. AMALDI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sopra i sistemi di progressioni aritmetiche.* Nota di A. BEDARIDA, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla forma F_2 del Fubini.* Nota di R. LICENI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sul raggio di convergenza degli sviluppi Tayloriani.* Nota di S. MINETTI, presentata dal Socio F. SEVERI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geometria. — *Costruzione d'una curva semplice sghemba di Jordan incontrata da tutte le semirette uscenti da un punto esterno.* Nota di B. SEGRE, presentata dal Socio F. SEVERI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geometria. — *Sur les surfaces dont une droite canonique passe un point fixe.* Nota di J. KAUCKY, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica Matematica. — *Sulle operazioni funzionali della fisica matematica che si presentano come funzioni razionali del simbolo di derivazione.* Nota di A. CABRAS, presentata dal Corrisp. G. GIORGI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Interpretazione elettrostatica del Teorema di Kutta Jonkowski.* Nota di A. SIGNORINI, presentata dal Socio C. SOMIGLIANA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Limitazioni superiori per lo spostamento dinamico nei sistemi elastici.* Nota di G. KRALL, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Idrodinamica. — *Sulle azioni dinamiche di un sistema di vortici rettilinei.* Nota di A. MASOTTI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astrofisica. — *Deduzione della legge sperimentale delle durate dei colori crepuscolari delle nuvole e probabile discriminazione tra la teoria di uno schermo diffrangente macroscopico (globo terracqueo) e quella di schermi microscopici (pulviscolo).* Nota di P. BARRECA, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. M. LA ROSA.

1. In Note precedenti e particolarmente nella seconda e terza qui citate ⁽²⁾, ho stabilito induttivamente che le medie durate di ogni colorazione crepuscolare delle nubi, ricavando tali medie coi minimi quadrati, sono proporzionali alle rispettive lunghezze d'onda, oltre che ad un numero riferentesi all'ordine dello spettro anulare che circonda il globo. Per tale ragione e per altre colà indicate, si tratta di diffrazione e per giustificare la legge, la quale si mostrò esatta entro i limiti dei possibili errori di osservazione, addussi che trattandosi di luce in arrivo parallela e di osservatore accomodato all'infinito (o meglio di schermi, che raccolgono le colorazioni, molto distanti dai punti ove si producono le diffrazioni), le larghezze delle frangie dovevano stare come le rispettive lunghezze d'onda. Perciò, dissi, le durate dovevano anch'esse, per lo meno prossimamente, stare nello stesso rapporto.

Vogliamo, ora, dare una dimostrazione diretta di quel teorema, bensì chiaramente enunciato in qualche trattato, ma mediatamente ed attraverso altre proposizioni; ma ricaveremo da ciò anche altri vantaggi, in quanto così si vedrà in quale forma l'enunciato di tale legge potrà ritenersi rigoroso ed inoltre che questo ragionamento deduttivo conviene probabilmente più alla terra considerata come schermo macroscopico che alle particelle microscopiche dell'atmosfera, in contrasto con l'opinione dominante.

(1) Nella seduta del 16 dicembre 1928.

(2) P. BARRECA, *Osservazioni qualitative di nubi colorate nei vespri ed aurore*, «Nuovo Cimento», aprile 1926; *Osservazioni quantitative di nubi colorate*, «Nuovo Cimento», novembre 1926; *Loi des écarts des durées des colorations crépusculaires des nuages*, «Archives des Sciences physiques et naturelles», septembre-octobre 1927.

2. Cominciamo col dimostrare un altro teorema, alquanto più generale e cioè: *Se in un mezzo isotropo vi sono due sorgenti luminose puntiformi, monocromatiche, vibranti persistentemente da tempo infinito, se vi sono inoltre schermi (corpi) opachi di forma qualsiasi ma geometricamente simili nel rapporto delle lunghezze d'onda rispettive e posti similmente rispetto alle sorgenti, si producono frangie di diffrazione geometricamente simili (in tal caso, dunque, anche con luce convergente) e poste similmente.*

Prendiamo dapprima due punti omologhi P_1 e P_2 nella similitudine, per studiare che cosa avvenga in essi delle oscillazioni e siano λ_1 , λ_2 le due lunghezze d'onda e sia: $m = \lambda_1 : \lambda_2$. Pigliamo, ancora dapprima, una origine dei tempi unica, nella quale alle due sorgenti luminose che vibrano da tempo infinito supponiamo identica fase e siano t_1 e t_2 due tempi proporzionali tra loro nel rapporto m , alla fine dei quali consideriamo ciò che avviene nei rispettivi punti P_1 e P_2 . Dividiamo t_1 e t_2 in intervalli infinitesimi dt_1 e dt_2 omologhi, cioè corrispondenti e tali che $dt_1 = m dt_2$.

È facile vedere che nelle due regioni di spazio sedi delle due propagazioni possiamo immaginare un egual numero di infinite successive superficie di onda, attorno alla rispettiva sorgente, corrispondenti tra loro due a due e ciascuna corrispondente alla fine di uno degli intervalli di tempo dt_1 , oppure dt_2 , rispettivamente. Esse non sono sferiche, ma le omologhe sono simili e similmente disposte, in quanto gli schermi geometricamente simili ne sopprimono, negli istanti corrispondenti, pezzi geometricamente simili, così che applicando di strato in strato, a partire dalla sorgente e da onde sferiche, omologhe, intere, assai vicine ad essa, il principio di Huygens, se ne continuano a dedurre ovunque onde geometricamente simili due a due nei due casi e corrispondenti. Con ciò supponiamo trascurabile la piccola differenza di velocità (nell'aria specialmente) delle onde di colore ed indice diverso.

Risulta dunque che i punti omologhi P_1 , P_2 dello spazio sono, negli istanti omologhi, in condizioni ottiche omologhe; facendo variare P_1 e considerando ogni volta l'omologo P_2 , deduciamo facilmente che le frangie del secondo sistema sono geometricamente simili (in istanti omologhi) a quelle del primo e similmente disposte nello spazio. A questo punto della dimostrazione possiamo lasciar cadere la considerazione di una origine dei tempi e degli istanti omologhi, col fare in ognuno dei due punti le medie dei valori istantanei delle energie, pervenute con la vibrazione, durante il rispettivo periodo. Esse sono le intensità luminose e producono appunto la percezione di frangie luminose, od oscure, nei due casi. L'ultimo teorema perciò resta dimostrato.

3. La forma di enunciato del principio di Huygens nella quale si dice che ogni onda è la superficie inviluppo della schiera di onde singole che hanno i centri di emissione nei punti di un'onda precedente, renderebbe assai chiaro il ragionamento precedente, poichè è ovvio che con due schiere di superficie, le quali siano due a due geometricamente simili e similmente

disposte si costruiscono involuppi ancora simili. Ma tale forma dell'enunciato non è generale ed è notoriamente in difetto in certi casi ⁽¹⁾, avendosi talvolta propagazione di luce, senza che esista involuppo alcuno. Non di meno, la dimostrazione ora data è rigorosa lo stesso, se la costruzione mediante onde sferiche omologhe, a raggi omologhi, si applica non più agli involuppi che mancano, bensì alle dette successive sfere di azione elementare. Infatti, ciò facendo si può procedere in molti modi, ma se si avanza omologamente si ottiene sempre la similitudine finale dei risultati.

4. Un'altra dimostrazione del medesimo teorema si ottiene se al principio di Huygens si dà la forma di Kirchhoff:

$$(1) \quad s_x(t, P) = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \cos(n, r) \frac{\partial}{\partial r} \frac{s_x\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial s_x\left(t - \frac{r}{v}\right)}{\partial n} \right\} do,$$

nella quale l'integrale è esteso ad una superficie chiusa qualsiasi che contiene il punto P nel quale si vuol conoscere la grandezza s_x della componente secondo un asse dato x del vettore luminoso nell'istante t . Ma si può, con artificio speciale, estendere la proposizione, se la sorgente vibra periodicamente e persistentemente, al caso di una superficie che racchiuda la sorgente e non P, nel qual caso la normale n si intende ora positiva verso l'esterno. La r indica la distanza da P dell'elemento do di superficie e v la velocità di propagazione.

Le derivate secondo r che figurano in questa formola sono quelle che si ottengono quando, dopo aver considerato una funzione:

$$\sigma = \sigma(x, y, z, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

ove x, y, z , sono coordinate cartesiane ortogonali e ad esempio la nostra s , ma in istante determinato cioè con t fisso, si consideri la sola derivazione rispetto alla r esplicita della precedente notazione. Se, perciò, la grandezza della componente secondo r del gradiente di σ si indica con $\frac{d}{dr}$, la derivata nella formola (1) è il primo termine dell'equazione:

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial r} + \cos(r, x) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(r, y) \frac{\partial}{\partial y} + \cos(r, z) \frac{\partial}{\partial z} = \frac{d}{dr}.$$

La (1) poi, proviene dalla considerazione che il vettore luminoso s_x deve dai punti della superficie propagarsi in P secondo la legge $\frac{1}{r}$ ed inoltre soddisfare alla equazione indefinita di propagazione. Ciò posto, ab-

(1) Vedi E. POCKELS, *Beugung des Lichtes*, nel «Handbuch der Physik del Winkelmann», 2^a ediz., vol. VI, p. 1034.

biamo bisogno di abbandonare la considerazione delle sorgenti. Chiudiamo ciascuna di esse in un piccolo guscio sferico cavo col centro in essa e spessore non infinitesimo, anzi di alcune lunghezze d'onda. I due gusci siano geometricamente simili nel rapporto m e la funzione s_x sia distribuita in essi in modo identico, cioè con ugual valore nei punti omologhi e precisamente con le leggi che notoriamente si verificano per le onde sferiche. Dopo ciò possiamo nel calcolo non pensare più alle due sorgenti, considerando invece una superficie sferica ausiliare a metà spessore di ognuno dei due gusci cavi e calcolando la (1) a partire da essa.

Questa distribuzione nel guscio fornisce, per le derivate parziali secondo n della formola, valori m volte più grandi nel secondo guscio, giacchè i punti omologhi hanno uguale s_x ma vi sono meno distanti e poichè dividendole per le corrispettive r , che sono più piccole di quelle del primo spazio, danno un secondo termine dell'integrale che è m^2 -uplo dello analogo del primo spazio, così dopo la moltiplicazione per do si ottiene un eguale contributo nei due casi. Lo stesso succede nel primo termine dell'integrale, poichè a pari s_x il quoziente per r dà nel secondo spazio un valore emmuplo (le r vi sono più piccole); poscia la derivazione rispetto ad r , come si scorge considerando la (2), dà un valore m^2 -uplo dello analogo del primo spazio, in quanto se pure nei punti omologhi i valori della funzione derivanda fossero stati eguali, pure il $\frac{d}{dr}$ sarebbe stato emmuplo, per essere essi più vicini. Moltiplicandole poi per il corrispettivo elemento di superficie, che è appunto m^2 volte più piccolo dell'omologo, il contributo finale torna uguale nei due spazii. Concludiamo che il teorema si verifica. È meglio di chiarire anche che l'espressione:

$$s_x \left(t - \frac{r}{v} \right)$$

può, sebbene sia:

$$t_1 = mt_2, \quad r_1 = mr_2,$$

conservarsi uguale nei due casi, poichè nel caso nostro delle oscillazioni persistenti e monocromatiche e con la scelta origine dei tempi, essa è una notazione abbreviata in vece di:

$$s_x \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{vT} \right) = s_x \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right),$$

la quale non varia; T sia il periodo.

5. Potrebbero darsi altre dimostrazioni del teorema; verifichiamolo in un caso semplice. Nei reticoli disposti nel modo più usuale per misurare le lunghezze d'onda la luce è parallela e perciò le distanze delle sorgenti

dai corpi diffrangenti (reticolo) stanno sempre nel rapporto delle rispettive lunghezze d'onda, essendo sempre:

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Inoltre si ha:

$$\lambda = D \sin \alpha,$$

ove D è la distanza degli assi di due tratti ed α lo spostamento angolare del cannocchiale dall'asse del collimatore, normale al reticolo. Soltanto facendo variare λ e D in proporzione la α non varia, il che esprime (allora e solo allora) appunto la legge di similitudine.

Osservazione. — Abbiamo supposto che le sorgenti luminose fossero entrambe puntiformi, ma il caso più generale di sorgenti estese comunque, simili geometricamente nel rapporto $\lambda_1 : \lambda_2$, presentanti nei punti omologhi proporzionale od uguale (ad esempio) intensità ed identica fase, ci avrebbe condotti al medesimo risultato, poichè ognuna di esse sorgenti si sarebbe potuta considerare come un insieme geometricamente simile di sorgenti puntiformi. D'altra parte, ciò sarebbe stato superfluo, anche perchè nelle nostre osservazioni ci siamo ridotti al caso del sole puntiforme col detrarre dalle durate minuti 2, 8, tempo impiegato a Reggio Calabria (ed a quell'epoca) dal diametro verticale del sole per attraversare l'orizzonte.

6. Passiamo adesso da questo teorema all'altro citato che giustifica la prima legge delle durate e suppone luce in arrivo parallela e schermi raccoglitori delle frangie posti a distanze infinite dal punto, o dai punti, nei quali si producono le diffrazioni.

Intanto, i rapporti delle distanze delle sorgenti dai corpi diffrangenti tra di loro valgono ancora m e così anche quelli delle distanze alle quali si raccolgono le frangie tra di loro, per la ragione vista a proposito del reticolo. Così la similitudine geometrica viene in ciò conservata e questo teorema sarebbe in ciò un caso particolare dell'altro, se non che una considerazione speciale merita la circostanza che nel nuovo enunciato non si prescrivono più corpi diffrangenti geometricamente simili e nel rapporto m , anzi se ne suppone uno solo, identico nei due casi, con la supposizione implicita, come vedremo subito, che esso non sia *troppo piccolo*. Questa limitazione si verifica il più delle volte per gli apparecchi dei laboratori; anche noi (a vero dire) l'abbiamo presupposta nella nota citata.

Sia R il rapporto di una dimensione D_1 dello schermo diffrangente alla lunghezza d'onda λ_1 e quindi anche della analoga dimensione D_2 del secondo schermo alla seconda lunghezza d'onda λ_2 , nel caso del teorema già dimostrato. Pur restando fisso m , cioè il rapporto $\lambda_1 : \lambda_2$, possiamo va-

riare a piacere il valore di R e restare sempre nelle condizioni dell'enunciato. Facciamolo tendere ad infinito; si avrà ancora:

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = m = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Ora, è chiaro, dal punto di vista fisico, che quando gli schermi sono grandissimi le cose debbono avvenire, con sufficiente approssimazione come nel caso limite anche se essi sono un poco più o poco meno grandi, cioè come se essi fossero entrambi infinitamente grandi. Perciò un grande, unico schermo rende indubbiamente valido il teorema, con esattezza sufficiente.

Ma è da notare subito che *per schermi microscopici la dimostrazione non è più esente da obiezioni e le leggi quantitative da noi constatate potrebbero rimanere inesplorate*. Le goccioline di nebbia all'orizzonte hanno, secondo i fisici, diametri dell'ordine di alcuni centesimi oppure alcuni millesimi di millimetro, anzi sovente da circa 10 a circa 40 volte un'onda luminosa. Invece, nel caso del globo terracqueo come schermo macroscopico esposto ad entrambe le radiazioni λ_1 e λ_2 , il diametro di questo sarebbe di circa 25 bilioni di volte un'onda luminosa.

Ben è vero, tuttavia, che nei reticoli (§ 5 di questa Nota) la legge di proporzionalità si conserva soltanto se se ne variano opportunamente le dimensioni, ma si potrebbe dubitare che anche per R da 10 a 50 le condizioni del caso limite si riproducano abbastanza da presso. Per tanto la questione merita, fra l'altro, maggiore abbondanza di risultati sperimentali e di osservazione, pure restando possibile quanto dissi nel § 8 della mia seconda Memoria sopra citata, cioè che alcune delle particolarità da me trovate si spiegano *più facilmente* con lo schermo diffrangente grande ed unico, per il quale propenderei.

7. Un'altra conseguenza utile delle date dimostrazioni è che la forma rigorosa di enunciato della prima delle mie leggi delle durate è che le dimensioni omologhe delle frangie, od anelli, stanno come le rispettive lunghezze d'onda. Che le durate medie delle colorazioni da esse prodotte su nubi, quando ne sono attraversate, stiano anch'esse nella medesima proporzione, è una conseguenza di ciò, la quale si verifica *alle nostre latitudini* con sufficiente esattezza sempre. In vero, il medio cammino della nube avviene qui lungo un arco di parallelo terrestre che è angolarmente brevissimo e perciò è paragonabile ad una retta; questi segmenti rettilinei, di diversa lunghezza per i diversi colori, si possono, per la ragione della sottigliezza delle frangie (risultata dalle osservazioni della prima memoria citata, § 6), considerare come geometricamente simili, poichè influisce poco tagliarle a maggiore o minore altezza tra quelle ordinariamente posedute dalle nubi.

Ma vi sono talvolta eccezioni *nelle regioni polari*. Colà la nuvola, descrivente in media il parallelo per effetto della rotazione terrestre, può a

seconda delle epoche, cioè della declinazione del sole, tagliare o non gli anelli. Se li taglia, può intersecarli secondo una breve traiettoria appena curva e si ritrova la stessa similitudine e proporzionalità (ma con durate differenti) delle nostre latitudini. Ma può anche in certe epoche, colà, sfiorare quasi l'anello colorato, secondo una traiettoria tangente e sensibilmente curva, cioè entrare in esso e poi uscirne per la medesima faccia di entrata. Allora gli analoghi cammini curvi, entro zone anulari colorate diversamente larghe, non sono più che archi di cerchio e traiettorie non più geometricamente simili, perchè di ampiezze angolari diverse; allora non si può più dire che un anello di larghezza doppia viene tagliato secondo una traiettoria lunga il doppio e perciò la prima delle mie leggi sulle durate può non esser più valida, neanche prossimamente.

8. Ho approntate altre osservazioni su questi fenomeni dei crepuscoli, che mi riservo di completare per prossime pubblicazioni.

Geofisica. — *Sulla forma delle masse profonde gravimetricamente perturbanti.* Nota di A. BELLUGI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nell'interpretazione dei rilievi eötvössiani si suppone nota la forma delle masse gravimetricamente perturbanti e ciò in base ai referti del geologo ed anche all'andamento delle isogame.

Quando si tratta di rilevare una configurazione morfologica tipica, anticlinale, diapiro regolare, strato a scarpata verticale od obliqua, faglia, il problema della forma non offre serie difficoltà.

Ma quando dall'esame dei rilievi in superficie si ha ragione di credere che la massa o le masse del sottosuolo sono morfologicamente complesse, la forma di queste masse non è più un dato, più o meno approssimativo, ma un problema, base fondamentale di ogni possibile interpretazione del rilievo.

È noto che l'incertezza del valore della differenza di densità tra massa nel sottosuolo e terreno incassante influisce fortemente sulle determinazioni delle dimensioni spaziali e della posizione della massa immersa, ma altrettanto influenza ha la forma della massa immersa, e su questo argomento la letteratura è scarsissima.

Per risolvere in modo adeguato il problema morfologico proponiamo il seguente metodo, metodo che è d'altronde il più intuitivo: poichè sulla superficie del suolo si misurano gradienti e curvature, si tratterà allora di variare le dimensioni e la posizione della massa profonda, a cui si attri-

(1) Nella seduta del 6 gennaio 1929.

buisce una forma geologica tipica (forma fondamentale) sino a che il campo di perturbazione calcolato non coincida con quello misurato.

Supponiamo, per semplicità, di scegliere un corpo profondo disturbante che si estenda indefinitamente da ambo le parti dell'asse y , e indefinitamente in profondità.

Il sistema di assi coordinati di riferimento abbia l'asse x positivo ad est, l'asse y positivo a sud, l'asse z positivo verso il Nadir.

Poniamo, in un primo momento, costanti le distanze della superficie limitante superiormente il corpo profondo dal piano xy (morfologia regolare della superficie superiore della massa).

Ogni sezione verticale parallela all'asse y tagli perciò il corpo in punti equidistanti da piano xy .

La superficie limitante superiormente, che può essere arbitraria, sia ad esempio ad anticlinale.

Abbiamo così una piega anticlinale che si estende indefinitamente da ambo le direzioni, positiva e negativa di y , in modo che tutte le sezioni ottenute col piano xz e piani paralleli in qualsiasi punto di y risultano geometricamente identiche.

Indichiamo le derivate seconde eötvössiane del potenziale di gravità U con i simboli:

$$U_{xz}, U_{yz}, U_{\Delta}, U_{xy}$$

si ha subito:

$$U_{yz} = U_{xy} = 0.$$

Non rimane che calcolare U_{xz} e U_{Δ} per il gradiente e la curvatura.

Consideriamo l'influenza della sezione della anticlinale col piano yz (prima per sezioni infinitesime dx , poi per sezioni molto piccole $x_2 - x_1$) sull'origine degli assi dove pensiamo collocato il gradiometro. Posto:

$$xz \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} = f(xyz)$$

si ha:

$$U_{xz} = 3 K \Delta \sigma \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \int_{z=-\infty}^{z=+\infty} f(xyz) dx dy dz = 2 K \Delta \sigma \frac{x}{r^2} dx$$

$$U_{\Delta} = 2 K \Delta \sigma \frac{z}{r^2} dz \quad ; \quad r^2 = x^2 + z^2 \quad ; \quad \Delta \sigma = \sigma_1 - \sigma_2$$

$$K = 67 \cdot 10^{-9} \quad \text{C. G. S.}$$

Considerando $x_2 - x_1$ lo spessore compreso tra 2 sezioni $y\zeta$; integrando tra questi limiti la (1) e la (3) si ha:

$$\begin{aligned} U_{x\zeta} &= K \Delta\sigma \ln \frac{r_2^2}{r_1^2} \\ U_\Delta &= 2 \Delta\sigma K \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\zeta}{x_1} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\zeta}{x_2} \right) \\ U_{y\zeta} &= U_{xy} = 0 \\ r_2^2 &= x_2^2 + \zeta^2 \quad ; \quad r_1^2 = x_1^2 + \zeta^2. \end{aligned}$$

Ora i limiti superiori delle varie sezioni $y\zeta$ (che danno $\Sigma U_{x\zeta}$) si possono congiungere con una linea direttrice sezione col piano $x\zeta$ della superficie limitante superiormente l'anticlinale.

La $\Sigma U_{x\zeta}$ così calcolata non potrà essere uguale al valore $U_{x\zeta}$ osservato all'origine, e così dicasi per ΣU_Δ , avendo scelto con molto arbitrio la linea direttrice.

Si tratta ora di far variare le variabili x, ζ , separatamente o unitamente, fino a tanto che non si abbia:

$$U_{x\zeta} \text{ calcolato} = U_{x\zeta} \text{ osservato}.$$

Invece di far variare x e ζ si può modificare opportunamente la linea direttrice (operazione grafica più speditiva) con criteri desumibili dal particolare andamento dei gradienti e dalle conoscenze geologiche riferentesi alla zona che si studia.

Se l'anticlinale è limitata inferiormente da un piano orizzontale, si può allora ottenere la propria specifica azione gravimetrica togliendo da $\Sigma U_{x\zeta}$ calcolato, il valore di $U_{x\zeta}$ dell'influenza del parallelepipedo che dal piano limitante inferiormente si estende fino a $\zeta = +\infty$, nei limiti di

$$y(-\infty + \infty), \text{ e di } x(x_1, x_n).$$

L'influenza I dell'anticlinale a base piana sarà data allora da:

$$I = \sum_{x_2 - x_1}^{x_n - x_1 - 1} U_{x\zeta} - \int_{x_1}^{x_n} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \int_{\zeta_i}^{+\infty} f(xy\zeta) dx dy d\zeta$$

dove ζ_i è la profondità del piano orizzontale, profondità massima dalla gamba dell'anticlinale.

Se l'anticlinale fosse limitata inferiormente da una superficie qualsiasi basterebbe calcolare:

$$\begin{aligned} U_{x\zeta} &= 6 K \Delta\sigma \int_{y=0}^{y=+\infty} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(xy\zeta) dx dy d\zeta = 2 K \Delta\sigma \left(\frac{x}{r_1^2} - \frac{x}{r_2^2} \right) dx \\ r_1^2 &= x^2 + \zeta_1^2 \quad ; \quad r_2^2 = x^2 + \zeta_2^2. \end{aligned}$$

Nel caso di una massa di forma qualsiasi converrebbe procedere integrando prima rispetto a z :

$$U_{xz} = K\Delta\sigma \left(\frac{x}{r_1^3} - \frac{x}{r_2^3} \right) dx dy$$

$$U_{yz} = K\Delta\sigma \left(\frac{y}{r_1^3} - \frac{y}{r_2^3} \right) dx dy.$$

Quindi integrare rispetto ad x nell'intervallo $x_2 - x_1$ abbastanza piccolo, e poi rispetto ad y in un intervallo pure abbastanza piccolo.

Con ciò si ottiene l'influenza di una parte della massa di forma qualsiasi, massa che abbiamo scomposto in una serie di sezioni verticali ortogonali, parallele rispettivamente ad x e ad y , e caratterizzata per ogni elemento parallelepipedo, della scomposizione, da un elemento di superficie $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$ e da un'altezza $z_2 - z_1$ propria di ciascun elemento.

L'influenza totale del corpo sarà data dalla somma di queste singole influenze.

Questo metodo è evidentemente per tentativi, come non può d'altronde essere altrimenti, ma data la semplicità delle formule che si ottiene, può essere, almeno in molti casi, di pratica attuazione.

Meteorologia. — *Attrito interno dell'aria e costante di attrito superficiale alla stazione sperimentale di Vigna di Valle*⁽¹⁾. Nota di M. LOMBARDINI, presentata⁽²⁾ dal Socio F. ENRIQUES.

Come è noto il vento non è uguale a tutte le altezze, ed anche nei bassi strati dell'atmosfera la sua direzione viene « ruotata » rispetto a quella che aveva in vicinanza del suolo, e la sua intensità viene accresciuta. Spesso si è osservato che ad una quota minore dei 1000 metri il vento raggiunge una velocità massima; a quote immediatamente superiori il vento diminuisce alquanto di intensità per poi assumere un valore che si mantiene costante, o quasi, per un certo numero di quote verso i 1000 metri dal suolo. Nel presente lavoro ci limiteremo a studiare il vento in questo più basso strato dell'atmosfera, con speciale riguardo alle osservazioni di Vigna di Valle, e perverremo a determinare il valore dell'*attrito interno* dell'aria e della *costante di attrito superficiale* per la Stazione Aerologica di Vigna di Valle. I valori da noi trovati sono in accordo con quelli determinati da autori stranieri in base alle misure eseguite nei loro osservatori, ed è la prima volta (o almeno lo crediamo) che tali calcoli vengono fatti per stazioni italiane.

(1) Lavoro eseguito all'Ufficio Presagi.

(2) Nella seduta del 6 gennaio 1929.

§ 1. - Seguendo le notazioni d'uso indichiamo col vettore \mathbf{G} la velocità di un vento ideale, che ha la direzione della tangente alle isobare (nell'emisfero Nord dalla parte destra del gradiente barico) e la grandezza $G = \frac{\gamma}{2\rho\omega \sin \varphi}$, dove γ è la grandezza del gradiente barico, ω la velocità della rotazione terrestre, ρ la densità dell'aria, φ la latitudine del luogo di osservazione. Tale vento ideale è chiamato: *vento geostrofico*.

Come è noto la velocità del vento osservata presso il suolo non coincide con \mathbf{G} , talchè indicando con \mathbf{V}_0 un vettore che rappresenta la velocità del vento presso il suolo resta determinato un vettore $\mathbf{R}_0 = \mathbf{V}_0 - \mathbf{G}$, che si vuole chiamare: velocità del *vento relativo* superficiale.

Se ammettiamo che il vento geostrofico sia lo stesso a tutte le altezze, possiamo calcolare per le diverse altezze il vettore \mathbf{V} , che rappresenta la velocità del vento, in base alle equazioni generali di dinamica ⁽¹⁾ tenendo conto dell'attrito col suolo e della viscosità interna dell'aria; corrispondentemente per ogni altezza resta determinato anche il vento relativo \mathbf{R} . Si ottiene $R = R_0 e^{-a\zeta}$ essendo ζ l'altezza sul suolo, R ed R_0 le grandezze dei vettori \mathbf{R} ed \mathbf{R}_0 , e:

$$(1) \quad a = \sqrt{\frac{\rho\omega \sin \varphi}{\mu}}$$

dove μ rappresenta l'*attrito interno dell'aria*.

Ponendo $R_0 = vG$ possiamo scrivere $R = vG e^{-a\zeta}$ e:

$$(2) \quad V = G \sqrt{1 - 2v e^{-a\zeta} \cos(a\zeta + \psi) + v^2 e^{-2a\zeta}}$$

essendo V la grandezza del vettore \mathbf{V} e ψ l'angolo dei vettori: $(-\mathbf{G}; \mathbf{R}_0)$, che dipende dall'attrito col suolo.

Come è evidente per le espressioni esponenziali che contiene la (2), la V per grandi valori di ζ è pressochè costante ed uguale a G , quindi le variazioni dell'intensità del vento dedotte dalla formula (2) possono riscontrarsi solo per bassi valori di ζ .

Per procedere ad una discussione accurata dell'andamento della (2) ci conviene accettare integralmente la teoria di Taylor ed ammettere che l'angolo tra il vento superficiale e il vento relativo superficiale sia di 135° .

Ammesso ciò il triangolo al suolo è completamente determinato dal valore di G e di ψ e cioè si ha:

$$V_0 = \sqrt{2} \sin \psi G, \quad R_0 = (\cos \psi - \sin \psi) G$$

quindi è $v = \cos \psi - \sin \psi$.

(1) Cfr. per es. EXNER, *Dynamische Meteorologie* (Vienna 1925), pp. 117 e segg.

Ora la derivata della (2)

$$\frac{dV}{d\tilde{\alpha}} = G a v e^{-a\tilde{\alpha}} \cdot \frac{\cos(a\tilde{\alpha} + \psi) + \sin(a\tilde{\alpha} + \psi) - v e^{-a\tilde{\alpha}}}{\sqrt{1 - 2 v e^{-a\tilde{\alpha}} \cos(a\tilde{\alpha} + \psi) + v^2 e^{-2a\tilde{\alpha}}}}$$

si annulla una sola volta per $a\tilde{\alpha} + \psi$ interno all'intervallo $(0, \frac{3}{2}\pi)$ quando $v < 1$, $\psi < 1$; se $v = \cos \psi - \sin \psi$ possiamo calcolare tale zero, a meno di un decimo, e otteniamo $a\tilde{\alpha} + \psi = 2, 3..$

Di conseguenza, quando $a\tilde{\alpha} + \psi$ varia nell'intervallo $(0, \frac{3}{2}\pi)$ la (2) ammette un solo estremo il quale è un massimo perchè per valori minori di $\tilde{\alpha}$ è $\frac{dV}{d\tilde{\alpha}} > 0$ e per valori maggiori di $\tilde{\alpha}$ è $\frac{dV}{d\tilde{\alpha}} < 0$.

La formula (2) indica quindi un incremento della velocità del vento col crescere dell'altezza fino a raggiungere un massimo per

$$(3) \quad \tilde{\alpha} = \frac{2, 3 - \psi}{a}$$

dopo di che il vento decresce e tende ad assumere il valore del vento geostrofico.

§ 2. — Le formule (1) e (2) e quindi anche le conseguenze che abbiamo dedotto da esse, valgono solo sotto speciali condizioni di grande semplicità, che si trovano discusse e spiegate con molta chiarezza da F. J. W. Whipple⁽¹⁾ e cioè:

1) nello strato preso in esame la variazione della densità dell'aria è trascurabile;

2) le linee isobariche a tutte le altezze sono sensibilmente rette parallele e senza moto, e il gradiente barico è lo stesso a tutte le altezze;

3) non vi sono correnti verticali;

4) l'aria è scambiata da uno strato all'altro, per i moti locali di turbolenza, in ugual proporzione a tutte le altezze.

Queste condizioni non sono in generale verificate, e quindi la teoria non è bene applicabile a singole osservazioni, ma risulta meglio compatibile colle medie specialmente se eseguite in base ad un numero grandissimo di misure. Siccome il materiale dei sondaggi raccolto a Vigna di Valle dal 1911 al 1925 costituisce una serie di osservazioni omogenea e rara, per consiglio del prof. Eredia, ho utilizzato le conclusioni ivi ottenute⁽²⁾ allo scopo di vedere fino a qual punto concordino colla teoria.

(1) F. J. W. WHIPPLE, *The Laws of approach to the Geostrophic Wind*, («Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society», vol. 46, 1920), p. 42.

(2) F. EREDIA, «Annali dell'Ufficio Presagi», (vol. I, anno 1927).

§ 3. — Le velocità, in metri, calcolate dal prof. Eredia per Vigna di Valle⁽¹⁾ e per le quote più basse sono le seguenti:

Quote in metri sul mare	270	400	600	800	1000	1200	1400
Semestre freddo: 1/6 (N + D + G + F + M + A)	4,73	5,25	6,40	6,31	6,10	5,70	5,65
Semestre caldo: 1/6 (M + G + L + A + S + O)	3,15	3,97	4,85	4,75	4,67	4,71	4,75
Anno	3,94	4,61	5,63	5,53	5,39	5,20	5,20

Tutte e tre le curve offrono un andamento generale conforme a quello voluto dalla teoria e specialmente la curva delle medie annue che mostra ben chiaro un vento di intensità costante per diverse quote, che ci può rappresentare il *vento geostrofico medio* per Vigna di Valle. Non è meraviglia se i caratteri teorici si riscontrino meglio nella curva annua, sia per essere questa riferita ad un numero doppio di osservazioni; sia per essere riferita a sondaggi compiuti in condizioni molto diverse e quindi tali da meglio equilibrarsi in una media.

Per calcolare l'attrito interno dell'aria possiamo servirci della formula:

$$\mu = \rho \omega \sin \varphi \cdot \frac{\tilde{z}_m^2}{(2,3 - \psi)^2}$$

che si ottiene subito eliminando a tra la (1) e la (3), quando \tilde{z}_m indichi la quota del massimo. Come abbiamo già ammesso ψ è radice dell'equazione $V_0 = \sqrt{2} \sin \psi G$; nel nostro caso possiamo prendere $V_0 = 3,94$, $G = 5,20$ e perciò viene: $\psi = 32^\circ 24' = 0,56$.

Prendendo:

$$\rho = \text{gr. } 1,29 \cdot 10^{-3} \quad \omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \quad \varphi = 42^\circ 4' \quad \tilde{z}_m = m(600 - 270) = m 330$$

abbiamo: $\mu = 22,8$ nel sistema C G S. Questo valore non è in disaccordo coi valori trovati da autori stranieri ($\mu = 50$)⁽²⁾ ed è 100.000 volte maggiore della *viscosità* dell'aria calcolata sperimentalmente nei laboratori fisici ($18 \cdot 10^{-5}$) perchè, nell'aria mossa dal vento avvengono dei piccoli moti vorticosi (o turbolenze) i quali producono uno scambio di aria tra i vari strati e quindi di quantità di moto. L'attrito che abbiamo ora calcolato può chiamarsi con maggior esattezza *attrito interno virtuale*⁽³⁾ e, come è noto,

(1) F. EREDIA, op. cit., p. 52.

(2) EXNER, op. cit., p. 121.

(3) EXNER, op. cit., p. 120.

ha grande importanza anche sul trasporto da strato a strato di tutte le altre caratteristiche atmosferiche.

§ 4. - La costante di attrito superficiale può essere determinata colla seguente formula del Taylor:

$$\sqrt{2} a \mu R_0 = k \rho V_0^2$$

dove k è ciò che abbiamo chiamato costante di attrito.

Supponendo, come abbiamo fatto prima, che l'angolo tra V_0 ed R_0 sia di 135° , tenendo conto della (1) e della (3) e indicando con ζ_m la quota del massimo abbiamo:

$$k = \frac{\sqrt{2} \omega \sin \varphi (\cos \psi - \sin \psi) G \zeta_m}{(2, 3 - \psi) V_0^2}.$$

Nel nostro caso viene $k = 0,00135$ mentre il Taylor aveva trovato 0,0023, valore abbastanza concordante⁽¹⁾.

§ 5. - Segnaliamo infine una divergenza che si nota tra la teoria e le osservazioni di Vigna di Valle.

Il rapporto tra l'intensità del massimo e quella del vento geostrofico, per la (2) dovrebbe essere espresso da:

$$\sqrt{1 - 2 (\cos \psi - \sin \psi) e^{-a \zeta_m} \cos (a \zeta_m + \psi) + (\cos \psi - \sin \psi)^2 e^{-2 a \zeta_m}}$$

perchè abbiamo posto $v = \cos \psi - \sin \psi$.

Eseguito i calcoli per i nostri valori di ψ e di ζ_m viene 1,037 mentre il rapporto effettivo fra l'intensità del massimo (5,63) e quella del vento geostrofico (5,20) è di 1,08. La differenza fra la teoria e la pratica è maggiore di quella che potrebbe apparire a prima vista, perchè se anche prendiamo $\psi = 0$, cui corrisponde il più grande valore per l'intensità del massimo abbiamo, come valore del radicale, 1,07, e perciò sempre un numero minore di quello ottenuto dalle osservazioni.

Questa discordanza potrebbe spiegarsi, rimanendo nell'ordine di idee delle classiche teorie di Whipple e Hesselberg-Sverdrup, coll'ammettere che il gradiente barico, in luogo di rimanere costante, varî con l'altezza, e potremmo ricavare dalle generalizzazioni che i citati autori hanno

(1) La costante qui calcolata è affatto diversa dal coefficiente di attrito secondo Guldberg e Mohn. Dalla formula di questi autori: $V_0 \sqrt{4 \omega^2 \sin^2 \varphi + K^2} = \frac{1}{\rho} \gamma$ possiamo ricavare $K = 2 \omega \sin \varphi \cdot \frac{\sqrt{G^2 - V_0^2}}{V_0}$ e cioè, nel nostro caso $8,4 \cdot 10^{-5}$; valore in accordo con quello dato da altri autori per i paesi montuosi (cfr. per es. EXNER, op. cit., p. 110).

dato della loro teoria, le formule per i calcoli numerici. Ma appunto nell'applicazione di tali formule sarebbe necessario fare delle ipotesi sul modo di variare del gradiente barico coll'altezza, sia in intensità che in direzione e non ci sembra di avere, per ora, i dati sperimentali sufficienti per formulare su questo punto delle ipotesi particolareggiate. Ricordiamo che la variazione del gradiente barico coll'altezza è invocata anche dal prof. Eredia nella sua spiegazione intuitiva del massimo.

Fisica. — *Sull'allargamento delle righe per risonanza.* Nota di A. CARRELLI, presentata dal Socio M. CANTONE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Prodotti di condensazione tra glucosio e p-fenetidina* ⁽¹⁾. Nota II di M. AMADORI, presentata ⁽²⁾ dal Socio N. PARAVANO.

In altra Nota ⁽³⁾ ho riferito come, variando il metodo di preparazione, abbia potuto ottenere due diversi prodotti di condensazione tra glucosio e p-fenetidina, che ho indicato con A e B.

Ricordo che il composto A, di p. f. 118°, è meno stabile; si decompone più facilmente all'aria; per riscaldamento prolungato si trasforma nell'altro composto, più stabile, di p. f. 115°.

Aggiungerò ora che entrambi i composti hanno potere rotatorio ottico che ho determinato mediante osservazioni polarimetriche in soluzioni di vari solventi, impiegando in queste osservazioni, come nelle altre riferite in questo lavoro, tubi di lunghezza di 2 o 1 dm., a seconda della maggiore o minore visibilità attraverso la soluzione.

Composto A:

Soluzione acquosa a 2%: appena preparata ha un potere rotatorio specifico $[\alpha]_D^{20} = -84^\circ$; il potere rotatorio lentamente diminuisce, ma l'osservazione non può essere portata a termine, poichè in seguito è evidente una scomposizione, il liquido diviene torbido, e viene meno la visibilità attraverso il tubo polarimetrico.

Soluzione in alcol etilico a 1%: appena preparata $[\alpha]_D^{20} = -88^\circ$; dopo 20 ore — 35°; in seguito si mantiene costante.

Soluzione in alcol etilico a 2%: appena preparata $[\alpha]_D^{20} = -91^\circ$; dopo 20 ore — 35°; in seguito costante.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica della R. Università di Modena.

(2) Nella seduta del 6 gennaio 1929.

(3) Questi « Rendiconti », 11, 2° sem., 337; (1925).

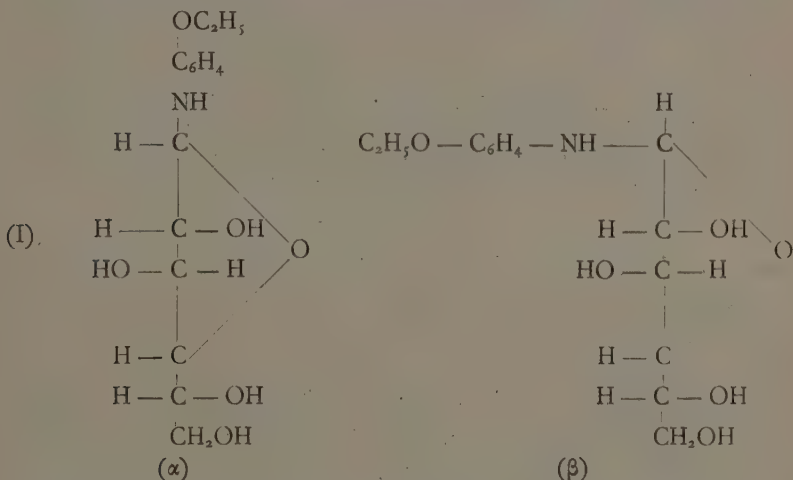
Composto B:

La solubilità in acqua e in alcol etilico è insufficiente per una osservazione polarimetrica.

Soluzione in alcol metilico a 0.5 %; appena preparata $[\alpha]_D^{20} = -50^\circ$; poi lentamente il potere rotatorio levogiro diminuisce fino a -25° .

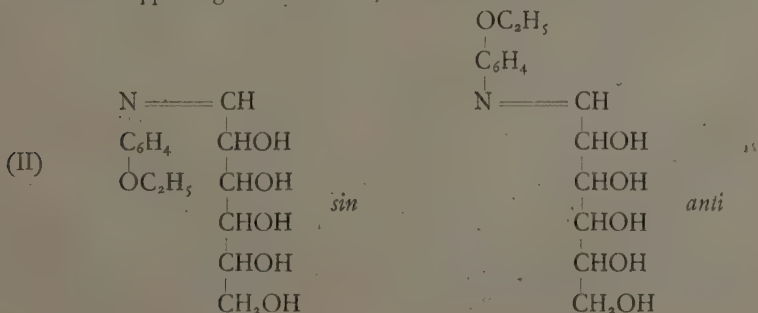
Passando ad esaminare la costituzione di questi composti è da notare che le prove di diazotazione che verranno esposte più avanti mostrano che entrambi i composti non contengono il gruppo $-\text{NH}_2$; e quindi che in essi la copulazione avviene per l'amino gruppo della fenetidina, che può entrare in reazione con un solo atomo, o con due atomi di idrogeno.

La reazione con un solo atomo di idrogeno porterebbe a formazione di un composto di natura glucosidica che può esistere in due forme:

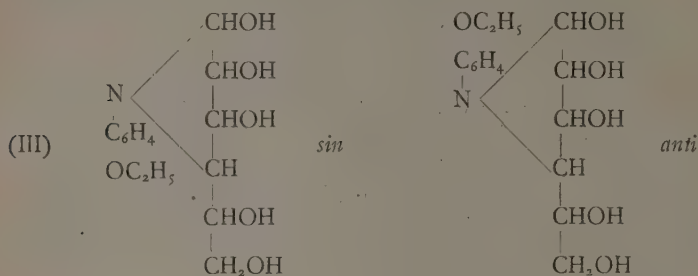


La reazione con due atomi di idrogeno può portare a composti di struttura tipo base di Schiff,

per reazione dell'amino gruppo con il gruppo aldeidico del glucosio formando un composto che può esistere nelle due modificazioni *sin* ed *anti*, dovute al doppio legame dell'azoto,



o, considerando il glucosio nella struttura semiacetale, nelle due modificazioni,



Per dedurre quale costituzione sia da attribuire ai due composti ho creduto vantaggioso studiare le trasformazioni che i composti in soluzione possono subire per trattamento con acidi e con basi. La solubilità in acqua e in alcol di entrambi i composti aumenta nelle soluzioni acide e basiche. Anche di queste soluzioni venne studiato il comportamento ottico.

Composto A:

I: Soluzione alcalina

a) in acqua, 100 cc.

2 gr. prodotto + 2 cc. soluz. NaOH 2N. $[\alpha]_D^{20} = -70^\circ$; il potere rotatorio si mantiene a lungo costante.

2 gr. prodotto + 2 cc. soluz. NaOH 10N. $[\alpha]_D^{20} = -70^\circ$; il potere rotatorio si mantiene a lungo costante

queste soluzioni alcaline appaiono stabili ed incolori per molto tempo.

b) in alcol etilico a 90%, in 100 cc.

2 gr. prodotto + 2 cc. soluz. NaOH 2N. $[\alpha]_D^{20} = -35^\circ$; il potere rotatorio si mantiene costante; dopo qualche ora la soluzione diviene torbida.

2 gr. prodotto + 2 cc. soluz. NaOH 10N; si ha subito intorbidamento e nessuna visibilità attraverso il tubo polarimetrico.

II: Soluzione acida

a) acqua, 100 cc.

2 gr. prodotto + 2 cc. soluz. HCl 1:4. $[\alpha]_D^{20} = +30^\circ$, costante.

2 gr. prodotto + 2 cc. soluz. HCl conc. $[\alpha]_D^{20} = +30^\circ$, costante

le soluzioni divengono lentamente gialle, poi rosse; l'osservazione polarimetrica fu però possibile anche dopo un giorno.

b) in alcol etilico a 90 %, in 100 cc.

2 gr. prodotto + 2 cc. soluz. HCl 1:4.

2 gr. prodotto + 2 cc. soluz. HCl conc.

si osserva che la rotazione va volgendo verso destra; in varie prove essa si iniziava con valori leggermente negativi del potere rotatorio specifico, passando a valori positivi, fino a $+20^\circ$; nel frattempo però le soluzioni diventavano prima gialle poi rosse, e dopo circa $3/4$ d'ora da che erano state preparate non si lasciavano più osservare attraverso il tubo polarimetrico.

La presenza di *alcali*, porta quindi un rapido stabilirsi dell'equilibrio delle due forme α e β , con valori diversi in soluzione acquosa e alcolica. Le soluzioni alcaline subiscono una decomposizione lenta in glucosio e fenetidina essa risulta più visibile per la soluzione alcolica per l'intorbidarsi dovuto al glucosio che si separa.

In presenza di *acidi* il potere rotatorio in soluzione acquosa assume valori positivi. È ora da chiederci se essi siano dovuti ad un fenomeno di polirotazione con passaggio da una forma levogira ad una destrogira, o piuttosto ad una scomposizione del composto.

A risolvere questo dubbio ho fatto una prova alcalinizzando dapprima la soluzione acquosa a 2 %, e acidificandola successivamente; il potere rotatorio specifico della soluzione così ottenuta risultava positivo a $+30^\circ$. Al contrario una soluzione dapprima acidificata, e quindi di potere rotatorio $+30^\circ$, resa poi alcalina, manteneva il potere rotatorio a $+30^\circ$. Questo comportamento sta a provare che il composto nella acidificazione subisce realmente una decomposizione permanente. Se si tien conto della quantità di glucosio presente nei 2 gr. di composto si vede che esso è di 1.2 gr.; il potere rotatorio specifico riferito a questa concentrazione diviene $+50^\circ$, cioè quello del glucosio. L'acido scompone quindi il composto in fenetidina e glucosio, rapidamente in soluzione acquosa, più lentamente in soluzione alcolica.

E a questa conclusione portano anche le reazioni di diazotazione che si possono eseguire sul composto. Se il composto viene sciolto in acqua, e poi rapidamente trattato a freddo con acido cloridrico, nitrito sodico e soluzione alcalina di β -naftolo, non si ha colorazione caratteristica; ciò dimostra che non è presente il gruppo aminico $—NH_2$; a riprova anche che esso ha preso parte alla condensazione. Se invece il composto prima della diazotazione viene tenuto a contatto dell'acido cloridrico anche solo per pochi minuti, trattandolo successivamente con nitrito sodico e β -naftolo si ha una colorazione rosso vivo che dimostra la presenza del gruppo aminico $—NH_2$, che si è formato per scomposizione del composto in glucosio e fenetidina per azione dell'acido cloridrico.

In soluzione alcolica con acidi si osserva rapido intorbidamento per il glucosio che si libera.

Composto B:

I° Soluzione alcalina

a) in acqua, 100 cc.

0.5 gr. prodotto + 2 cc. NaOH 2N. $[\alpha]_D^{20} = -20^\circ$; la soluzione lentamente va colorandosi in giallo, però si mantiene la visibilità attraverso il tubo polarimetrico; dopo 30 ore il potere rotatorio specifico è -5° ; dopo 2 giorni + 7° .

1 gr. prodotto + 2 cc. NaOH 10N. $[\alpha]_D^{20} = -20^\circ$; la soluzione va colorandosi in giallo rossastro; dopo 30 ore il potere rotatorio è -5° ; non visibile dopo 2 giorni.

b) in alcol etilico a 90%, in 100 cc.

1 gr. prodotto + 2 cc. NaOH 2N; si scioglie; la soluzione però rapidamente si intorbida e si colora in giallo.

2 gr. prodotto + 2 cc. NaOH 10N; si scioglie ma con intorbidamento ancor più rapido e abbondante, mentre la soluzione diviene gialla, poi rossa.

II° Soluzione acida

a) in acqua, 100 cc.

1 gr. prodotto + 2 cc. HCl 1:4.

1 » » 2 » HCl conc.

Le due soluzioni hanno un potere rotatorio specifico -50° che si mantiene costante anche per più giorni; le soluzioni assumono solo assai lentamente una debole colorazione gialla.

b) in alcol etilico a 90%, in 100 cc.

2 gr. prodotto + 2 cc. HCl 1:4.

2 gr. prodotto + 2 cc. HCl conc.

Il potere rotatorio specifico delle soluzioni appena preparate è -50° , poi scende lentamente in 3-4 ore a -25° , e si mantiene costante a questo valore anche per più giorni; le soluzioni diventano gialle e rossastre, nonostante ciò è possibile l'osservazione polarimetrica.

In presenza di *acido* il composto si mantiene stabile a lungo; la reazione di diazotazione dimostra l'assenza di gruppo aminico, e la stabilità del composto in soluzione acida; infatti la soluzione acquosa acida, anche dopo vario tempo dalla sua preparazione, non dà con nitrito sodico e β -naftolo il precipitato rosso caratteristico.

Il potere rotatorio specifico delle soluzioni alcoliche acide è levogiro con mutarotazione da -50° a -25° . Per le soluzioni acquose acide invece si mantiene costante il valore di -50° .

In presenza di *alcali* il composto si scompone in fenetidina e glucosio. Ciò si può dedurre dalle prove di diazotazione: poichè sciogliendo il composto dapprima in acqua e idrato sodico, e lasciando a sè la soluzione per qualche tempo, per successiva acidificazione e trattamento con nitrito sodico e β -naftolo, si osserva un precipitato rosso.

Al polarimetro la soluzione acquosa alcalina ha un potere rotatorio specifico levogiro -20° , che solo dopo qualche tempo lentamente decresce, e passa anche a destrogiro, probabilmente per la scomposizione del composto con formazione di glucosio destrogiro.

Le soluzioni alcoliche alcaline divengono subito torbide per il glucosio che si libera, e non furono possibili per esse osservazioni polarimetriche.

Da quanto fu detto fin qui risulta che nella condensazione tra p-fenetidina e glucosio il composto A si ottiene per primo, a più bassa temperatura, è meno stabile, tende trasformarsi nel composto B, ha potere rotatorio levogiro con mutarotazione; gli acidi lo scompongono rapidamente in glucosio e fenetidina; appare più stabile in soluzione basica.

Queste proprietà fanno ritenere che il composto sia di natura glucosidica, e possa esistere nelle due modificazioni α e β dello schema I. Il composto solido sarebbe costituito da una miscela delle due modificazioni; in soluzione si avrebbe una trasformazione parziale di α in β .

Il composto B che si ottiene per prolungata reazione a caldo, in soluzione o per fusione, è molto più stabile, ha potere rotatorio levogiro con mutarotazione; è stabile verso gli acidi, con gli alcali si decompone abbastanza facilmente in glucosio e fenetidina.

Queste proprietà portano a considerare il composto B di natura delle basi di Schiff, con legame stabile tra il gruppo aminico ed il glucosio, secondo gli schemi II e III prima dati. Anche in questo composto esiste un equilibrio tra le forme *cis* e *trans*.

A conclusione di questo lavoro mi preme far notare come risulti dimostrata l'esistenza di due specie di composti che traggono origine dalla condensazione di una base aminica primaria aromatica con il glucosio:

a) un composto di natura glucosidica, che risulta per reazione di 1 atomo di H del gruppo aminico, con l'OH glucosidico.

b) un composto di natura basica per reazione di 2 atomi di idrogeno del gruppo aminico con l'ossigeno chetonico del gruppo aldeidico, o del legame lattonico del glucosio.

Dopo le ricerche di Irvine che aveva dimostrato in modo sicuro la natura glucosidica dei suoi composti, uguale costituzione è stata erroneamente attribuita a tutti i derivati in genere tra basi organiche e glucosio, anche a quelli che prima erano stati classificati come basi di Schiff, mentre in questo lavoro è data conferma dell'esistenza di composti di questo tipo.

Chimica. — *Nuovo metodo d'impregnazione aurea.* ⁽¹⁾ Nota di R. ALTSCHUL, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. A. DIONISI.

Sono ben noti i diversi metodi per l'impregnazione aurea del tessuto nervoso, del connettivo, dei muscoli, della cornea, ecc. Tutti i ricercatori si servono del cloruro d'oro, con ulteriore riduzione, ad eccezione di Golgi e del Muschenkoff che adoperano il cloro aurato di potassio, e di Joris che adopera l'oro colloidale.

Già nel 1891, Ziehen descrisse la combinazione del cloruro d'oro col sublimato per l'impregnazione delle cellule nervose. Servendosi di queste due sostanze chimiche, Cajal è riuscito ad impregnare la glia fibrosa e plasmatica (astrociti): è questo il suo metodo ormai notissimo all'oro-sublimato.

Molteplici sono stati i tentativi per spiegare i procedimenti chimico-fisici che determinano l'impregnazione: non è questo però il luogo adatto per parlarne.

Io ho cercato di introdurre nell'impregnazione aurea un nuovo elemento chimico, il bromuro mercurico (o bibromuro di mercurio, $Hg Br_2$): combinando quest'ultimo col cloruro d'oro ho ottenuto risultati completamente diversi da quelli finora osservati, coi comuni metodi d'impregnazione.

Modificando opportunamente la temperatura e la concentrazione del bagno impregnante o le proporzioni del cloruro d'oro e del bromuro mercurico, io sono riuscito ad impregnare ora la mielina, ora i cilindri, ora uno speciale intreccio (forse identificabile con la rete peri- ed intercellulare di Golgi), ora il grigio cerebrale di Nissl, ora la glia.

Non pretendo, certo, di voler diminuire il valore dei vecchi metodi e tanto meno sostituirli col mio; credo però che questo abbia la sua importanza per lo studio di alcune qualità istochimiche del tessuto nervoso, tanto più che sono riuscito a mettere in evidenza un diverso modo di comportarsi dei vari componenti del tessuto stesso a seconda della loro topografia (corteccia cerebrale, cervelletto, bulbo, midollo, ecc.). Ho osservato, inoltre che la nettezza e la intensità della reazione è maggiore nel tessuto nervoso degli individui giovani, come pure in quello delle cavie e dei conigli.

Provvisoriamente mi sono servito soltanto del tessuto nervoso centrale e periferico e, come metodo di fissaggio ho adoperato finora solo la formalina. Dopo questo fissaggio si fanno tagli al congelatore, dello spessore di 30-40 μ (anche meno, se si vogliono studiare i cilindri). Dopo un

(1) Lavoro eseguito nella R. Clinica Neurologica di Roma.

(2) Nella seduta del 6 gennaio 1929.

lavaggio in molta acqua distillata, si immergono le sezioni in una soluzione, la quale si compone di:

A) cloruro d'oro bruno di Merck all' 1 %, e di

B) bromuro mercurico (Erba), quest'ultimo in saturazione all'ebollizione in acqua distillata e filtrata a freddo.

Secondo i procedimenti vari mi sono servito di varie proporzioni (5 di A : 20 di B; 5 di A : 40 di B; 5 di A : 1 di B + 20 acqua distillata, ecc.). Non occorrono nè sviluppatori nè differenziazioni, basta un passaggio in iposolfito di sodio al 5 %, con ulteriore disidratazione, si passa in xilolo fenicato e si monta in balsamo del Canada.

Ho adoperato anche una soluzione di bromuro mercurico satura, non raffreddata, ma filtrata alla temperatura di 60°. Mi sono servito, inoltre, delle varie soluzioni a differenti temperature (60°, 37° e temperatura ambiente) e accennerò in seguito ai vari risultati finora ottenuti con i diversi procedimenti. Una descrizione più precisa della tecnica non è possibile in brevi limiti: ne farò oggetto di un ulteriore lavoro più esteso.

Accenno, soltanto, a qualche risultato accertato.

Pallium cerebrale: Impregnazione in soluzione fredda (proporzioni di 5 di A : 35 di B): Si osserva macroscopicamente e a debole ingrandimento che la sostanza bianca è tinta in rosso-violetto, mentre la corteccia dimostra negli strati profondi un colore azzurro acciaio ed è incolore nello strato periferico.

La sostanza bianca rivela al microscopio l'aspetto seguente: su di un fondo rosso-violetto si notano numerosissime strie di diversa lunghezza ordinate parallelamente, con decorso normale alla periferia cerebrale. Queste strie si possono scorgere nei diversi livelli delle sezioni e si possono seguire fino ai raggi. Di qui si vedono irradiarsi fibre finissime (cilindrassi) impregnate con colore nero e con distribuzione simile a quella delle fibre mieliniche col metodo di Weigert-Pal. Soltanto non si riesce finora ad impregnare bene le fibre tangenziali. (In un caso di epilessia ho potuto dimostrare che in certe regioni le fibre presentano dei rigonfiamenti, per lo più fusiformi, tinti in rosso-violetto, i quali contengono molti piccoli cerchi incolori, probabilmente gocce di mielina coagulata. Talvolta è possibile seguire i cilindrassi mentre traversano questi rigonfiamenti). I vasi, in queste sezioni sono di colore ruggine.

Man mano che, con la impregnazione successiva di parecchie sezioni, il liquido si è impoverito di oro, si vede che soltanto le guaine mieliniche vengono impregnate. Naturalmente lo stesso risultato si ha se dal principio si diminuisce la proporzione dell'oro.

Riscaldando il bagno a 60° si osserva un modo di colorarsi completamente diverso da quello precedente. Infatti la corteccia appare tinta in porpora mentre la sostanza bianca è molto più chiara.

Microscopicamente si osservano nella regione tangenziale scarse fibre mieliniche trasverse su fondo incolore. Al disotto si vedono su un fondo

purpureo (grigio cerebrale di Nissl?) piccoli spazi rotondi incolori, i quali a causa della loro distribuzione, vanno identificati con le cellule nervose e gliali non impregnate. Sul fondo purpureo si vedono fibre a tinta più carica, dirette verso la periferia: probabilmente i dendriti delle cellule nervose. Nella sostanza bianca, le fibre mieliniche non sono impregnate ma tra le singole fibre si osservano gli spazi tinti più fortemente. Incolori sono anche i posti occupati dalle cellule gliali. I vasi, specialmente dove si trovano eritrociti, hanno colore di ruggine.

In diluizione (5 di A: 10 di B + 10 H₂O) si osserva una impregnazione della periferia e del nucleo delle cellule nervose e gliali: si hanno però molti precipitati. Passando le sezioni prima della impregnazione in alcool a 70° o servendosi senza diluizione del cloruro d'oro giallo comune, si ha lo stesso risultato, che si ottiene adoperando la soluzione suddetta.

Per il talamo ho potuto finora osservare gli stessi risultati specialmente netti per la mielina e per la colorazione della sostanza fondamentale, restanti incolori le cellule e le fibre.

Molto sensibile alla impregnazione si è dimostrato il bulbo, il quale si impregna in pochissimo tempo. Secondo le soluzioni si riesce ad impregnare il fondo grigio, la mielina, i cilindrassi. In un caso di arteriosclerosi cerebrale presenile ho osservato nelle olive bulbari la rete peri- ed intercellulare di Golgi, probabilmente incrostate.

Macroscopicamente si osserva nel bulbo nettissima la differenziazione della sostanza grigia e bianca.

Nel midollo ho potuto facilmente mettere in evidenza i cilindrassi nella sostanza bianca e grigia. In quest'ultima essi appaiono impregnati in nero su fondo chiaro, mentre la mielina è tinta leggermente in rosa.

Molto più difficile riesce l'impregnazione della mielina sola; ciò si ottiene diluendo molto il liquido. Servendosi di cloruro d'oro giallo si ha una impregnazione meno netta e non rossa, ma grigio-scura dei cilindrassi, della glia ed in modo poco netto delle cellule nervose della sostanza grigia.

Impregnando il cervelletto, si vede che nel bagno di proporzione 5 A : 35 B si ha l'impregnazione della mielina sola; portando la temperatura a 60° si ha il « negativo » (sostanza fondamentale grigia), e tinta purpurea, della zona molecolare ed il « negativo » di tinta rosa della sostanza bianca, mentre nel territorio della zona granulare s'impregna la rete mielinica con accentuazione dell'impregnazione nei nodi della rete. Diluendo la soluzione a metà si ha senza riscaldare una impregnazione della zona molecolare e granulare come nel modo precedente, mentre si ha una impregnazione della mielina nel territorio della sostanza bianca.

Nel *cornu ammonis* si osservano fenomeni simili a quelli ottenuti nella corteccia con immagini soprattutto macroscopicamente molto chiare, confrontando il « positivo » e il « negativo ».

Sui nervi periferici fissati in formalina si osservano i fenomeni già accennati per la mielina del cervello, cioè impregnazione a freddo delle guaine mieliniche: rimangono incolorate le gocce già ricordate di mielina coagulata.

Credo di poter destare, con questi accenni, l'interesse per il procedimento istochimico, che forse ci darà qualche aiuto per la differenziazione topografica.

Mineralogia. — *La proclorite del Monte Rosso di Verra (gruppo del Monte Rosa)* ⁽¹⁾. Nota di T. CARPANESE, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. BOERIS.

In un recente lavoro sulle cloriti, eseguito in collaborazione con A. Bianchi ⁽³⁾, esponemmo i risultati delle nostre prime ricerche sulla disidratazione di alcuni termini di questa famiglia. Venne studiato particolarmente il comportamento della *pennina di Zermatt* e del *clinocloro di Val D'evero*; per quest'ultimo riferimmo pure su di una trasformazione ottica che il minerale subisce durante il riscaldamento.

Fra i minerali del Monte Rosso di Verra, dei quali mi sto occupando da tempo, si trovano dei belli esemplari di una clorite, il cui studio ha fornito dei risultati interessanti. Ho creduto utile riferirne a parte, rimandando ad altro lavoro la descrizione completa dei minerali e del loro giacimento. Un cenno di questo si trova in una mia Nota precedente sull'epidoto del Monte Rosso ⁽⁴⁾.

La *clorite* si presenta nelle abituali associazioni, a rosa od a pila, di lamelle ad abito pseudoesagonale. Queste, osservate al microscopio, mostrano sempre una complessa geminazione per incrocio, o per contatto, di più individui cristallini, e presentano spesso una più o meno marcata zonatura concentrica. Le più caratteristiche hanno una parte interna a settori irregolarmente incrociati per compenetrazione di tre individui, analogamente ai trigeminati di clinocloro di Val d'Ala descritti da Tschermak ⁽⁵⁾, ed una parte periferica zonata, con estinzione ondulata. Questa parte periferica sembra

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Padova.

(2) Nella seduta del 17 giugno 1928.

(3) A. BIANCHI e T. CARPANESE, *Studi sulle cloriti*. «Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti», Venezia 1927-28, LXXXVII, p. 145.

(4) T. CARPANESE, *L'epidoto del M. Rosso di Verra*. «Rend. R. Accad. dei Lincei», Roma, 1925, ser. VI, vol. II, p. 276.

(5) G. TSCHERMAK, *Die Chloritgruppe*. «Sitzungsber. k. Akad. d. Wiss.», Wien 1890, IC, p. 195.

costituita di settori geminati per contatto, che non si estinguono contemporaneamente agli adiacenti settori della parte interna.

Dall'*analisi quantitativa*, da me eseguita, risulta la seguente composizione:

	Analisi	Rapporti molecolari		
H ₂ O	13.13 %	0.7288	0.7288	3.34
SiO ₂	29.20 %	0.4843	0.4843	2.22
Al ₂ O ₃	21.32 %	0.2086	0.2183	1
Fe ₂ O ₃	1.55 %	0.0097		
FeO	3.41 %	0.0475	0.8384	3.84
MgO	31.89 %	0.7909		
	100.50			

la quale, come ben si vede, corrisponde a quella di una proclorite poco ferrifera.

Lo *studio della disidratazione* di questa clorite a temperature crescenti venne condotto col metodo e con la tecnica già descritta nel lavoro citato ⁽¹⁾. Ho eseguite 39 determinazioni, su 6 campioni di polvere; da questo dedussi i seguenti dati di media, in base ai quali fu disegnata la curva della figura.

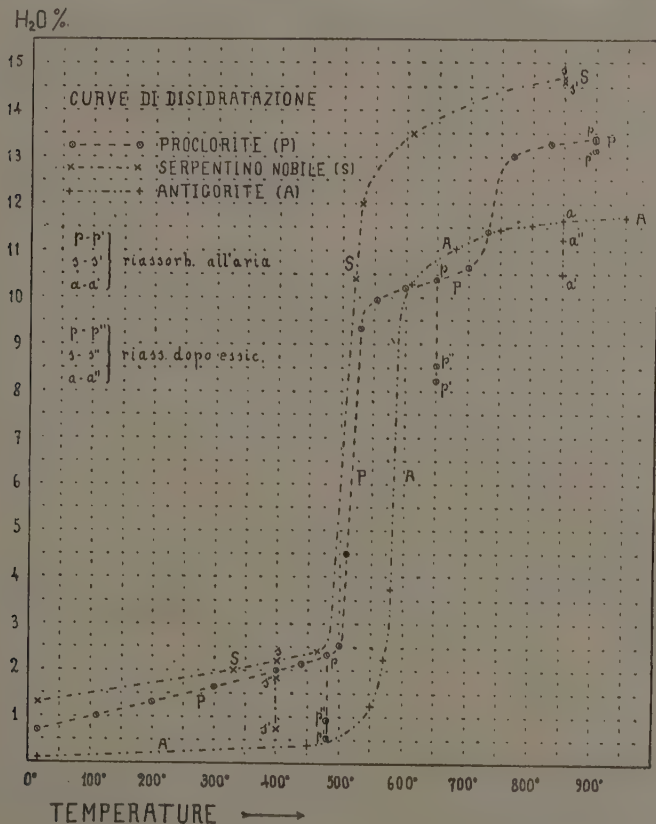
Temperatura	H ₂ O perduta %	Temperatura	H ₂ O perduta %
15° (essic.)	0.70	530°	9.35
110°	1.00	555°	9.95
200°	1.31	600°	10.19
300°	1.64	650°	10.36
400°	2.00	700°	10.64
440°	2.14	730° ¹	11.40
480°	2.33	770°	13.00
500°	2.54	830°	13.36
510°	4.50	900°	13.38

Come si può rilevare dai dati riportati e dalla curva disegnata, fino a 500° la perdita d'acqua è piccola (2.54 %) e proporzionale alla temperatura. Appena al disopra di 500° si ha un'improvvisa perdita di buona parte dell'acqua contenuta, cosicchè la curva si fa quasi verticale; a 555° la perdita totale raggiunge il 9.95 %. A partire da questa temperatura, fino a 700°, si ha soltanto una debole emissione di acqua (0.69 %); la maggior parte

(1) A. BIANCHI e T. CARPANESI, loc. cit., pp. 147-148.

dell'acqua residua si elimina fra 700° e 770°. Le ultime porzioni vengono abbandonate solo a temperature molto elevate, dopo forte arroventamento.

È interessante osservare che la disidratazione di questa proclorite procede in modo perfettamente analogo a quello descritto per la pennina di Zermatt e per il clinocloro di Val Devero⁽¹⁾. Come per queste ultime, la curva di disidratazione rivela l'esistenza di un idrato stabile a temperatura elevata, e cioè



fra 550° e 700° circa. Il contenuto in acqua di questo idrato può venire agevolmente calcolato; esso corrisponde approssimativamente al 5 %.

Ho ritenuto non privo d'interesse eseguire alcune determinazioni sulla capacità della clorite, parzialmente disidratata, di riassorbire parte dell'acqua perduta per esposizione prolungata all'aria ambiente. I campioni di polvere, precedentemente riscaldati a varie temperature, furono lasciati esposti all'aria

(1) A. BIANCHI e T. CARPANESE, loc. cit., per la pennina v. a p. 149; per il clinocloro v. a p. 151.

per parecchi giorni, fino a peso costante; dopo di ciò venivano posti in essiccatore a cloruro di calcio, e lasciati pure fino a costanza di peso. Come è facile di prevedere, le successive pesate per lo stesso campione di polvere indicavano un riassorbimento relativamente rapido in principio, e poi via via più lento, fino a divenire praticamente nullo; comportamento del tutto analogo a quello che si osserva nella disidratazione a temperatura costante.

Riporto senz'altro i risultati delle diverse determinazioni:

Temperatura —	H ₂ O perduta —	Riassorbimento all'aria	Riassorbimento dopo essiccatore
460°	2.33 %	1.78 %	1.39 %
650°	10.36 %	2.16 %	1.84 %
900°	13.38 %	0.26 %	0.04 %

Nel diagramma della figura sono rappresentati anche questi riassorbimenti. Come si vede, il *potere di riassorbimento* si conserva notevole anche dopo eliminazione di oltre due terzi dell'acqua contenuta, e diventa pressochè nullo a disidratazione quasi completa.

La proclorite del Monte Rosso a temperatura ordinaria è otticamente positiva, con piccolo angolo di assi ottici. I suoi *indici di rifrazione* sono i seguenti:

$$n_g = 1.585 \quad n_m = 1.577 \quad n_p = 1.574$$

J. Orcel⁽¹⁾ nel suo interessante lavoro sulla composizione chimica delle cloriti, fornisce alcuni dati sulla variazione dell'indice medio e della birifrangenza in funzione del tenore in FeO nel gruppo delle procloriti. Nella clorite da me studiata si hanno per tali grandezze i seguenti valori:

$$\frac{\text{FeO}}{\text{MgO}} = 0.06 \quad n_g - n_p = 0.011 \quad n_m = 1.577$$

Confrontando questi valori con quelli riportati da Orcel si rileva un buon accordo per la relazione fra tenore in FeO e birifrangenza. Difatti la *groscauite* di *Democrat* e la *proclorite* di *Ampatsinjocana*, nelle quali si ha $\frac{\text{FeO}}{\text{MgO}} = 0.07$, manifestano una birifrangenza uguale a 0.012 e rispettivamente 0.011. Non così invece per la relazione fra tenore in FeO ed indice medio, come si può rilevare dai seguenti dati, che riporto dal lavoro di Orcel⁽²⁾:

(1) J. ORCEL, *Recherches sur la composition chimique des chlorites*. «Bull. de la Soc. franç. de Minér.», Paris 1927, I, p. 75.

(2) J. ORCEL, loc. cit., p. 415.

	$\frac{\text{FeO}}{\text{MgO}}$	n_m
Seridanite N. Wyoming	0	1.580
Seridanite di Comberousse	0.02	1.580
Leuchtembergite di Midongy	0	1.575

Analoga discordanza, principalmente per il valore di n_m , si ha riguardo alla classificazione ottica delle cloriti data da A. N. Winchell⁽¹⁾. Infatti, secondo questo autore, nelle procloriti si avrebbe:

$$n_m = 1.59 - 1.62 \quad n_g - n_p = 0.004 - 0.010$$

Come è noto, alcune cloriti subiscono una *trasformazione ottica per riscaldamento*. Essa venne osservata da Klein⁽²⁾ per la varietà otticamente positiva di pennina, e da Bianchi⁽³⁾ per il clinocloro e la corundofilite. Secondo Klein, le procloriti non presenterebbero cambiamento di segno ottico a temperatura elevata. *Invece, studiando la proclorite del M. Rosso, ho potuto stabilire nel modo più certo che anch'essa si trasforma otticamente per riscaldamento*. Si può tuttavia osservare che tale trasformazione nelle lamine di clorite si verifica con tale lentezza, che il fenomeno può sfuggire quando non si usi la precauzione di un riscaldamento prolungato per molte ore od anche per qualche giorno. Per la stessa ragione, è praticamente impossibile cogliere con sufficiente esattezza il *punto di trasformazione*, quando non si adoperino per le ricerche delle fini polveri lamellari. In queste, con una serie di esperienze a temperature diverse, ho riconosciuto che la trasformazione avviene ad una temperatura compresa fra 480° e 490°, e cioè a temperatura poco più bassa di quella corrispondente al primo brusco cambiamento di direzione della curva di disidratazione.

Per questa trasformazione, il carattere ottico del minerale, positivo a temperatura ordinaria, diventa negativo, e viceversa il carattere della zona normale alla sfaldatura da negativo diventa positivo. La bisettrice acuta rimane perpendicolare alle lamine di sfaldatura. Su lamine della proclorite, riscaldate a lungo a 630°, ho potuto anche osservare che il piano degli assi ottici dopo la trasformazione era girato di 90° attorno alla bisettrice acuta.

Questo comportamento è del tutto analogo a quello del clinocloro.

Un altro fatto interessante mi fu dato osservare durantè le ricerche per la determinazione del punto di trasformazione. Se la polvere di clorite viene riscaldata per breve tempo a temperatura di poco superiore a quella corri-

(1) A. N. WINCHELL, *Additional notes on chlorite*. «The Amer. Mineral.», 1928, XIII, p. 161.

(2) C. KLEIN, *Optische Studien, II*. «Sitzungsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss.», Berlino 1902, I, 8°, p. 104.

(3) A. BIANCHI e T. CARPANESE, loc. cit., p. 157.

spondente a tale punto, un attento esame al microscopio permette di riconoscere nella polvere trasformata alcune lamelline negative, praticamente uniassiche; prolungando sufficientemente il riscaldamento, od innalzando la temperatura, in tutti gli elementi della polvere ricompare una netta biassicità. Quindi si può ritenere che la trasformazione ottica avvenga per gradi, analogamente a quanto si osserva in altri minerali. *In un primo tempo l'angolo degli assi ottici si annulla ed il minerale diventa negativo; successivamente questo ritorna biassico, restando negativo, ma con piano degli assi ottici, perpendicolare alla posizione primitiva.*

Sulle polveri trasformate potei determinare gli indici di rifrazione, ottenendo i seguenti valori:

$$n_g = 1.562 \quad n_m = 1.557 \quad n_p = 1.532$$

La trasformazione ottica è dunque accompagnata da una notevole diminuzione degli indici, e da un forte aumento della birifrangenza.

Bisogna però osservare che, dopo disidratazione completa per forte riscaldamento, la polvere, divenuta per la maggior parte monorifrangente, presenta un indice notevolmente più elevato di quelli della clorite non disidratata. Lo stesso si verifica per gli indici delle poche lamelle rimaste birifrangenti.

La polvere di clorite trasformata per riscaldamento è praticamente stabile, almeno a temperatura ordinaria. Una porzione di polvere, riscaldata a circa 490°, dopo oltre un anno dalla trasformazione risultò ancora negativa; e rimase tale anche dopo essere rimasta immersa nell'acqua per alcuni giorni, e cioè in condizione da poter riassorbire facilmente l'acqua eliminata durante il riscaldamento.

Negli *Studi sulle cloriti* già citati, si trova descritto il comportamento alla disidratazione del *serpentino nobile di Snarum* e dell'*antigorite di Valsavaranche*. Avendo a disposizione alcuni esemplari di *serpentino nobile* e di *antigorite di M. Rosso*, ho ritenuto utile studiare anche per questi la disidratazione per riscaldamento. Le determinazioni vennero eseguite con lo stesso metodo adoperato per la proclorite.

Riporto senz'altro i risultati ottenuti adoperando polveri di media finezza, ed inoltre, come feci per la clorite, alcuni dati relativi ai riassorbimenti.

Serpentino nobile (M. Rosso)	Temperatura	Antigorite (M. Rosso)
H ₂ O % perduta	—	H ₂ O % perduta
1.30	15° (essic.)	0.10
2.00	330°	—
2.20	400°	—
—	450°	0.40

Serpentino nobile (M. Rosso)	Temperatura	Antigorite (M. Rosso)
H ₂ O %/o perduta	—	H ₂ O %/o perduta
2.40	465°	—
10.40	520°	—
11.98	530°	—
—	550°	1.23
—	570°	2.23
—	580°	3.72
13.50	610°	10.26
—	680°	11.04
—	750°	11.43
—	800°	11.54
14.67	850°	11.62
—	950°	11.70

RIASSORBIMENTI

Serpentino nobile del M. Rosso:

Temperatura	H ₂ O perduta	Riassorbimento all'aria	Riassorbimento dopo essiccatore
—	—		
400°	2.20	1.45	0.36
850°	14.67	0.09	—

Antigorite del M. Rosso:

Temperatura	H ₂ O perduta	Riassorbimento all'aria	Riassorbimento dopo essiccatore
—	—		
850°	11.62	1.13	0.40

In base a questi dati sono disegnate le curve della figura relative alle due varietà di serpentino. Come si vede, tali curve si mantengono pressochè parallele, restando però notevolmente staccate fra di loro. La perdita della maggior parte dell'acqua avviene a 500°-530° per il serpentino nobile, ed a 550°-610° per l'antigorite. Oltre a ciò si può osservare che il contenuto in acqua del serpentino nobile è alquanto maggiore di quello dell'antigorite. Si ha dunque un comportamento analogo a quello descritto nel lavoro citato per il serpentino nobile di Snarum e per l'antigorite di Valsavaranche.

Per quanto riguarda il *potere riassorbente*, si può osservare che per l'antigorite esso si mantiene sensibile anche dopo arroventamento ad 850°, mentre per il serpentino nobile, portato alla stessa temperatura, si è praticamente annullato.

Queste diverse osservazioni confermano che fra la varietà « nobile » di serpentino e l'antigorite si ha una netta distinzione chimico-fisica.

Geologia. — *Intorno ad alcuni affioramenti di « argille scagliose » nell' Umbria settentrionale.* Nota di P. PRINCIPI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. ROVERETO.

Nel procedere al rilevamento dettagliato del quadrante Città di Castello del Foglio 115 della carta d'Italia ho riscontrato nella parte SE numerosi affioramenti di scisti a *facies* di argille scagliose, la cui giacitura presenta notevole interesse per la tettonica della regione.

Gli affioramenti suddetti si trovano principalmente tra la valle del torrente Assino e quella del torrente Carpina, circondati dalla serie marnoso-arenacea del Langhiano. Essi sono per lo più costituiti da argille scistose o caotiche, grige o rossastre, a cui si associano calcari bruni per patine mangesifere, calcari di tipo alberese a grana finissima verdi, giallastri, palombini o bianco-lattei, diaspri verdi o rosso-scuri, arenarie verdastre e brecciole con elementi serpentinosi non di rado nummulitifere.

Un affioramento di notevole estensione si osserva tra la Pieve dei Saggi e C. Montecosco; esso, poi, prosegue quasi, ininterrottamente più a nord nei pressi di Candeggio, dove, incastrata nelle argille scistose varicolori, si trova una piccola massa di serpentina di tipo bastitico. Talora, come tra il Poggio S. Agata ed il Monte S. Faustino, del complesso argilloso non restano che i residui delle rocce più resistenti intercalate negli scisti, cioè solo frammenti di calcari alberesi, di calcari mangesiferi e di faniti, essendo le argille più facilmente dilavate dalle acque meteoriche.

Per la presenza delle brecciole nummulitiche e per il fatto che in varie località vicine questi scisti argillosi sono accompagnati da altre foraminifere eoceniche, come ad esempio la *Rupertia incrassata* Uhlig ⁽²⁾, è verosimile che essi corrispondano ai galestri dell'Eocene superiore diffusi nell'alta valle del Tevere, nella regione del Casentino e nel bacino del Mugello ⁽³⁾.

I rapporti stratigrafici tra queste argille scagliose, affioranti anche nei contigui territori di Umbertide e di Gubbio, e la formazione arenaceo-marnosa, che li comprende, sono stati variamente interpretati per effetto delle ripieghettature, contorsioni e rovesciamenti, che le prime hanno subito durante i movimenti orogenici.

(1) Nella seduta del 6 gennaio 1929.

(2) PRINCIPI P., *Tentativo di ordinamento del Terziario inferiore e medio dell' Umbria centrale.* « Bull. Soc. geol. ital. », vol. XLI, 1922.

(3) PRINCIPI P., *Intorno alla suddivisione dei terreni del Terziario inferiore e medio dell'Italia centrale.* « Bull. Soc. geol. ital. », vol. XLVI, 1927.

Il Lotti sostiene⁽¹⁾ che le argille scagliose della zona compresa tra la valle del Tevere e la pianura eugubina siano al di sopra, e quindi di età più recente, della formazione marnoso-arenacea dallo stesso Autore riferita all'Eocene medio; ma se talora questa disposizione sembra verificarsi, essa è in relazione a fenomeni di diapirismo, per cui le argille, acquistata una *facies* caotica, si sono intruse entro discontinuità degli strati langhiani e riuscendo non di rado a traboccare al di sopra di questi. La regione situata nella parte SE del quadrante Città di Castello mostra in maniera evidentissima come le argille scagliose siano originariamente sottostanti alle rocce marnoso-arenacee di età miocenica.

Una zona di argille scagliose si estende dal corso del torrente Assino sin presso il Monte della Madonna dei Confini, per proseguire poi, dopo

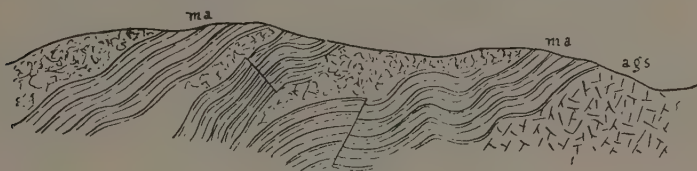


Fig. 1.

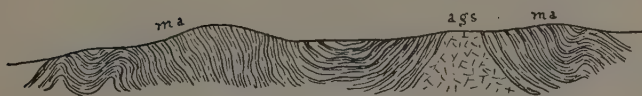


Fig. 2.

una breve interruzione, attraverso le valli dei torrenti Carpinella, Carpina e Sansughera, fino alle falde del M. Gengarella.

Presso C. Colle della Casa a nord della Torre di Certalda si vedono, in corrispondenza di una sezione naturale gli argilloscisti eocenici affiorare al disotto della serie marnoso-arenacea, gli strati della quale, mentre a qualche centinaio di metri dalle argille inclinano regolarmente a SO, in in prossimità dell'affioramento argilloso si presentano arricciati, contorti e spezzati in varia guisa (fig. 1), evidentemente per effetto della pressione esercitata dalla massa argillosa nel suo movimento ascensionale.

Nelle vicinanze della confluenza della Carpinella colla Carpina le argille scagliose caotiche, accompagnate dal solito corteggio di calcari vari-colori, costituiscono il nucleo di una stretta anticlinale (fig. 2), i cui fianchi

(1) LOTTI B., *Relazione preliminare sulla Campagna geologica dell'anno 1911*. «Bull. R. Comitato geolog.», 1912; ID., *Descrizione geologica dell'Umbria*. «Memorie descr. della Carta geolog. d'Italia», vol. XXI, 1926.

sono rappresentati dagli strati arenacei quasi verticali. Lo stesso fenomeno si osserva distintamente tra il Poggio S. Agata ed il Monte di S. Faustino (fig. 3) e ad ovest di C. Palazzetta a nord del Torrente Assino, dove l'intrusione delle argille ha determinato il sollevamento ad anticlinale delle rocce sovraincombenti, i cui strati si mostrano in parecchi punti rotti e raddrizzati fino alla verticale.

Presso la Pieve de' Saddi e nei dintorni di Candeggio la formazione argillosa appare incuneata entro le marne arenacee del Langhiano, i cui strati

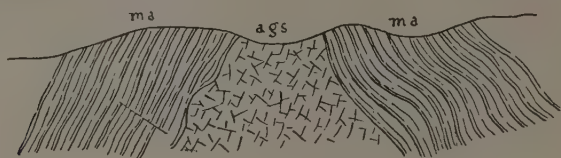


Fig. 3.



Fig. 4.

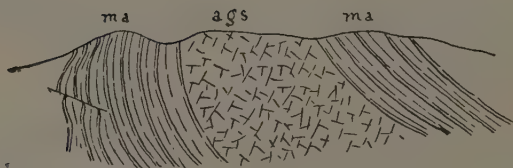


Fig. 5

inclinano verso SSO (fig. 4); in questo caso i limiti tra le argille e le marne arenacee mioceniche risultano essere delle fratture, che, però, come ho potuto constatare nell'alta valle del Tevere e nel bacino di Firenzuola⁽¹⁾, non hanno sviluppi lineari in piano oltre il confine della massa argillosa. A Ronzano, invece, lungo il torrente Carpina le argille scagliose di colore rosso e di aspetto caotico sono intruse in modo da risultare interstratificate fra le marne arenacee langhiane, gli strati delle quali a contatto delle argille sono arricciati e sconvolti (fig. 5).

(1) PRINCIPI P., *Nuove osservazioni sulla geologia dell'alta valle del Tevere*. «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», 1924; Id., *Osservazioni geologiche sul bacino di Firenzuola in provincia di Firenze*. «Bull. Soc. geol. ital.», vol. XLVII, 1928.

Fisiologia. — *Il punto isoelettrico della mioproteina e il potere regolatore del succo muscolare* ⁽¹⁾. Nota di L. DE CARO, presentata ⁽²⁾ dal Socio F. BOTTAZZI.

In continuazione di precedenti ricerche consistenti nel precisare il punto isoelettrico di una delle proteine muscolari, e il potere neutralizzatore del succo muscolare (di pressa), quale indice più attendibile dello stesso potere del muscolo *in toto*, presento, in questa Nota, i risultati ottenuti coi muscoli di *Emys*, di *Scyllium* e con l'organo elettrico della torpedine.

Queste ricerche sono state estese a muscoli appartenenti ad animali di specie differente per osservare se esistessero e dentro quali limiti variasero, differenze fra le proprietà investigate, e con lo scopo di stabilire, se ciò è possibile, l'esistenza di qualche parallelismo fra proprietà colloidali, proprietà chimiche e proprietà biologiche dei muscoli.

Ho già accennato, in una Nota precedente ⁽³⁾ che una delle proteine muscolari, la mioproteina (di Bottazzi) corrispondente al *Myogen* degli autori tedeschi, presenta un punto isoelettrico compreso fra $\text{pH} = 6,0$ e $\text{pH} = 6,9$, tale, cioè, da poter essere raggiunto dal valore della reazione che si stabilisce nel muscolo, durante il suo stato d'attività normale, ed ho ammesso che la coincidenza dei due valori di reazione può mettersi in relazione con l'aumento di viscosità che si stabilisce nel muscolo durante la stimolazione ⁽⁴⁾, attraverso un processo di gelificazione ⁽⁵⁾ della mioproteina.

Ho potuto ancora osservare che il punto isoelettrico di questa proteina muscolare non è proprio identico nei muscoli di specie animale differente, ma presenta degli scarti che, senza essere considerevoli, possono tuttavia richiamare l'attenzione, per il semplice fatto che essi permangono costantemente, col ripetersi dell'esperienza.

Ho, infine, ammesso la possibilità che il punto isoelettrico della mioproteina possa non esser raggiunto con la stessa velocità nei vari muscoli della specie animale, e che questa condizione può rappresentare uno dei fattori che determinano la rapidità, e, in parte, quindi, la forma di contrazione del muscolo.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Napoli.

(2) Nella seduta del 2 dicembre 1928.

(3) L. DE CARO, *Forza neutralizzatrice del succo muscolare e punto isoelettrico della mioproteina*, « Arch. di Sc. Biol. », vol. XII, 1928, p. 578.

(4) GASSER and HILL, A. V., « Proc. of the Roy. Soc. of London », 1924, 96, 398.

(5) F. BOTTAZZI, *Il tono muscolare*, « Arch. di Sc. Biol. », 1926, VIII, 3-4, pp. 495-496.

Ma il punto isoelettrico della mioproteina non è il solo fattore da prendersi in considerazione; grande importanza hanno pure tutti gli altri sistemi regolatori esistenti nel muscolo.

ESPERIMENTI.

I muscoli, accuratamente liberati dal sangue, venivano spezzettati e poi triturati con sabbia di quarzo e polvere di diatomea; quindi sottoposti alla pressa di Buchner. Dal succo che se ne otteneva si separava la mioproteina mediante dialisi.

Le misure del pH erano fatte elettrometricamente. Riporto nella seguente tabella i dati riguardanti i muscoli di *Emys*, di *Scyllium* e degli organi elettrici della torpedine (1).

TABELLA I.

Muscoli di <i>Emys europaea</i>		Muscoli di <i>Scyllium catulus</i>		Organi elettrici di <i>Torpedo marmorata</i>	
20 cm. ³ di mioproteina dializzata + 25 cm. ³ di NaOH 0.1N		30 cm. ³ di mioproteina dializzata + 25 cm. ³ di NaOH 0.1N		20 cm. ³ di fraz. proteica corrispondente alla mioproteina + 25 cm. ³ di NaOH — 0.1N	
cm. ³ di HCl 0.1N aggiunti	pH osservato	cm. ³ di HCl 0.1N aggiunti	pH osservato	cm. ³ di HCl 0.1N aggiunti	pH osservato
0	11,97	0	12,30	0	12,40
4	11,95	4	12,00	4	12,20
8	11,90	8	11,90	8	12,00
12	11,80	12	11,65	12	11,90
16	11,70	14	11,00	16	11,70
20	11,30	16	10,75	20	10,95
22	10,80	18	9,79	22	10,00
24	9,60	19	8,70	24	8,60
25	6,60	20	6,20	25	6,50
26	4,50	21	5,20	26	5,20
28	3,00	22	4,65	28	3,40
32	2,60	24	3,78	30	2,80
36	2,40			32	2,50

(1) Gli animali marini mi sono stati gentilmente offerti dalla Stazione Zoologica di Napoli.

Con i dati di queste tabelle si possono tracciare le curve rispettive, portando sull'ascissa i valori di pH e sull'ordinata quelli dei cm.³ di HCl 0.1N aggiunti. Dal confronto di queste curve con quella di neutralizzazione di un acido forte con una base forte, ottenuta titolando, per es. 25 cm.³ di HCl 0.1N con soda 0.1N si ricava facilmente il punto isoelettrico della mioproteina. Questo valore corrisponde, infatti, al punto in cui le rispettive curve incontrano quella acido-base.

È da notare che le variazioni della diluizione da 45-50 cm.³ iniziali a circa il doppio, non inducono variazioni sensibili nel valore del pH.

Si ricava allora: per i muscoli striati di *Emys* un valore di punto isoelettrico della mioproteina a pH = 6,6; per i muscoli striati di *Scyllium* un valore di punto isoelettrico della mioproteina a pH = 6,8 — 6,9; e, finalmente, per gli organi elettici della torpedine un valore di punto isoelettrico della frazione proteica corrispondente alla mioproteina, a pH = 6,5.

Quest'ultimo risultato può considerarsi come una conferma chimico-colloidale della natura muscolare degli organi elettrici della torpedine.

Nella seguente tabella ho raggruppati i dati qui sopra riferiti insieme con quelli da me ottenuti precedentemente⁽¹⁾ su muscoli di altri animali:

TABELLA II.

Specie Animale	Punto isoelettrico della mioproteina pH
Rana	6,10-6,20
Rospo	6,70-6,90
<i>Emys</i>	6,60
Cane	6,50-6,70
Coniglio (Weber)	6,30
<i>Scyllium</i>	6,80-6,90
<i>Olothuria</i> (mantello)	6,90
<i>Olothuria</i> (tunica musc. media)	6,80
<i>Torpedo</i>	6,50

Il potere regolatore del succo muscolare è qui calcolato secondo il metodo introdotto da Van Slyke⁽²⁾ con cui si adotta, come unità di misura,

(1) L. DE CARO, loc. cit.

(2) VAN SLIKE, DONALD D., *On the measurement of Buffer values, ecc.*, « Journ. of Biolog. Chem. », vol. 52, p. 525, 1922.

il rapporto differenziale $\frac{dB}{d\text{pH}}$. Questo rapporto esprime la relazione esistente fra l'incremento, in grammi equivalenti, di base forte, ΔB , aggiunta alla soluzione regolatrice, e il corrispondente mutamento di pH. (Se si aggiunge un acido forte l'incremento sarà uguale all'incremento di base forte, col segno negativo cioè $-\Delta B$). Secondo questa notazione una soluzione qualsiasi avrà un valore moderatore uguale a 1 quando un litro di essa richiederà un grammo equivalente di acido forte o di base forte per un cambiamento unitario di pH.

TABELLA III.

Succo muscolare di *Emys*.

pH.	pH. medio	ΔpH .	ΔB	$\frac{\Delta B}{\Delta \text{pH}}$.
4,0				
4,5	4,2	0,5	0,0037	0,0074
5,0	4,7	0,5	0,0029	0,0058
5,5	5,2	0,5	0,0021	0,0042
6,0	5,7	0,5	0,0021	0,0042
6,5	6,2	0,5	0,0024	0,0048
7,0	6,7	0,5	0,0024	0,0048
7,5	7,2	0,5	0,0020	0,0040
8,0	7,7	0,5	0,0020	0,0040
8,5	8,2	0,5	0,0026	0,0052
9,0	8,7	0,5	0,0032	0,0064
9,5	9,2	0,5	0,0036	0,0072
10,0	9,7	0,5	0,0042	0,0084
10,5	10,2	0,5	0,0045	0,0090
11,0	10,7	0,5	0,0050	0,0100

TABELLA IV.

Succo muscolare di *Schyllium*.

pH.	pH. medio	ΔpH .	ΔB	$\frac{\Delta B}{\Delta \text{pH}}$.
5,5				
6,0	5,7	0,5	0,0125	0,0250
6,5	6,2	0,5	0,0109	0,0218
7,0	6,7	0,5	0,0096	0,0192
7,5	7,2	0,5	0,0076	0,0152

TABELLA V.

Succo di organi elettrici di *Torpedo*.

pH.	pH. medio	Δ pH.	ΔB	$\frac{\Delta B}{\Delta \text{pH.}}$
3,5				
4,0	3,7	0,5	0,0053	0,0106
4,5	4,2	0,5	0,0026	0,0052
5,0	4,7	0,5	0,0026	0,0052
5,5	5,2	0,5	0,0016	0,0032
6,0	5,7	0,5	0,0016	0,0032
6,5	6,2	0,5	0,0026	0,0052
7,0	6,7	0,5	0,0026	0,0052
7,5	7,2	0,5	0,0029	0,0058
8,0	7,7	0,5	0,0032	0,0064
8,5	8,2	0,5	0,0058	0,0116
9,0	8,7	0,5	0,0098	0,0196
9,5	9,2	0,5	0,0136	0,0272

TABELLA VI.

pH. corrispondente ai valori minimi di $\frac{\Delta B}{\Delta \text{pH.}}$ del succo muscolare.

Specie animale	pH.	pH.
Rana	7,7	5,7
Rospo	7,7	5,7
Cane	8,2	5,7
<i>Emys</i>	7,5	5,5
<i>Schyllium</i>	7,2	—
<i>Torpedo</i>	—	5,5

Ricalcolando, con lo stesso metodo, i dati della mia Nota precedente ⁽¹⁾ riguardanti il succo muscolare di rana, di rospo e di cane, ho ottenuto risultati analoghi a quelli riportati nelle tabelle III, IV, V e tali (v. tab. VI)

da poter permettere le seguenti conclusioni: *a*) il potere regolatore del succo muscolare, misurato dal rapporto $\frac{\Delta B}{\Delta pH}$, presenta, in media, due valori minimi, in vicinanza di $pH = 7,7$ e $pH = 5,7$; *b*) esso aumenta rapidamente andando verso il lato alcalino, a partire dal primo valore, e verso il lato acido, a partire dal secondo; *c*) nella zona di reazione compresa fra questi valori il potere regolatore presenta valori intermedi, e oscillanti.

Biologia. — *Studi cirripedologici.* — V. *Anabiosi e reviviscenza nei Ctamalini.* Nota di B. MONTEROSSO, presentata ⁽¹⁾ dal Corresp. A. Russo.

Il fenomeno di vita latente, trovato nei Cirripedi Opercolati e descritto in una Memoria precedente, a cui hanno fatto seguito alcune Note ⁽²⁾, mi si è mostrato, in ulteriori ricerche, così interessante e complesso, da meritare uno studio, più che possibile, esteso e profondo. Pur riservando ad una prossima pubblicazione i risultati delle indagini al riguardo, credo opportuno segnalare subito qualche considerazione e alcuni dati, emersi dalle investigazioni in corso e adatti soprattutto a fissare definitivamente il valore del comportamento, che i Cirripedi (*Chthamalus*), sottratti all'ambiente naturale e posti in luogo asciutto, manifestano.

Fin dal mio primo scritto sull'argomento, per vero, non ho dubitato di considerare come caso di anabiosi, questo, presentato dai Cirripedi, che, messi in ambiente subaereo, possono trascorrervi lunghi periodi senza morire, pronti anzi a riprendere ogni attività vitale, non appena vengano reimmersi in acqua marina. Tuttavia i recenti reperti (*Nota III e IV*), da me stesso fatti, in base ai quali venne affermata l'esistenza di un periodo di « vita ridotta » in *Chthamalus stellatus depressus*, potrebbero legittimare la supposizione che il Crostaceo in questione, dopo aver trascorso un certo tempo in uno « stato agonico » — dipendente dalle alterate condizioni ambientali e prolungato da speciale resistenza del suo organismo — venga a morire, se non si riporti nelle condizioni opportune (reimmersione in acqua marina); insomma si potrebbe pensare che esso sia incapace di una sospensione vera e propria della sua attività vitale.

D'altro lato, non dobbiamo nasconderci le difficoltà, che si oppongono a che un caso, riconosciuto di vita latente, venga sicuramente definito come « anidrobiosi » o « letargo » o simili. Su questi fatti biologici interessantis-

(1) Nella seduta del 6 gennaio 1929.

(2) I: « Atti Acc. Gioenia », 1927. — II: « Acc. Lincei, Rend. », 1° sem., pp. 939, 1928. — III: « Boll. Soc. Biol. sper. », luglio 1928. — IV: « Acc. Lincei, Rend. », 2° sem., p. 91, 1928.

simi, gravano in realtà tuttora dense tenebre, tanto che i limiti tra una forma e l'altra di vita sospesa (o latente) sono tutt'altro che netti, specialmente riguardo all'intimo determinismo e alle modificazioni anatomo-fisiologiche, che devono evidentemente manifestarsi nei vari organismi, i quali vanno soggetti a tali fenomeni.

In aggiunta e a conferma di quanto ho già fatto noto nei miei scritti precedenti, sarà bene dunque accennare qui a qualcuna delle ragioni, per le quali ritengo che lo stato, cui vanno incontro gli individui di *Chth. stellatus depressus*, privati dell'acqua, come altre forme del genere e della famiglia, sia vera e propria anabiosi.

Com'è noto, A. van Leeuwenhoeck nei primi anni del XVIII secolo scoprì che i Rotiferi, sottoposti a disseccamento, entravano in tali condizioni, da poter dirsi morti, ma erano capaci, se inumiditi, di riprendere la normale attività vitale. Siffatta scomparsa di manifestazioni biologiche, in quanto completa, profonda, ma reversibile, suggerì a Cl. Bernard il termine di « vita latente » e al Verworn quello di « morte apparente ».

Dopo il Leeuwenhoeck diversi Naturalisti, tra i quali L. Spallanzani, fecero progredire le conoscenze su tale fenomeno, dimostrandolo anche in altri organismi. Profonde e vivaci contestazioni sorsero però in quel tempo sul significato e il valore del reperto, che taluni studiosi vollero abbassare al livello di un banale caso di resistenza vitale, in rapporto con le brusche oscillazioni dell'*habitat* (Pouchet, 1859), mentre altri esaltarono come la più importante e promettente scoperta biologica dell'epoca. Non credo di ingannarmi, affermando, che, nonostante ulteriori e recenti contributi, la questione non ha fatto progressi notevoli, sicchè ci manca fino ad oggi una precisa definizione del fenomeno. È però possibile attualmente assegnare la denominazione di « vita latente », « anidrobiosi » (Giard, 1894) o meglio, di « anabiosi » (Preyer, 1880) al fatto che *certi animali, specialmente per disseccamento, si isolano dall'ambiente* (Brunelli, 1906; Polimanti, 1913), *fisiologicamente, perchè perdono ogni capacità di reagire agli stimoli esterni, subendo talvolta anche delle modificazioni nei loro tegmenti*.

Quale sia la vera causa del fenomeno, quali fatti si svolgano nell'intima compagine strutturale del corpo, in queste condizioni, resta ancora avvolto, può ben dirsi, nel più profondo mistero.

Premesso quanto fin qui sono andato dicendo, parmi essere autorizzato a considerare come vera anabiosi il fenomeno, già scoperto da me nei Cirripedi, i quali, allontanati dall'irregolare, ma più o meno frequente contatto dell'onda marina, vanno gradatamente perdendo la vivacità delle manifestazioni biologiche normali (« vita ridotta »; v. *Nota II*), finchè non è più possibile rilevare in essi, sia negli organi interni (cirri, muscoli dell'addome...) come negli esterni (pezzi opercolari), la minima reazione agli agenti estranei; frattanto una vera e propria segregazione dall'ambiente si

è realizzata mediante la perfetta chiusura di uno speciale opercolo membranoso (v. *Nota IV*), non essendo sufficiente a ciò i quattro pezzi calcareo-chitinosi (*scuta e terga*), la cui chiusura non potrebbe mai riuscire ermetica.

Evidentemente, se tale stato fosse un puro e semplice preludio alla morte, andrebbe considerato come una « caduta agonica » dei poteri fisiologici dell'individuo e non mai come « vita latente ». A ciò ho rivolto la mia attenzione, e credo di potere allontanare ogni sospetto con i reperti, che sono per comunicare.

All'uopo, bisognava anzitutto escludere il dubbio, che gli individui, i quali si risvegliano nella reimmersione, su una roccia, su cui ce ne sono centinaia e talvolta migliaia, non siano quelli medesimi, dei quali previamente si fosse constatata l'assoluta immobilità, di fronte a qualsiasi stimolo meccanico. Si noti in proposito, che, per quanto, nell'entrare in anabiosi, si presenti fra gli individui d'uno stesso blocco (v. *Nota II*) un grande sincronismo, questo, tuttavia non è certamente rigoroso in modo assoluto. Volendo pertanto conoscere il preciso comportamento della specie, in relazione alla vita latente e al conseguente ritorno in attività, ho tentato in un primo momento lo studio di singoli individui, che si lasciavano isolati, in un frammento di roccia, demolendovi attorno tutti gli altri esemplari. Per diverse ragioni, che non sarebbe possibile specificare qui, tale metodo si dimostrò poco opportuno.

Sono quindi ricorso ad un sistema affatto diverso: mantenendo intatti gli individui tutti di un blocco, segnavo con linee convenzionali, mediante inchiostro di China, circa venti esemplari del frammento di ogni roccia, coperta di Ctamalini, dal centro a diversi punti della periferia, in modo da conseguire come una vera immatricolazione dei Cirripedi scelti, e di evitare assolutamente qualsiasi scambio di esemplari. I Ctamalini, così contrassegnati, venivano rivisti col binoculare, ad uno ad uno, di tempo in tempo (ogni ora, financo) e si prendeva nota esatta, in protocollo, del loro stato.

I risultati di questo studio particolareggiato, mentre confermano, in linea di massima, quelli, che ho già descritto nelle precedenti pubblicazioni, mi hanno messo in grado di conoscere minutamente, profondamente, il comportamento della specie, sia in acqua che a secco.

Riservando a prossimi lavori molti altri dati interessanti, dirò che gli individui di *Chth. stell. depressus* possono rimanere fuori l'acqua un centinaio di giorni (fino a 140) senza perdere alcunchè dell'efficienza vitale, tanto da riprendere ogni attività, non appena, dopo tale periodo, vengano riposti in vasca.

Immergendo in acqua marina ogni 30-90 giorni gli stessi individui, anche per qualche ora soltanto, la vita di essi può prolungarsi, in Laboratorio, a secco, per almeno un biennio.

Ogni periodo di permanenza fuori l'acqua marina presenta una prima fase («vita ridotta» secondo la definizione datane nella *Nota II*) che può durare poche ore, al massimo una sessantina di giorni; segue a questa una seconda fase, in cui l'organismo si mantiene fisiologicamente del tutto isolato dall'ambiente e quindi incapace di reazioni motorie. Tale ultimo stato (anabiosi!) può prolungarsi fin oltre due mesi, dopo di che il Cirripede è ancora in condizioni di ritornare a vita attiva.

Il periodo di anabiosi vera e propria si inizia, in generale, gradatamente, tanto che l'Opercolato, nei primi tempi, può avere (come nel letargo di certi Mammiferi!) dei brevi, spontanei risvegli, che si avverano con un ritmo irregolarissimo, e — per quanto fino ad ora mi risulta — indipendente dai fattori cosmici (temperatura, pressione atmosferica, ritmo nictemerale, alterna vicenda delle maree, ecc.), dipendente invece da ignoti fattori individuali dell'organismo in esperimento.

La causa determinante il fenomeno di vita latente è il disseccamento, operato dalle condizioni ambientali; altri fattori, concomitanti, ovvero prodotti da quella, però, vi intervengono, come sarà dimostrato in altro lavoro.

Durante il tempo di permanenza all'asciutto, si verificano dei cambiamenti di volume nel corpo del Cirripede; all'atto del risveglio, difatti, generalmente, esso emette la spoglia esuviale⁽¹⁾, come fa di tanto in tanto nelle condizioni di vita normale per il periodico accrescimento del corpo.

Chth. stell. depressus, nell'*habitat* naturale, è sensibilissimo all'alternarsi del giorno e della notte ed esplica le sue più importanti funzioni vegetative (presa degli alimenti, accoppiamento, ecc.), di notte. Ebbene, anche quando, per un paio di anni, si sottopone sperimentalmente a lunghi periodi di anabiosi, alternati con immersioni, praticate in qualunque momento del giorno e della notte, il Crostaceo non perde il normale ritmo nictemerale, non appena ritorni alla vita attiva.

L'individuo anabiotico, posto nuovamente a contatto con il suo ambiente naturale (acqua marina), dunque, subisce il processo di «reviviscenza»; tale vocabolo qui si adopera senza intendere pregiudicare, dal lato fisiologico, l'intima essenza del fatto biologico, consistente, per l'organismo, nel riprendere relazione col mezzo e nel riacquistare la capacità di eseguire movimenti spontanei o provocati. Tale reviviscenza, come nelle esperienze classiche sui Tardigradi, Rotiferi, Anguillule, ecc., in linea di massima si verifica in un tempo, che è direttamente proporzionale a quello, trascorso in anabiosi. Se questo è durato circa una settimana, il risveglio avviene in 2-3 minuti; se è durato qualche mese, il Cirripede può tardare a dar segno di vita per circa un'ora. Ma anche in ciò il fattore individuale è preponderante.

(1) Tale fenomeno fu notato in Tardigradi reviviscenti dal Pouchet (1859).

Da quanto, brevemente e frammentariamente, si è detto, parmi possa inferirsi, che sussiste completa analogia tra i casi descritti da altri Autori come anabiosi e quello riscontrato da noi nei Cirripedi Opercolati (*Chthamalus*). Che se poi qualche particolare non sembrasse coincidente in modo assoluto, si pensi, in primo luogo, che, per vero, ci manca tuttora un quadro completo e definitivo dei fenomeni, che si svolgono nell'anabiosi conclamata, e, in secondo luogo, si conceda che, come anatomicamente e fisiologicamente c'è differenza tra un Tardigrado e un Crostaceo, così non può, anche *a priori*, pretendersi che lo stesso fatto biologico, qual'è la vita latente, si avveri con immutabile uguaglianza di aspetti in due forme viventi tanto diverse.

Quanto al tempo per cui può protrarsi l'anabiosi nei Ctamalini, se esso appare minimo di fronte agli anni, che si sogliono assegnare ai Rotiferi, agli Anguillulidi, ecc., in vita latente, bisogna pur dire che, in questi stessi, anzitutto la durata suol variare da un gruppo zoologico all'altro e, in secondo luogo, che, financo per la medesima specie, gli Autori mostrano un grande disaccordo; in ogni caso, pertanto, non pare che la durata dello stato descritto sia da elevarsi a carattere diagnostico preponderante, anzi essa sembra, entro certi limiti, secondaria.

Oculistica. — *Il tessuto adenoide nella ghiandola lacrimale umana normale.* ⁽¹⁾ Nota di L. MAMOLI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. A. DIONISI.

Nonostante precedenti ricerche di varî AA. (Boll, Berlin, Axenfeld, Bietti, Riquier, Hannes) il tessuto adenoide della ghiandola lacrimale umana normale si presta ad ulteriori indagini rispetto alla sua morfologia, epoca di comparsa, evoluzione, distribuzione e disposizione, rapporti sia col parenchima che con gli altri elementi cellulari che hanno sede nel tessuto interstiziale della ghiandola, significato.

A questo scopo esaminai istologicamente ghiandole lacrimali di 31 individui. Il materiale fu escisso 15 volte da soggetti viventi, operati di ablazione della ghiandola lacrimale palpebrale contemporaneamente a dacriocistectomia, 16 volte provenne dalla sala anatomica.

Le ghiandole furono in ogni caso prese da individui il cui apparato oculare non presentasse alterazioni capaci di influire sullo stato della ghiandola.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Clinica Oculistica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 6 gennaio 1928.

Esaminai soggetti di età diverse, dal sesto mese di vita intrauterina via via fino a 80 anni.

Lo studio fu condotto in più casi su sezioni seriali per seguire il comportamento del tessuto adenoide.

RISULTATI.

Premetto un breve cenno sullo stroma di sostegno della ghiandola lacrimale, considerato in quattro periodi diversi della vita.

Nel feto: il connettivo del tipo fibrillare piuttosto abbondante ma poco addensato è un po' più stipato alla periferia della ghiandola, così da formare una specie di capsula da cui provengono setti che dividono successivamente la ghiandola in lobi, lobuli, tubuli. I gruppi di cellule epiteliali che formeranno poi i caratteristici tubuli della ghiandola sono nel feto ancora dispersi, così da assumere una particolare fisionomia.

Nel neonato: per l'addensarsi del connettivo la ghiandola assume nel suo insieme un aspetto più organico, più raccolto; sono più evidenti le lobulazioni per l'avvicinarsi tra loro dei tubuli. Il connettivo è però ancora di una tessitura delicatissima e lassa, così che i setti rivestono un notevole spessore.

Nell'adulto: la ghiandola mantiene quell'aspetto che aveva rapidamente assunto fin dai primi mesi di vita. I tubuli sono addossati tra loro così che appaiono evidenti le lobulazioni e la divisione della ghiandola in lobi per mezzo di lunghe gettate di connettivo fibrillare denso e non lasso come era precedentemente.

Nel vecchio: gli elementi del connettivo si ipertrofizzano ulteriormente anche in rapporto con l'ispessimento del connettivo fibrillare perivasale; i setti appaiono più estesi e i tubuli più distanziati che nell'adulto; si osserva poi una grande quantità di tessuto adiposo specialmente verso la periferia dei vari lobi.

Nel connettivo fibrillare della ghiandola lacrimale si notano svariati elementi. Oltre le cellule proprie del connettivo vi sono elementi del sistema reticolo-endoteliale molto rari e dispersi. Questi elementi furono già studiati da Castello nella Scuola di Dionisi.

Le fibre elastiche sono scarse anche nello spessore dei dotti escretori.

Morfologia. — Venendo ora ad esaminare il connettivo della ghiandola lacrimale dal punto di vista del suo contenuto in cellule linfoidi, noto anzitutto che queste cellule hanno le caratteristiche morfologiche dei linfociti, quali si trovano nelle ghiandole linfatiche. Da ciò il nome di tessuto adenoide.

Epoca di comparsa ed evoluzione. — Ho potuto osservarlo in un feto a termine, però solitamente appare verso la fine del primo anno di vita. Si

trova in ghiandole assolutamente normali. Va assumendo gradualmente un maggiore sviluppo fino a circa il secondo decennio, poi si mantiene immutato per atrofizzarsi nelle età più inoltrate, contrariamente a quanto fu sinora ritenuto.

Distribuzione. — Si nota in esso una grande irregolarità, sia per quanto riguarda la sua quantità nei vari individui, sia per quanto riguarda punti diversi di una stessa ghiandola.

Disposizione. — Schematicamente il tessuto adenoide costituisce una specie di corteccia, per quanto molto irregolare, che riveste il tronco dato dal sistema dei vasi e dei dotti della ghiandola. Studiando questo tessuto su sezioni seriali si può rilevare agevolmente che esso non forma mai dei follicoli isolati, per quanto, a causa della sua irregolarità possa darne talvolta l'impressione, bensì un sistema continuo che comincia a livello dell'ilo dei singoli lobi, e va man mano addentrandosi nel parenchima ghiandolare con improvvisi aumenti e diminuzioni di estensione.

È da notarsi una particolarità di struttura data da una disposizione ora più, ora meno evidente, per la quale gli elementi cellulari si dispongono quasi circolarmente, lasciando vuoto uno spazio centrale dove si nota soltanto uno stroma connettivale. Non si vedono in questi spazi interni cellule chiare a grande nucleo, che possano rammentare il centro germinativo di Flemming, nè elementi cellulari alterati che facciano dubitare di una zona di necrosi centrale. Ritengo che si tratti di una disposizione fortuita degli elementi, tanto più che tale aspetto non è affatto frequente.

Spesso si nota che le cellule costituenti il tessuto adenoide sono disposte a catena, separate da esili setti connettivali.

Rapporti col parenchima. — Quanto ai rapporti tra tessuto adenoide e ghiandola lacrimale si nota che spesso non vi è separazione connettivale tra di essi: il tessuto adenoide viene a diretto contatto con i tubuli ghiandolari, senza però mai esercitare una qualsiasi azione distruttiva, sia pure da semplice compressione.

Rapporti con le cellule plasmatiche. — Interessantissimo è il fatto che nelle ghiandole lacrimali si trovano sparse nel connettivo numerose cellule plasmatiche, il cui numero va rapidamente aumentando fin dalle prime età della vita per subire un ulteriore aumento nelle età estreme. Esse si mantengono alla periferia del tessuto adenoide di cui ho parlato e si rileva chiaramente che esse vanno aumentando man mano ci si allontana dalle zone centrali formate dagli accumuli di esso.

Questa disposizione, e qualche rara forma di transizione, possono far pensare ad una derivazione delle cellule plasmatiche stesse dal tessuto adenoide.

Significato. — È senz'altro da escludersi che esso sia in relazione con la funzione specifica della ghiandola, piuttosto è da considerarsi come una

delle infinite localizzazioni del tessuto adenoide, distribuito universalmente nell'economia dell'organismo.

Ricerche condotte nel campo della patologia dimostrano la possibilità che questo tessuto si ipertrofizzi in seguito a stimoli sia di natura infiammatoria, sia di altra natura a noi ignota, in relazione vuoi a fattori costituzionali, vuoi a cause da cui possono derivare quelle neoformazioni costituenti gli svariati gruppi di tumori dati da tessuto linfoadenoide.

Embriologia sperimentale. — *Fenomeni di regolazione e di riparazione nello sviluppo dell'occhio degli Anfibi (risultati di nuovi esperimenti di asportazione e trapianto della vescicola ottica in Pleurodeles, Axolotl e Rana)*⁽¹⁾. Nota di P. PASQUINI presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE⁽²⁾.

La Nota attuale serve a completamento dei risultati di una serie di ricerche che ho iniziato alla scuola dell'Harrison a Yale, su di un particolare problema, ancora non studiato, dell'embriologia causale dell'occhio degli Anfibi e cioè la possibile fusione di due occhi in uno solo, durante lo sviluppo embrionale, mediante il trapianto dell'abbozzo oculare. I risultati ottenuti⁽³⁾, mi hanno indotto a considerare successivamente e, ancor più nei dettagli, alcuni punti oscuri del differenziamento indipendente di tale abbozzo, che dai numerosi Autori che si interessarono delle salienti questioni dello sviluppo dell'occhio dei Vertebrati, erano stati considerati appena incidentalmente o tralasciati addirittura.

Con tali scopi estesi le mie ricerche a varie specie di Anfibi anuri e urodeli (*Rana*, *Pleurodeles*, *Triton* e *Axolotl*) facendo fare, in pari tempo, a laureandi dell'Istituto di Zoologia, ricerche sussidiarie per la conoscenza del problema fondamentale.

Così, in *Triton*, il Trüniger⁽⁴⁾ verificò la possibilità di fondere due vescicole ottiche in un solo calice perfettamente regolato, rendendo validi, anche per questa specie, i risultati dei miei primi esperimenti in *Pleurodeles*. In un secondo tempo lo Spirito⁽⁵⁾ poté confermare con sicurezza quanto

(1) Queste ricerche sono state continuate nell'Istituto di Zoologia della R. Università di Roma, con l'aiuto di un sussidio per ricerche di embriologia sperimentale, assegnatomi, sui fondi Treccani, dal Consiglio di Presidenza della R. Accademia dei Lincei, alla quale esprimo il mio vivo ringraziamento.

(2) Nella seduta del 6 gennaio 1929.

(3) P. PASQUINI, in «Boll. Ist. d. Zool. R. Univ. Roma», V, 1927; Id., in «Rend. R. Acc. Naz. Lincei», vol. V, serie 6^a, 1^o sem., fasc. 6, 1927.

(4) E. TRÜNIGER, in «Boll. Ist. d. Zool. R. Univ. Roma», V, 1927.

(5) A. SPIRITO, in «Rend. R. Acc. Naz. Lincei», vol. VII, serie 6^a, 1^o semestre, fasc. 9, 1928.

avevo in precedenza previsto e reso noto per alcune ricerche preliminari ⁽¹⁾, che cioè la vescicola ottica mantiene la sua capacità di autodifferenziamento anche se trapiantata da embrioni di uno stadio meno avanzato (in questo caso corrispondente alla comparsa del bottone codale, dopo la chiusura delle pieghe midollari), in uno più avanzato, quando cioè i fenomeni di differenziamento tardivo, sono già in atto. Per questi casi lo Spirito fece conoscere come, ad un certo momento dello sviluppo, che corrisponde all'assorbimento del tuorlo, si stabilisca un'accelerazione nel differenziamento dell'abbozzo trapiantato, dalla quale deriva il sincronito sviluppo dell'abbozzo meno differenziato e la vescicola ottica normale.

Le ormai classiche ricerche del Lewis ⁽²⁾, dello Spemann ⁽³⁾, di Mangold ⁽⁴⁾ e di Mangold e Spemann ⁽⁵⁾, che hanno messo in chiaro in *Rana*, *Bombinator* e *Triton*, la natura indipendente dei processi di differenziamento per l'abbozzo oculare primario, cioè ancora non palese nell'embrione e, come tale, corrispondente al territorio del margine antero-laterale della piastra midollare, sono state il punto di partenza di tutte le ricerche successive. I risultati di queste (Detwiler e May, Pasquini, May, Truniger, Spirito) hanno appunto esteso tale potere, all'abbozzo già differenziato in vescicola ottica in stadi più avanzati di sviluppo, mentre, ancora recentemente, occhi normalmente differenziati, da pezzi trapiantati sui lati del ventre, sono stati descritti, a conferma delle numerose ricerche anteriori, da Adelman ⁽⁶⁾ in *Triton taeniatulus*, ma con altri propositi, e utilizzando sempre come pezzo da trapiantare il margine della piastra midollare corrispondente al territorio dell'abbozzo.

Le precedenti ricerche (Pasquini, 1927, loc. cit.) avevano già dimostrato che la vescicola ottica, in virtù di questo suo potere, di svilupparsi indipendentemente dai territori embrionali immediatamente ad essa adiacenti (dal cervello in modo particolare, perchè esso esclusivamente dà luogo alla sua formazione) può differenziarsi ulteriormente se trapiantata a contatto diretto della vescicola ottica di un altro embrione e quindi in territorio assolutamente diverso dal normale. In tali condizioni, per un difetto apportato ad uno dei due abbozzi oculari — nei miei esperimenti sempre la vescicola ottica appartenente all'embrione ospite del pezzo trapiantato — in rapporto a nuove condizioni spaziali che subentrano nella regione cefalica dell'embrione, ove lo spazio disponibile per lo sviluppo dell'occhio diminuisce, si compie tanto in *Pleurodeles*, che in *Triton*, in

(1) P. PASQUINI, in « Rivista di Biologia », vol. IX, fasc. 4 e 5, 1927.

(2) W. H. LEWIS, in « Amer. Jour. of Anat. », vol. 7, 1907.

(3) H. SPEMANN, in « Arch. f. Entwicklungsmech. », Bd. 43, 1918; Id., in « Naturwissenschaften », 7, 1919.

(4) O. MANGOLD, in « Naturwissenschaften », 14, 1926.

(5) O. MANGOLD e H. SPEMANN, in « Arch. f. Entwicklungsmech. », Bd. III, 1927.

(6) B. H. ADELMANN, in « Arch. f. Entwicklungsmech. », Bd. 113, 1928.

Axolotl e in Rana, la completa regolazione e fusione di due vescicole ottiche che si differenziano in un unico calice. Varie modalità nella formazione della lente si palesano, a fusione avvenuta, secondo che con la vescicola ottica fu trapiantato insieme o non, l'ectoderma che la ricopre.

Dalla considerazione di questi fatti sorge naturale la domanda di qual natura e grado sia il potere di regolazione della vescicola ottica: ciò mi propongo di esaminare in questa Nota.

I fenomeni ormai messi in luce per la fusione, determinata con il trapianto di una delle vescicole, di due occhi in uno solo hanno dimostrato l'intervento di processi di regolazione compensatoria nelle due vescicole poste a contatto, nonchè il loro sviluppo contemporaneo e quindi la contemporanea estrinsecazione delle potenze morfogenetiche dei territori cellulari costituenti l'intera vescicola. Questa si deve quindi considerare come un *sistema equipotenziale armonico* nel significato dato a questi termini dal Driesch ⁽¹⁾ e l'esperienza infatti mi ha confermato, come del resto lo spiccato potere di autodifferenziamento della vescicola e delle sue parti, sembravano suggerire, la veridicità della mia supposizione.

Trattandosi della vescicola ottica primaria, già differenziata come tale, sebbene ancora all'inizio della sua formazione (nei miei esperimenti la vescicola era appena costretta alla base, senza accenno al peduncolo ottico), io presi a considerare il valore dei territori cellulari compresi nei vari danti della vescicola, il dorsale, il ventrale, l'anteriore, il posteriore e l'esterno seguendo, nel fare l'asportazione di porzioni della vescicola, alcuni piani direzionali fissati nelle tre direzioni dello spazio. I risultati degli esperimenti di regolazione di due vescicole ottiche in una, *sono egualmente positivi per porzioni asportate, appartenenti ai quattro danti della vescicola ottica dell'ospite; variano invece per il quinto dante, l'esterno, definito dalla direzione del piano sagittale*: in questo caso la fusione dei due abbozzi, per sovrapposizione di uno intero di essi sulla metà dell'altro, si compie *con la maggiore regolarità e nella più alta percentuale dei casi.*

Questo reperto mi sembra di notevole importanza e va particolarmente segnalato perchè ci dice che, similmente a quanto l'Harrison ⁽²⁾ ha dimostrato per l'abbozzo degli arti (fusione di due abbozzi in uno doppio, secondariamente regolato), è possibile fare sviluppare un occhio normale da due vescicole fuse insieme. Da ciò scaturisce la dimostrazione dell'equipotenzialità del sistema, *vescicola ottica primaria*, specie quando si segua, come risulta dai miei protocolli, il comportamento di un occhio doppio di dimensioni abnormi che va gradatamente, nei giorni successivi all'ope-

(1) H. DRIESCH, in « Arch. f. Entwicklungsmech. », Bd. 8, 1899; Id. in « Arch. f. Entwicklungsmech. », Bd. 10, 1900; Id., in « Ergeb. d. Anat. u. Entwickl. », Bd. 14, 1905; Id., in « Arch. f. Entwicklungsmech. », Bd. 30, 1910.

(2) R. G. HARRISON, in « Journ. Exp. Zool. », vol. 25, 1918.

razione, decrescendo nelle sue dimensioni fino a prendere — dopo 11-15 giorni — l'aspetto di un occhio normale di regolare grandezza.

Una seconda prova dell'equipotenzialità degli elementi componenti la vescicola ottica mi è stata suggerita dallo studio della rigenerazione embrionale. Ho applicato perciò il metodo degli esperimenti di difetto, tenendo conto degli errori che possono essere prodotti nell'interpretazione degli effetti dell'asportazione dall'intervento di processi di rigenerazione e regolazione per i quali frammenti residuati dell'abbozzo che si considera, possono, differenziandosi egualmente, apparire prodotti della rigenerazione.

I poco persuasivi e non definitivi risultati di Dragendorf⁽¹⁾ nell'embrione di pollo e la discussa questione della rigenerazione della vescicola ottica negli embrioni di Anfibi, sulla quale nella letteratura, figurano a mia conoscenza i soli lavori della King⁽²⁾ e di Bell⁽³⁾ furono già messi in chiaro in un mio precedente lavoro⁽⁴⁾ dove obbiettivamente esposi i risultati di esperimenti di asportazione della vescicola ottica in *Rana* e *Pleurodeles*. In base ad essi dobbiamo ormai ritenere risolto e in maniera definitiva il problema della rigenerazione embrionale dell'occhio: *la vescicola ottica, con l'abbozzo del peduncolo, asportata completamente dalla parete encefalica, non si rigenera mai*. Tale conclusione, già da me resa nota, per i casi studiati negli embrioni di *Pleurodeles* e *Rana*, è stata controllata, nella scorsa primavera, con altri esperimenti in embrioni di *Axolotl* in vari stadi di sviluppo, a partire dallo stadio di bottone codale. Questi risultati, presi insieme con quelli tratti dalle mie operazioni condotte in *Triton* e studiate dal Truniger, non lasciano più alcun dubbio sulla: *mancata rigenerazione della vescicola ottica negli embrioni di Anfibi (Rana, Triton, Pleurodeles, Axolotl, le quattro specie da esperimento)*. Se vengono però lasciati *in situ* dei frammenti della vescicola, questi hanno la capacità di differenziarsi, talvolta rudimentalmente, in un piccolo occhietto (mostri monoftalmi asimmetrici dei miei *Pleurodeles*).

Ho fatto perciò regolari asportazioni di porzioni della vescicola comprese nei vari danti di essa: l'effetto che si produce con l'asportazione di una zona della vescicola è sempre il medesimo, entro certi limiti, nella metà dorsale, ventrale, cefalica e caudale, ma è sempre più spiccato quando della vescicola si lascia in posto la parte che spetta al diante prossimale all'encefalo (la stessa che con la sovrapposizione di una vescicola ottica trapiantata, dà luogo al caso più tipico di fusione e nella più alta percentuale degli esperimenti).

(1) F. DRAGENDORF, *Experimentelle Untersuchungen über Regenerationvorgänge am Auge und an der Linse bei Hühnerembryonen*. «Inaug. Diss.», 1903; ROSTOCK.

(2) H. D. KING, in «Arch. f. Entwicklungsmech.», Bd. 19, 1905.

(3) E. T. BELL, in «Arch. f. Entwicklungsmech.», Bd. 23, 1907.

(4) P. PASQUINI, in «Monitore Zoologico», anno XXXIX, nn. 3 e 4.

In ogni caso si compie di regola, l'autodifferenziamento di un piccolo occhio.

È necessario quindi ammettere una *equipotenzialità dei vari danti* della vescicola, che mostra, in base a dati di fatto, come ogni parte di essa ha un valore prospettico simile alle altre. Ciò che Harrison (loc. cit.) ha messo in evidenza, per primo, nei riguardi dell'abbozzo dell'arto, si applica alla vescicola ottica primaria: *i diversi territori della quale* (compresi, secondo il nostro metodo, nei sei danti della vescicola) *non palesano differenze qualitative nelle potenze delle loro cellule costituenti*. Queste si debbono ritenere raggruppate in un sistema embrionale equipotenziale armonico: la vescicola ottica primaria.

Per concludere: *i processi di regolazione compensatoria durante lo sviluppo della vescicola ottica dimostrano, nella loro qualità e grado, come essa debba essere considerata un sistema specifico equipotenziale e autodifferenziabile*. Una prova di questa definizione, in quanto tratta dai reperti dedotti dalla fusione di due vescicole, rientra nelle prove più generali dell'equipotenzialità dei costituenti di un sistema embrionale, applicate dagli embriologi fino alla condizione più estrema: quella cioè che si verifica nelle ova giganti prodotte da fusione di due singole ova. In questo caso, come è noto per le ricerche sugli Echinodermi (Bierens de Haan, "13; Boveri, "13; Driesch, "00, "10; Goldfarb, "14; Herbst, "14; Morgan, "95), Nemertini (Nusbaum e Oxner, "13), *Ascaris* (zur Strassen, "96, "98), Anfibi (Mangold, "20), il risultato che si può osservare, sia naturalmente, che in condizioni sperimentali, è la regolazione di due ova in un individuo gigante.

L'altra prova è che *la vescicola ottica può svilupparsi ulteriormente, resa difettosa di qualsiasi metà compresa nei vari danti, meglio previa asportazione del diante esterno, ciò dimostrando come ogni parte di essa, più o meno regolarmente, abbia la capacità di autodifferenziarsi come un'intera vescicola*.

Dovrei considerare ancora il comportamento dell'encefalo reso difettoso in seguito all'asportazione della vescicola ottica primaria, ciò che mi propongo di fare in un mio prossimo lavoro. Posso però fino da ora fare rilevare che (a prescindere dal fatto notorio a chi si occupa di embriologia sperimentale dei vertebrati, che cioè un largo difetto apportato nella parete del prosencefalo determina un conseguente assottigliamento della parete ove si compie la cicatrizzazione, risultato del resto presumibile) ho osservato, nelle quattro specie considerate, che quanto più precisa e intera è l'asportazione della vescicola, di tanto minor grado sono i processi rigenerativi che intervengono nel cervello, al quale viene ad essere asportato solo il territorio determinato per l'occhio.

In secondo luogo, se con la vescicola ottica viene asportata parte della parete encefalica, che di regola consiste in porzione della lamina terminale e della regione dell'abbozzo del chiasma, tutti questi territori, di dominio neurassiale, si autodifferenziano trapiantati con l'occhio. Questo risulta più

o meno normale e di dimensioni più o meno regolari, quanto più, completa è stata l'asportazione della vescicola. I fenomeni che avvengono nell'embrione ospite del trapianto, sia per i casi di fusione parziale di due vescicole, sia per i mostri monoftalmi asimmetrici, che per i monoftalmi tipici (vedi i miei numerosi esperimenti in *Pleurodeles*), la presenza o assenza del tessuto neurassiale autodifferenziatosi nella nuova sede, sono gli indici più precisi del grado del difetto apportato nell'embrione donatore: ecco perchè in tutti gli esperimenti, da me ideati, sono stati considerati parallelamente, il donatore e il corrispondente ospite del trapianto.

Biologia. — *Uova e larve di Tonno* (*Orcynus thynnus Ltkn*)⁽¹⁾.
Nota di L. SANZO, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Di questo interessantissimo Scomberoide furono da me per primo dati nel 1909⁽³⁾ i caratteri delle uova ovariche mature. Sulla guida di tali caratteri si prospettava possibile il rinvenimento delle uova libere in mare e già fecondate, e con ciò anche la possibilità di conoscenza dei primi stadi di sviluppo del *Tonno*.

In una Nota preliminare⁽⁴⁾ del 1910 accennai fugacemente ai caratteri della larva schiusa da uova pescate libere e galleggianti nelle acque, durante il periodo di maturazione sessuale del *Tonno* ed aventi gli stessi caratteri che le uova ovariche mature da me descritte. Mi proponevo di poter chiarire, presto in dettaglio e con figure illustrative, lo sviluppo embrionale del *Tonno*. Se non che le difficoltà enormi pel ritrovamento ed il differenziamento delle uova fecero di anno in anno ritardare la pubblicazione dei dati definitivamente assodati e quali essi possono solo ora apparire nella presente Nota e successivamente, con corredo di molte figure, in una Memoria del R. Comitato Talassografico Italiano.

Le uova di *Tonno* sono galleggianti, sferiche, trasparenti e con una grande goccia oleosa. Misurano in diametro da mm. 1 a mm. 1.12. Capsula con fine struttura a reticolo non in tutte le uova egualmente visibile. Assenza di spazio perivitellino. Vitello omogeneo; goccia oleosa unica del diametro di mm. 0.25 a mm. 0.28.

Periodo di incubazione brevissimo, non oltrepassante due giorni; uova pescate nel mattino con calotta blastodermica a metà dell'equatore si presentano nel pomeriggio a blastoporo chiuso. Col processo di sviluppo bla-

(1) Dall'Istituto Centrale di Biologia Marina in Messina.

(2) Nella seduta del 6 gennaio 1929

(3) SANZO L., *Studi sulla biologia del Tonno* (*Orcynus thynnus Ltkn*). « Rivista mensile di Pesca e Idrobiologia », 1910, n. 1.

(4) SANZO L., *Uova e larve di Scomberoidi*, ibid., nn. 7-9.

stodermico le uova sono divenute meno trasparenti per rifrangenza accentuata di molti degli elementi della lamina epidermica. L'embrione abbraccia, a questo stadio, per intero il mezzo meridiano, e sono presenti le vescicole ottiche primarie. Due-tre ore dopo sono già differenziate le vescicole ottiche secondarie col relativo cristallino. L'embrione presenta una mezza dozzina di segmenti e dei piccoli cromatofori in nero attorno la goccia oleosa.

Verso la fine del primo giorno di incubazione la coda disimpegnata dal vitello ripiega in alto abbracciando il sacco vitellino. Su tutto il corpo, tranne che sulla regione cefalica, si trovano sparsi dei cromatofori neri e, commisti con essi, sulla regione addominale dei cromatofori gialli. Il cuore, già abbozzato nella sua posizione embrionale, presenta le prime contrazioni. Sono presenti le vescicole auditive. La corda fa sporgenza a mo' di astuccio sull'estremo caudale. Il numero dei segmenti è notevolmente aumentato.

Nel secondo giorno di sviluppo embrionale, l'embrione si accresce rapidamente in lunghezza in modo che l'estremo caudale ripiegandosi sempre più sulla superficie distale del vitello viene a raggiungere e ad oltrepassare il livello della regione cefalica. La pigmentazione sia nera che gialla è divenuta più intensa e più estesa invadendo anche la regione cefalica.

L'uovo si schiude verso la fine del secondo giorno di incubazione. La larva appena schiusa misura sui mm. 3. Capo non ancora disimpegnato dal sacco vitellino; occhio ancora senza tapetum; bocca non ancora aperta. Il tubo intestinale decorre diritto per ripiegarsi col suo tratto terminale ad angolo retto ventralmente e sboccare sul margine della pinna primordiale poco avanti della metà della distesa del corpo. Il sacco vitellino ancora poco ridotto arriva a livello della mediana verticale dell'occhio, ed indietro un piccolo tratto avanti dell'apertura anale. Goccia oleosa all'estremo posteriore del sacco vitellino. La pinna primordiale dorsale è rappresentata sulla regione cefalica da una bassa listarella che sul tronco guadagna subito in altezza e procede indietro arcuata in alto dapprima, e, successivamente, degradante in una lieve insenatura che diverrà più sensibile negli stadi successivi. La primordiale anale procede fino all'apertura anale quasi simmetrica a quella dorsale. Si contano 39 segmenti.

La larva tutta presenta un certo grado di agghiacciamento per la rifrangenza accentuata di molte cellule epidermiche. Dei cromatofori neri sono distribuiti: sul profilo dorsale e ventrale del tronco caudale; lateralmente sul tronco addominale, sul tratto terminale ripiegato dell'intestino, sulla goccia oleosa, sulla volta anteriore del sacco vitellino ed attorno agli occhi. Del tutto caratteristici dei cromatofori gialli sulla pinna primordiale dorsale nella sua porzione che si estende sul capo e sul tronco addominale. Qualche altro cromatoforo giallo sul tratto terminale ripiegato dell'intestino e qua e là sul sacco vitellino.

I caratteri della larva appena schiusa vanno, entro lo stesso giorno, rapidamente modificandosi. Già poche ore dopo il capo si è rialzato dal

sacco vitellino che si mostra alquanto più ridotto; la listarella di primordiale dorsale sul capo si è rialzata e messa sulla linea della porzione che le segue indietro; i cromatofori gialli si mostrano distribuiti lungo il margine della pinna primordiale dorsale nella sua porzione anteriore. Il pigmento nero lungo il profilo dorsale del tronco caudale è in massima parte migrato ventralmente ad unirsi con quello del profilo ventrale. Si notano i primi abbozzi di archi branchiali.

Verso sera dello stesso primo giorno la larva è fortemente progredita nella sua interna organizzazione mentre corrispondentemente il sacco vitellino si è fortissimamente ridotto; nella piccola massa residuale spicca ancora grande la goccia oleosa.

La bocca è aperta, l'intestino fortemente aumentato di diametro, e l'apertura anale alquanto migrata in avanti. L'occhio incomincia a pigmentarsi ed il cuore si presenta ruotato nella sua posizione definitiva. Il pigmento giallo lungo il margine della pinna primordiale nella sua porzione anteriore, è ridotto ad un numero minore di elementi. Anche il pigmento nero della regione cefalica è alquanto diminuito; persiste quello lungo il profilo ventrale del tronco caudale ed è accresciuta invece la pigmentazione sul tratto terminale dell'intestino. Il numero dei segmenti rimane sempre di 39.

Nello sviluppo successivo fino al quinto giorno dalla schiusa il pigmento giallo scompare, e va riducendosi quello nero sul profilo ventrale del tronco caudale; in contrapposto quello della volta addominale si estende sempre più. La regione addominale diviene meno estesa mentre il capo si fa più alto e più tozzo. Senza addentrarci in particolari descrittivi quali appariranno nella Memoria del R. Comitato Talassografico, rileviamo solo che la larva al quinto giorno di sviluppo dalla schiusa presenta varî caratteri morfologici che si ritrovano nelle più piccole larve di *Tonno* che si pesca in questo Stretto, di notte con sorgenti luminose.

Patologia. — *Sul significato dei corpi di Heinz-Ehrlich e sui rapporti tra apparato macrofagico e mieloplastico*⁽¹⁾. Nota di B. STRAMPELLI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. A. DIONISI.

I corpi di Heinz-Ehrlich, come è noto, sono delle formazioni endoglobulari che appaiono negli eritrociti in seguito ad avvelenamento mediante alcune sostanze ad azione tossica sui globuli rossi, quali la pirodina, la fenilidrazina, il bleu Nilo.

L'importanza della scoperta di tali formazioni risulta dal fatto che esse vengono a rappresentare un nuovo mezzo per poter meglio differenziare il vario meccanismo d'azione dei vari veleni del sangue. Il reperto, infatti, dei corpi di Heinz-Ehrlich permette di poter fare ulteriori distinzioni nelle attuali classificazioni dei veleni del sangue, quale ad esempio quella di Naegeli-Hirschfeld fatta recentemente per differenziare i vari meccanismi d'azione, di tali veleni, e i loro vari effetti, presenza o meno di emoglobinuria, presenza o assenza d'ittero. Mentre, infatti, la toluidinamina, la pirodina, la fenilidrazina, il pirogallolo vengono uniti in un unico gruppo attribuendo ad essi un identico meccanismo d'azione in base alla loro proprietà di trasformare l'emoglobina in metaemoglobina, sottraendola dal globulo rosso, invece tenendo conto delle modificazioni morfologiche del globulo rosso tali veleni debbono essere distinti in due gruppi, quelli in cui si formano i corpi di Heinz-Ehrlich (pirodina, fenilidrazina) e quelli in cui essi non si formano (toluidinamina, pirogallolo).

La conoscenza dei corpi di Heinz-Ehrlich ha inoltre importanza anche nel campo clinico e medico-legale, poichè il loro reperto ha permesso in più casi di porre diagnosi di una estrema delicatezza. Caratteristico è il caso citato da Schilling di due lattanti, i quali vennero ricoverati con i segni di una intensa cianosi, tanto da far pensare ad un vizio congenito di cuore, e in cui fu possibile poi porre una giusta diagnosi per il fatto che nei preparati di sangue si riuscì a mettere in evidenza la presenza di globuli rossi con corpi di Heinz-Ehrlich, onde si pensò trattarsi di un avvelenamento, il che venne confermato dalle successive ricerche di Noiland, il quale dimostrò che i bambini erano stati avvolti in fasce non lavate recanti dei timbri recentemente stampati con colori di anilina, come dimostrarono ricerche chimiche di Salkowschi.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Patologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 6 gennaio 1929.

Dall'epoca della loro scoperta fino ad oggi vario è stato il significato attribuito dai vari autori ai corpi di Heinz-Ehrlich. Ehrlich ritenne che tali formazioni dovessero interpretarsi come corpi neoformati per azione del veleno ed in base alla loro forte eosinofilia, li ritenne costituiti di meta-emoglobina o di derivati simili dell'emoglobina, tanto che diede a tali formazioni il nome di *corpi di degenerazione emoglobinemica*. Successivamente, però, essendosi osservato che i corpi di Heinz-Ehrlich si formano, oltre che con sostanze metaemoglobinizzanti (pirodina), anche con sostanze che non modificano l'emoglobina come il bleu Nilo, si dubitò della natura emoglobinemica di tali formazioni. Ed oggi, in base a successive ricerche si è venuti alla conclusione che i corpi di Heinz-Ehrlich non risultano di meta-emoglobina o di altri derivati dell'emoglobina. Ciò si è potuto stabilire per il fatto che si è riusciti a fare un'analisi chimica dei corpi di Heinz-Ehrlich, usufruendo della proprietà, che i corpi di Heinz-Ehrlich hanno di resistere all'emolisi in vitro con acqua distillata, mentre il resto del globulo rosso si disfa, per cui i corpi di Heinz-Ehrlich si raccolgono nel sedimento, sul quale si può procedere all'analisi chimica. Con tale analisi Hertwich, Suzuki e Kunkel sono venuti nella conclusione, che i corpi di Heinz-Ehrlich non risultano di emoglobina o suoi derivati, ma di una sostanza lipoidea (diamidofosfatide) contenente piccole quantità di sostanze albuminoidee ma non emoglobina. Alla stessa conclusione sono venuti Gustein e Wallbach, i quali adottando diversi metodi di colorazione, hanno ottenuto una colorazione elettiva di contrasto dei corpi di Heinz-Ehrlich, rispetto all'emoglobina ed al resto del globulo rosso. Così con acido picrico e verde di Guinea i corpi di Heinz-Ehrlich appaiono gialli ed il resto del globulo rosso verde. Inoltre hanno anche notato che i corpi di Heinz-Ehrlich si colorano, oltre che con l'eosina, anche con sostanze basiche (violetto di metile, bleu di metilene carbolico, fucsina carbolica). Per cui, in base a tale modo di colorarsi dei corpi di Heinz-Ehrlich, essi ritengono che i corpi di Heinz-Ehrlich non siano fatti di emoglobina, e spiegano la loro colorabilità con l'eosine in modo diverso da quello che era stato ammesso da Ehrlich (natura emoglobinemica), ammettendo che i corpi di Heinz-Ehrlich assumono l'eosina per un processo fisico di soluzione dell'acido eosinico nella sostanza lipoidea, tanto più che Pappenheim ha dimostrato che i corpi di Heinz-Ehrlich hanno specialmente un'affinità per l'eosine lipoido-solubili con cui si colorano anche vitalmente. Per cui oggi, non si ammette più la natura emoglobinemica di tali formazioni ma si considerano costituite essenzialmente di lipoidi.

Per ciò che riguarda la presistenza o meno nel globulo rosso dei corpi di Heinz-Ehrlich si è voluto ammettere da Schilling contro l'idea di Ehrlich, di Heinz e di Pappenheim, che i corpi di Heinz-Ehrlich siano corpi preformati, messi soltanto in maggiore evidenza dal veleno che quasi fissandoli li rende più resistenti all'emolisi e perciò più visibili. Appoggiando

tale modo di vedere, Gutstein e Wallbach credono, che i corpi di Heinz-Ehrlich derivino da speciali formazioni da essi messe in evidenza nel globulo rosso normale, di uguale grandezza e forma dei corpi di Heinz-Ehrlich, e che loro chiamano col nome di *corpuscoli interni*.

Ora contro questo modo di vedere stanno i risultati delle ricerche da me eseguite. Infatti, avvelenando dei conigli con pirodina per iniezione sottocutanea, ed allestendo di ora in ora dopo l'iniezione preparati a goccia spessa, usufruendo della proprietà dei corpi di Heinz-Ehrlich di resistere all'emolisi, son riuscito a mettere in evidenza i corpi di Heinz-Ehrlich sin dal loro primo apparire, quando cioè nello striscio i globuli rossi non mostrano ancora alcuna speciale formazione, ed ho potuto così vedere che dopo 4 ore dall'iniezione di pirodina i corpi di Heinz-Ehrlich appaiono come corpicciuoli piccolissimi, appena appena visibili, che nelle ore successive si vanno facendo sempre più grandi, raggiungendo dapprima la grandezza delle granulazioni pseudoeosinofile dei leucociti ed infine, dopo 24-48 ore un volume eguale ed anche superiore alle granulazioni eosinofile. Questo fatto a me pare parli in favore dell'opinione sostenuta da Heinz, Ehrlich e Pappenheim, che cioè il corpo di Heinz-Ehrlich sia una produzione neoformata, poichè se si trattasse di formazione preesistente nel globulo rosso normale, mal si comprenderebbe il modo di apparizione e di accrescimento graduale dei corpi di Heinz-Ehrlich.

Inoltre, aggiungendo in vitro a sangue defibrinato ed a sangue citratato pirodina in soluzione acquosa, anche dopo 48 ore di soggiorno in termostato, non sono riuscito ad ottenere la formazione dei corpi di Heinz-Ehrlich, sebbene si formi metaemoglobina. Ciò si accorda più con l'idea, che si tratti di un processo vitale di neoformazione a carattere degenerativo che non con l'idea che il veleno renda più evidenti quasi fissandoli i corpuscoli di Gutstein e Wallbach, in modo da trasformarli in corpi di Heinz-Ehrlich.

Per cui, tenendo anche conto della natura chimica dei corpi di Heinz-Ehrlich, è logico ammettere che tali corpi si formino a poco a poco per l'azione esercitata dal veleno nel corpo del globulo rosso, per una specie di lipofanerosi.

Per meglio chiarire il meccanismo di formazione dei corpi di Heinz-Ehrlich ho voluto vedere l'influenza dell'apparato macrofagico sulla produzione di tali formazioni, ho perciò avvelenato con pirodina conigli interi e conigli che in seguito alla splenectomia conservavano solo una parte dell'apparato macrofagico.

Di questi conigli, tutti appartenenti alla medesima nidiata, alcuni interi e alcuni splenectomizzati sono stati sottoposti a trattamento pirodinico mediante iniezioni sottocutanee di una soluzione acquosa di pirodina all'1%,

per un periodo di tempo di 37 giorni, somministrando ogni volta il veleno in proporzione di 3 cengr. pro chilo, raggiungendo perciò quasi la dose massima compatibile con la vita. Gli intervalli fra un'iniezione e l'altra, sono stati determinati dalle condizioni del sangue messe in evidenza con i vari metodi di ricerca eseguiti quotidianamente (conte, strisci, gocce spesse). Constatata cioè la comparsa dei corpi di Heinz-Ehrlich e un intenso stato anemico del sangue, si attendeva la ricostituzione per praticare le successive iniezioni.

Un'altra parte di conigli interi e splenectomizzati sono stati sottoposti ad un trattamento pirodinico mediante tre successive iniezioni di piccolissima quantità di pirodina in soluzione acquosa all'1°/100, e cioè si è proceduto ad una prima iniezione di 1 mmgr. pro chilo, quindi dopo tre giorni ad una seconda iniezione di 4 mmgr. pro chilo, ed infine dopo altri tre giorni ad una terza iniezione di 7 mmgr. pro chilo. Fino a che cioè col ripetuto esame delle gocce spesse si è riusciti a constatare la presenza dei corpi di Heinz-Ehrlich, stabilendo così la dose minima di pirodina capace di produrre i corpi di Heinz-Ehrlich nello splenectomizzato e nell'intero.

Mediante queste ricerche ho potuto constatare con l'esame quotidiano delle gocce spesse e degli strisci, che i corpi di Heinz-Ehrlich compaiono contemporaneamente sia negli animali sani che negli splenectomizzati, tanto adoperando dosi elevate come dosi minime di pirodina, mentre la diminuzione dei corpi di Heinz-Ehrlich nel sangue circolante avviene molto più rapidamente negli animali interi, tanto che la scomparsa dei corpi di Heinz-Ehrlich si effettua in media dopo circa otto giorni dall'iniezione di pirodina, mentre negli animali smilzati perdurano ancora per altri quattro giorni. Da ciò risulta che l'apparato macrofagico non deve avere una grande importanza nella formazione dei corpi di Heinz-Ehrlich, parte invece attiva esso prende sicuramente per la scomparsa dei globuli rossi contenenti i corpi di Heinz-Ehrlich.

Contemporaneamente allo studio dei corpi di Heinz-Ehrlich ho seguito nei conigli interi ed in quelli smilzati trattati con pirodina il comportamento della ematopoiesi, per raccogliere nuovi dati sui rapporti tra funzione splenica e midollare.

Si presume, infatti, che l'eccitazione dell'apparato macrofagico abbia per conseguenza una inibizione dell'apparato mieloplastico, ma non c'è una serie di esperienze di tale peso da autorizzare una affermazione così importante. Ora confrontando quotidianamente i reperti del sangue degli animali interi e degli animali smilzati, in cui con la somministrazione di una sostanza emolitica quale la pirodina, si era venuti ad indurre un accettabile dell'apparato macrofagico ed a causa dell'anemia una reazione dell'apparato mieloplastico, ho potuto vedere con il reperto e la conta nel sangue di forme giovani della serie rossa, rappresentate da emazie basofile

e normoblasti, che la reazione midollare nei primi tre giorni dopo l'avvelenamento è molto più rapida ed intensa negli animali smilzati, e raggiunge in essi fin dai primi giorni un valore massimo di circa 31.000 normoblasti per mm³, mentre negli animali interi non si raggiunge mai nemmeno nei giorni successivi una cifra superiore agli 11.000 normoblasti per mm³. Ciò concorda pienamente con il concetto che l'eccitazione dell'apparato macrofagico induce una inibizione sull'apparato mieloplassico, giacchè laddove l'apparato macrofagico è in maggior quantità (animale intero) quivi la reazione midollare viene frenata facendosi meno intensa e più lenta.

In accordo a ciò sta anche il fatto che mediante la conta dei globuli rossi ho potuto constatare che negli animali interi l'anemia è più intensa specie dopo alcuni giorni dall'avvelenamento, ciò si spiega facilmente non solo per il fatto che nell'animale intero l'immissione in circolo dei globuli rossi giovani si effettua più lentamente, ma anche per il fatto che, avendosi una maggiore quantità di apparato macrofagico, vengono più rapidamente sottratti dal circolo i globuli rossi alterati, come è stato dimostrato con lo studio dei corpi di Heinz-Ehrlich che etichettano il globulo rosso danneggiato.

Per ciò che riguarda i globuli bianchi, non è risultata una notevole differenza di comportamento, nè per il numero, nè per quanto riguarda il rapporto fra le varie specie dei globuli bianchi, desunto mediante le formule leucocitarie; si è riscontrata soltanto nei primi giorni dopo l'avvelenamento una lieve leucocitosi sia nei sani che negli smilzati, sebbene negli smilzati sia avvenuta con un leggero anticipo, ed abbia dato in seguito luogo ad una leucopenia lievemente maggiore che negli animali interi.

Per cui, secondo questi risultati si può concludere che la milza non esercita una notevole azione sulla leucopoiesi, a differenza di quanto accade per la eritropoiesi che subisce da parte della milza un'azione inibitrice. Quest'azione inibitrice spiega, oltre che la più rapida riparazione del sangue negli animali smilzati, anche il fatto che questi animali resistono di più all'azione dei veleni emolitici, come ho potuto constatare tenendo conto del modo di comportarsi del loro accrescimento.

BIBLIOGRAFIA

- BESANÇON et LABBÉ, « Tr. d'hématologie », Paris Steinheil, 1904.
 BIGNAMI-DIONISI (Zentralblatt, 1894).
 CORICA A., « Modificazioni delle glandole emolinfatiche nell'anemia sper. da pirodina », *Pediatria*, 1914.
 DIONISI A., « Contributo alle correlazioni tra apparato sessuale e apparato emolinfopoiatico » (Atti della Società italiana di patologia, VI. Riunione Modena, 1901).
 DIONISI A., « Lezioni sull'Anatomia patologica del sangue », Roma 1925-1926.
 EHRLICH (Kongr. f. inn. Med., Leipzig, 1892).
 FRÄNKEL (Zeitschrift für Clin. Med., supplemento al volume 17, 1890).
 ID. (Zentralblatt für Allgemeine Pathologie und pathologische, 1905, n. 21).

- FREYTON, « Beiträge zum Ersatz der Milzfunktion » (Pflüger's Arch., 1907, vol. 120).
 FRIEDSTEIN, (Folia haematol.), 12.
 GALIFI, « Sul processo eritrocateretico negli uccelli con speciale riguardo alle relazioni fra eritrocateresi splenica ed epatica » (Accad. Lincei, vol. XXXII, 1923).
 GHIRON M. e MARINO S., « Alterazioni del sangue e del tessuto epatico nei conigli splenectomizzati » (Bollettino della R. Accad. Med., 1926).
 ID., ID., « Alterazione di crescita nei conigli splenectomizzati » (Bollettino della R. Accad. Med., 1926).
 GUCCIONE F., « Sulle alterazioni del sistema reticolo endotelio in vari animali e con veleni diversi » (Policlinico [Sez. Med.] 1926).
 GUTSTEIN M. und WALLBACH G., « Untersuchungen über die Heinz-Ehrlichschen hämoglobinämischen Innenkörper » (Virchows Arch. B. D., 267).
 ID., « Ueber den Bau der Erythrocyten » (Erwiderung auf die Bemerkungen von Schilling zu der Arbeit von Gutstein und Wallbach dieses Archivs. B. D., 265).
 ID., (Folia haematol.), 33.
 ID., ID. (Virchows Arch. f. Pathol., ecc., 263).
 ID. (Zentralbl. f. Bakteriöl. Parasitenk. Infektions Kauke Abt. 1 Arig., 95, H. 7, 8, 1925).
 ID., « Zur Theorie der Violettärbung » (Klin. Wochenschr., 1927, n. 9).
 HEINZ (Virchows Arch. Pat. Anat., ecc., uz ally Pathol., 29).
 HERTWICH, (Folia haematol.), 13.
 KRONING, « Avvelenamento da Marettina » (Medizinische Klinik, 1905).
 LEVI, « Azione dei telluriti sul sangue, ecc. (Haematologica, 1922).
 LUBARSCH, « Sulle conoscenze del sistema reticolo endotelio Macrofago » (Verh. d. d. Ges. 1921).
 MARAGLIANO (Gazzetta ospedali e Cliniche, 1909, n. 22, p. 226).
 MESSE M. und ROTHMANN M., « Ueber Pyrodivergiftung bei Hunden » (Deut. Mediz., Woch., 1906).
 OBERLING, « Le system R. E. » (Ann. d'anath. path., v. 1, 1924).
 PAPPENHEIM und SUZUKI, (Folia haematol.), 13.
 POC, « Dissertazione iniziale », Heidelberg, 1905.
 SCHILLING-TORGAN, (Folia haematol.), 14.
 ID. (Virchows Arch. f. Pathol., ecc., 234).
 SCHMANCH (Virchows Arch. f. Pathol., ecc., 156).
 SCHWALB und SOLLEY (Virchows Arch. f. Pathol., 1886).
 SUZUKI, (Folia haematol.), 13.
 TALLQUIT (Zentralblatt, 1894).
 ZIRONI G. (Annali Cl. Chirurgica di Firenze, 1910).

Fisiologia. — *Sulla curva idremica in riposo nella marcia e nella corsa.*
 Nota di U. CASSINI e L. BRACALONI, presentata dal Socio S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il PRESIDENTE dà inizio alla prima seduta del nuovo anno col formulare i più vivi auguri per i Soci, e per le fortune dell'Accademia.

Coglie anche l'occasione per inviare le più vive felicitazioni ai Colleghi recentemente nominati senatori, e rileva come sia cagione di soddisfazione per l'Accademia il fatto che i rappresentanti dell'alta cultura chiamati con recente provvedimento del Governo a far parte del Senato, sono tutti Lincei.

Rivolge particolari felicitazioni al Socio prof. MILLOSEVICH, che è tra i presenti, e ne mette in rilievo le alte doti di scienziato e di amministratore del pubblico denaro.

L'Assemblea si associa alle parole del Presidente con vivi applausi.

Il Socio ARMELLINI commemora il defunto Socio ABETTI.

Il Presidente ringrazia il Socio Armellini per la bella commemorazione fatta.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio ARMELLINI presenta in omaggio il Calendario dell'Osservatorio Astronomico del Campidoglio per l'anno 1929.

L'Accademico Segretario prof. PARRAVANO presenta i libri giunti in dono all'Accademia segnalando un numeroso gruppo di pubblicazioni inviate in omaggio dal Socio SACCO; «Sezioni di Calcolo Tensoriale» del Corresp. N. CISOTTI; «Calcolo numerico» di N. CASSINA; i fasc. 1-4 del vol. XXV dell'«Archivio italiano di Anatomia e di Embriologia», diretto dal Socio G. CHIARUGI; «Colloid Chemistry Theoretical and applied by selected international contributors», raccolti e editi da JEROME ALEXANDER; «Untersuchungen über Enzyme» di B. WILLSTAETTER.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio CASTELNUOVO, anche a nome del Socio LEVI-CIVITA, legge la relazione con la quale si propone la stampa delle Memorie di B. DE-FINETTI «Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio». L'Assemblea approva.

Il Corrispondente BAGLIONI, anche a nome del Corresp. LO MONACO, legge la relazione con la quale si propone la stampa della Nota di M. MITOLO «Sulla natura dell'azione biologica degli alcoli». L'Assemblea approva.

PRESENTAZIONE DI NOTE

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci AMALDI, ARMELLINI, BAGLIONI, CASTELNUOVO, CROCCO, DIONISI, FRANCHI, GIORGI, LEVI-CIVITA, PARRAVANO, SEVERI, VOLTERRA.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Socio FANO ricorda che il 12 di gennaio ricorre il secondo Centenario della nascita di Spallanzani, e ne esalta l'opera di biologo, rammentando specialmente le sue famose esperienze per combattere la dottrina della generazione spontanea, per cui può considerarsi il precursore di Pasteur, quelle sulla fecondazione, sul succo gastrico e sul chimismo respiratorio. Accenna anche alle sue benemeritenze di geologo viaggiatore e rileva infine come quella dello Spallanzani sia una figura spiccatamente italiana per il suo eclettismo, la semplicità e la limpidezza del suo pensiero e della sua tecnica.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 6 gennaio 1929

- ALEXANDER J. — Colloid Chemistry Theoretical and Applied. Vol. II. New York, 1928. 8°, pp. 1-1029.
- ALEXIS L. V. — The Syllabus to Fundamentals in Physics and in Chemistry. New Orleans: s. d. 8°, pp. 1-40.
- AMEGHINO F. — Obras completas y correspondencia científica. Vol. VII. La Plata. 1917. 8°, pp. 1-518.
- Annali dell'Osservatorio di economia agraria di Bologna. Vol. I, 1927. Piacenza, 1928. 4°, pp. 1-381.
- Archivio italiano di Anatomia e di Embriologia. Vol. XXV. Firenze, 1928. 8°, pp. 1-660.
- Calendario del R. Osservatorio Astronomico di Roma sul Campidoglio. N. S. Vol. V. Anno 1929. Bologna, 1928. 8°, pp. 1-108.
- CASSINA U. — Calcolo numerico. Bologna, 1928. 8°, pp. I-XVII, 1-151.
- CISOTTI U. — Lezioni di calcolo tensoriale. Milano, 1928. 8°, pp. 1-99.
- FISHER W. J. — Remarks on the Meteoric Procession of 1913 february 9. (Reprint. from « Popular Astronomy ». Vol. XXXVI, pp. 398-403). s. l. 1928. 8°.
- FULCO P. — Congruenze algebriche ed esponenziali. Applicazioni. Memoria II. Civitavecchia, 1928. 4°, pp. 1-230.
- Il R. Istituto Superiore Agrario in Portici. 1872-1928. Spoleto 1928. 4°, pp. 1-601.
- IVALDI G. — Scienza ed esperienza. (Estr. dal « Giornale di Bibliografia Tecnica Internazionale ». Anno VI). Bologna, 1928. 8°, pp. 1-24.
- PARODI U. — Apparato genitale femminile. (Trattato di anatomia patologica. Volume XIII). Torino, 1929. 4°, pp. 1-262.
- SACCO F. — Ascensioni celesti. (Estr. dalla Rivista « Urania ». Vol. XVI, 1927). Mondovì, 1927. 8°, pp. 1-21.
- SACCO F. — Attorno al Gran Paradiso in aeroplano. (Estr. da « Il Parco Nazionale del Gran Paradiso ». Vol. II, 1928-vi). Torino 1928. 8°.
- SACCO F. — Caverne delle Alpi piemontesi. (Estr. dalla Rivista « Le Grotte d'Italia ». 1928). Torino, 1928. 8°, pp. 1-28.
- SACCO F. — Glaciologia artistica. (Estr. dalla Rivista « L'Escursionista ». Anno XXIX, 1927). Torino, 1927. 8°, pp. 1-12.
- SACCO F. — Gli Orridi di Foresto e di Chianoc (Val di Susa). (Estr. dalla Rivista « L'Ercursionista ». Anno XXVIII). Torino, 1926. 8°, pp. 1-8.
- SACCO F. — Gli studi glaciologici in Italia. Roma, 1927. 4°, pp. 1-42.
- SACCO F. — Guglie Alpine del Piemonte. (Estr. dalla Rivista Turistica « Pro Piemonte ». 1926). Torino, 1926. 8°, pagine 1-12.
- SACCO F. — I cento laghetti delle Alpi Marittime. (Estr. dalla Rassegna mensile dell' « Unione Ligure Escursionisti », 1927). Genova, 1927. 8°, pp. 1-19.
- SACCO F. — I colossi alpini del Piemonte e la loro origine. (Estr. dalla Rivista Turistica « Pro Piemonte », 1927). Torino, 1927. 8°.
- SACCO F. — I funghi di ghiaccio. (Estr. dalla Rassegna mensile « Unione Ligure Escursionisti ». 1928). Genova, 1928. 8°, pp. 1-8.
- SACCO F. — I laghi di Avigliana. (Estr. dalla Rivista « L'Escursionista ». Anno XXX, 1928). Torino, 1928. 8°, pagine 1-12.
- SACCO F. — I grandi laghi postglaciali di Rivoli e di Ivrea. (Estr. dal periodico « L'Universo ». Anno IX, 1928). s. l. 1928. 8°, pp. 1-12.
- SACCO F. — I massi erratici. (Estr. dalla Rivista « L'Escursionista ». Anno XXX, 1928). Torino, 1928. 8°, pp. 1-22.

- SACCO F. — I Seracchi. (Estr. dalla Rivista Turistica «Pro Piemonte». 1928-vi). Torino, 1928. 8°. pp. 1-8.
- SACCO F. — I solchi di Montjovet. (Estr. dal Bollettino della Società della «Flore Valdôtaine», n. XX, 1928). Aosta, 1928. 8°, pp. 1-13.
- SACCO F. — Il dente del Gigante. (Estr. dal Bollettino della Società della «Flore Valdôtaine», n. XIX, 1927). Aosta, 1927. 8°, pp. 1-10.
- SACCO F. — Il diluvio glaciale in Val Sangro (Estr. dagli «Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino». Volume LXIII, pp. 133-144). Torino, 1928. 8°.
- SACCO F. — Il glacialismo nella Valle di Aosta. Torino, 1927. 8°, pp. 1-66.
- SACCO F. — Il glacialismo nelle Valli di Lanzo. Torino, 1928. 8°, pp. 1-28.
- SACCO F. — Il glacialismo nel gruppo del Monviso. (Estr. dal Bollettino glaciologico italiano». 1927). S. l. 1927. 8°, pp. 1-93.
- SACCO F. — Il glacialismo nelle Valli di Pinerolo. (Estr. dal «Bollettino del R. Ufficio geologico d'Italia». Vol. LIII, 1928). Roma, 1928. 8°, pp. 1-25.
- SACCO F. — Il grande levigatore delle Alpi. (Estr. dalla Rivista Turistica «Pro Piemonte». 1927). Torino, 1927. 8°.
- SACCO F. — Il medagliere del Vesuvio. (Estr. dalla Rivista del Touring Club Italiano «Le vie d'Italia». 1927). Milano, 1927. 8°, pp. 1-12.
- SACCO F. — Il paesaggio glaciologico della Valle d'Aosta. (Estr. dagli «Atti del X Congr. Geografico Italiano». 1927). Milano, 1927. 8°, pp. 1-6.
- SACCO F. — Impronte e figure fossili di pressione. (Estr. dagli «Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino». Volume LXIII, pp. 193-216). Torino, 1928. 8°.
- SACCO F. — La guerra e la geologia. (Estr. da «Echi e Commenti». 1928). Roma, 1928. 12°, pp. 1-42.
- SACCO F. — La porta dei ghiacciai. (Estr. dalla Rivista «L'Eursionista». Anno XXIX, 1927). Torino, 1927. 8°, pp. 1-11.
- SACCO F. — Le piramidi delle Fate. (Estr. dalla Rivista «Il Secolo XX», 1928). s. d. t. 4°, pp. 1-4.
- SACCO F. — Le pietre litografiche in Italia. (Estr. da «L'Industria Mineraria». Anno II). Roma, 1928. 4°, pp. 1-6.
- SACCO F. — Le valli dell'Orco e della Soana nell'epoca glaciale. (Estr. da «Il Parco Nazionale del Gran Paradiso». Vol. II, 1928-vi). Torino, 1928. 8°.
- SACCO F. — Les révolutions du globe. (Estr. des «Actes du Congrès géol. internat.». Vol. XIII, pp. 1683-1692). Bruxelles, 1926. 8°.
- SACCO F. — Nastri alpini. (Estr. dalla Rivista «L'Eursionista». Anno XXVIII, 1926). Torino, 1926. 8°, pp. 1-11.
- SACCO F. — Osservazioni geo-speleologiche in Val di Pesio. (Estr. dagli «Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino». Volume LXI, pagine 749-762). Torino, 1926. 8°.
- SACCO F. — Quintino Sella scienziato. (Estr. della Rivista Mensile del «Club Alpino Italiano». Vol. XLVI, 1927). Torino, 1927. 8°. pp. 1-5.
- SACCO F. — Schema geologico del Biellese. (Estr. dal volume «Il Biellese»). Ivrea, 1927. 4°, pp. 1-39.
- SACCO F. — Specchi Alpini. (Estr. dalla Rivista Turistica «Pro Piemonte». 1926). Torino, 1926. 8°, pp. 1-12.
- SACCO F. — Un esempio di geologia applicata all'economia idrica. (Estr. da «Echi e Commenti», 1927). Roma, 1927. 12°, pp. 1-8.
- SANCHEZ ROIG M. — Instituto Nacional de Investigaciones Científicas y Museo de Historia Natural. 1903 a 1928. Habana, 1928. 8°, pp. 1-220.
- VALLÉE-LE ROUX. — Révolution de la mécanique classique actuelle. Poitiers, 1928. 8°, pp. 1-24.
- WILLSTÄTTER R. — Untersuchungen über Enzyme. Band. I, II. Berlin. 1928. 4°, pp. I-XVI, 1-860; I-XI, 1-775.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 20 gennaio 1929 (anno VII)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Geometria. — *Ancora sopra un paradosso topologico.* Nota II⁽¹⁾
del Socio F. SEVERI e di B. SEGRE.

6. Una varietà topologica M_n , ad n dimensioni, omogenea, non può esser divisa in due parti da una M_k , di dimensione $k < n - 1$; in due parti tali che non si possa passare con continuità dall'una all'altra senza attraversare M_k .

La dimostrazione si consegue appoggiandosi sulle proprietà seguenti, delle quali ci occuperemo poi (nn. 7, 8).

a) Una linea tracciata su M_n non può incontrare M_k che in numero *finito* di punti o di cellule.

b) Entro uno spazio lineare S_n , una M_k è tagliata da uno S_{n-k} generico di un sistema lineare ∞^k , in un gruppo di un numero *finito* di punti variabili.

Ammesse le a), b), supponiamo che dalla M_k la M_n possa esser divisa in due parti. E osserviamo che esiste certamente qualche punto P di M_k , tale che in ogni intorno (comunque piccolo) di P , entro M_n , esistono punti di ciascuna delle due parti.

Si supponga invero l'opposto, cioè che per ogni punto P di M_k sia possibile determinare un intorno abbastanza piccolo, entro M_n , il quale, oltre ai punti di M_k , contenga punti di una sola delle due parti in cui M_k divide M_n . Presi allora due punti qualunque A , B di M_n , fuori di M_k , se essi sono congiunti da una linea M_1 di M_n , incontrante M_k nei punti

(1) Presentata nella seduta del 6 gennaio 1929.

P, Q, R, \dots (in numero finito) ed in talune cellule E'_i, E''_i, \dots (in numero finito), si può sostituire ad M_i un'altra linea, di estremi A, B , contenuta in M_n e non incontrante M_k , colla costruzione seguente.

Si determini un intorno di P , il quale non contenga che punti di una delle due parti di M_n ; e sieno A', B' due di questi punti, da bande opposte di P , sulla linea M_i . Si può tracciare una linea di M_n congiungente A', B' , senza incontrare M_k . All'arco $A'B'$ di M_i si sostituirà questa linea, e similmente si farà attorno ai punti Q, R, \dots .

Quanto alla cellula E'_i , di cui sieno C', D' gli estremi, o gl'intorni abbastanza piccoli di C', D' son costituiti da punti di una medesima delle due parti di M_n , e allora due punti H', K' di M_i , esterni ad E'_i ed abbastanza prossimi rispettivamente a C', D' , son esterni alle cellule E'_i, \dots , ed appartengono alla medesima parte di M_n , ond'è possibile di congiungerli con una linea di M_n , non incontrante M_k , che si sostituirà all'arco $H'K'$ di M_i . Oppure gl'intorni di C', D' appartengono a parti diverse di M_n . In quest'ultimo caso i punti di E'_i , che succedono a C' nel verso da C' a D' , ed i cui intorni appartengono alla medesima parte di M_n , alla quale appartiene l'intorno di C' , hanno, in E'_i , un estremo superiore S' ; ed è chiaro che in un intorno comunque piccolo di S' esistono punti di ciascuna delle due parti di M_n , contrariamente all'ipotesi fatta. Dunque il secondo caso non può presentarsi. Similmente si può procedere per le cellule rimanenti E''_i, \dots .

La conclusione è che due punti qualunque A, B di M_n , non appartenenti ad M_k , possono essere congiunti da una linea non incontrante M_k ; il che contraddice all'ipotesi fatta sulla divisione in parti di M_n . Esiste dunque, come si è detto in principio, un punto P di M_k , tale che in ogni intorno (comunque piccolo) di esso trovansi punti di ciascuna delle due parti di M_n .

Si tenga ora conto dell'omogeneità di M_n . Un intorno abbastanza piccolo di P , è una cellula E_n , alla quale P è interno. Dunque questa cellula è divisa in due parti dalle cellule (una o più) in cui M_k è segata dalla cellula ipersferica dello spazio lineare ambiente, che stacca E_n sopra M_n . Cioè E_n è divisa in due parti da una M_k . Questa conclusione è pur essa assurda.

Per dimostrarlo, ragioneremo come se E_n fosse una cellula ipersferica di S_n : ipotesi lecita, a causa dell'omeomorfismo tra E_n ed una cellula siffatta. Presi due punti A, B di due parti diverse di E_n , un S_{n-k} generico per AB , essendo suscettibile di variare in un sistema lineare ∞^k (il cui S_{n-k-1} base può esser individuato, oltre che da A, B , da altri $n-k-2$ punti generici di S_n), sega M_k , fuori della retta AB , in un numero finito di punti, ed E_n in una cellula ipersferica E_{n-k} . Essendo per ipotesi $n-k \geq 2$, si può tracciare entro E_{n-k} una linea che vada da A a B , senza incontrare alcuna delle intersezioni di M_k coll' S_{n-k} ambiente; si contraddice così alla proprietà ammessa, che dunque è assurda.

Restan da stabilire le proprietà *a)*, *b)*. Ci limiteremo a dimostrarle nel caso di varietà *analitiche*. È quello che basta per la maggior parte delle applicazioni topologiche all'analisi.

7. La proprietà *a)* non è che un caso particolare del seguente teorema generale:

Gli eventuali punti comuni a due varietà analitiche (costituite cioè da un numero finito di cellule analitiche), si distribuiscono in un numero FINITO di varietà analitiche (di dimensioni non necessariamente uguali). In particolare esse non possono avere in comune che un numero FINITO di punti, fuori delle varietà analitiche di dimensione > 0 , ove esse s'intersecano ⁽¹⁾.

Inverò, poichè le varietà che si considerano son costituite da un numero finito di cellule analitiche, ogni punto di una di esse è origine di un numero finito di *falde analitiche* (reali) ⁽²⁾, ogni falda non essendo niente altro, quando la si limiti opportunamente, che l'insieme dei punti di una cellula analitica. Il teorema vale per l'intersezione di due falde aventi la stessa origine ⁽³⁾, e quindi è vero per due varietà analitiche, perchè un loro punto comune può sempre considerarsi come origine di una o più falde analitiche appartenenti a ciascuna di quelle varietà.

Esso consegue in sostanza da due proprietà fondamentali: l'una è il fatto elementare che una funzione di una variabile, olomorfa in un campo chiuso (secondo Cantor), non possiede ivi che zeri isolati; l'altra è il teorema di esistenza delle funzioni implicite per le funzioni olomorfe di più variabili.

P. es. per due *linee analitiche*, il risultato che esse *non possano avere in comune che un numero finito di punti o di archi analitici* ⁽⁴⁾ può ottenersi semplicemente così.

Con una successione di trasformazioni quadratiche dello spazio, si possono anzitutto ridurre le due linee (aventi soltanto singolarità algebroidi)

(1) È molto probabile che il teorema sia vero sostituendo alle varietà analitiche *varietà topologiche* (costituite da un numero finito di cellule), le quali godano di proprietà infinitesimali molto generali, p. es. quella di possedere soltanto punti semplici o punti multipli di tipo algebrico. Il teorema enunciato vale altresì per varietà analitiche nel campo complesso.

(2) Cfr. le *Vorlesungen über algebraische Geometrie* di F. SEVERI (p. 309 e sg.). Ivi si parla di falde analitiche nel campo complesso, ma le stesse considerazioni valgono per le falde analitiche reali. Ad evitare *singolarità parametriche apparenti*, sarà opportuno di aggiungere, alla definizione di falda là contenuta [insieme dei punti di uno spazio lineare le cui coordinate non omogenee son funzioni di k parametri t_1, \dots, t_k , olomorfe in un certo intorno di $(t_1^{(0)}, \dots, t_k^{(0)})$], la condizione che ogni punto della falda provenga da un solo gruppo di valori dei parametri.

(3) V. le citate *Vorlesungen*, p. 313.

(4) La definizione accennata al principio di questo numero, implica che si tratti di linee analitiche *limitate*, o che possano considerarsi come tali nello spazio proiettivo; ed inoltre che esse abbiano soltanto *singolarità algebroidi*.

a linee prive di punti multipli. Sia dunque P un punto comune a due linee analitiche α, β , semplice per entrambe. Se le due linee sono distinte nell'intorno di P , è facile vedere che esse non s'incontrano nel detto intorno, fuori di P . Invero, essendo P semplice per α, β , si può fissare un fascio d'iperpiani dell'ambiente, tale che gl'iperpiani prossimi a P taglino α, β in un sol punto vicino a P . Preso allora come parametro t quello che individua la posizione dell'iperpiano nel fascio, nell'intorno di P le coordinate del punto variabile sopra ciascuna delle α, β , saranno serie di potenze di t , aventi un intervallo di convergenza comune. Per $t = t_0$ (valore di t che dà P), due di queste serie, che rappresentino la medesima coordinata, p. es. x , assumono lo stesso valore, onde la differenza è nulla per $t = t_0$. Ma in un intorno abbastanza piccolo di t_0 tale differenza non si annulla più, e da ciò la conclusione.

Oppure, se vuolsi profittare soltanto dell'ipotesi che *le due linee sieno limitate, prive di punti asintotici e di punti non algebroidi*, si può ragionar così. Dopo averle ridotte a possedere soltanto punti semplici, se esse avessero infinite intersezioni, costituenti un insieme discreto di punti, questo avrebbe almeno un punto limite P , il quale dovrebbe appartenere sia ad α che a β , in quanto le due curve, per ipotesi prive di punti asintotici, sono insiemi chiusi (nel senso di Cantor). Pertanto a P si potrebbe applicare il ragionamento precedente, e dedurne che il punto stesso è intersezione isolata; contro l'ipotesi che esso sia limite di intersezioni.

Similmente, le due linee non possono avere in comune un insieme discreto infinito di archi analitici, perchè, considerando questo insieme sopra una delle due linee, p. es. su α , esisterebbe ivi almeno un punto P (p. es. l'estremo superiore degli estremi destri dei suddetti archi, ordinati in un verso di α), in ogni intorno comunque piccolo del quale si troverebbero punti di tali archi parziali e punti di α ad essi esterni. E si ricadrebbe nel caso precedentemente discusso e scartato.

Osservazione. — La proprietà *a*) vale di certo per varietà topologiche più generali delle analitiche, come si vedrà p. es. per $n = 2, k = 1$ in una prossima Nota di F. Severi.

8. La proprietà *b*) consegue ovviamente dall'analiticità. Invero, se una M_k analitica di S_n fosse incontrata, da un S_{n-k} variabile in un sistema lineare ∞^k , secondo una *linea variabile*, l'intorno di un punto generico di M_k potrebbe porsi (mediante il sistema ∞^k di linee segate su M_k dall' S_{n-k} variabile, ed il fascio di varietà segatevi dall'iperpiano di un fascio generico) in corrispondenza biunivoca continua coi gruppi di valori di $k + 1$ numeri, contrariamente all'ipotesi che la varietà sia di dimensione k . A maggior ragione M_k non potrà esser segata, dallo S_{n-k} variabile, in una varietà variabile di dimensione > 1 ; dunque essa è incontrata dal generico S_{n-k} in un gruppo formato necessariamente (n. 7) da un numero finito di punti variabili.

9. Il teorema di cui al n. 4 (Nota I), è anche contenuto implicitamente nel fatto che ogni varietà algebrica a tre dimensioni, appartenente alla V_4^3 rappresentativa delle coppie (non ordinate) dei punti di un piano, è intersezione completa di V_4^3 con una forma di S_5 ⁽¹⁾.

Invero, alle sezioni iperpiane di una varietà algebrica T , che rappresenti birazionalmente, senza eccezione, le coppie di punti del piano e quindi i punti di V_4^3 , corrisponde su V_4^3 un sistema lineare, senza punti base, di varietà a tre dimensioni, le quali devono esser segate su V_4^3 da un sistema lineare di forme, di un certo ordine l , dello spazio S_5 . Il grado di quel sistema è l^4 . Quattro forme variabili del sistema segante, che passino per un punto P di F , segano V_4^3 fuori di P , in $3l^4 - 2$ punti variabili. Onde a P corrisponde su T un punto P' , che è pure doppio.

La proprietà si estende:

Un modello che rappresenti birazionalmente, senza eccezione, le coppie (non ordinate) dei punti di una superficie algebrica priva di punti multipli, ha necessariamente una superficie multipla, corrispondente alle coppie di punti coincidenti ⁽²⁾.

Infatti, un punto della superficie, essendo semplice, ha il proprio intorno (complesso) che può porsi in corrispondenza biunivoca continua coll'intorno (complesso) di un punto del piano. E pertanto risultano riferiti in una simile corrispondenza, anche gl'intorni, sulle rispettive varietà delle coppie (non ordinate), di una coppia di punti coincidenti sulla superficie e di una coppia di punti coincidenti del piano. Sicchè gl'intorni di 1° ordine dei due elementi hanno lo stesso ordine invariante relativo, che è 2 per il secondo (n. 5, Nota I) e quindi anche per il primo.

La proprietà si estende ulteriormente alle varietà delle coppie o dei gruppi di punti (non ordinati) di una varietà algebrica, priva di punti multipli; per quelle varietà si hanno però punti multipli con ordini invarianti ≥ 2 .

10. Chiudiamo coll'osservare che:

Una varietà reale, che rappresenti biunivocamente, senza eccezione, le coppie (non ordinate) dei punti reali del piano proiettivo, è chiusa ⁽³⁾ *ed omogenea.*

Invero, in un punto P della superficie di Veronese F , l'intorno della V_4^3 riducesi a due cellule quadridimensionali E_4 , aventi in comune una cellula E_2 , che sta su F . Ebbene, la E_2 è interna alle cellule E_4 . Infatti, il vertice P del cono quadrico reale irriducibile, sezione del cono tangente a V_4^3 con un S_3 generico per P , è interno alle due cellule costituenti l'intorno di P sul detto cono. Pertanto, se ci si limita a considerare quella parte

(1) Cfr. G. BORDIGA, « Ann. di Mat. », 27 (3), 1918, p. 1.

(2) Se pertanto si prende come modello della predetta varietà, una varietà priva di punti multipli, ogni coppia di punti coincidenti vien rappresentata per lo meno da una curva.

(3) È superfluo avvertire che la varietà va considerata in senso proiettivo.

reale di V_4^3 , che rappresenta le coppie dei punti reali del piano, cioè l'insieme dei punti esterni ad F e dei punti di F , si ha in S_5 una varietà reale W^* chiusa ed omogenea.

Conclusione questa, che contrasta in modo curioso con quello che concerne la varietà rappresentativa delle coppie (non ordinate) dei punti reali di una retta proiettiva, che è topologicamente equivalente alla parte del piano esterna ad una conica, coll'aggiunta dei punti di questa; varietà che ha dunque un *contorno*, mentre W^* non lo ha. Analogo raffronto può farsi fra le varietà che rappresentano le coppie dei punti complesso-coniugati di una retta o di un piano, completate colle immagini delle coppie di punti reali coincidenti.

La conclusione si trasporta immutata alla varietà rappresentativa delle coppie (non ordinate) dei punti di una superficie algebrica, priva di punti multipli⁽¹⁾.

Meccanica. — *Sui moti di deformazione nello spazio, rappresentati mediante il calcolo delle matrici.* Nota⁽²⁾ del Corrisp. G. GIORGI, e di ERNESTA PORCU-TORTRINI.

1. Prendiamo qui come punto di partenza le definizioni e le proprietà di *fattore* e *indice*, e di esponenziale e logaritmo di operazioni appartenenti a gruppi normali, e di matrici in generale, esposti in due Note precedenti da uno di noi⁽³⁾, e le applichiamo per stabilire altre definizioni e indicare metodi di rappresentazione atti allo studio di moti tipici di deformazione dello spazio.

Un moto permanente di deformazione lineare omogenea, ad origine fissa, può essere individuato dando le tre componenti della velocità come funzioni delle coordinate del punto generico P , in questa forma

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \psi_{11} x + \psi_{12} y + \psi_{13} z \\ v = \psi_{21} x + \psi_{22} y + \psi_{23} z \\ w = \psi_{31} x + \psi_{32} y + \psi_{33} z \end{array} \right.$$

(1) Il fatto che la varietà immagine (senza eccezioni) delle coppie (non ordinate) dei punti complessi di una superficie (completata come sopra), è *chiusa* (in senso topologico), giuoca in modo essenziale nella bella recente Memoria del COMESSATTI, *Sulla connessione delle superficie algebriche reali* (« Ann. di Mat. », t. 5 [IV], 1927-28, p. 299), e l'A. stesso lo avverte a p. 305. In questa Memoria occorre anzi, di più, la *omogeneità* della varietà medesima, che non è esplicitamente dichiarata dall'A. Tanto l'uno che l'altro fatto (il primo consegua dal secondo) trovano qui la loro dimostrazione.

(2) Presentata nella seduta del 6 gennaio 1929.

(3) G. GIORGI, *Sulle funzioni delle matrici*, questi « Rendiconti », vol. VII, serie 6^a (febbraio 1828), pp. 178-184; *Fattori e Indici nei gruppi lineari e nei gruppi normali d'operazioni*, Ibid. (giugno 1928), pp. 871-877.

dove le ψ_{rs} sono coefficienti costanti rispetto alle x, y, z e rispetto al tempo t . Indicando con \mathbf{x} il vettore di posizione $OP = (x, y, z)$, e con \mathbf{v} il vettore velocità $= (u, v, w)$, il secondo è funzione lineare omogenea del primo, e si scriverà

$$(2) \quad \mathbf{v} = \Psi \mathbf{x}$$

dove Ψ è una *diadica* ⁽¹⁾ (operatore lineare vettoriale, omografia vettoriale, di tensore, ecc.), la quale rispetto alla terna particolare di assi prescelta è rappresentata dalla matrice delle sue nove componenti ψ_{rs} . Sottintendendo una volta per sempre il sistema di riferimento, si può per brevità identificare la diadica (che è un ente geometrico intrinseco) con la matrice rappresentativa, e scrivere

$$(3) \quad \Psi = \|\psi_{rs}\| \quad (r, s = 1, 2, 3).$$

Di questa identificazione faremo uso costante, anche nella nomenclatura.

Considerando ora i punti come appartenenti a un mezzo materiale che si deforma, con la distribuzione di velocità data dalla legge (1), e seguendoli nel loro moto, si indichi specificamente con \mathbf{x}_0 il vettore di posizione di un punto generico all'epoca $t = 0$, e con \mathbf{x}_1 quello dello stesso punto all'epoca $t = 1$. In virtù della linearità e omogeneità del moto, anche \mathbf{x}_1 è funzione lineare omogenea di \mathbf{x}_0 , e con notazione analoga alla (2) si lascia scrivere

$$(4) \quad \mathbf{x}_1 = \Phi \mathbf{x}_0$$

dove Φ è un'altra diadica, rappresentabile nello stesso modo per mezzo di una matrice così

$$(5) \quad \Phi = \|\varphi_{rs}\|.$$

Per l'ipotesi della permanza del moto, e in conseguenza di quanto esposto nelle due Note citate, si può scrivere, coerentemente con le regole del calcolo delle matrici

$$(6) \quad \Phi = e\Psi \quad ; \quad \Psi = \log \Phi.$$

Secondo la nomenclatura ivi adottata, l'operatore Φ , il quale dà la nuova posizione di un punto generico in funzione di quella primitiva, è il *fattore* del moto deformatore, mentre l'altro operatore Ψ , il quale dà la

(1) Fra le tante denominazioni proposte per gli operatori lineari tra vettori, preferiamo quella di *diadica*, soltanto perchè è di una parola sola, e non per alludere alla rappresentazione per mezzo di *diadi*, fatta da Gibbs, e che Burali-Forti e Marcolongo hanno giustamente criticata. La diadica è il simbolo di un'affinità nello spazio, e come tale si può considerarla a sè e definirla senza ricorrere nè a diadi, nè a vettori, nè ad algoritmi di calcolo vettoriale. La rappresentazione semi-cartesiana per mezzo di matrici corrisponde a quest'ordine d'idee.

velocità in funzione della posizione, e quindi corrisponde all'operazione infinitesimale associata al gruppo delle deformazioni effettuate attraverso il tempo, è l'indice del moto deformatorio medesimo. Quando il moto è nullo, il fattore Φ si riduce all'unità (cioè ad una matrice con le componenti diagonali tutte uguali ad uno e le altre nulle), e l'indice Ψ si riduce a zero (cioè a una matrice con le nove componenti tutte nulle).

Segue pure che all'epoca generica t , il vettore di posizione del punto considerato diviene

$$(7) \quad x_t = \Phi^t x_0 = e^{t\Psi} x_0.$$

2. I metodi del calcolo delle matrici non sono ancora abbastanza progrediti per potere con una regola praticamente semplice calcolare le nove componenti dell'esponenziale o del logaritmo di una matrice in funzione di quelle della matrice medesima⁽¹⁾. Ma combinando quanto si conosce sul calcolo medesimo con quanto per altra via è noto sulle proprietà dei campi di velocità, si lasciano completare non pochi dati, e riunire elementi per un raffronto sistematico di operatori-indici con operatori-fattori; prenderemo occasione da questo per suggerire una nomenclatura sistematica sulle diadiche appartenenti ai moti tipici più comuni.

Anzitutto ricordiamo che l'invariante diagonale della matrice Ψ , cioè

$$(8) \quad \Gamma(\Psi) = \psi_{11} + \psi_{22} + \psi_{33}$$

(= I, Ψ nelle notazioni di Burali-Forti e Marcolongo), rappresenta la velocità di variazione dell'unità di volume del mezzo; per contro il terzo invariante, cioè il determinante, della matrice Φ , che noi scriviamo

$$(9) \quad \Delta(\Phi) = |\varphi_{rs}|$$

(= I, Φ nelle notazioni di B. F. e M.), rappresenta il rapporto tra volumi deformati all'epoca $t = 1$, e volumi originari all'epoca $t = 0$; e per considerazioni geometriche note, si ha quindi

$$(10) \quad \Delta(\Phi) = e^{\Gamma(\Psi)}.$$

Diremo, in particolare, *solenoidale* una matrice che ha $\Gamma = 0$; e *unimodulare* una che ha $\Delta = 1$. Ed enuncieremo il teorema

$$(11) \quad e^{\text{solenoidale}} = \text{unimodulare}.$$

Tutto questo, con le particolari traduzioni cartesiane (8) e (9) vale tanto in assi ortogonali quanto in assi obliqui qualunque, e pur anche quando

(1) Le varie regole conosciute, di Cartan, di E. Porcu-Tortrini, di Fantappiè, etc., esigono tutte la previa risoluzione dell'equazione fondamentale, che è del terzo grado.

le unità di misura lungo i diversi assi non siano le stesse, perchè Γ e Δ sono invarianti per qualunque trasformazione affine di coordinate.

Ma di qui in poi dovremo supporre, invariabilmente, che gli assi di riferimento siano ortogonali, perchè passiamo a dire di quelle proprietà la cui traduzione in formole di matrici cambia forma quando questa condizione non è soddisfatta.

3. Quando un moto è di deformazione pura, cioè irrotazionale (moto di dilatazione, nella terminologia di B. F. e M.), tanto le equazioni che determinano le velocità quanto quelle che determinano le nuove posizioni dei punti soddisfano alla condizione di simmetria

$$\varphi_{rs} = \varphi_{sr} \quad ; \quad \psi_{rs} = \psi_{sr}$$

e reciprocamente. Le diadiche e le rispettive matrici sono allora *autoconiugate* (simmetriche); e ne segue quest'altra relazione

$$(12) \quad e^{\text{autoconiugata}} = \text{autoconiugata}.$$

Proseguendo: diremo *anamorfa* una matrice, o una diadica, che sia nel tempo stesso autoconiugata e solenoidale. Un operatore così fatto è l'indice di un moto di deformazione pura senza variazione di volume (moto irrotazionale di un fluido incompressibile). Il fattore di questo moto è, per le ragioni dette, autoconiugato e unimodulare nello stesso tempo; diremo *metamorfa* la sua matrice rappresentativa. Ed enuncieremo

$$(13) \quad e^{\text{anamorfa}} = \text{metamorfa}.$$

4. Venendo invece ai moti rotazionali tipici, diremo *vorticale* una diadica la cui matrice abbia la forma

$$(14) \quad \Psi = \begin{vmatrix} s & -r & q \\ r & s & -p \\ -q & p & s \end{vmatrix}.$$

Questo operatore è l'indice di un moto di dilatazione uniforme accompagnato da rotazione, moto che produce una trasformazione per similitudine. Il fattore Φ associato a questo moto soddisfa alle condizioni che le somme dei quadrati in tutte le linee e in tutte le colonne hanno un comune valore A , e che la somma dei prodotti di elementi corrispondenti, per ogni fila e per ogni colonna è zero. Lo diremo *isogonale*, in quanto conserva gli

angoli e semplicemente gli angoli. Si potrà quindi scrivere, tra matrici o tra diadiche

$$(15) \quad e^{\text{vorticale}} = \text{isogonale}.$$

Infine: si dice *anticoniugata*, o antisimmetrica, o antimetrica, o emi-simmetrica, una matrice del tipo

$$(16) \quad \Psi = \begin{vmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{vmatrix}.$$

Un operatore rappresentato da questa matrice è l'indice di un moto rigido generale, a origine fissa, e nella terminologia di B. F. e M. prende il nome di omografia assiale. Si dimostra facilmente che esso può venire biunivocamente associato a un vettore di componenti p, q, r , o meglio a un « bivettore » di Grassmann, cioè ad un elemento di area orientata che abbia le proiezioni p, q, r sui piani coordinati. Lo chiameremo quindi elemento areale, o diadica areale, od anche *areale* semplicemente, quando vorremo mettere in rilievo questa proprietà. L'ellissoide di deformazione associato a questa diadica ha carattere degenerare, perchè è un cerchio, rotato di 90° rispetto alla sfera unitaria di partenza.

Il corrispondente fattore è quello stesso che definisce una trasformazione da assi ortogonali ad assi ortogonali, con conservazione dell'unità di misura; trasformazione che comunemente dicesi ortogonale, ma che preferiamo chiamare *ortomorfa* per non confonderla con quelle, considerate or ora, che cambiano l'unità di misura. Una matrice ortomorfa è della forma

$$(17) \quad \Phi = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

dove le α, β, γ sono i nove coseni direttori di una terna ortogonale, e quindi soddisfano a sei condizioni fra loro indipendenti. Anche qui, in virtù della relazione esponenziale tra fattore e indice, si ricava

$$(18) \quad e^{\text{areale}} = \text{ortomorfa}.$$

Si noterà che l'operatore areale ha nullo il primo e il terzo invariante, cioè soddisfa alle condizioni

$$(19) \quad \Gamma(\Psi) = 0 \quad ; \quad \Delta(\Psi) = 0$$

e che la sua equazione caratteristica (nel significato di Cayley) ha la forma

$$(20) \quad \Psi^2 + E^2 = 0$$

dove $E^2 = p^2 + q^2 + r^2$. Corrispondentemente, la matrice ortomorfa ha uguali fra loro il primo e secondo invariante, e uguale all'unità il terzo; quindi ha l'equazione caratteristica della forma

$$(21) \quad \Phi^3 - G\Phi^2 + G\Phi - 1 = 0$$

e le quantità G ed E sono legate fra loro dalla relazione

$$(22) \quad G = 1 + 2 \cos E.$$

5. Così abbiamo una serie di teoremi semplici sugli esponenziali di matrici, ricavati per considerazioni geometriche. Gli stessi teoremi si potrebbero ricavare anche coi procedimenti del calcolo delle matrici, e allora per questa via le proprietà cinematiche delle deformazioni fondamentali si dedurrebbero in conseguenza.

Ora, a complemento di questi enunciati, ricorderemo che tutte le funzioni di una diadica hanno gli stessi raggi uniti che ha la diadica medesima (salvo il poterne avere anche altri). Poichè l'indice Ψ e il fattore Φ di un moto deformatorio omogeneo sono esprimibili l'uno per mezzo dell'altro, il sistema (generalmente una terna) di raggi uniti è comune. Nelle deformazioni pure, questi raggi sono le direzioni principali della trasformazione. Nelle trasformazioni ortomorfe (moti rigidi), un raggio è l'asse di Eulero, e gli altri due sono le rette isotrope del piano normale all'asse medesimo (piano che ruota in se stesso); è da notare quindi che tanto le matrici ortomorfe quanto quelle areali conducono a individuare queste terne di raggi uniti, o invarianti geometrici, e quindi anche i covarianti (equazioni dei piani uniti) che da essi si deducono.

6. Noteremo infine che pei moti deformativi in due dimensioni (moti piani) valgono le stesse proprietà, salvo poche modificazioni, e si può applicare la stessa nomenclatura. Le modificazioni di carattere semplificativo sono le seguenti:

A) Ogni matrice essendo di secondo ordine, gli invarianti si riducono a due, quello diagonale Γ , e il determinante Δ .

B) La matrice anticoniugata non corrisponde a un areale, ma ad uno scalare, perchè assume la forma

$$(23) \quad \Psi = \begin{vmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{vmatrix} = j\theta$$

dove j è l'operatore che fa eseguire una rotazione di un angolo retto nel verso positivo. La matrice ortomorfa del fattore corrispondente ha la forma

$$(24) \quad \Phi = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$$

e può essere scritte così

$$(25) \quad \Phi = \cos \theta + j \sin \theta$$

mentre l'operatore quadrantale j è rappresentato dalla matrice

$$(26) \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

In questo caso la relazione $\Phi = e^{\Psi}$ viene a risolversi in una delle forme del teorema trigonometrico di Eulero.

Matematica. — *Il tensore triplo di Christoffel.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. U. CISOTTI.

Si consideri la varietà V_n definita metricamente dalle coordinate x_1, \dots, x_n e dalla forma differenziale quadratica

$$ds^2 = \sum_{i,k}^n a_{ik} dx_i dx_k,$$

che ne rappresenta il quadrato dell'elemento lineare. I coefficienti $a_{ik} = a_{ki}$ sono $1/2 n(n+1)$ funzioni delle coordinate x_i .

È noto che nè i simboli di Christoffel di prima specie

$$\begin{bmatrix} h & k \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{hi}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_h} - \frac{\partial a_{hk}}{\partial x_i} \right),$$

nè quelli di seconda specie

$$\left\{ \begin{matrix} h & k \\ j \end{matrix} \right\} = \sum_i^n \begin{bmatrix} h & k \\ i \end{bmatrix} a^{ij},$$

definiscono un tensore. Mi propongo, in questa Nota, di mettere in rilievo che si può definire un tensore triplo, mediante combinazioni lineari dei predetti simboli, precisamente dico che, ponendo:

$$(1) \quad C_{hik} = \begin{bmatrix} h & k \\ i \end{bmatrix} - \frac{a_{ih}}{a_{hh}} \begin{bmatrix} h & k \\ h \end{bmatrix},$$

C_{hik} sono le componenti covarianti di un tensore triplo \mathbb{C} , che denomino « tensore di Christoffel ».

(1) Presentata nella seduta del 20 gennaio 1929.

1. Per giustificare quanto ho asserito giova tener presente la seguente circostanza ⁽¹⁾: se $T_{i_1 \dots i_m}$ sono le componenti covarianti di un tensore m^{plo} \mathbf{T} qualsiasi, i rapporti

$$(2) \quad T_{i_1 \dots i_m} = \frac{T_{i_1 \dots i_m}}{\sqrt{a_{i_1 i_1} \dots a_{i_m i_m}}}$$

sono invarianti, che ho definito *componenti intrinseche* del tensore $\mathbf{T}^{(2)}$. Le (2) si possono assumere come relazioni caratteristiche fra componenti covarianti e componenti intrinseche di uno stesso tensore m^{plo} .

Ciò premesso, sia \mathbf{n} il vettore della congruenza delle linee coordinate x_b ($b = 1, \dots, n$), le cui componenti covarianti (momenti della congruenza) sono n_i ; il tensore doppio derivato \mathbf{n}' di componenti covarianti $n_{i|k}$ ha, in virtù di (2), per componenti intrinseche:

$$(3) \quad n_{i|k} = \frac{1}{\sqrt{a_{ii} a_{kk}}} n_{i|k},$$

essendo ⁽³⁾

$$n_{i|k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{a_{ih}}{\sqrt{a_{hh}}} - \sum_l \left\{ \begin{matrix} i & k \\ & l \end{matrix} \right\} \frac{a_{hl}}{\sqrt{a_{hh}}}.$$

Si rilevi che, per note formule ⁽⁴⁾, avendosi:

$$(4) \quad \sum_l \left\{ \begin{matrix} i & k \\ & l \end{matrix} \right\} a_{hl} = \left[\begin{matrix} i & k \\ & h \end{matrix} \right] \quad , \quad \frac{\partial a_{ih}}{\partial x_k} = \left[\begin{matrix} i & k \\ & h \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} h & k \\ & i \end{matrix} \right],$$

da cui, in particolare,

$$\frac{\partial a_{hh}}{\partial x_k} = 2 \left[\begin{matrix} h & k \\ & h \end{matrix} \right],$$

la precedente può scriversi così:

$$n_{i|k} = \frac{1}{\sqrt{a_{hh}}} \left\{ \left[\begin{matrix} h & k \\ & i \end{matrix} \right] - \frac{a_{ih}}{a_{hh}} \left[\begin{matrix} h & k \\ & h \end{matrix} \right] \right\}.$$

ovvero, per (1),

$$n_{i|k} = \frac{1}{\sqrt{a_{hh}}} C_{hik}.$$

(1) Cfr. le mie *lezioni di Calcolo Tensoriale*, Tamburini, Milano, 1928, p. 83. Notiamo, una volta per sempre, che quanto andiamo citando, dedotto per $n = 3$, vale per n qualunque.

(2) Loc. cit., p. 82.

(3) Loc. cit., p. 83.

(4) Loc. cit., p. 68 (4); p. 69 (6).

Per queste, (3) si può altresì scrivere:

$$(5) \quad \gamma_{\substack{b \\ i \ k}} = \frac{C_{hik}}{\sqrt{a_{ii} a_{kk} a_{bb}}}.$$

Essendo i primi membri invarianti, per quanto si è detto sopra relativamente alle (2), le C_{hik} si possono interpretare componenti covarianti di un tensore triplo \mathbf{C} , c. v. d.

2. Se l'ennupla di riferimento è ortogonale le $\gamma_{\substack{b \\ i \ k}}$ coincidono coi coefficienti di rotazione di Ricci⁽¹⁾. È interessante di rilevare che esse sono suscettibili di una doppia interpretazione. Da (3) esse appaiono come le componenti intrinseche di n tensori doppi (di componenti covarianti $n_{i \ k}$) e come tali l'indice b è ordinale; mentre da (5) risultano componenti intrinseche del tensore triplo \mathbf{C} . In tal accezione, conformemente alle notazioni adottate nelle mie *Lezioni*, conviene scrivere (5) nel seguente modo:

$$(5') \quad \gamma_{hik} = \frac{C_{hik}}{\sqrt{a_{hb} a_{ii} a_{kk}}} = C_{\substack{hik \\ b}}.$$

3. Per $i = b$ i secondi membri di (1) sono nulli, quindi:

$$(6) \quad C_{hbk} = 0.$$

Poichè il numero di tali componenti nulle è n^2 , scende che il numero delle componenti distinte e non nulle è $n^3 - n^2 = n^2(n - 1)$; il numero dei simboli di Christoffel è $\frac{1}{2}n^2(n + 1)$; la differenza tra il numero di quest'ultimi e quello delle prime è dunque

$$\frac{1}{2}n^2(n + 1) - n^2(n - 1) = \frac{1}{2}n^2(3 - n).$$

Appare da ciò che il numero delle componenti, non nulle, del tensore \mathbf{C} eguaglia quello dei simboli di Christoffel per le varietà a tre dimensioni, è inferiore per le varietà inferiori a tre dimensioni e superiore per le varietà superiori a tre dimensioni.

4. Se l'ennupla di riferimento è ortogonale, avendosi $a_{ib} = 0$ per $i \neq b$, (1) diviene

$$(7) \quad C_{hik} = \begin{bmatrix} h & k \\ i \end{bmatrix}, \quad \text{per } h \neq i,$$

(1) Loc. cit., p. 83.

da seconda di (4) scende che

$$\begin{bmatrix} h & k \\ i & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & k \\ h & \end{bmatrix} = 0, \quad \text{per } h \neq i;$$

per ciò, da (7), risulta la condizione di emisimmetria rispetto ai due primi indici:

$$(8) \quad C_{hik} + C_{ihk} = 0,$$

corrispondente, in coordinate covarianti, a quella

$$\gamma_{hik} + \gamma_{ihk} = 0,$$

relativa ai coefficienti di rotazione di Ricci, che ora scende da (5') a cagione di (8).

Chimica. — *I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini.* — XII. *Solfati di cerio (ceroso) e cesio* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ del Socio F. ZAMBONINI e di SILVIA RESTAINO.

Per completare le nostre ricerche sui solfati doppi del cerio ceroso e dei metalli alcalini mancava lo studio, per la parte che c'interessa, del sistema $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 - \text{Cs}_2\text{SO}_4 - \text{H}_2\text{O}$, come al solito, per l'isoterma di 25° ⁽³⁾.

Nella presente Nota diamo conto dei risultati ottenuti, operando così come si è fatto nelle Note precedenti. Non si è ottenuto che un solo composto, $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot \text{Cs}_2\text{SO}_4 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$ o 1-1-8, che corrisponde precisamente ad un tipo notissimo, e che noi stessi abbiamo già avuto occasione d'incontrare in molti dei sistemi studiati.

I risultati delle nostre indagini sono riuniti nella seguente

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Napoli.

(2) Presentata nella seduta del 20 gennaio 1929.

(3) Per i lavori precedenti, si vedano le Note pubblicate in questi « Rendiconti » a partire dal secondo semestre 1924.

TABELLA I.

Numero della esperienza	Composizione della fase liquida				Composizione del corpo di fondo					Costituenti il corpo di fondo
	Cs ₂ SO ₄	Ce ₂ (SO ₄) ₃	H ₂ O	Cs ₂ SO ₄ H ₂ O	Ce	SO ₄	H ₂ O	Cs	$\frac{Ce_2(SO_4)_3}{Cs_2SO_4}$	
1	46.85	—	53.25	0.87	23.29	34.42	13.27	29.02	1.20	1 — 1 — 8 + Cs ₂ SO ₄
2	41.74	—	58.26	0.72	25.64	35.60	13.32	25.44	1.50	
3	33.90	—	66.10	0.51	25.87	35.61	13.30	25.22	1.54	
4	22.45	—	77.55	0.29	25.73	35.72	13.23	25.32	1.50	
5	6.02	—	93.98	0.06	25.84	35.64	13.31	25.21	1.50	
6	4.33	3.67	92.00	0.05	26.23	35.88	12.96	24.93	1.58	1 — 1 — 8
7	2.29	4.20	93.51	0.02	26.16	35.93	13.01	24.90	1.55	
8	1.46	5.38	93.16	0.02	24.26	35.98	13.10	24.66	1.57	
9	0.45	8.06	91.49	0.004	29.68	37.82	13.00	19.50	2.18	1 — 1 — 8 + + Ce ₂ (SO ₄) ₃ ·8H ₂ O

COMPOSIZIONE CHIMICA DEL COMPOSTO OTTENUTO.

	Ce	Cs	SO ₄	H ₂ O
Ce ₂ (SO ₄) ₃ ·Cs ₂ SO ₄ ·8H ₂ O o 1-1-8	26.11	24.72	35.76	13.41

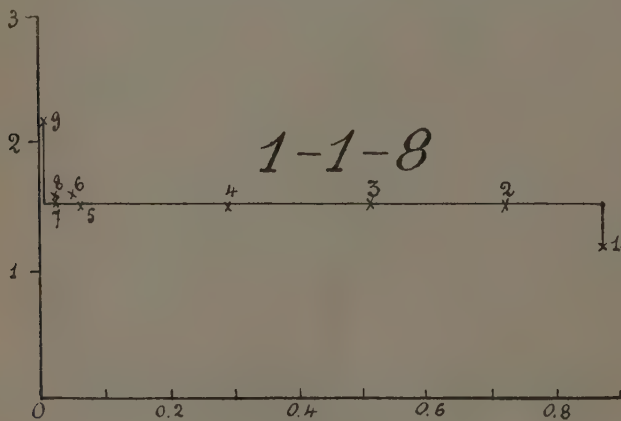


Fig. 1.

Con i dati della tabella I si è costruita la fig. 1.

Nelle esperienze di solubilità, il composto 1-1-8 si è ottenuto sotto forma di polveri bianche, cristalline, le quali al microscopio risultano costituite da cristalli microscopici, che hanno la forma di esili tavolette secondo il pinacoide $\{010\}$. Le tavolette sono limitate dagli spigoli $\{001\}$ e $\{100\}$ poco diversi in lunghezza: spesso, però, una delle due coppie di spigoli è più estesa, e, precisamente, la direzione di allungamento è positiva. L'angolo piano è di circa $85\ 1/4^\circ$. Da (010) emerge una bisettrice positiva: i due rami dell'iperbole raggiungono quasi l'orlo del campo.

Per lenta cristallizzazione di soluzioni miste dei due solfati, abbiamo ottenuti dei piccoli, ma nitidi cristallini macroscopici, i quali, però, non hanno permesso il calcolo delle costanti, perchè, come tanto spesso abbiamo

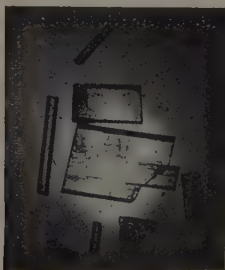


Fig. 2.

avuto occasione di osservare, nei composti di questo tipo, nella zona $[001]$ si hanno comunemente delle forme vicinali, al posto di $\{100\}$ e dei prismi $\{h k o\}$ tipici. Così, per esempio, in un cristallo, nella zona $[001]$ oltre le due faccie di $\{010\}$, ve ne erano altre due, delle quali una faceva con (010) un angolo di $89^\circ 7'$, l'altra con (010) uno di $91^\circ 19'$.

I cristalli macroscopici sono, per lo più, tabulari secondo $\{010\}$ e più o meno allungati secondo $[100]$. Non sono rari dei cristalli nei quali $\{011\}$ e $\{010\}$ hanno presso a poco la stessa grandezza, sicchè i cristalli diventano prismatici secondo l'asse a (fig. 2).

Il composto 1-1-8 è stabile, puro, a 25° , in contatto di soluzioni che contengono da 1.5% Cs_2SO_4 e 5.4% $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3$ a 46% circa Cs_2SO_4 . Ha, perciò, un campo di esistenza assai vasto.

Geologia. — *La inesistenza delle grandi falde dette «nappe du Mont Rose» e «nappe du Grand Saint Bernard» nelle Alpi Occidentali.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. S. FRANCHI.

Lo studio della tettonica delle Alpi Cozie franco-italiane mi ha condotto ad alcune conclusioni notevoli, riguardanti le ipotetiche grandi falde di carreggiamento del Monte Rosa e del Grand San Bernardo, conclusioni che credo rendere subito note, in attesa della più ampia documentazione di esse con profili, cartine e panorami ⁽²⁾.

Eccole:

1^a La *nappe du Mont Rose* di M. Lougeon e di E. Argand (*nappe V*), che equivale al *plis du Mont Rose* di E. Haug, la ipotesi della quale è stata accettata, come verità assiomatica, da preclari geologi alpini, non è che un affascinante mito, cioè una grandiosissima e bella concezione mentale, la quale non ha corrispondenza nella realtà.

2^a Nelle Alpi occidentali il contatto fra il Permiano, attribuito alla IV falda, e i Calcescisti, attribuiti alla V, è un contatto normalissimo, con vere sfumature di tipi litologici, il che è riconosciuto anche da E. Argand, il quale difatti non indica contatti anormali fra i due terreni, tanto nella sua carta strutturale che nei suoi profili; da ciò consegue che il ritenere che si tratti del contatto di due falde, anzichè di due terreni in successione normale, sia un concetto puramente ideale, che è contraddetto dalla realtà.

Lo stesso si può dire del contatto anormale di Acceglio, supposto da Kilian e Termier, ai quali, per mancanza di tempo, nel 1925, io non ho potuto far toccare nè vedere da vicino il contatto normale e con passaggi graduali dei suddetti due terreni.

3^a La *nappe du Grand Saint Bernard* (*nappe IV*), sottostante alla precedente, è essa pure meramente immaginaria; e l'affioramento di essa, indicato nella sua carta tettonica da E. Argand, è semplicemente il naturale affioramento della nota zona permo-carbonifera, detta assiale, con le sue numerose digitazioni di pieghe anticlinali, delle quali la più importante è quella di Acceglio-Col-Longet.

4^a I lembi esotici del Monte Chaberton, del Rio Secco e quelli del Brianzone, realmente esistenti, non possono avere nulla di comune e nessun rapporto di dipendenza dalla suddetta inesistente falda V; ma appartengono, senza dubbio, ad una falda non ancora definita nella sua essenza

(1) Presentata nella seduta del 6 gennaio 1929.

(2) Memorie descrittive della Carta geologica d'Italia, vol. XXII.

e nella direzione del suo movimento, alla quale si può provvisoriamente dare il nome di « *nappe Briançon-Mont Chaberton* ».

5^a Se si giudicherà che questa nuova falda, della quale nessuna traccia è nota a levante del Chaberton, abbia avuto un movimento est-ovest, cioè contrario al senso del rovesciamento, verso levante, delle pieghe del ramo orientale del *ventaglio brianzonese*, allora si dovrà necessariamente ammettere che essa sia stata molto alta, ed abbia sorvolate tutte le alte cime della regione, non avendo perciò nulla di comune con la ipotetica falda del Monte Rosa.

Queste conclusioni, contrarie alle opinioni di gran parte dei geologi alpini, fra i quali P. Termier tiene un posto eminente, quando egli vi abbia per un momento riflettuto, non costituiranno certo per lui una sorpresa, perchè egli appunto, con le sue chiare ed esplicite ammissioni di fatti importantissimi, da me illustrati fin dal 1898 e da altri geologi trascurati, e forse non meno — nè sembri questo un paradosso — colle sue ostinate negazioni di altri fatti pure assai chiari, quali le normalità dei tanto discussi contatti, ha certamente contribuito a darmi la forza per formularle così categoricamente, per modo che ne verrà, io spero, una necessaria chiarificazione alle idee ora prevalenti sulla tettonica delle Alpi occidentali, con un vigoroso risveglio ed un salto energico verso la verità.

Questa verità, alla quale si è già tanto avvicinato P. Termier, io auguro e spero che egli sia il primo ad abbracciarla, col riconoscere la inesistenza, che io credo di aver dimostrata, dei noti contatti anormali; inesistenza questa dalla quale conseguirebbe logicamente quella della grande *nappe du Mont Rose*, il cui concetto ha malauguratamente turbato, per un quarto di secolo, la chiara visione di non pochi tra i più insigni geologi alpini.

Se questa mia speranza non sarà delusa, P. Termier, il quale ha fatto nel 1925 la coraggiosa ammissione a tutti nota, avrà, ancora una volta, ben meritato dei progressi della geologia delle nostre Alpi.

A questi progressi immancabili, che avranno presto, non ne dubito, la sanzione dei geologi competenti, io sono lieto di aver potuto contribuire, col lungo lavoro e col fervore indispensabili, quando si tratti di risolvere questioni annose come la presente, di vastissima portata e dense di mistero, come sono quelle della grande tettonica alpina.

*
* *

Quanto all'età dei *grès d'Annot*, quesito di enorme importanza per la geologia delle Alpi Marittime e per la tettonica di tutte le Alpi occidentali, invece di trarre una conclusione io mi permetterò di fare, un non difficile vaticinio, il quale è, al tempo stesso, un augurio: dopo l'ammissione dell'età eocenica di quelle arenarie, fatta oralmente e per iscritto da W. Kilian e P. Termier nel 1925, e dopo l'ammissione di questa età, fatta in un

primo lavoro ufficiale, da poco stampato, a dodici anni di distanza dalla mia confutazione dell'età oligocenica (1916), ammissione che, sebbene ancora imperfetta, mi è stata causa di indicibile soddisfazione, io esprimo non solo la speranza, ma la mia certezza, che presto, con un nuovo lavoro di qualche volonteroso geologo francese, saranno preliminarmente analizzate le cause per cui dei grandi maestri di geologia alpina, come W. Kilian ed E. Haug, siano caduti in così grave errore; per potere quindi procedere al riconoscimento dell'età, non solo eocenica, ma più precisamente priaboniana inferiore, delle arenarie del Lauzanier e di Pourriac; sopprimendo dalla letteratura geologica l'espressione « *grès d'Annot* », la quale è stata oggetto, se non pure in parte causa, del lamentato gravissimo errore.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DAI SOCI

Geometria. — *Costruzione di una curva semplice sghemba di Jordan, incontrata da tutte le semirette uscenti da un punto esterno.*
Nota di B. SEGRE, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. SEVERI.

1. In questa Nota dimostro l'esistenza in uno spazio euclideo, ad un numero qualunque di dimensioni, di curve semplici (aperte o chiuse) di Jordan (cioè insiemì di punti che possano porsi in corrispondenza biunivoca senza eccezioni e continua coi punti di un segmento o rispettivamente di un cerchio), incontrate da *tutte* le semirette uscenti da un punto esterno. Tali curve, le quali in nessun punto ammettono tangente, non bastano tuttavia a spezzare la connessione dello spazio ambiente.

2. Ricordiamo anzitutto con Peano, che si può porre una corrispondenza Ω *univoca* (senza eccezioni) e *continua* fra i punti di un segmento s ed i punti di un quadrato Q , che muta gli estremi di s in due punti del contorno di Q , e tale inoltre che *ogni* punto di Q (incluso il contorno) provenga da un punto (almeno) di s .

È quindi agevole di porre una corrispondenza analoga fra i punti di un segmento AB ed i punti di una superficie sferica S . All'uopo basta dividere AB in due parti s' ed s'' , mediante un punto H interno; e parimenti scindere S (p. es. mediante un piano diametrale) in due cellule bidimensionali, con lo stesso contorno, S' ed S'' . Posti comunque degli omeomorfismi fra s ed s' , e fra Q ed S' ; ed inoltre fra s ed s'' e fra Q ed S'' , si viene, mediante essi, a trasformare Ω in una corrispondenza fra s' ed S' ed in una corrispondenza fra s'' ed S'' . In complesso si ottiene così una

(1) Nella seduta del 6 gennaio 1929.

corrispondenza ω fra i punti AB ed i punti di S; e basta che ad H considerato come punto di s' o di s'' , venga a corrispondere rispettivamente in S' ed in S'' uno stesso punto del comune contorno (ciò che si traduce in una condizione pei suddetti omeomorfismi, alla quale notoriamente si può sempre soddisfare), affinchè la ω risulti *univoca e continua*. Inoltre ogni punto di S proviene mediante ω da un punto (almeno) di AB, poichè, a seconda che sta su S' o su S'' (incluso il contorno), esso ha rispettivamente (almeno) un omologo in s' od in s'' .

Ciò premesso, e fissato sulla retta AB un qualunque punto K esterno al segmento AB, ad ogni punto P di questo segmento facciamo corrispondere nello spazio il punto \mathfrak{S} che dista dal centro O di S di un segmento eguale a KP, e che è situato sulla semiretta che congiunge O al punto di S omologo di P in ω . Con questa costruzione, ad ogni punto P del segmento AB corrisponde nello spazio *uno ed un sol* punto \mathfrak{S} , il quale è sempre compreso fra le due superficie sferiche S_a ed S_b , di centro O, e raggio rispettivamente eguale a KA e KB; supporremo, p. es., $KA < KB$, onde S_a sarà interna ad S_b . Quando P si muove con continuità su AB (ossia KP varia con continuità), l'omologo di P secondo ω si muove con continuità su di S, onde anche il punto \mathfrak{S} varia nello spazio *con continuità*. Se aggiungiamo che, dovendo essere $O\mathfrak{S} = KP$, un punto \mathfrak{S} non può provenire da due diversi punti P, possiamo concludere che il luogo Γ dei punti \mathfrak{S} è *una curva semplice aperta di Jordan*⁽¹⁾, cogli estremi sulle superficie sferiche S_a ed S_b , e tutta compresa nello spazio fra queste (in particolare, dunque, non passante per O); essa vien segata in uno ed un sol punto, da ciascuna delle superficie sferiche di centro O comprese fra S_a ed S_b .

D'altro canto Γ ha (almeno) un punto a comune con ogni semiretta uscente da O: infatti una semiretta per O sega S in un punto, che corrisponde secondo ω ad un punto (almeno) di AB; e l'omologo di quest'ultimo su Γ , è un punto situato sulla semiretta considerata.

3. Per un teorema di Netto⁽²⁾, la corrispondenza ω definita al numero precedente fra AB ed S non può essere *biunivoca* (senza eccezioni); ed inverso se — per fissare le idee — supponiamo che la corrispondenza Ω fra il segmento s ed il quadrato Q sia proprio quella di Peano⁽³⁾, è facile vedere

(1) Si verifica direttamente che la corrispondenza definita nel testo è anche *continua nel senso inverso*, che fa cioè passare dai punti di Γ ai punti di AB. Invero ai punti di Γ , che distano da un punto \mathfrak{S} meno di un dato segmento ε , rispondono ovviamente in AB punti che distano dall'omologo di \mathfrak{S} meno di ε . Il fatto dimostrato è anche conseguenza di una proposizione di C. JORDAN (cfr. *Cours d'analyse*, t. III, Paris, Gauthier-Villars, 1887, p. 588), dimostrata pure di recente dal prof. SEVERI, sotto ipotesi meno restrittive (cfr. *Conferenze di Geometria algebrica*, Roma, Stab. tipo-lit. del Genio Civile, 1927, § XII).

(2) E. NETTO, *Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, « Crelles Journ. », t. 86 (1879), p. 263.

(3) G. PEANO, *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*, « Math. Ann. », t. 36 (1890), p. 157. Esempi di analoghe corrispondenze sono stati dati posteriormente, com'è noto, da Hilbert, Lebesgue, Moore e Schoenflies.

che ad ogni punto di S risponde uno ed un sol punto di AB , tranne i punti di un insieme numerabile ed ovunque denso su S , ai quali corrispondono 2 o 3 oppure 4 punti di AB . Per dimostrarlo, basterà ricordare come si definisca la corrispondenza di Peano, il che ci sarà anche utile più tardi.

I numeri t dell'intervallo $0 \cdots 1$, sono tutti esprimibili nella numerazione a base 3 sotto la forma

$$(1) \quad t = 0, a_1 a_2 a_3 \dots,$$

ove le cifre a assumono solo i valori 0, 1 o 2. I numeri di detto intervallo si possono porre in uno ed un sol modo sotto la forma (1), se si esclude un insieme numerabile ed ovunque denso di numeri eccezionali, della forma

$$(2) \quad t = 0, a_1 a_2 \dots a_n 2 2 2 \dots = 0, a_1 a_2 \dots \overline{a_n + 1} 0 0 0 \dots,$$

per cui la rappresentazione a base 3 può essere fatta in duplice modo. Posto per definizione $k^n(a)$ uguale ad a oppure a $2 - a$, a seconda che n è pari o dispari, al numero (1), scelto comunque nell'intervallo $0 \cdots 1$, si può associare la coppia ordinata di numeri

$$(3) \quad x = 0, b_1 b_2 b_3 \dots, \quad y = 0, c_1 c_2 c_3 \dots$$

dell'intervallo stesso, definendone le cifre colle formule:

$$(4) \quad \begin{cases} b_1 = a_1, b_2 = k^{a_2}(a_3), \dots, & b_n = k^{a_2 + a_4 + \dots + a_{2n-2}}(a_{2n-1}) \\ c_1 = k^{a_1}(a_2), c_2 = k^{a_1 + a_3}(a_4), \dots, & c_n = k^{a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}}(a_{2n}), \end{cases}$$

le quali conducono ad una medesima coppia (x, y) , anche se t , essendo eccezionale, assume due diverse forme (2).

Le (4) s'invertono subito nel modo seguente:

$$(5) \quad \begin{cases} a_1 = b_1, a_2 = k^{b_1}(c_1), & a_3 = k^{c_1}(b_2), & a_4 = k^{b_1 + b_2}(c_2), \dots \\ a_{2n-1} = k^{c_1 + c_2 + \dots + c_{n-1}}(b_n), & a_{2n} = k^{b_1 + b_2 + \dots + b_n}(c_n), \end{cases}$$

onde, reciprocamente, dati x ed y sotto la forma (3), si ottiene uno ed un solo valore (1) per la t ; però, se di detti numeri x ed y uno od entrambi sono eccezionali, e cioè passibili di una duplice rappresentazione, in corrispondenza si perviene a 2 od a 4 valori distinti per la t .

L'interpretazione geometrica di queste considerazioni, dà appunto la corrispondenza Ω di Peano, fra i punti (t) di un segmento s ed i punti (x, y) di un quadrato Q . Se di più osserviamo che, poichè i numeri 0 ed 1 non sono eccezionali, ai punti del contorno di Q possono solo corrispondere 1 o 2 punti di s , risulta subito la proprietà della corrispondenza ω che abbiamo enunciato in principio di questo numero. E possiamo anche dire che:

Escluse le semirette per O di un insieme numerabile ed ovunque denso (che si appoggiano a Γ in 2 o 3 oppure 4 punti), ogni altra semiretta per O ha con Γ un solo punto a comune.

4. Preso in Q un punto non eccezionale, e cioè le cui coordinate (x, y) non sieno numeri eccezionali, sia (t) il punto omologo di s . I punti (\bar{x}, \bar{y}) non eccezionali di Q , situati in un intorno di (x, y) , hanno per omologhi su s , punti (\bar{t}) situati in un intorno di (t) . Invero, in virtù delle (5), risulta che se x ed \bar{x} hanno a comune le prime n cifre dopo la virgola, e lo stesso accade per y ed \bar{y} , le prime $2n$ cifre dopo la virgola di \bar{t} , coincidono colle prime $2n$ cifre di t .

In base ai numeri 2 e 3, ciò dimostra che preso genericamente un punto \mathcal{S} su Γ , che si proietti da O sulla superficie sferica S in un punto \mathcal{S}' , un intorno di \mathcal{S} su Γ si proietta da O su S in un intorno del punto \mathcal{S}' su S , e la corrispondenza che così intercede tra i due intorni è biunivoca, esclusi al più i punti di un insieme numerabile del secondo intorno. Questo carattere superficiale che, debitamente inteso, si estende all'intorno di un qualunque punto \mathcal{S} su Γ , non deve far credere che la curva Γ possa riempire una superficie: ciò infatti resta escluso dal citato teorema di Netto. Rileviamo piuttosto la conseguenza che:

La curva sghemba Γ di Jordan, non ha tangente in nessun punto⁽¹⁾.

5. Ci proponiamo ora di far vedere che la curva Γ non è sufficiente a rompere la connessione dello spazio, e cioè che due punti qualunque, che non stieno su Γ , possono sempre venire congiunti da una curva semplice di Jordan, non avente alcun punto a comune con la Γ ⁽²⁾.

All'uopo, cominciamo col dimostrare che è possibile di tracciare nel quadrato Q una linea l di Jordan, riferibile al segmento s in una corrispondenza univoca e continua, non avente con la Ω nessuna coppia di punti omologhi a comune. Consideriamo p. es., con le notazioni del n. 3, la diagonale

$$(6) \quad x = y$$

del quadrato Q , e riferiamola al segmento s in modo che in punti omologhi risulti

$$(7) \quad t = 1 - x.$$

In un punto di quella diagonale per cui x ed y non sieno numeri eccezionali, le (6), (7) si traducono nelle

$$b_n = c_n, \quad a_n = k(b_n) \quad (\text{per } n = 1, 2, 3, \dots),$$

(1) Essa non è dunque rettificabile. Si può anzi vedere, che per una curva sghemba basta l'ipotesi della rettificabilità, perchè possa escludersi ch'essa presenti la particolarità riscontrata al n. 2 per la curva Γ .

(2) Questa proposizione rientra come caso particolare in un'altra, stabilita però sotto restrizioni che qui non sono soddisfatte, nella Nota *Un paradosso topologico* di F. SEVERI e B. SEGRE, presentata all'Accademia in questa stessa seduta.

riche S_a ed S_b , ed è incontrata in un sol punto da ogni sfera con lo stesso centro e di raggio intermedio, se se ne eccettuano due, che con essa hanno una cellula (unidimensionale) a comune.

Da qui consegue la verità della proposizione enunciata al principio di questo numero. Basta infatti dimostrare che, assegnato nello spazio un qualunque punto N non situato su Γ , è possibile di congiungere O ad N mediante un arco semplice di Jordan, non avente con Γ alcun punto a comune. Ora, supposto che il raggio ON abbia con Γ un solo punto \mathfrak{S} a comune, se \mathfrak{S} non sta sul segmento ON basta seguire il cammino rettilineo fra O ed N ; mentre se \mathfrak{S} appartiene a detto segmento, si può, per es., andare da O ad α lungo il raggio $O\alpha$, indi da α a β lungo Λ , e da β ad un punto qualunque M del raggio ON che sia esterno alla sfera S_b , seguendo un qualsiasi cammino esterno a questa sfera, per finire col cammino rettilineo da M ad N . Se invece il raggio ON sega Γ in più punti, in un intorno di N non contenente punti di Γ , vi sono (n. 3) infiniti punti N' tali che la semiretta ON' si appoggia a Γ in un sol punto: basta allora andare come dianzi da O ad un siffatto punto N' , per ultimare il percorso col cammino rettilineo da N' ad N .

Osservazione I. — In base a ciò che precede, si possono costruire curve semplici aperte di Jordan cogli stessi estremi della Γ , non aventi con questa alcun punto ulteriore a comune. Aggiungendo alla Γ una curva siffatta, si ottiene una curva semplice chiusa di Jordan, che ancora viene intersecata da ogni semiretta uscente da O .

Osservazione II. — Di curve di Jordan, analoghe alla Λ , che congiungono un punto di S_a ad uno di S_b senza intersecare Γ , se ne hanno certamente infinite⁽¹⁾. Infatti, la distanza di un punto variabile su Λ da un punto variabile su Γ (Λ e Γ essendo insieme perfetti), ammette un minimo $\delta > 0$; ed è chiaro che nessuna delle curve il cui scarto lineare⁽²⁾ da Λ è inferiore a δ , può incontrare Γ .

Si prova facilmente che fra quelle infinite curve, ve ne sono che non hanno più di un punto a comune con nessuna delle semirette per O , e con nessuna delle sfere di centro O . Vogliamo far vedere che la forma di queste curve Λ^* , è del tutto arbitraria, nel senso che, data comunque una curva semplice di Jordan Λ_1 , congiungente un punto di S_a ad uno di S_b , che non sia incontrata in più di un punto nè dalle semirette uscenti da O nè dalle sfere di centro O (p. es. un segmento, situato su di una retta non passante per O), la curva Λ_1 non ha punti a comune colla Γ , qualora si definiscano in modo conveniente gli omeomorfismi fra Q ed S' , S'' , di

(1) Oltre che nel modo indicato nel testo, ciò segue direttamente osservando che nel quadrato Q si possono costruire infinite curve l soddisfacenti alle condizioni di cui al principio del n. 5.

(2) Per la definizione di scarto lineare, cfr. F. SEVERI, « Rendic. Lincei » (1927), t. V (6), p. 475.

cui al n. 2. In altri termini, supposto, com'è lecito, che la curva Γ costruita al n. 2 non abbia punti a comune con una Λ^* del tipo suddetto, dobbiamo dimostrare che esistono *omeomorfismi della sfera S in sé*, moltiplicando pei quali la corrispondenza ω , si ottengano delle corrispondenze ω_1 fra AB ed S , dalle quali vengono (come al n. 2) definite delle curve Γ_1 , non aventi alcun punto in comune colla curva data Λ_1 .

All'uopo basta considerare su S le curve λ^* e λ_1 , luoghi delle traccie su S dei raggi proiettanti da O i punti di Λ^* e di Λ_1 ; fra esse intercede un omeomorfismo, dicendo omologhi due punti che sieno proiezioni da O di due punti di Λ^* e di Λ_1 situati su d'una stessa sfera di centro O . Vi sono infiniti omeomorfismi della sfera S in sé, che mutano λ^* in λ_1 , subordinando fra queste curve il suddetto omeomorfismo⁽¹⁾: uno qualunque di questi soddisfa allo scopo.

Osservazione III. — Si possono in S_{r+1} (con $r > 2$) addurre esempi analoghi a quelli considerati in ciò che precede, bastando usufruire delle curve di S_r (generalizzazioni di quelle di Peano) che riempiono un (iper)cubo.

Matematica. — *Su una particolare equazione differenziale.*
Nota di A. MAMBRIANI presentata⁽²⁾ dal Corrisp. L. TONELLI.

Nel fascicolo 9 del volume VIII di questi « Rendiconti », pp. 361-362, il sig. G. Scorza Dragoni ha indicato sommariamente il metodo da lui seguito in una Memoria, di prossima pubblicazione, dedicata alla dimostrazione dell'esistenza e dell'unicità della soluzione dell'equazione differenziale

$$(1) \quad y'' = y^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{1}{2}},$$

con le condizioni ai limiti

$$(2) \quad y(0) = 1, \quad y(+\infty) = 0,$$

questione sorta da alcune ricerche fisiche del prof. Fermi.

In questa breve Nota, mi propongo di mostrare che l'esistenza e l'unicità in questione si deducono subito dalle classiche proposizioni sulle equazioni differenziali ordinarie, con poche ed elementari osservazioni sulla forma particolare dell'equazione (1).

Osserviamo, anzitutto, che il secondo membro della (1) è formato dal prodotto delle funzioni $y^{\frac{3}{2}}$ e $x^{-\frac{1}{2}}$, la prima delle quali, per ogni

(1) Ciò risulta subito in base alle considerazioni svolte al n. 38 dell'op. di F. SEVERI, cit. al n. 2.

(2) Nella seduta del 20 gennaio 1929.

$y \geq 0$, è continua insieme alla sua derivata (derivata destra, per $y = 0$), mentre la seconda è continua per ogni $x > 0$ ed *integrabile* in ogni intervallo $(0, X)$, con $X > 0$. Valgono, perciò i risultati classici sulle equazioni differenziali ordinarie⁽¹⁾, e possiamo affermare che dal punto $(0, 1)$ e con una data direzione di coefficiente angolare γ , esce sempre uno ed un solo integrale $y_\gamma(x)$ della (1). Inoltre, questo integrale, insieme alla sua derivata prima, varia con continuità al variare di γ .

Per $\gamma \geq 0$, $y_\gamma(x)$ è funzione crescente di x , perchè da (1) risulta sempre $y''_\gamma(x) > 0$; è dunque, per ogni x , $y_\gamma(x) > 0$ e $y_\gamma(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$.

Per $\gamma < -8$, abbiamo dalla (1) che, sull'intervallo $(0, \frac{1}{4})$ e finchè si ha $y_\gamma \geq 0$ ed $y'_\gamma < 0$, è

$$y'_\gamma(x) \leq \gamma + \int_0^x x^{-\frac{1}{2}} dx \leq \gamma + 1 < -7,$$

donde segue che, sull'intervallo detto e finchè è $y_\gamma \geq 0$, la $y'_\gamma(x)$ si mantiene sempre minore di -7 e la $y_\gamma(x)$ si annulla, perciò, per un x minore di $\frac{1}{7}$.

Sia $\bar{\gamma}$ il limite superiore dei valori di γ per i quali l'integrale $y_\gamma(x)$ incontra l'asse delle x . Sarà $\bar{\gamma}$ compreso nell'intervallo $(-8, 0)$. Indichiamo con $\bar{y}(x)$ l'integrale corrispondente a $\gamma = \bar{\gamma}$, e mostriamo che è sempre (purchè sia $x \geq 0$) $\bar{y}(x) > 0$, con $\bar{y}(+\infty) = 0$.

Se, infatti, per un $\bar{x} > 0$ fosse $\bar{y}(\bar{x}) = 0$, dovrebbe essere $\bar{y}'(\bar{x}) < 0$ (perchè la (1) ha la sola soluzione $y \equiv 0$ che in $(\bar{x}, 0)$ soddisfa alle condizioni $y(\bar{x}) = 0$, $y'(\bar{x}) = 0$), e perciò tutti gl'integrali $y_\gamma(x)$, con γ maggiore di $\bar{\gamma}$ e sufficientemente prossimo a $\bar{\gamma}$, incontrerebbero l'asse delle x , e ciò contro la definizione di $\bar{\gamma}$. È dunque sempre $\bar{y}(x) > 0$, e, per la (1), è anche $\bar{y}''(x) > 0$, e $\bar{y}'(x)$ risulta funzione sempre crescente. Se $\bar{y}'(x)$ potesse assumere valori positivi, $\bar{y}(x)$ avrebbe un minimo > 0 , dopo il quale sarebbe sempre crescente, e, per tutti i γ sufficientemente prossimi a $\bar{\gamma}$ e minori di $\bar{\gamma}$, gli integrali $y_\gamma(x)$ non potrebbero mai annullarsi. Dunque $\bar{y}(x)$ è sempre decrescente. Se fosse $\bar{y}(+\infty) > 0$, dalla (1) seguirebbe, per $x \rightarrow +\infty$,

$$\bar{y}'(x) > \bar{\gamma} + \frac{3}{2\bar{y}^2} + \int_0^x x^{-\frac{1}{2}} dx \rightarrow +\infty.$$

Si conclude che è $\bar{y}(+\infty) = 0$.

(1) Cfr. C. CARATHEODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Cap. XI.

Se, infine, esistessero due integrali distinti $y_1(x)$ ed $y_2(x)$, della (1), soddisfacenti alle condizioni (2), supposto $y_1'(0) > y_2'(0)$, dovrebbe essere, per la (1),

$$(y_1 - y_2)'' = \left(y_1^{\frac{3}{2}} - y_2^{\frac{3}{2}} \right) x^{-\frac{1}{2}},$$

e la derivata di $y_1 - y_2$, che è positiva per $x = 0$, andrebbe crescendo col crescere di x , ed $y_1 - y_2$ risulterebbe sempre crescente. Ed avendosi $y_1(0) - y_2(0) = 0$, ne verrebbe $y_1 - y_2 \rightarrow +\infty$, per $x \rightarrow +\infty$, ed y_1 e y_2 non potrebbero ambedue annullarsi per $x \rightarrow +\infty$.

Le conclusioni qui ottenute valgono per ogni equazione differenziale

$$y'' = \varphi(x, y) \psi(x),$$

con $\varphi(x, y) > 0$ per $x > 0$, $y > 0$; $\varphi(x, 0) = 0$ per $x > 0$; $\varphi(x, y)$ funzione continua di (x, y) per $x \geq 0$, $y \geq 0$; $\varphi(x, y)$ funzione crescente di y ed a rapporto incrementale (rispetto ad y) limitato in ogni campo limitato; $\psi(x) > 0$ per $x > 0$; $\psi(x)$ funzione continua per $x > 0$; $\psi(x)$ integrabile (assolutamente) in ogni intervallo $(0, X)$, $X > 0$; $\psi(x)$ non integrabile in $(0, +\infty)$. L'ipotesi che la $\varphi(x, y)$ sia funzione crescente di y , è superflua per l'esistenza dell'integrale soddisfacente alle (2). È anche evidente che, in ciò che precede, la condizione $y(0) = 1$ può essere sostituita con la $y(0) = c$, con $c > 0$.

Matematica. — *Sulla forma F_2 del Fubini.* Nota di RITA LICENI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Il Fubini ⁽²⁾ ha trovato per le superficie in uno spazio S_4 a quattro dimensioni una forma che egli indica con F_2 e che ha un carattere proiettivo.

Più tardi il Vitali ⁽³⁾ ha incontrato nello studio di certe varietà pure una forma F_2 che ha ancora carattere proiettivo e per via geometrica ha dimostrato che nel caso delle superficie in un S_4 la sua F_2 coincide con quella del Fubini.

Ma il passaggio analitico da una forma all'altra non è ancora stato eseguito. Per desiderio del prof. Vitali io ho fatto questa verifica riducendo il più possibile il calcolo.

(1) Nella seduta del 6 gennaio 1929.

(2) Vedi G. FUBINI - E. ČECH, *Geometria proiettiva differenziale*. (Bologna, Nicola Zanichelli editore, t. II, pp. 631-637).

(3) G. VITALI, *Sopra alcuni invarianti associati ad una varietà e sopra i sistemi principali di normali delle superficie*. Extrait des « Annales de la Société polonaise de Mathématique », t. VII, année 1928, pp. 52-55 (citerò questa Nota con la lettera N).

1. — Per una superficie V_2 in un S_4 il Fubini ha trovato la forma

$$F_2 = (x, x_1, x_2, dx_1, dx_2),$$

dove x, y, z, w, t sono coordinate omogenee. Passando a coordinate non omogenee, cioè ponendo $t = 1$ la F_2 diventa

$$F_2 = (x_1, x_2, dx_1, dx_2),$$

che si può scrivere:

$$F_2 = (x_1, x_2, x''_{11} du_1 + x''_{12} du_2, x''_{12} du_1 + x''_{22} du_2),$$

dove x''_{rs} indica la derivata seconda rispetto alle u_r e u_s .

Combinando convenientemente le ultime due righe con le prime, si ha

$$F_2 = (x_1, x_2, x_{1,1} du_1 + x_{1,2} du_2, x_{1,2} du_1 + x_{2,2} du_2),$$

dove con $x_{r,s}$ rappresentiamo la derivata covariante rispetto all'elemento lineare della superficie.

Se noi indichiamo con ⁽¹⁾

$$f = f(t, u_1, u_2)$$

l'equazione funzionale della nostra superficie, si verifica subito che

$$\int_{\mathcal{K}} f_{1,s} f_{p,q} dt = S x_{r,s} x_{p,q}^{(2)}.$$

Poniamo

$$\varphi_r = f_{r,1} du_1 + f_{r,2} du_2 \quad (r = 1, 2);$$

si vede facilmente che

$$\int_{\mathcal{K}} \varphi_r \varphi_s dt = S (x_{r,1} du_1 + x_{r,2} du_2) (x_{s,1} du_1 + x_{s,2} du_2).$$

Facendo ora il quadrato di F_2 si ottiene

$$F_2^2 = a \begin{vmatrix} \int_{\mathcal{K}} \varphi_1^2 dt & \int_{\mathcal{K}} \varphi_1 \varphi_2 dt \\ \int_{\mathcal{K}} \varphi_1 \varphi_2 dt & \int_{\mathcal{K}} \varphi_2^2 dt \end{vmatrix},$$

(1) G. VITALI, *Geometria nello spazio Hilbertiano*. « Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, lettere ed arti », Anno accademico 1927-28, t. LXXXVII, parte seconda, p. 391.

(2) Dove S indica la somma che si ottiene scambiando x con le altre coordinate, come usata dal FUBINI-ČECH, nel lavoro citato.

dove con a indico il discriminante dell'elemento lineare.

D'altra parte, se X e Y sono parametri normali di direzione del σ , ortogonali fra loro e alla superficie, si ha

$$f_{r,s} = \mu_{r,s} X + \nu_{r,s} Y,$$

dove $\mu_{r,s}$ e $\nu_{r,s}$ sono i 2 covarianti associati alle due direzioni X e Y .

Avremo

$$\varphi_r = (\mu_{r,1} du_1 + \mu_{r,2} du_2) X + (\nu_{r,1} du_1 + \nu_{r,2} du_2) Y,$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_g \varphi_r \varphi_s dt = & (\mu_{r,1} du_1 + \mu_{r,2} du_2) (\mu_{s,1} du_1 + \mu_{s,2} du_2) + \\ & + (\nu_{r,1} du_1 + \nu_{r,2} du_2) (\nu_{s,1} du_1 + \nu_{s,2} du_2). \end{aligned}$$

Si vede facilmente che il determinante $\left\| \int_g \varphi_r \varphi_s dt \right\|$ si ottiene facendo il quadrato per righe del determinante:

$$\begin{vmatrix} \mu_{1,1} du_1 + \mu_{1,2} du_2 & \nu_{1,1} du_1 + \nu_{1,2} du_2 \\ \mu_{2,1} du_1 + \mu_{2,2} du_2 & \nu_{2,1} du_1 + \nu_{2,2} du_2 \end{vmatrix}$$

che è il primo membro della formola (13) della nota N.

E così si vede che la (13) del Vitali e la $F_2 = 0$ (dove la F_2 è la forma del Fubini) sono equivalenti.

Geometria. — *Sur les surfaces dont une droite canonique passe par un point fixe.* Nota di J. KAUCKÝ, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. FUBINI.

On sait ⁽²⁾ que la détermination de surfaces dont une droite canonique passe par un point fixe se ramène à l'intégration des équations

$$(1) \quad \mu_{uu} + (k+1)\mu \frac{\beta_{uu}}{\beta} + k(\beta_{vv} + \beta\beta_{uu}) = 0, \quad \mu_v + (k+1)\mu \frac{\beta_v}{\beta} + k(\beta_{uu} + \beta\beta_v) = 0,$$

où

$$(2) \quad \mu = (k+1) \frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u \partial v} - \beta^2.$$

La normale projective fait une exception et le système (1), (2) donne dans ce cas ($k = -3$) seulement ces surfaces de la propriété demandée qui sont isothermoasymptotiques.

En éliminant μ entre (2) et (1) on obtient les équations

$$(3) \quad \begin{aligned} & (k+1)\beta^2\beta_{uu} + (k^2-1)\beta\beta_u\beta_{uv} - (k+1)\beta\beta_v\beta_{uu} - (k^2-1)\beta_u^2\beta_v \\ & + k\beta^3\beta_{vv} - 3\beta^4\beta_{uv} = 0, \\ & (k+1)\beta^2\beta_{vv} + (k^2-1)\beta\beta_v\beta_{uv} - (k+1)\beta\beta_u\beta_{vv} - (k^2-1)\beta_u\beta_v^2 \\ & + k\beta^3\beta_{uu} - 3\beta^4\theta_v = 0 \end{aligned}$$

et c'est le dernier système à l'étude duquel M. E. Čech a attiré mon attention. Voici les résultats de mes calculs.

Si l'on exclut le cas connu $k = 0$ ⁽³⁾ on trouve que les solutions du système (3) se partagent en deux espèces; pour la première on a $\beta_u^1 = \beta_v^1$, pour la seconde $\beta_u^1 \neq \beta_v^1$.

Pour les solutions de première espèce on peut, sans altérer la généralité, supposer $\beta_u = \beta_v$, ainsi que $\beta = \beta(u+v)$ et le système (3) se réduit à l'équation ordinaire

$$(4) \quad 2k\beta' + (k^2-1)\beta'^2 + 2(k+1)\beta\beta'' - 3\beta^4 - a\beta^2 = 0,$$

où a est une constante qu'on peut supposer égale à $\chi^2 \epsilon^0$ ou à un .

(1) Nella seduta del 6 gennaio 1929.

(2) G. FUBINI e E. ČECH, *Geometria proiettiva differenziale*, t. I, § 28, Bologna.

(3) v. FUBINI e ČECH, op. cit., § 28, D.

Dans le cas $a = 0$, on peut obtenir les équations finies de surfaces cherchées par des quadratures. Ces surfaces ont la propriété qu'une famille des courbes de Darboux se compose de coniques touchant une droite fixe dans un point fixe.

Dans le cas $a \neq 0$, une famille de courbes de Darboux se compose de coniques qui passent par deux points fixes.

Passons aux surfaces de la seconde espèce. Le système (1), (2) peut se réduire à la forme

$$(5) \quad \beta_{uu} = c\beta\beta_v, \beta_{vv} = c\beta\beta_u$$

$$(6) \quad (k^2 - 1)(\beta\beta_{uv} - \beta_u\beta_v) + [(k + 1)c^2 + kc - 3]\beta^4 = 0,$$

où c est une racine de l'équation quadratique

$$(7) \quad (k + 1)(k + 3)c^2 + 4kc - 12 = 0.$$

Remarquons avant tout que l'équation (7) étant quadratique en c , en général deux valeurs de c appartiennent à une valeur donnée de k . Inversement à une valeur donnée de c correspondent deux valeurs de k . Seulement: 1° dans les cas $k = -1$, et $k = -3$ l'équation (7) se réduit à une équation linéaire. Le cas $k = -1$ a été déjà étudié par M. E. Čech (1).

2° pour $k = -\frac{3}{2}$, ce qui correspond à l'arête de Green, l'équation (7) a des racines égales.

Or pour $k^2 = 1$ l'équation (6) s'évanouit identiquement, dans chacun de ces deux cas, l'intégrale générale contient les fonctions elliptiques et dépend de quatre constantes arbitraires.

Pour $k^2 \neq 1$, le système (5) prend, après la substitution de $\frac{1}{c}\varphi$ au lieu de β , la forme

$$(8) \quad \varphi_{uu} = 4\varphi\varphi_v, \varphi_{vv} = 4\varphi\varphi_u$$

$$(9) \quad \varphi\varphi_{uv} - \varphi_u\varphi_v - 4\varphi^4 = 0;$$

j'ai rencontré déjà le dernier système à une autre occasion, en cherchant les surfaces avec certains systèmes trilineaires de courbes (2). Pour intégrer (8) et (9), faisons attention à la circonstance que en vertu de (8) $\varphi\varphi_{uv} - \varphi_u\varphi_v - 4\varphi^4 = \text{constante}$. Il suffit donc de chercher parmi les solutions du système (8) celles pour lesquelles cette constante est égale à zéro. Or le système (8), a été intégré par M. E. Čech (3).

(1) V. FUBINI-ČECH, op. cit., § 28, C.

(2) Voir mon travail *Sur une classe de surfaces*, Publications de la Fac. de sc. à Brno, 1928, n. 104.

(3) *Sur les surfaces dont toutes les courbes de Segre sont planes*, les mêmes Publ., 1922, n. 11, voir aussi G. FUBINI-E. ČECH, op. cit., § 28, C.

J'ai trouvé ainsi trois types des solutions de (8) et on peut poser, sans restreindre la généralité,

$$\varphi = -\frac{1}{2(u+v)}, \quad \varphi = \frac{3uv}{2(u^3+v^3)},$$

$$\varphi = -\frac{1}{2} [\zeta(u+v) + \zeta(\varepsilon^2 u + \varepsilon v) + \zeta(\varepsilon u + \varepsilon^2 v)],$$

où $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ et $\zeta(u)$ signifie la fonction elliptique de Weierstrass pour laquelle $g_2 = 0$. C'est le cas équi-anharmonique.

L'équation $\beta = \frac{4}{c} \varphi$, où ne dépend plus de c , montre que, de chaque surface de seconde espèce on déduit trois autres moyennant une déformation projective combinée ou non avec une corrélation.

Enfin je renvoie le lecteur à mon travail plus détaillé qui paraîtra dans les Publications de la Fac. des sc. à Brno.

Matematica. — *Sulla rappresentazione conforme delle aree pluriconnesse appartenenti a superficie di Riemann.* Nota di F. CECIONI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio E. BERTINI.

Mi permetto dare qui notizia di una mia Memoria in corso di stampa negli « Annali delle Università Toscane » (vol. XII, nuova serie), avente lo stesso titolo della presente comunicazione.

È noto che lo Schottky in una Memoria fondamentale ⁽²⁾ ha ricondotto la ricerca della rappresentabilità conforme di due aree *piane* pluriconnesse l'una sull'altra, alla ricerca della trasformabilità birazionale *con coefficienti reali* di due curve algebriche *reali* l'una nell'altra, alla ricerca cioè se due curve algebriche reali appartengano alla medesima *classe dal punto di vista reale*. Ho tentato già alcun tempo fa di adoperare in senso inverso la teoria dello Schottky, deducendo proprietà relative alla teoria delle curve algebriche reali (moduli, condizioni di trasformabilità birazionale reale) da proprietà, direttamente dimostrate, di rappresentazione conforme, ed ho ottenuto alcuni risultati esposti in una Nota ⁽³⁾, le dimostrazioni dei quali pubblicai litografate. Per far ciò dovei per prima cosa precisare quali sono le curve algebriche che corrispondono, secondo il metodo di Schottky, alle aree piane pluriconnesse; invertendo una osservazione già fatta dallo

(1) Nella seduta del 6 gennaio 1929.

(2) SCHOTTKY, « Giornale di Crelle », 1877.

(3) F. CECIONI, « Annali delle Università Toscane », vol. IX, nuova serie.

Schottky ⁽¹⁾, trovai, con facili considerazioni (che non mi sembrano però fatte da altri) basate su certi teoremi di Koebe, che esse sono tutte le curve algebriche col massimo numero di circuiti reali (compatibile col genere). Quindi il metodo sopra accennato può condurre (almeno direttamente) solo a proprietà di tali curve, e non delle curve (algebriche) reali più generali.

Nel completare ed ampliare le dette ricerche, ho pensato, allo scopo di estendere la portata del metodo, se la teoria dello Schottky, relativa alle aree *piane*, possa estendersi alle aree *appartenenti ad una superficie di Riemann*, e quali curve vengano a corrispondere a queste aree più generali.

La cosa è possibile, e nella Memoria cui si riferisce la presente comunicazione, espongo appunto la accennata generalizzazione della teoria dello Schottky. Nello svolgere tale teoria ho preferito, anzichè estendere gli sviluppi dello Schottky al caso più generale da me considerato, seguire invece altro procedimento, parzialmente diverso e più semplice, lo schema del quale è sommariamente tracciato, sempre per le sole aree piane, dal Picard in una breve Nota ⁽²⁾. Queste poche pagine del Picard mi sembrano contenere, come ho detto, solo lo schema, e non lo sviluppo della teoria; ho cercato di darne, per quanto ho potuto, lo sviluppo completo, il che ho fatto (variamente rimaneggiando la teoria, ed adattandola al caso più generale qui trattato) per mezzo di considerazioni forse un po' lunghe e minute, ma che mi sembrano necessarie alla trattazione rigorosa dell'argomento.

E tanto più mi è sembrato opportuno lo svolgere minuziosamente le varie considerazioni occorrenti, in quanto che mi sembra che in un punto essenziale (e precisamente nello stabilire la biunivocità della rappresentazione) la Memoria sopra citata dello Schottky contenga un ragionamento non esatto. A p. 313 (n. IV) di essa viene infatti, in sostanza, affermato (per trarne conseguenze essenziali) che se $g(p, q) = 0$ è un'equazione algebrica, ed $R(p, q)$ una funzione razionale sulla corrispondente riemanniana Γ , che diviene infinita in un punto (p_0, q_0) di Γ , essa diviene ugualmente infinita in un altro punto di Γ nel quale sia pure $p = p_0, q = q_0$. Ora ciò non accade, ad esempio, quando, prendendo due punti A e B di Γ , corrispondenti ambedue ai medesimi valori p_0, q_0 di p e q rispettivamente, si consideri una $R(p, q)$, certo esistente, che divenga infinita in A e non in B. Naturalmente una tale $R(p, q)$ dovrà per $p = p_0, q = q_0$ assumere la forma $\frac{0}{0}$. Così, ad esempio, se $p_0 = 0, q_0 = 0$ è un punto multiplo ordinario (cioè a tangenti distinte) della curva $g(p, q) = 0$, e

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \quad (k \geq 2)$$

(1) SCHOTTKY, loc. cit., p. 314.

(2) PICARD, « Annales de l'École Normale Supérieure », vol. 30, serie 3^a, 1913, pp. 483-487.

sono i coefficienti angolari delle tangenti alla curva in esso, basta considerare una delle k funzioni razionali

$$R_i(p, q) = \frac{p}{q - \alpha_i p} \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, k);$$

per $p \neq 0$ è $R_i(p, q) = \frac{1}{\frac{q}{p} - \alpha_i}$; se quindi si fa tendere il punto (p, q)

della riemanniana Γ al punto $(0, 0)$ sul ramo corrispondente alla tangente di coefficiente angolare α_j con $j \neq i$, si ha $\lim R_i(p, q) = \frac{1}{\alpha_j - \alpha_i}$, e se invece si fa tendere ancora il punto (p, q) al punto $(0, 0)$, però sul ramo corrispondente al coefficiente angolare α_i , si ha $\lim R_i(p, q) = \infty$.

Ciò premesso, accennerò ora rapidamente al contenuto del mio lavoro.

Sia A una regione (campo, area) pluriconnessa, appartenente ad una riemanniana Σ ; il contorno totale di A sia costituito da $\rho + 1$ contorni parziali L_0, L_1, \dots, L_ρ , ciascuno dei quali sia una linea chiusa, priva di nodi, costituita da un numero finito di archi regolari di linee analitiche. Poichè A , in genere, non sarà pseudosemplice⁽¹⁾, esisterà un numero (intero > 0) σ tale che esistono sistemi di σ tagli rientranti (linee chiuse prive di nodi), interni ad A , non aventi punti comuni, che non rompono la connessione di A , mentre $\sigma + 1$ tagli rientranti qualsiasi sempre rompono la connessione di A . Se A è pseudosemplice, è $\sigma = 0$. L'ordine di connessione di A risulta $N = 2\sigma + \rho + 1$. Il numero σ risulta anche il numero delle retrosezioni distinte (a_b, b_b) ($b = 1, 2, \dots, \sigma$) di Σ che sono completamente interne all'area A . Si vede subito allora che il teorema di esistenza ed unicità di una funzione armonica su una riemanniana aperta⁽²⁾, dati i valori al contorno ed i moduli di periodicità ai tagli a_b e b_b , vale anche per l'area A .

È possibile allora determinare nell'area A una funzione analitica (su Σ) per mezzo dei valori ψ^* della parte immaginaria al contorno, e dei moduli di periodicità, ai tagli a_b e b_b , della parte immaginaria stessa. Per studiare il preciso comportamento al contorno di una funzione così determinata devo supporre che la catena dei valori ψ^* sia su ogni contorno L_k una funzione analitica di un parametro, ed introdurre sistematicamente per ogni punto a

(1) Traduco così la parola *schlichtartig* di Koebe. Essere A pseudosemplice significa che qualunque linea chiusa, priva di nodi, tutta interna ad A , ne rompe la connessione; e si dimostra facilmente che l'ordine di connessione di una tale area è uguale al numero (supposto finito) dei suoi contorni. Un teorema di KOEBE (*Ueber konforme Abbildung...*, « Jahresbericht der D. M. V. », 1906, pp. 142 e sgg.) assicura che un'area pseudosemplice, appartenente ad una riemanniana ordinaria, è rappresentabile conformemente e (anche al contorno) biunivocamente su un campo piano ad un solo foglio.

(2) V., ad es., PICARD, *Traité d'Analyse*, ed. 1905, t. II, cap. XVI.

del contorno una variabile τ , che chiamo *variabile principale*, relativa al contorno di A , nel punto a ; essa è una funzione analitica su Σ che rappresenta l'intorno T di a in A sull'intorno (semplice) S di $\tau = 0$ nel semipiano delle parti immaginarie positive, in modo che alla parte di contorno di A che appartiene al contorno di T corrisponda (biunivocamente) la parte dell'asse reale che appartiene al contorno di S . Questa variabile τ , nei punti che chiamo *punti angolari* del contorno, non coincide con la variabile principale su Σ . Il comportamento (regolare, polare, ...) delle considerate funzioni analitiche sul contorno di A va sempre riferito alla variabile principale τ sopra definita.

In base a queste considerazioni, ancora ulteriormente precisate, dimostro allora l'esistenza in A delle *funzioni* H e delle *funzioni* K dello Schottky: le H sono funzioni reali sul contorno, aventi in A (contorno incluso) solo un numero finito di singolarità, e queste solamente polari, dotate di eventuali periodi corrispondenti ai cicli a_h, b_h, L_h ; le K sono le H monodrome in A . Studio le loro proprietà di determinazione, ed altre, in parte occorrenti per il rigore degli sviluppi successivi.

A questo punto penso (in accordo col concetto di Picard per le aree piane) l'area A come dotata di due facce; essa diviene allora una *superficie chiusa* A^* di genere $2\sigma + \rho$ (ordine di connessione $4\sigma + 2\rho + 1$), e su essa si *prolungano* le funzioni K attribuendo ad esse in ogni punto della faccia negativa il valore complesso coniugato di quello che hanno nel corrispondente punto della faccia positiva. Dimostro allora che *due funzioni* K generiche, u e v , sono legate da una equazione algebrica a coefficienti reali $g(u, v) = 0$, la cui *riemanniana* R risulta, per mezzo delle funzioni u e v , in corrispondenza biunivoca continua senza eccezioni con la superficie A^* ; tale corrispondenza è poi, con evidenti eccezioni, conforme.

La dimostrazione della biunivocità senza eccezioni (che è fondamentale nella teoria) mi ha richiesto considerazioni assai lunghe e minute; non è infatti sufficiente considerare le coppie di valori che u e v prendono in ogni punto P di A^* , potendo (fra l'altro) queste coppie coincidere senza che coincidano i corrispondenti punti P , ma occorre considerare per ogni punto P di A^* l'elemento analitico (regolare, polare o critico)⁽¹⁾ $v(u)$ che viene a determinarsi in corrispondenza del detto punto P , invertendo nell'intorno di esso la funzione u ; occorre poi dimostrare con precisione che questi elementi analitici sono in corrispondenza biunivoca senza eccezioni con i punti della superficie A^* , e che d'altra parte essi sono tutti e soli gli elementi analitici che soddisfano all'equazione $g(u, v) = 0$.

Dalla proprietà detta risulta subito che R è connessa, e quindi $g(u, v)$ irriducibile, e di genere $p = 2\sigma + \rho = N - 1$, e che ogni K è funzione

(1) Chiamo, per brevità, *elemento analitico* non solo (come si suole) una serie di potenze regolare, ma anche lo sviluppo che ha luogo nell'intorno di un polo o di un punto critico algebrico.

razionale, con coefficienti reali, di u e v . La totalità delle equazioni $g(u, v) = 0$ che legano le coppie u, v di funzioni K che godono delle dette proprietà, costituiscono, come per le aree piane, una *classe* di equazioni o curve algebriche *dal punto di vista reale*; esse si dicono (con Schottky) *le equazioni (o curve) caratteristiche* della superficie A^* o della A .

Ritornando dalla A^* alla A , si trova il seguente teorema, che costituisce appunto la estensione al caso attuale del teorema dello Schottky (e lo contiene come caso particolare):

Condizione necessaria e sufficiente affinché un'area A , appartenente ad una superficie di Riemann Σ , sia rappresentabile biunivocamente e conformemente su un'altra area B , appartenente pure ad una superficie di Riemann Σ_1 (Σ_1 distinta da Σ , o coincidente con essa), oppure su un'area simmetrica di B , è che le due aree abbiano le stesse equazioni caratteristiche.

Ne viene anche che solo le aree pseudosemplici e con un solo contorno possono ammettere infinite trasformazioni conformi in sè.

Si trova poi il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una curva algebrica corrisponda, secondo il metodo suesposto, ad un'area pluriconnessa appartenente ad una superficie di Riemann (sia cioè una delle curve caratteristiche di una tale area), è che essa sia irriducibile, reale, e presenti il caso ortosimmetrico⁽¹⁾. Se p è il genere della curva, $p + 1$ è l'ordine di connessione dell'area, e il numero dei contorni dell'area è uguale al numero dei circuiti reali della curva.

In base a questi teoremi può farsi, con precisione, il computo delle costanti essenziali (*moduli*) dai quali dipende un'area pluriconnessa (appartenente in genere ed una riemanniana) considerata a meno di una trasformazione conforme. Occorre perciò riferirsi ai risultati del Klein⁽²⁾ sui moduli dai quali dipendono le classi di curve algebriche *considerate dal punto di vista reale*⁽³⁾; da questi si ottiene che i moduli delle classi di aree di ordine di connessione $N = p + 1$ sono, per ciascuna specie (cioè per ogni valore di p), $3p - 3$ numeri reali, se $p > 1$, 1 se $p = 1$.

(1) Una curva (algebrica irriducibile) $g(uv) = 0$ dicesi *reale* quando possiede almeno un circuito reale. Dicesi poi che presenta il caso *ortosimmetrico* quando la corrispondente riemanniana risulta divisa in (due) parti dalle linee reali, cioè da quelle linee sulle quali u e v sono insieme reali.

(2) *Riemann'sche Fläche* (litografie, Göttingen, 1894), II, p. 154. Per il caso delle aree piane la determinazione diretta del numero dei moduli è fatta in una mia Nota dei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. XXV, 1908 (*Sulla rappresentazione conforme*, ecc.), p. 18, e poi, in vari modi, da KOEBE (*Abhandlungen zur Theorie der Konformen Abbildung*, IV, « Acta Mathematica », 1918).

(3) Cfr. p. 183 della mia Nota degli « Annali delle Università Toscane », vol. IX, citata in principio.

Teoria dei numeri. — *Sopra i sistemi di progressioni aritmetiche* ⁽¹⁾. Nota di A. M. BEDARIDA, presentata ⁽²⁾ dal corrisp. G. FUBINI.

1. È ben noto il celebre teorema di Dirichlet: *Ogni progressione aritmetica, col primo termine e la ragione interi, razionali, primi tra loro, contiene infiniti numeri primi.*

Si può quindi domandare: date s , $s > 1$, progressioni aritmetiche di tale specie, possono avere numeri primi in comune e quando? E, nel caso affermativo, il numero di questi numeri primi è finito od infinito?

A queste domande si risponde facilmente, in modo completo, con le considerazioni che seguono.

2. Si ha il teorema:

Un sistema di s , $s > 1$, progressioni aritmetiche:

$$(1) \quad m_1x + r_1, m_2x + r_2, \dots, m_sx + r_s,$$

in ciascuna delle quali il primo termine e la ragione sono interi, razionali, primi tra loro, non contiene alcun numero primo, oppure, ne contiene infiniti.

Dimostreremo questa proposizione col fare vedere che il sistema di progressioni (1) non ha alcun numero primo o ne ha infiniti, secondo che il sistema delle s congruenze lineari:

$$(2) \quad t \equiv r_1 \pmod{m_1}, t \equiv r_2 \pmod{m_2}, \dots, t \equiv r_s \pmod{m_s}$$

non ha, oppure, ha soluzioni; le quali, quando esistono, si riducono, come è ben noto ⁽³⁾, ad una sola, rispetto al modulo minimo comune multiplo dei numeri m_1, m_2, \dots, m_s .

Infatti: se il sistema di congruenze (2) non ha soluzione, non può esistere alcun numero primo appartenente al sistema di progressioni aritmetiche (1), perchè un suo numero primo, sarebbe soluzione comune delle (2). Il sistema di congruenze (2) abbia soluzione: e, consideriamo le prime due congruenze, che saranno simultaneamente risolubili, con soluzione completamente determinata rispetto al modulo $\frac{m_1 m_2}{\delta_2}$, indicando con δ_2 il mas-

(1) La questione trattata nella presente Nota è sorta da una mia ricerca sopra gli ideali primi di un corpo quadratico, che sarà pubblicata in un prossimo fascicolo di questi « Rendiconti ».

(2) Nella seduta del 6 gennaio 1929.

(3) Cfr. ad es. DIRICHLET-DEDEKIND, *Lezioni sulla Teoria dei Numeri* (traduzione di A. FAIFER), p. 51 e sg.

simo comun divisore di m_1, m_2 . Sarà $r_1 \equiv r_2 \pmod{\delta_1}$ ⁽¹⁾ e perciò la congruenza lineare:

$$(3) \quad m_1 t \equiv r_2 - r_1 \pmod{m_2}$$

è risolubile, con δ_1 soluzioni incongrue $\pmod{m_2}$. Sia γ_1 una qualunque di queste: allora si potrà prendere, come soluzione $\left(\pmod{\frac{m_1 m_2}{\delta_1}}\right)$ comune alle due prime congruenze (2), il numero $r_1 + \gamma_1 m_1$: ora dico che $\frac{m_1 m_2}{\delta_1}$ è primo con $r_1 + \gamma_1 m_1$. Invero, un loro fattore comune, non può dividere m_1 , perchè dividendo $r_1 + \gamma_1 m_1$ dividerebbe r_1 , il che non può essere; nemmeno può dividere m_2 , perchè allora, avendosi, per la (3):

$$m_1 \gamma_1 + r_1 \equiv r_2 \pmod{m_2},$$

dividerebbe r_2 , il che, ancora, non può essere. Segue perciò che la progressione aritmetica:

$$(4) \quad \frac{m_1 m_2}{\delta_1} x + r_1 + \gamma_1 m_1,$$

avendo la ragione ed il primo termine interi, razionali, primi tra loro, contiene *infiniti numeri primi*, che appartengono tutti e soli ad entrambe le due prime progressioni aritmetiche (1). Perchè: ogni numero primo p della (4) offre appunto:

$$p \equiv r_1 \pmod{m_1} \quad , \quad p \equiv r_1 + \gamma_1 m_1 \equiv r_2 \pmod{m_2},$$

cioè è comune alle due prime progressioni considerate; viceversa, ogni numero primo p comune a queste dà la soluzione simultanea alle due prime congruenze (2) e perciò sarà $p \equiv r_1 + \gamma_1 m_1 \pmod{\frac{m_1 m_2}{\delta_1}}$, cioè è della progressione aritmetica (4).

Se ora nel sistema (1), alle due prime progressioni aritmetiche si sostituisce la (4), e nel sistema (2) si sostituisce alle due prime congruenze, quest'altra:

$$t \equiv r_1 + \gamma_1 m_1 \pmod{\frac{m_1 m_2}{\delta_1}},$$

e si prosegue nello stesso modo, si arriva alla conclusione che il sistema di progressioni aritmetiche (1) possiede infiniti numeri primi.

Il teorema è dunque provato.

(1) Cfr. DIRICHLET-DEDEKIND, op. cit., p. 51.

3. Sia, come nel numero precedente, δ_1 il massimo comun divisore di m_1, m_2 ; indichiamo con δ_2 il massimo comun divisore di $\frac{m_1 m_2}{\delta_1}, m_3$; con δ_3 il massimo comun divisore di $\frac{m_1 m_2 m_3}{\delta_1 \delta_2}, m_4$; ... con δ_{s-1} il massimo comun divisore di $\frac{m_1 m_2 \dots m_{s-1}}{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{s-2}}, m_s$. Sia, come nel numero precedente, γ_1 una qualunque soluzione della (3); γ_2 una qualunque soluzione della congruenza:

$$\frac{m_1 m_2}{\delta_1} t \equiv r_3 - r_1 - m_1 \gamma_1 \pmod{m_3};$$

γ_3 una soluzione qualunque della congruenza analoga alla (3) ed alla precedente, che successivamente si considera in quanto si è esposto al numero 2; ...; γ_{s-1} una soluzione qualunque dell'ultima, e si ponga:

$$(5) \quad r = r_1 + \gamma_1 m_1 + \gamma_2 \frac{m_1 m_2}{\delta_1} + \gamma_3 \frac{m_1 m_2 m_3}{\delta_1 \delta_2} + \dots + \gamma_{s-1} \frac{m_1 m_2 \dots m_{s-1}}{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{s-1}}.$$

Ora: quando vi è l'infinità di numeri primi nel sistema (1), per ciò che si è veduto, questa è l'infinità dei numeri primi di nuove progressioni aritmetiche, le quali hanno tutte per ragioni il minimo comune multiplo delle ragioni delle progressioni del sistema e per termini iniziali numeri della forma (5) (nella quale è arbitraria la scelta della coppia iniziale delle ragioni del sistema (1)). Questi numeri sono tutti congrui tra loro rispetto al detto minimo comune multiplo come modulo. E, poichè progressioni aritmetiche con la stessa ragione e termini iniziali congrui rispetto a tale ragione sono, manifestamente, identiche, si può concludere col risultato:

Se il sistema di progressioni aritmetiche (1) possiede numeri primi, questi sono tutti e soli gli infiniti numeri primi della progressione aritmetica che ha per ragione il minimo comune multiplo delle ragioni delle progressioni del sistema e per termine iniziale il numero dato dalla (5).

4. Quanto si è esposto al n. 2 e noti risultati ⁽¹⁾, ci offrono quest'altro teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema di progressioni aritmetiche (1) abbia numeri primi (infiniti), è che le $\binom{s}{2}$ differenze delle ragioni $r_i - r_j$, siano, rispettivamente, divisibili per i massimi comun divisori delle coppie delle ragioni m_i, m_j ($i, j = 1, 2, \dots, s$).

5. Si supponga ora che le ragioni delle progressioni aritmetiche (1) siano prime tra loro, due a due. Dal teorema del numero precedente, risulterà:

(1) Cfr. T. J. STIELTJES, *Essai sur la Théorie des Nombres*, p. 31, Gauthier-Villars, s.

Un sistema di progressioni aritmetiche, in cui ciascuna abbia il primo termine e la ragione interi, razionali, primi tra loro e le ragioni siano due a due prime tra loro, ha sempre infiniti numeri primi.

È facile, in questo caso, scrivere una progressione aritmetica, di formazione più simmetrica del caso generale, avente per ragione il prodotto delle ragioni delle progressioni aritmetiche del sistema, con infiniti numeri primi, che sono tutti e soli quelli del sistema ⁽¹⁾.

Meccanica. — *Limitazioni superiori per lo spostamento dinamico nei sistemi elastici.* Nota di G. KRALL, presentata ⁽²⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ 1. Ci proponiamo qui, in questa Nota, di assegnare delle limitazioni superiori per lo spostamento di un corpo elastico, vibrante sotto l'azione di forze costanti o variabili col tempo, a partire dalle più generali circostanze iniziali del moto.

Come facilmente si intuisce, e come meglio sarà chiarito in seguito da ulteriori sviluppi, la nozione di siffatte limitazioni non è del tutto priva di interesse. Che infatti è ben noto, come lo spostamento possa costituire una misura non spregevole del cimento cui è sottoposto un sistema, ed è pur noto come in molti casi (in generale, per tutti i sistemi a numero finito di gradi di libertà) sia possibile risalire dai limiti dello spostamento ai limiti di quegli indici della coazione elastica di cui, per forza di cose, proprio più di consueto si valgono gli ingegneri: lo sforzo o la deformazione specifica.

Nel perseguire gli intenti ora dichiarati noi ci varremo in parte dei metodi impiegati e dei risultati raggiunti in una precedente Nota, apparsa in questi « Rendiconti » ⁽³⁾, diremmo quasi a corollario d'una ricerca del prof. Levi-Civita, di cui il criterio, in sostanza, informa gli sviluppi che passiamo ad esporre.

§ 2. PREMESSE E RICHIAMI. — Consideriamo un sistema elastico ad N gradi di libertà, caratterizzati da N parametri lagrangiani y^i , ($i = 1, 2, \dots, N$;) e sia con riferimento ad *alti di moto* aventi luogo nell'intorno prossimo ad una configurazione d'equilibrio stabile,

$$(1) \quad W = \frac{1}{2} \sum_{ik}^N e_{ik} y^i y^k, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{ik}^N b_{ik} \dot{y}^i \dot{y}^k,$$

il potenziale elastico, rispettivamente l'energia cinetica del corpo.

(1) Cfr. DIRICHLET-DEDEKIND, op. cit., p. 53.

(2) Nella seduta del 6 gennaio 1929.

(3) G. KRALL, *Limiti superiori del cimento dinamico*, questi « Rendiconti », serie 6^a, fasc. 3, 1928.

Introduciamo allora la trasformazione *canonizzante*

$$(2) \quad y^i = \sum_p^N u_p^i \varphi_p \quad (\rho = 1, 2, \dots, N);$$

dove le φ_p sono nuove coordinate (*coordinate normali*) ed i coefficienti u_p^i sono determinati come soluzioni del sistema di equazioni lineari ed omogenee

$$\sum_i^N (e_{ik} - \sigma^2 b_{ik}) u^k = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N);$$

È allora immediata, come conseguenza di condizioni ben note cui soddisfano i coefficienti e_{ik} e b_{ik} , la proprietà, cosiddetta di *ortonormalità*, compendiata dalle relazioni

$$(3) \quad \sum_i^N b_{ik} u_p^i u_\tau^k = \delta_p^\tau, \quad \delta_p^\tau = \begin{cases} 1, & \text{per } p = \tau, \\ 0, & \text{per } p \neq \tau; \end{cases}$$

cui soddisfano due sistemi di soluzioni u_p^i e u_τ^i ($i = 1, 2, \dots, N$;) corrispondenti a due distinti valori σ_p^2 e σ_τ^2 del parametro σ^2 .

Per siffatte proprietà, espresse mediante le φ_p e le loro derivate, le due forme quadratiche (1), *definite, negativa* la prima, *positiva* la seconda, assumono l'aspetto canonico

$$W = -\frac{1}{2} \sum_p^N \sigma_p^2 \dot{\varphi}_p^2, \quad T = \frac{1}{2} \sum_p^N \dot{\varphi}_p^2,$$

di cui è manifesta l'utilità.

Rileveremo che, i coefficienti u_p^i godono della notevole proprietà di esprimere la variazione S^{ik} , della generica coordinata y^i , prodotta da una componente di forza $Y_k = 1$, mediante la forma *bilineare*,

$$(4) \quad S^{ik} = \sum_p^N \frac{u_p^i u_p^k}{\sigma_p^2}, \quad (i, k = 1, 2, \dots, N);$$

Omettendone la dimostrazione per necessaria brevità, passiamo ad introdurre il potenziale delle componenti lagrangiane *covarianti* Y_k (che supporremo rigorosamente o sensibilmente costanti)

$$U = \sum_i^N Y_i y^i,$$

ovvero anche, in coordinate normali,

$$U = \sum_p^N X_p \varphi_p$$

essendo, manifestamente,

$$X_p = \sum_i^N Y_i u_p^i.$$

Con riferimento ai suddetti coefficienti X_p , ove si introducano le componenti *contravarianti* Y^k , legate alle Y_k dalla trasformazione

$$Y_k = \sum_i^N b_{ik} Y^i, \quad (i = 1, 2, \dots, N;)$$

dimosteremo che, vale identicamente la relazione,

$$(5) \quad \sum_p^N X_p^2 = \sum_i^N b_{ik} Y^i Y^k.$$

Infatti, avendosi manifestamente

$$(6) \quad Y^i = \sum_p^N \chi_p^i u_p^i$$

con

$$\chi_p^i = \sum_k^N b_{ik} Y^k u_p^i = \sum_k^N Y_k u_p^k = X_p \quad (1),$$

risulta dall'identità

$$\sum_p^N X_p^2 = \sum_i^N X_p X_\tau \delta_p^\tau = \sum_{i,k,p,\tau}^N X_p X_\tau b_{ik} u_p^i u_\tau^k$$

la relazione che si vuol dimostrare.

Ciò posto, applicando il metodo di Lagrange quando le W , T ed U sono già espresse in coordinate normali, otteniamo

$$\ddot{\varphi}_p + \sigma_p^2 \varphi_p = X_p \quad (p = 1, 2, \dots, N).$$

L'integrale generale, per la generica p^{ima} di queste equazioni lo penseremo scritto nella forma

$$\varphi_p = \bar{\varphi}_p + \psi_p$$

essendo in questa, il termine $\bar{\varphi}_p$ rappresentativo del moto che si produrrebbe, a partire dalle particolari circostanze iniziali che si considerano, sotto l'azione, eventuale, dei soli carichi costanti, il termine ψ_p invece, rappresentativo del moto generato dai carichi variabili per valori iniziali nulli

(1) Questa relazione per χ_p risulta, moltiplicando alla *Fourier* la (6) per $b_{ik} u_p^i$ e sommando tra 1 ed N rimpetto agli indici i e k . Ove si ricordi la (3) e si cambi l'indice τ con p risulta senz'altro la legittimità della posizione fatta.

delle coordinate e delle velocità. Potremo quindi porre, in luogo di φ_p , l'espressione (5) della Nota citata, e, per ψ_p , com'è facile verificare

$$\psi_p = \frac{1}{\sigma_p} \int_0^t X_p(\xi) \sin \sigma_p (t - \xi) d\xi.$$

§ 3. POSIZIONE DEL PROBLEMA E SUA RISOLUZIONE. — Con queste intese, la ricerca d'una limitazione superiore y_d^i di y^i si riduce a trovare dei limiti per la serie $\sum_p^N u_p^i \varphi_p$ con le φ_p definite come poc'anzi.

Ove si rilevi che, in ogni caso, essendo a_i e b_i delle costanti arbitrarie, si ha la disuguaglianza

$$\left\{ \sum_i^N a_i b_i \right\}^2 \leq \sum_i^N a_i^2 \sum_i^N b_i^2,$$

troviamo, con ovvi passaggi,

$$\begin{aligned} y^i &= \sum_p^N u_p^i \varphi_p = \sum_p^N \frac{u_p^i}{\sigma_p} \varphi_p \sigma_p \leq \sqrt{\sum_p^N \left(\frac{u_p^i}{\sigma_p} \right)^2 \sum_p^N \varphi_p^2 \sigma_p^2} = \\ &= \sqrt{\sum_p^N \left(\frac{u_p^i}{\sigma_p} \right)^2 \left[\sum_p^N \varphi_p^2 \sigma_p^2 + 2 \sum_p^N \varphi_p \psi_p \sigma_p^2 + \sum_p^N \psi_p^2 \sigma_p^2 \right]} \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_p^N \left(\frac{u_p^i}{\sigma_p} \right)^2 \left[\sum_p^N \varphi_p^2 \sigma_p^2 + 2 \sqrt{\sum_p^N \varphi_p^2 \sigma_p^2 \sum_p^N \psi_p^2 \sigma_p^2} + \sum_p^N \psi_p^2 \sigma_p^2 \right]}. \end{aligned}$$

Ed indicando infine con P_d , rispettivamente con Π_d , i limiti superiori delle serie $\frac{1}{2} \sum_p^N \varphi_p^2 \sigma_p^2$, $\frac{1}{2} \sum_p^N \psi_p^2 \sigma_p^2$ caratterizzanti l'energia elastica globale del sistema che compete al moto definito dalle φ_p , e rispettivamente dalle ψ_p , ove si rammenti la (4), risulta

$$(7) \quad y^i \leq \sqrt{2 S^i [P_d + 2 \sqrt{P_d \Pi_d} + \Pi_d]} = k \sqrt{2 S^i P_d}$$

essendo

$$(8) \quad k = \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\Pi_d}{P_d}} \right\}.$$

Quanto al limite P_d di P , esso è assegnato dalla (9) della Nota citata, in base alla relazione

$$(9) \quad P_d = \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{E}{P_c}} \right\}^2 P_s$$

essendo, P , l'energia elastica corrispondente alla configurazione d'equilibrio sotto ai carichi costanti, E l'energia totale del corpo all'inizio del moto.

Il limite Π_d infine, resta determinato dalla relazione

$$(10) \quad \Pi_d = \frac{t}{2} \int_0^t \sum_{i,k}^N b_{ik} Y^i(\xi) Y^k(\xi) d\xi,$$

o, in particolare, se $b_{ik} = \delta_i^k \mu_{ii} (\delta_i^k = 1$ per $i = k$, $= 0$ per $i \neq k)$ dalla

$$(10 a) \quad \Pi_d = \frac{t}{2} \int_0^t \sum_i^N \frac{Y_i^2(\xi)}{\mu_{ii}} d\xi.$$

Si ha infatti, con ovvi passaggi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_p^N \psi_p^2 \sigma_p^2 &= \frac{1}{2} \sum_p^N \left\{ \int_0^t X_p(\xi) \sin \sigma_p(t - \xi) d\xi \right\}^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_p^N \int_0^t X_p^2(\xi) d\xi \int_0^t \sin^2 \sigma_p(t - \xi) d\xi \leq \frac{t}{2} \int_0^t \sum_p^N X_p^2(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

e quindi, per la (5), la (10), o in particolare la (10 a), c. d. d.

§ 4. ESTENSIONE AL CONTINUO. - Rileveremo che, anche qui, così come nella Nota richiamata, l'estensione al continuo è, pur che siano osservati i debiti riguardi, in generale legittima.

Omettendo per necessaria brevità ogni passaggio logico e formale, ci limiteremo ad affermare che, trattandosi d'un corpo continuo a tre dimensioni, ove con $v_r = v_r(P)$, ($r = 1, 2, 3$), si indichino le tre componenti dello spostamento d'un generico punto P secondo l'asse x_r d'un sistema cartesiano di riferimento (x_1, x_2, x_3) , e sia $S_{rs} = S_{rs}(P, P')$, ($r, s = 1, 2, 3$), una matrice di funzioni, caratterizzante il cosiddetto *tensore di Green-Somigliana* relativo al corpo in considerazione, si ha,

$$a) \quad v_r(P) \leq \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\Pi_d}{P_d}} \right\} \sqrt{2 S_{rr}(P, P) P_d} = k \sqrt{2 S_{rr}(P, P) P_d}.$$

In questa relazione, P_d è ancora il limite dell'energia elastica del moto libero calcolata sempre secondo la (9), e Π_d invece, sempre il limite della energia che corrisponde al moto forzato dai carichi variabili, e da valutare, con le debite riserve di convergenza, secondo la relazione

$$(11) \quad \Pi_d = \frac{t}{2} \int_0^t \sum_p^\infty X_p^2(\xi) d\xi,$$

nella quale

$$X_p = \int_S \sum_r^3 Y_r v_r^{(p)} dS,$$

essendo $Y_r = Y_r(P)$ la componente secondo x_r della forza agente in P e $v_r^{(p)} = v_r^{(p)}(P)$ ($r = 1, 2, 3$) la cosiddetta *p^{ima} autoterne* del sistema. Soddisfacendo le *autoterne* suddette, alla relazione di *ortonormalità*

$$(3 a) \quad \int_S \mu \sum_r^3 v_r^{(p)} v_r^{(q)} dS = \delta_p^q$$

si riscontra facilmente che, ove la densità μ sia costante ed eguale a μ_0 , si ha

$$\sum_p^\infty X_p^2 = \frac{1}{\mu_0} \int_S \sum_r^3 Y_r^2 dS$$

e quindi, in luogo della (11) l'espressione calcolabile con sole quadrature

$$(10 b) \quad \Pi_d = \frac{t}{2\mu_0} \int_0^t d\xi \int_S \sum_r^3 Y_r^2(P, \xi) dS.$$

Ove si rammenti che, il *tensore* $S_{rs} = S_{rs}(P, P')$ determina nient'altro che lo spostamento nella direzione x_s del generico punto P' provocata da una forza unitaria agente in P nella direzione x_r , si riconosce come, in molti casi, le formole qui assegnate possano portare insino alle numeriche applicazioni.

§ 5. UN ESEMPIO ILLUSTRATIVO; CARICO CONTINUO MOBILE SOPRA UN PONTE. — Consideriamo una trave, semplicemente appoggiata agli estremi, di momento d'inerzia J , sezione F , densità specifica μ , modulo d'elasticità E , luce netta L , peso per unità di lunghezza $q \cong F \cdot \mu \cdot g$, g essendo l'accelerazione di gravità. Un treno di lunghezza λ , e di peso (medio) p per unità di lunghezza, vi transiti sopra con velocità uniforme assegnata eguale a w . Ci proponiamo di trovare il limite superiore per la freccia elastica in mezzeria.

Adottando per tale intento la (7 a) cominciamo col rilevare che, essendo all'inizio del moto (istante $t = 0$) il ponte in equilibrio sotto al peso proprio q , si avrà $E = -P_s$ e quindi $P_d = P_s$, essendo, per cose note, $P_s = q^2 L^3 : 240 EJ$, o, introducendo il periodo fondamentale di vibrazione $T = \sqrt{49 L^4 : \pi^2 g EJ}$, $P_s = \pi^2 q g L T^2 : 960$.

D'altro canto, per la (10 b), troviamo all'istante generico t ,

$$\Pi_d \leq \frac{t}{2} \int_0^t d\xi \int_0^{\lambda'} \frac{p^2 dx}{q} = \frac{t^2 p^2 \lambda' g}{2 q}$$

λ' essendo una lunghezza eguale a λ per $\lambda \leq L$, eguale ad L per $\lambda \geq L$, e t , potendo, evidentemente, esser al più eguale a $t = \frac{L + \lambda}{w}$.

Risulta pertanto, con tali posizioni,

$$k = \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\Pi_d}{P_s}} \right\} = 1 + 6.97 \frac{p}{q} \sqrt{\frac{\lambda'}{L}} \frac{t}{T} \quad , \quad \text{con } t \leq \frac{L + \lambda}{w} ,$$

ovvero anche, rilevando che il rapporto $\sqrt{E:\mu}$ nell'espressione di T caratterizza la velocità del suono W_0 nel materiale di cui è costituito il ponte, e convenendo d'indicare con i^2 il quadrato del raggio di girazione della sezione F , introducendo addirittura il massimo valore di t ,

$$k = 1 + 10.95 \frac{W_0}{w} \cdot \frac{L + \lambda}{L} \cdot \frac{i}{L} \cdot \frac{p}{q} \sqrt{\frac{\lambda' \mu g F}{L \cdot q}} .$$

E poichè per la trave semplicemente appoggiata, si ha $S(P, P) = L^3 : 48 EJ$ per P in mezzzeria, la (7 a) fornisce finalmente, per la freccia massima v_{\max} ,

$$v_{\max} \leq k \frac{q L^4}{75.99 EJ} .$$

In particolare, passando ai numeri, con riguardo ad una travata in cemento armato, avendosi in unità c. g. s. $E = 2 \cdot 9.81 \cdot 10^{10}$ (cm.⁻¹ gr. sec.⁻²), $\mu = 2.40$ (gr. cm.⁻³) e quindi $W_0 \cong 2.86 \cdot 10^5$ (cm. sec.⁻¹) risulta, per $\lambda = \lambda' = L = 20.00$ m. , $q \cong \mu F g$, $p : q = 0.25$, $i : L = 0.025$, $w = 0.01$ $W_0 \cong 103$ (Km. , h.⁻¹)

$$k = 1 + 10.95 \cdot 100 \cdot \frac{40.00}{20.00} \cdot 0.025 \cdot 0.25 = 1 + 13.69 = 14.69 .$$

Un risultato cui, come manifestamente si vede, pur essendo i dati tirati in favore d'un risultato ragionevole, non si può certo attribuire alcuna pratica applicabilità. Tuttavia l'espressione trovata per k non è priva d'interesse, in quanto essa dimostra, contrariamente alle prime presunzioni che, per velocità w tendenti all'infinito il limite superiore della freccia dinamica tende a zero. Il quale comportamento assintotico dell'effetto dinamico per raffronto alla velocità fu già rilevato, per quanto concerne il cimento globale del sistema, dal prof. Levi-Civita in una recente conferenza.

Matematica. — *Equazioni algebriche risolubili per radicali in un corpo finito.* Memoria di G. MIGNOSI, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sopra gli ideali primi di un corpo quadratico.* Nota di A. M. BEDARIDA, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Estensione dell'identità di Picone alla più generale equazione differenziale ordinaria autoaggiunta.* Nota di G. CIMMINO, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Alcuni teoremi riguardanti le trasformazioni di Darboux generalizzate.* Nota di B. COLOMBO, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Gli operatori funzionali e il calcolo delle matrici infinite nella teoria dei quanti.* Nota di L. FANTAPPIÈ, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Limitazioni locali del cimento dinamico.* Nota di G. KRALL, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sur le problème de torsion des cylindres élastiques isotropes.* Nota di N. MOUSKHELICHVILI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Sul limite di visibilità con refrattori di piccole dimensioni.* Nota di G. B. LACCHINI, presentata dal Corrisp. A. BEMPORAD.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sul nuovo fenomeno di diffusione: effetto Raman.*
 Nota II ⁽¹⁾ di A. CARRELLI, presentata dal Socio M. CANTONE.

In un precedente lavoro ⁽²⁾ si è mostrato come la nuova radiazione diffusa scoperta da Raman possa considerarsi in accordo con le deduzioni che si ricavano dalla teoria della diffusione ottenuta in base alle moderne vedute.

Nella trattazione teorica del fenomeno suddetto noi ci siamo attenuti alla teoria formulata da Heisenberg e da Kramers, giungendo per ciò che riguarda l'intensità delle righe di frequenza minore (righe Stokes) e quelle di frequenza maggiore (righe anti-Stokes) alla conclusione fondamentale che esse devono comparire con diversa intensità, come infatti è stato riscontrato, ed inoltre che il rapporto fra le due intensità come ordine di grandezza deve essere dato dal quadrato del rapporto dei numeri delle monodi nei due stati stazionari. Per quanto si riferisce al primo punto è da rilevare che considerando il fenomeno di Raman in base alla formula di dispersione ricavata dalla teoria di Schrodinger si giungerebbe alla conclusione che le due radiazioni $\nu - \nu_{lk}$, $\nu + \nu_{lk}$ dovrebbero comparire con la stessa intensità. La mancata verifica di questa deduzione che si ricava dalla teoria ondulatoria così com'essa è enunciata attualmente, è come si comprende d'importanza fondamentale e giustifica la trattazione fatta nel precedente lavoro in base alla teoria di Heisenberg e Kramers.

I. — Per ciò che riguarda il rapporto d'intensità fra le due radiazioni di frequenza $\nu - \nu_{lk}$, $\nu + \nu_{lk}$, mancano finora risultati quantitativi precisi, però dalle esperienze di Pringsheim e Rosen ⁽³⁾ nelle quali si è proceduto ad una registrazione fotometrica delle lastre si può ricavare almeno un primo giudizio quantitativo per stimare l'ordine di grandezza del rapporto $\frac{I_+}{I_-} = \tau$.

Per fare ciò ricaveremo il rapporto degli annerimenti delle due righe Raman (riga Stokes, riga anti-Stokes) dalla curva ottenuta con la micro-

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 ottobre 1928.

(2) « Rend. Acc. dei Lincei », vol. VIII, p. 155.

(3) « Zeit für Phys. », Bd. 50, 741, 1928.

fotometria. Nel suddetto lavoro sono riportate curve relative a $C_2H_2Cl_4$ e CCl_4 , per entrambe queste sostanze possiamo considerare un quartetto vicino alla riga eccitatrice ($\lambda = 4359 \text{ \AA}$). Supponendo che le monadi che si trovano negli stati di maggiore energia 2, 3, 4 cc ... siano eccitati termicamente e quindi siano calcolabili in base alla legge di distribuzione di Boltzmann il rapporto del numero di monadi nello stato 2, 3, 4 cc ... al numero di monadi nello stato i sarà dato dalla relazione:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{e^{-\frac{E_2}{kT}}}{e^{-\frac{E_1}{kT}}} = e^{-\frac{h\nu_{21}}{kT}}; \quad \frac{N_3}{N_1} = e^{-\frac{h\nu_{31}}{kT}} \dots$$

Secondo la formula data nel precedente lavoro il rapporto delle intensità è dato dal quadrato del rapporto ora scritto. Ciò equivale a ritenere le quantità α_- e α_+ come momenti elettrici con frequenze $\nu - \nu_{21}$, $\nu + \nu_{21}$ di ciascuna monade; se queste quantità invece sono i momenti elettrici di monadi nello stato 1 e 2 rispettivamente il rapporto delle intensità è dato semplicemente dal rapporto scritto. In tale ipotesi quindi potremo porre

$$\frac{I_+}{I_-} = \chi = e^{-\frac{h\nu_{12}}{kT}}.$$

Naturalmente ν è una notevole incertezza nella determinazione degli annerimenti in base alle curve ricavate al fotometro registratore, anche per la varia sensibilità della lastra alle varie radiazioni; ma è da notare che il campo spettrale è limitato, e che quello che importa è la determinazione dell'ordine di grandezza. Nella tabella seguente sono riportate le frequenze relative alle due sostanze le quantità $\frac{I}{\chi}$ e inoltre la quantità.

$$\frac{T \log_e \frac{I}{\chi}}{\nu_{12}} = \frac{h}{k} = 4.78 \times 10^{-11}.$$

Per T si è assunto il valore 300° .

Si può ricavare da tali numeri solo una prima indicazione sull'ordine di grandezza della quantità riportata precedentemente, ordine di grandezza che corrisponde a quello indicato dalla teoria.

ν	$\frac{1}{\tilde{\lambda}}$	$\frac{T \lg_e \frac{1}{\tilde{\lambda}}}{\nu}$	Sostanza
5.10×10^{-12}	4	2.71×10^{-11}	$C_2H_2Cl_4$
7.15×10^{-12}	1.8	1.7×10^{-11}	
8.69×10^{-12}	3	3.9×10^{-11}	
10.56×10^{-12}	4	3.9×10^{-11}	
6.54×10^{-12}	1.1	4.37×10^{-11}	CCl_4
9.45×10^{-12}	1.7	1.68×10^{-11}	
13.8×10^{-12}	3.4	2.68×10^{-11}	
24.0×10^{-12}	3.9	1.67×10^{-11}	

Il Daure ⁽¹⁾ riporta la seguente formula di Venkates Waran, che egli verifica con speciali misure, la quale dà anche il rapporto r suddetto $\tilde{\lambda} = e^{-\frac{n}{2.17}}$ dove n sono i numeri d'onda delle righe Raman in cm^{-1} . Il valore 2.17 della costante che compare nella formula per $T = 300^\circ$ dà il valore 4.6×10^{-11} per $\frac{h}{k}$, in accordo con la teoria.

2. — Dalle esperienze condotte finora sullo effetto Raman si è ancora ottenuto: 1° che la radiazione di Raman è polarizzata diversamente per le varie righe; 2° che la polarizzazione della luce di Raman può anche essere maggiore di quella della luce di Tyndall. Tale effetto vogliamo ora considerare, per interpretarlo in base alle moderne teorie. Consideriamo a tale scopo il vettore elettrico dell'onda incidente parallelo all'asse $\tilde{\lambda}$, mentre sia x la direzione di propagazione e y la direzione di osservazione. Per calcolare il grado di depolarizzazione ρ dato da

$$\rho = \frac{\text{Intensità lungo } x}{\text{Intensità lungo } \tilde{\lambda}}$$

dobbiamo considerare i momenti elettrici della monode nelle due direzioni.

(1) DAURE, « Comp. Ren. », 187, p. 826.

Ora per la luce di Tyndall si hanno le espressioni

$$M_x = \sum_n \frac{1}{4h} \left\{ \frac{2 \nu_{nk} (a_{nk})_x (a_{nk})_z}{\nu_{nk}^2 - \nu^2} \right\} E \cos 2\pi \nu t$$

$$M_z = \sum_n \frac{1}{4h} \left\{ \frac{2 \nu_{nk} (a_{nk})_z^2}{\nu_{nk}^2 - \nu^2} \right\} E \cos 2\pi \nu t.$$

Per la luce di Raman consideriamo una riga di frequenza $\nu - \nu_{lk}$; ed allora avremo le due espressioni

$$(I) \quad \begin{cases} M'_x = \sum_n \frac{1}{4h} \left\{ \frac{(a_{nl})_x (a_{nk})_z}{\nu_{nl} + \nu} + \frac{(a_{nk})_x (a_{nl})_z}{\nu_{nk} - \nu} \right\} E \cos 2\pi (\nu - \nu_{lk}) t \\ M'_z = \sum_n \frac{1}{4h} \left\{ \frac{(a_{nl})_z (a_{nk})_z}{\nu_{nl} + \nu} + \frac{(a_{nl})_z (a_{nk})_z}{\nu_{nk} - \nu} \right\} E \cos 2\pi (\nu - \nu_{lk}) t. \end{cases}$$

Se $(a_{nk})_x$, $(a_{nl})_x$ ecc. rappresentano le componenti lungo x e z delle parti reali delle quantità A_{nk} , A_{nl} , e queste quantità sono definite nel modo seguente; se $p(t)$ è il momento elettrico della monade, questo è dato da:

$$p(t) = \sum A_{nk} e^{2\pi i \nu_{nk} t}.$$

Le (I) possono semplificarsi. Infatti restando nelle condizioni del precedente lavoro (frequenza ν_{lk} dello ultrarosso, frequenze ν_{nk} , ν_{nl} dell'ultravioletto, frequenza ν della zona visibile, e cioè $\nu_{nl} > \nu \gg \nu_{lk}$) e trascurando ν_{lk} in confronto a ν_{nx} e ν_{nl} , si ottiene

$$M'_x = \sum_n \frac{1}{4h} \left\{ \frac{\nu_{nk} [(a_{ln})_x (a_{nk})_z + (a_{nk})_x (a_{nl})_z] + \nu [(a_{nk})_x (a_{nl})_z - (a_{nl})_x (a_{nk})_z]}{(\nu_{nl} + \nu)(\nu_{nk} - \nu)} \right\} E \cos 2\pi (\nu - \nu_{lk}) t$$

$$M'_z = \sum_n \frac{1}{4h} \left\{ \frac{2 \nu_{nk} (a_{nl})_x (a_{nk})_z}{(\nu_{nl} + \nu)(\nu_{nk} - \nu)} \right\} E \cos 2\pi (\nu - \nu_{lk}) t.$$

Per semplicità supponiamo che la sommatoria si riduca ad un unico termine e che cioè si possa dar ragione della dispersione nella zona visibile mediante un unico centro d'assorbimento nell'ultravioletto. Allora in tali condizioni il grado di depolarizzazione della luce di Tyndall sarà proporzionale alla quantità

$$\left\{ \frac{(a_{nk})_x}{(a_{nk})_z} \right\}^2$$

e quello della luce di Raman alla quantità

$$\left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{(a_{nl})_x}{(a_{nl})_z} + \frac{(a_{nk})_x}{(a_{nk})_z} \right] + \frac{1}{2} \frac{\nu}{\nu_{nk}} \left[\frac{(a_{nk})_x}{(a_{nk})_z} - \frac{(a_{nl})_x}{(a_{nl})_z} \right] \right\}^2$$

e di qui si vede che esso può essere distinto da quello della luce di Tyndall e variabile da riga a riga.

3. Vediamo infine qual'è il rapporto delle intensità di varie righe Raman del tipo $\nu - \nu_{lk}$, righe Stokes. Consideriamo per semplicità la componente del momento elettrico della monode parallela al vettore elettrico; tralasciando quindi l'indice χ si ha per il momento relativo alla riga $\nu - \nu_{lk}$ l'espressione

$$\sum_n \frac{1}{4} \frac{1}{h} \left\{ \frac{\nu_{lk} a_{n1} a_{nk}}{(\nu_{n1} + \nu)(\nu_{nk} - \nu)} \right\} E \cos 2\pi(\nu - \nu_{lk})t = E \alpha_l \cos 2\pi(\nu - \nu_{lk})t.$$

L'intensità della luce diffusa relativamente alla frequenza $\nu - \nu_{lk}$ sarà proporzionale a

$$\alpha_l^2 (\nu - \nu_{lk})^4$$

mentre l'intensità I_m della luce diffusa relativamente ad un'altra riga di Raman, di frequenza $\nu - \nu_{mk}$ sarà proporzionale a

$$\alpha_m^2 (\nu - \nu_{mk})^4.$$

Il rapporto delle due quantità sarà allora dato da

$$\frac{I_l}{I_m} = \frac{(\nu - \nu_{lk})^4}{(\nu - \nu_{mk})^4} \frac{\alpha_l^2}{\alpha_m^2} = \frac{(\nu - \nu_{lk})^4}{(\nu - \nu_{mk})^4} \frac{(\nu + \nu_{nm})^2}{(\nu + \nu_{nl})^2} \frac{\nu_{lk}^2 \nu_{nm} f_{nl}}{\nu_{mk}^2 \nu_{nl} f_{ml}}.$$

Si vede quindi che l'intensità della luce di Raman è direttamente proporzionale alla quarta potenza della frequenza emessa, analogamente a quanto si ha per la luce di Tyndall, ma il rapporto su riportato dipende anche dalle quantità f_{nm}, f_{nl} che sono le grandezze caratteristiche di ogni riga ν_{nm}, ν_{nl} nella formula di dispersione della sostanza considerata.

Fisica. — *Sull'allargamento delle righe per risuonanza.* Nota di A. CARRELLI, presentata dal Socio M. CANTONE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica organica. — *Sull'acido ditioformico* ⁽¹⁾. Nota II di T. G. LEVI, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

In un precedente lavoro sull'acido ditioformico pubblicato in questi « Rendiconti » ⁽³⁾ ho potuto isolare l'acido ditioformico ed alcuni suoi derivati mediante la reazione di Cambi e cioè per azione del cloroformio sul solfuro potassico secondo la seguente equazione $\text{HCCl}_3 + 2\text{K}_2\text{S} = \text{HCSSK} + 3\text{KCl}$.

Avevo allora isolato e descritto il ditioformiato di argento e quello di piombo nonchè il disolfuro dell'acido ditioformico; quest'ultimo è insolubile nei solventi ordinari ed ha carattere quindi di polimero.

Mi riservavo anche di continuare le ricerche per ottenere eteri dell'acido ditioformico allo scopo di ottenere prodotti di cui fosse possibile determinare il peso molecolare. Espongo ora gli ulteriori risultati ottenuti riprendendo in esame questo argomento:

Ditioformiato potassico HCSSK_3 : ho ottenuto questo sale allo stato di purezza eseguendo la reazione solfuro potassico alcoolico-cloroformio come ho indicato nella precedente Nota; dopo distillazione nel vuoto del prodotto di reazione filtrato dal cloruro potassico e dopo aver raccolto alla pompa il residuo cristallino giallo ottenuto, quest'ultimo è stato purificato per ripetute cristallizzazioni dall'alcool assoluto effettuando l'operazione sempre in presenza di aria secca. Ho così ottenuto il ditioformiato potassico puro; esso è un sale cristallizzato di color giallo oro che fonde a 193° a liquido rosso con decomposizione, solubile in alcool ed estremamente solubile in acqua.

All'analisi ha dato:

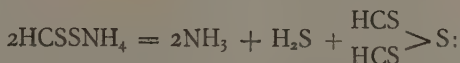
gr. 0.6402 di sostanza	diedero	gr. 0.2384 di CO_2
» 0.6402 » » »	»	» 0.0580 » H_2O
» 0.0964 » » »	»	» 0.3849 » BaSO_4
» 0.2226 » » »	»	» 0.1648 » K_2SO_4
trovato		calcolato per HCSSK
C = 10.16		C = 10.33
H = 1.00		H = 0.86
S = 54.83		S = 55.20
K = 33.22		K = 33.62

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Ricerche Chimiche e Chimico-fisiche della Società Italiana Pirelli.

(2) Nella seduta del 20 gennaio 1929.

(3) Questi « Rendiconti » 32, 1° semestre, 569 (1923).

Ditioformiato d'ammonio: lo ho ottenuto in soluzione per titolazione con ammoniaca acquosa dell'acido ditioformico. I tentativi di ottenere il sale secco hanno dato esito negativo perchè la soluzione del sale si altera immediatamente con sviluppo di idrogeno solforato e di ammoniaca e dopo qualche ora comincia a separarsi un prodotto insolubile in tutti i solventi che dopo esser stato lavato con acqua, alcool e solfuro di carbonio risulta essere il monosolfuro dell'acido ditioformico (vedi avanti). La reazione procede evidentemente così:



Non ha luogo reazione fra cloroformio e solfuro ammonico alcoolico.

Acido ditioformico (HCSSH)₃. — All'epoca della precedente Nota sullo stesso argomento non ero riuscito ad isolare l'acido ditioformico probabilmente perchè operavo su ditioformiato potassico impuro. Ho ora ottenuto l'acido ditioformico allo stato puro come prodotto solido bianco, insolubile nei solventi ordinari, acidificando debolmente e cautamente con acido cloridrico diluito la soluzione idroalcolica del sale potassico puro raffreddata con ghiaccio.

Ha luogo un certo sviluppo di idrogeno solforato mentre si separa il ditioacido libero che si filtra alla pompa e si lava con acqua e poi con alcool e con etere. L'acido ditioformico fonde a 55°-60° con decomposizione.

All'analisi ha dato:

gr. 0.1047 di sostanza	diedero	gr. 0.6232 di BaSO_4
» 0.0999 » » »	»	» 0.5988 » BaSO_4
trovato		calcolato per HCSSH
S = 81.75		S = 82.05
S = 82.32		

Ho titolato l'acido con soluzione alcoolica di idrato potassico N/1 in eccesso rititolando poi l'eccesso di alcali, dopo diluizione con acqua o alcool del sale ottenuto, con acido cloridrico normale acquoso, indicatore il metilarancio.

Gr. 0.4050 di acido consumano cm^3 5.22 di KOH N/1
contro cm^3 5.19 calcolati.

Prodotti di scomposizione dell'acido ditioformico per riscaldamento. — L'acido ditioformico si scompone per riscaldamento in idrogeno solforato, solfuro di carbonio, carbone e zolfo. Ho effettuato la scomposizione dell'acido per riscaldamento facendo passare una corrente di anidride-carbonica esente da aria sull'acido riscaldato e prendendo come apparecchi d'assorbimento un serpentino raffreddato con ghiaccio e sale per condensare il CS_2 , un gorgogliatore a nitrato d'argento per fissare l'idrogeno solforato ed un azotometro di Schiff a potassa per raccogliere eventualmente del gas posto che se

ne fosse svolto. Nell'azotometro non si raccoglie affatto gas epperò ritengo che sia da escludere che nella decomposizione dell'acido si formi del mono-solfuro di carbonio monomero⁽¹⁾ che, se fosse capace di esistenza, dovrebbe essere a temperatura ordinaria un gas e, come è presumibile, non dovrebbe essere assorbito dalla potassa.

Etere metilico dell'acido ditioformico (HCSSCH_3). — J. Houben e K. M. Schultze (B. 44, 3228, 1911) hanno tentato di preparare l'etere etilico dell'acido ditioformico per riduzione con arsenito potassico del cloroetere ClCSC_2H_5 che si prepara da mercaptano etilico e cloruro di tiocarbonile. Essi hanno ottenuto un olio che bolle a 111°C . a 15 mm. i cui dati analitici non corrispondono a quelli calcolati per l'etere etilico del ditioformico (contro uno zolfo calcolato di 60.40 % essi hanno trovato 55.44 % di zolfo).

Essi ritengono di essere in presenza, dato l'elevato punto di ebollizione del prodotto ottenuto, di un polimero e concludono che l'alcali impiegato nella riduzione probabilmente facilita la polimerizzazione dell'etere.

Io l'ho ottenuto con buon rendimento sciogliendo in alcool diluito al 70 % del ditioformiato potassico puro ed aggiungendo alla soluzione joduro di metile in leggero eccesso; dopo aver lasciato a sè il tutto a temperatura ordinaria alcune ore in recipiente tappato, si decanta dal poco etere impuro separatosi come pece e si evapora parzialmente a temperatura ordinaria preferibilmente sotto corrente d'aria. L'etere che si separa come solido bianco, si lava su filtro con acqua e dopo essiccamento in essiccatore a vuoto, si scioglie in benzolo e si precipita con alcool eseguendo contemporaneamente una parziale evaporazione. Con due successive cristallizzazioni e decolorazioni con nero animale si ottiene un prodotto puro che fonde a 105.5° solubile in alcool e solubilissimo in benzolo.

All'analisi il ditioformiato di metile ha dato:

gr. 0.0964 di sostanza	diedero	gr. 0.4910 di BaSO_4
» 0.1032 » » » »	» » » » » »	» 0.5248 » »
Trovato: S = 69.95 %	Calcolato: per HCSSCH_3	
S = 69.84 %	S = 69.57 %	

Ho eseguito la determinazione del peso molecolare per crioscopia di questo etere disciolto in benzolo:

solvente gr. 10.57	sostanza gr. 0.2708	abbass. 0.48°	peso molecolare 267
» » 10.57	» » 0.4484	» 0.77°	» » 275
» » 12.14	» » 0.2256	» 0.356°	» » 276
» » 12.14	» » 0.7244	» 1.08°	» » 276

(1) Il monosolfuro di carbonio polimero $(\text{CS})_x$ è noto e si ottiene esponendo al sole in tubi chiusi per lungo tempo il solfuro di carbonio (Low. Z 1863; 622 Sidot B. 8, 981). Esso si presenta come polvere rosso bruna che non fonde neanche a 260° e che si scompone per riscaldamento in carbonio e zolfo.

L'etere metilico è perciò trimero (peso molecolare calcolato per il trimero = 276) ossia gli spetta la formula $(\text{HCSSCH}_3)_3$. Rimane quindi stabilito anche il grado di polimerizzazione dell'acido libero.

Etere etilico $(\text{HCSSC}_2\text{H}_5)_3$: è liquido a temperatura ordinaria e non è stato ulteriormente esaminato.

Etere propilico $(\text{HCSSC}_3\text{H}_7)_3$: L'ho ottenuto come solido cristallino a p. f. 38-39°; si ottiene puro assai più difficilmente dell'etere metilico anche perchè stenta a cristallizzare e va lasciato qualche giorno a sè.

All'analisi ha dato:

gr. 0.0862 di sostanza	diedero	gr. 0.3376 di BaSO_4
trovato S = 53.79%		calcolato S = 53.33%

La determinazione del peso molecolare per crioscopia in benzolo ha dato:

solvente gr. 12.083	sostanza gr. 0.2818	abbassamento = 0.32°
peso molecolare trovato = 358.5;		calcolato per il trimero 360

Etere benzilico $(\text{HCSSC}_6\text{H}_5\text{CH}_2)_3$. — Per benzilazione del ditioformiato potassico si ottengono due eteri benzilici entrambi controllati all'analisi ed entrambi di egual peso molecolare (trimeri); con ogni probabilità si tratta di due forme isomere che fondono l'una a 77° e l'altra a 154°. Ho ottenuta la separazione di questi due prodotti nel seguente modo: Si fa reagire al solito il ditioformiato potassico sciolto in alcool con cloruro di benzile in leggero eccesso, completando la reazione per riscaldamento all'ebollizione a ricadere, si riprende con acqua il prodotto pecioso di reazione misto a cloruro potassico e la pece ottenuta si scioglie in benzolo e si precipita con alcool; si separa così un olio che aumenta per parziale evaporazione del solvente e che si separa poi dal solvente rimanente mediante imbuto a rubinetto.

Questo prodotto pecioso addizionato di etere precipita in un bel solido che fonde dopo cristallizzazione dall'alcool in cui è assai poco solubile, a 154°; il filtrato etereo lasciato prima evaporare e poi lasciato a sè almeno 12 ore separa per aggiunta di nuovo etere etilico, l'altro etere benzilico a p. f. 77° che si ottiene con questo punto di fusione dopo cristallizzazione dal benzolo-alcool.

Etere benzilico a p. f. 154°. — È estremamente poco solubile in alcool, pochissimo solubile in etere, poco solubile in benzolo freddo e notevolmente solubile in benzolo bollente.

All'analisi ha dato:

gr. 0.1512 di sostanza	diedero	gr. 0.3158 di CO_2
» 0.1512 » » »	»	0.0684 » H_2O
» 0.1350 » » »	»	0.2810 » CO_2
» 0.1350 » » »	»	0.0568 » H_2O
» 0.1004 » » »	»	0.2840 » BaSO_4
» 0.1049 » » »	»	0.2934 » BaSO_4

trovato:	calcolato per HCSSC ₆ H ₅ CH ₃
C = 56.98; 56.79%	C = 57.14%
H = 5.02; 4.67%	H = 4.76%
S = 38.85%	S = 38.10%
S = 38.41%	

La determinazione del peso molecolare per ebullioscopia in benzolo ha dato:

solvente gr. 11.90	sostanza gr. 0.5087	$\Delta = 0.22^\circ$	peso mol. trov. 505
» » 18.00	» » 0.8686	$\Delta = 0.25^\circ$	» » » 502

calcolato per trimero peso molecolare = 504.

(Le determinazioni sono state eseguite con due apparecchi: uno contenente il solvente e l'altro il solvente con l'etere disciolto per eseguire le letture contemporaneamente e renderci indipendenti dalla pressione barometrica; in precedenza naturalmente erano stati tarati i due termometri marcando le rispettive temperature di ebollizione del benzolo nei due termometri stessi).

Etere benzilico a p. f. 77° — È discretamente solubile in alcool ed assai solubile in benzolo.

All'analisi ha dato:

gr. 0.1524 di sostanza	diedero gr. 0.3150 di CO ₂
» 0.1524 » » »	» 0.0642 » H ₂ O
» 0.1050 » » »	» 0.2908 » BaSO ₄
» 0.1049 » » »	» 0.2934 » BaSO ₄

trovato:	calcolato per HCSSC ₆ H ₅ CH ₃
C = 56.38%	C = 57.14%
H = 4.68%	H = 4.76%
S = 38.04; 38.41%	S = 38.10%

La determinazione del peso molecolare per crioscopia in benzolo ha dato:

solvente gr. 10.157	sostanza gr. 0.2326	$\Delta = 0.23^\circ$	peso mol. trov. 498.0
» » 11.118	» » 0.3302	$\Delta = 0.29^\circ.5$	» » » 503.3

calcolato per trimero 504.

La determinazione del peso molecolare per ebullioscopia in benzolo ha dato:

solvente gr. 12.00	sostanza gr. 0.5274	$\Delta = 0.22^\circ.5$	peso mol. trov. 507
--------------------	---------------------	-------------------------	---------------------

Monosolfuro dell'acido ditioformico. $\left[\begin{smallmatrix} \text{HCS} \\ \text{HCS} \end{smallmatrix} > \text{S} \right]_n$. L'ho ottenuto da

ditioformiato potassico e bromocianogeno in soluzione acquosa; precipita in modo quantitativo il monosolfuro dell'acido ditioformico che è una polvere bruna insolubile in tutti i solventi; si altera a 190° e fonde a 195° con sviluppo gasoso; per riscaldamento in corrente di CO₂ col dispositivo già

indicato per la decomposizione dell'acido ditioformico si ottiene: idrogeno solforato, solfuro di carbonio e carbone.

All'analisi ha dato:

gr. 0.1000 di sostanza diedero gr. 0.5676 di BaSO_4

trovato $\text{S} = 77.96\%$ calcolato per $\frac{\text{HCS}}{\text{HCS}} > \text{S} \quad \text{S} = 78.69\%$.

Per controllo è stata anche eseguita la titolazione del solrocianuro liberatosi nella reazione $2\text{HCSSK} + \text{BrCN} = \text{KCNS} + \frac{\text{HCS}}{\text{HCS}} > \text{S}$ seguendo il metodo di Treadwell e Mayr: gr. 0.1408 di HCSSK dovrebbero dare gr. 0.0575 di KCNS ; per titolazione con soluzione di jodio in ambiente alcalino e rititolazione dell'eccesso con iposolfito risultano consumati c.c. 36.7 di jodio $\text{N}/10$ pari a gr. 0.05865 di KCNS .

Il disolfuro $\left[\begin{smallmatrix} \text{HCSS} \\ | \\ \text{HCSS} \end{smallmatrix} \right]_n$. (Vedi la precedente Nota) preparato dallo stesso campione di ditioformiato col quale è stato preparato il monosolfuro ha dato:

gr. 0.0990 di sostanza diedero gr. 0.6048 di BaSO_4

trovato $\text{S} = 83.90\%$ calcolato per $\frac{\text{HCSS}}{\text{HCSS}} \downarrow \text{S} = 83.13\%$.

La insolubilità del monosolfuro e del disolfuro in tutti i solventi non mi ha permesso di determinare direttamente il loro peso molecolare e resta quindi incerta la questione del grado di polimerizzazione, per quanto possa ritenersi verosimile trattarsi anche in questo caso di trimeri.

Quanto alla costituzione dei trimeri dell'acido ditioformico e dei rispettivi eteri, ritengo che si possa ammettere una struttura ciclica a sei atomi alternati di carbonio e di zolfo in analogia a quanto si ammette generalmente pei trimeri delle aldeidi e tioaldeidi. La isomeria dei due eteri benzilici sarebbe una stereoisomeria *cis* e *trans* come si verifica appunto in alcuni dei casi suaccennati.

Mineralogia. — *Ricerche cristallografiche sul cinabro di Idria*⁽¹⁾.
Nota di F. RODOLICO, presentata⁽²⁾ dal Socio F. MILLOSEVICH.

Il cinabro delle miniere di Idria è poco noto dal lato cristallografico. In un campione studiato dallo Scharf i cristalli erano costituiti dalla combinazione $\{10\bar{1}1\}$, $\{0001\}$; lo Schabus ha descritto alcuni cristalli di Idria e di Almaden senza distinguerne la provenienza e per tale ragione l'Hintze⁽³⁾ ritiene che la sola notizia cristallografica sicura sul cinabro di Idria sia quella dataci dallo Scharf. Del resto anche il prof. Pelloux nota che ad Idria è « poco frequente il cinabro cristallizzato, in nitidi individui che stanno impiantati nelle geodi e formano talora eleganti druse insieme a cristalli di calcite⁽⁴⁾ ».

Ho rivolto la mia attenzione su tale argomento per la gentilezza del dott. Sambalino, che ha messo a mia disposizione un campione della sua interessante raccolta mineralogica. Alcuni campioni ho poi trovato nel Museo mineralogico della R. Università di Firenze, ed altri me ne hanno procurato i professori Millosevich, Pelloux, e l'ing. Ciampi; ad essi e al dott. Sambalino rivolgo i miei ringraziamenti.

Ho potuto così studiare una dozzina di cristalli, tutti impiantati su rocce note per la regione di Idria e talora associati a calcite ed a quarzo. I cristalli, la cui grandezza oscilla tra uno e sei millimetri secondo la maggiore dimensione, presentano nell'insieme le seguenti forme:

Pinacoide basale $c\{0001\}$.

Prisma esagonale $M\{10\bar{1}0\}$.

Romboedri diretti: $f\{20\bar{2}5\}$, $g\{10\bar{1}2\}$, $w\{50\bar{5}9\}$, $\beta\{30\bar{3}5\}$, $b\{20\bar{2}3\}$, $i\{40\bar{4}5\}$, $\Omega\{60\bar{6}7\}^*$, $a\{10\bar{1}1\}$, $V\{80\bar{8}5\}$, $\chi\{50\bar{5}3\}$, $n\{20\bar{2}1\}$, $\delta\{10.0.\bar{1}0.3\}$?

Romboedri inversi: $a'\{01\bar{1}1\}$, $\lambda'\{05\bar{5}1\}$, $\sigma'\{0.10.\bar{1}0.1\}$?

Bipiramide trigonale destra $y\{22\bar{4}3\}$?

Trapezoedro trigonale destro diretto $\Theta\{11.1.\bar{1}2.5\}^*$?

Trapezoedro trigonale destro inverso $\Phi\{2.16.\bar{1}4.7\}^*$.

Ad eccezione della base e del romboedro $\{10\bar{1}1\}$ tutte queste forme sono nuove per la località; quelle segnate con * sono, per quanto mi risulta, nuove per la specie. Riguardo alla orientazione mi sono regolato nel

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 6 gennaio 1929.

(3) C. HINTZE, *Handbuch der Mineralogie*, Leipzig, 1904, I, 682.

(4) A. PELLOUX, *La miniera di Idria nella Venezia Giulia*, « La Miniera italiana », III, 124 (1919).

modo seguente: quando sono presenti due serie di romboedri con diverso numero di forme, ho assunto come serie diretta quella più ricca; quando è presente una sola serie, ho considerato questa come diretta. Tale criterio è stato adottato da diversi autori e recentemente sostenuto dallo Zimányi⁽¹⁾.

Le forme semplici si presentano riunite nelle seguenti otto combinazioni:

- 1 $i, \Theta?$.
- 2 $f, \Omega, w, \beta, \lambda', \Phi, c$.
- 3 h, a, n, c .
- 4 $f, h, a, \delta?, a', \sigma'?, \gamma?, c$.
- 5 g, h, V, c .
- 6 g, h, a, χ, c .
- 7 a, V, i, h, c .
- 8 g, M, V, c .

In questo elenco i romboedri di ciascuna combinazione sono disposti secondo il loro decrescente sviluppo.

La combinazione 1 si distacca da tutte le altre per l'assenza della base e per lo sviluppo predominante di un solo romboedro: fatti questi, che sono

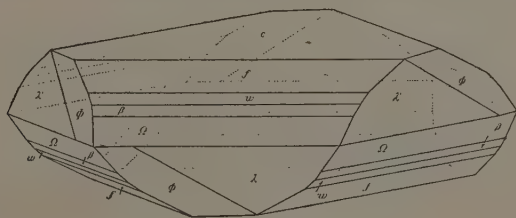


Fig. 1.

rari nei cristalli di cinabro. A troncare uno dei verticali laterali del romboedro $\{40\bar{4}5\}$, appare una sottile faccetta triangolare molto piccola, che apparterebbe al trapezoedro trigonale diretto destro $\{11.1.\bar{1}2.5\}$; tale forma sarebbe nuova per la specie, ma io ritengo che essa meriti una ulteriore conferma per l'incertezza delle due misure in base alle quali ho calcolato il simbolo.

Angoli	misurati	calcolati ⁽²⁾
$\{11.1.\bar{1}2.5\} : \{04\bar{4}5\}$	$79^\circ 59'$	$79^\circ 55'$
$\{11.1.\bar{1}2.5\} : \{4405\}$	$94 \ 39$	$94 \ 54$

Nel cristallo che è costituito dalla combinazione 2 (fig. 1) oltre a cinque forme note ve ne sono due che ritengo nuove per il cinabro: il romboedro

(1) K. ZIMÁNYI, *Ueber den Zinnober von Alsosajo, etc.*, «Zeitschr. f. Kryst.», XLI, 440 (1906).

(2) In base alla costante $a:c = 1:1;14526$ (SCHABUS).

diretto $\{60\bar{6}7\}$ ed il trapezoeдро trigonale inverso destro $\{\bar{2}.16.\bar{1}4.7\}$. I simboli derivano da ottime misure ottenute da due facce grandi e nitide.

Angoli	misurati	calcolati
$\{60\bar{6}7\} : \{0001\}$	$48^{\circ} 27'$	$48^{\circ} 35'$
$\{\bar{2}.16.\bar{1}4.7\} : \{0001\}$	$70^{\circ} 41'$	$70^{\circ} 41'$
$\{\bar{2}.16.\bar{1}4.7\} : \{20\bar{2}5\}$	$62^{\circ} 6'$	$62^{\circ} 6'$
$\{\bar{2}.16.\bar{1}4.7\} : \{50\bar{5}9\}$	$60^{\circ} 45'$	$60^{\circ} 45'$
$\{\bar{2}.16.\bar{1}4.7\} : \{30\bar{3}5\}$	$60^{\circ} 25'$	$60^{\circ} 30'$
$\{\bar{2}.16.\bar{1}4.7\} : \{60\bar{6}7\}$	60°	$59^{\circ} 59'$

I cristalli che sono costituiti dalle combinazioni 3 e 4 sono stati staccati dallo stesso campione; di essi il primo non offre nulla di notevole, il secondo, molto piccolo (un millimetro nella sua maggiore dimensione), è ricco di forme. Per misurarlo ho adoperato un goniometro a due cerchi ed in tal modo ho potuto determinare con sicurezza la presenza di rom-

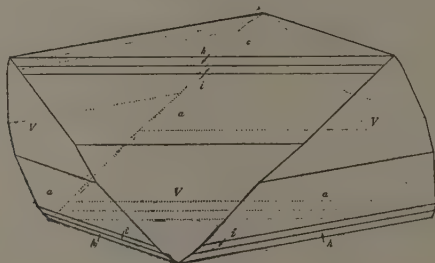


Fig. 2.

boedri diretti e inversi. A causa della incertezza nelle misure non ritengo sicura l'attribuzione alle forme già note $\{10.0.\bar{1}0.3\}$, $\{0.10.\bar{1}0.1\}$, $\{22\bar{4}3\}$ di alcune facce osservate in questo cristallo. Della bipiramide $\{22\bar{4}3\}$ sarebbe presente una sola faccetta molto nitida, ma estremamente piccola; di essa mi sono state possibili solo le seguenti misure approssimative:

Faccia	Coordinate misurate		Coordinate calcolate	
	φ	ρ	φ	ρ
$\{22\bar{4}3\}$	30° ca.	$56^{\circ} \frac{1}{2}$ ca.	30°	$56^{\circ} 47'$

Sullo stesso campione erano impiantati i cristalli che presentano le combinazioni 5-8: sulle loro facce si nota la presenza di nitidissimi romboedri di calcite irregolarmente disposti. In questo caso la calcite è di seconda formazione rispetto al cinabro; invece i cristalli studiati dallo Scharf si erano sviluppati sopra cristalli di calcite. Il romboedro $\{80\bar{8}5\}$ bene sviluppato in alcuni di essi (fig. 2) è stato osservato una sola volta

da Zimányi⁽¹⁾, che ha trovato una sottile faccetta di questa forma in due cristalli provenienti da Almaden. A volte le facce di questa forma danno una sola immagine, ma più spesso si ottengono gruppi confusi di immagini perchè le facce presentano una notevole tendenza alla curvatura ed alla striatura. Tendenza questa, che si manifesta del resto in quasi tutti i cristalli che ho studiati, e che riguarda in modo particolare le facce di quei romboedri che si trovano tra $\{10\bar{1}1\}$ e $\{20\bar{2}1\}$: in un campione la curvatura delle facce è così accentuata da fare assumere ai cristalli un aspetto lenticolare.

(1) K ZIMÁNYI, loc. cit., p. 444.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 3 febbraio 1929 (Anno VII)

Presidenza del sen. prof. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulle matrici di Riemann.* Nota del Corrisp. G. SCORZA.
Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Storia della Scienza. — *Le ricerche geometriche meccaniche di Leonardo da Vinci.* Memoria del Socio R. MARCOLONGO.
Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo delle *Memorie*.

Meccanica. — *Sulla riduzione dei comandi dell'aeroplano nel pilotaggio nella nebbia.* Nota del Corrisp. G. A. CROCCO.
Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Nuovo metodo per misurare la velocità del suono nei liquidi.* Nota del Corrisp. A. AMERIO.
Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sintesi di idrocarburi da gas d'acqua a pressione ordinaria.* Nota del Corrisp. M. G. LEVI, C. PADOVANI e M. BUSI.
Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia. — *Sull'importanza dei fogli « Sanremo » e « Imperia » della carta geologica d'Italia al 100.000, per la soluzione dei grandi quesiti di geologia alpina ed appenninica.* Nota del Corrisp. S. FRANCHI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Sul modo di formazione dei gruppi mimetici di dachiardite* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ del Corrisp. G. D'ACHIARDI.

In due Memorie pubblicate nel 1905 e 1906 ⁽³⁾ illustravo una nuova specie mineralogica, ritrovata nelle geodi di uno dei tanti filoni pegmatitici, quello della Speranza, che attraversano il granito di Monte Capanne presso S. Piero in Campo all'isola d'Elba. Ad essa davo il nome di *zeolite mimetica*, in relazione alla sua composizione, ed al modo di presentarsi in apparenti prismi ottagonali, formati dalla riunione di otto individui cristallini, e quello subordinato di *dachiardite*, a ricordo del compianto mio genitore, da sostituirsi al primo qualora la specie risultasse, in seguito, sicuramente determinata.

Il nome di dachiardite, fu accolto nella letteratura mineralogica ⁽⁴⁾ e su di essa nel 1925 furono, quasi contemporaneamente, pubblicati due interessanti lavori dalla De Angelis ⁽⁵⁾ e dal Berman ⁽⁶⁾, di carattere prevalentemente cristallografico, che servirono a mettere in evidenza, soprattutto, la cristallizzazione monoclinale e la plurigeminazione degli otto individui secondo un piano [110].

Un nuovo attento esame del materiale di questo Istituto, fatto da me in questi ultimi tempi, avendomi mostrato che sulla formazione dei gruppi di dachiardite, non era anche stata data una spiegazione esauriente, ho creduto opportuno pubblicare questa mia Nota, nella speranza di portare un nuovo contributo alla illustrazione di essa.

*
* *

I gruppi pseudoprismatici di dachiardite si mostrano sempre terminati superiormente a tramoggia, chiusa o aperta al centro, come mostrano le figg. 1 e 2. Tali gruppi furono fino ad ora descritti come se fossero costi-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Pisa.

(2) Presentata nella seduta del 3 febbraio 1929.

(3) *Zeolite probabilmente nuova dell'isola d'Elba*, «Proc. Verb. Soc. Tosc. Sc. Nat.», XIV, 7, 150, Pisa 1905; *Zeoliti del filone della Speranza presso S. Piero in Campo*, «Mem. Soc. Tosc. Sc. Nat.», XXII, 150, Pisa 1906.

(4) P. GROTH u. K. MIELEITNER, *Mineralog. Tabellen*, 125, München 1921.

(5) *Alcune nuove osservazioni sulla dachiardite*, «Rend. R. Accad. Lincei», (6), II, 2° sem., 3-4, 133, Roma 1925.

(6) *Notes on dachiardite*, «The Amer. Mineralogist», X, 471, Menasha 1925.

tuiti soltanto da otto individui, geminati secondo un piano $[110]$, e formanti con le loro facce pseudoprismatiche verticali, non un angolo di 45° , ma sibbene uno vicinissimo a 46° . Ciò porta come conseguenza, che tutto

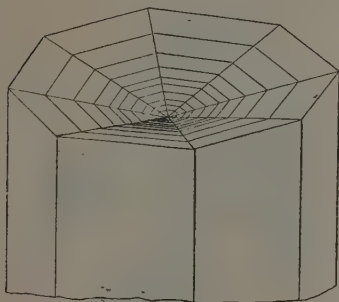


Fig. 1.

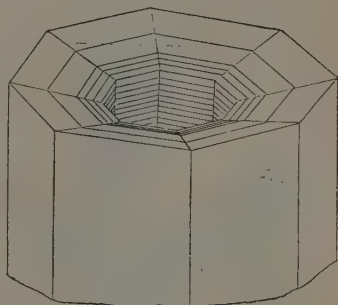


Fig. 2.

l'edificio non è ripartito in otto parti fra loro perfettamente eguali, avendosi sette settori al centro di 46° , ed uno di 38° (e analogamente per i valori degli angoli supplementari delle facce pseudoprismatiche) e poten-

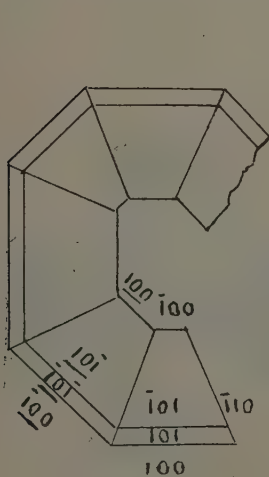


Fig. 3.

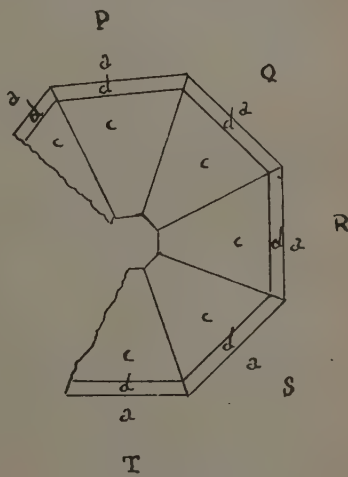


Fig. 4.

dosi anche avere che nel chiudersi dell'edificio cristallino, se tutti gli angoli esterni si mantengano di circa 46° (angoli supplementari), si formi per l'incontro dell'ottavo con il primo individuo un angolo rientrante di circa 8° : l'un caso e l'altro furono già da me osservati e nuovamente oggi verificati.

Se si osservano le figure date dalla De Angelis (fig. 3) e dal Berman (fig. 4), si nota subito la loro quasi perfetta identità e richiama la nostra attenzione il fatto che degli otto cristalli costituenti il gruppo, se ne osser-



Fig. 5.

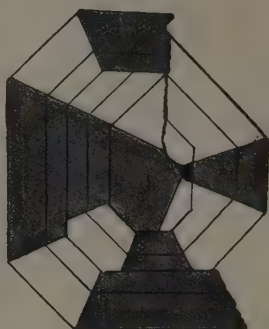


Fig. 6.

vano integri soltanto cinque. Ho verificato se ciò si ripete sul materiale appartenente a questo Istituto, e ho potuto constatarlo in alcuni cristalli, ed in quasi tutte le sezioni sottili ottenute da altri, specialmente nelle loro parti periferiche (fig. 5, 6, 11, 13).

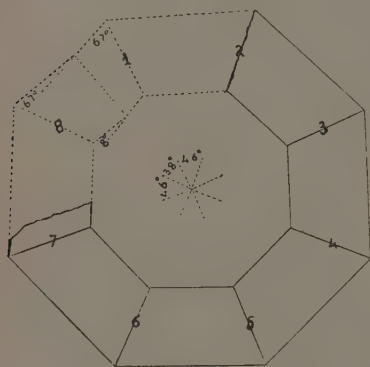


Fig. 7.

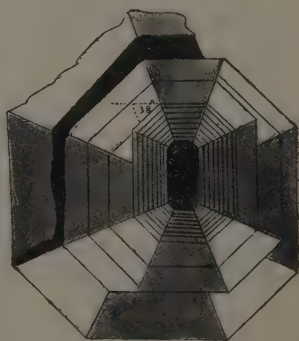


Fig. 8.

Evidentemente il ripetersi del fenomeno esclude l'accidentalità ed offre interesse il ricercarne la causa, la quale a me sembra assai facile a ritrovarsi nel fatto che la riunione avvenendo per settori non fra loro eguali, il più piccolo di 38° , nel quale, come ho detto, può formarsi e si forma anche un angolo rientrante di 8° , è in condizioni di minore stabilità ri-

spetto agli altri, soprattutto, se formandosi il detto angolo rientrante, la faccia pseudoprismatica verticale dell'ottavo individuo venga a premere su quella del primo, ed allora può accadere ed accade, che sottoponendo il gruppo ad un urto, ad una pressione, come quando si provochi il loro distacco dalla roccia per eseguirne misure o per ricavarne delle sezioni sottili, salta via con assai grande facilità il settore che potrebbe dirsi di saldatura e anche, totalmente o parzialmente, i due che gli sono adiacenti (fig. 7).

A conferma di ciò mi pare stia il fatto del non ritrovamento, nelle misure ottenute dalla De Angelis e dal Berman sui gruppi incompleti da loro esaminati, nè dell'angolo rientrante di c.^a 8°, nè di quello di 38° fra gli angoli delle facce pseudoprismatiche, e l'aver potuto io misurare questo sia in individui ad ottagono completo, sia nelle zone centrali di varie sezioni, con tre settori saltati all'esterno in corrispondenza al settore medio (fig. 8), e riscontrare anche, poche volte però, l'angolo rientrante su indicato, in individui essi pure completi.

*
* *

Un altro fatto importante è necessario mettere in evidenza nell'accrescimento dei gruppi di dachiardite.

Per le descrizioni della De Angelis e del Berman essi sarebbero, come ho già detto, costituiti soltanto da otto individui disposti a guisa di anello, e se io nel 1905 e nel 1906 facevo notare l'esistenza di otto settori, anzichè di otto cristalli, tralasciavo però di dire, come ciascun settore dovesse a sua volta considerarsi costituito da più o meno numerosi individui, parallelamente disposti in ciascun settore; sebbene le tre fotografie ottenute da sezioni perpendicolari alle facce pseudoprismatiche, osservate a luce parallela, a nicols incrociati, e da me riprodotte nella seconda Memoria, lo mostrino in modo evidente (figg. 11, 12, 13).

Oggi a me sembra si possa con sicurezza affermare che i gruppi di dachiardite (o almeno quelli maggiori) sono costituiti da un numero molto grande di individui, che formano come delle spirali. Ciò è dimostrato dall'esame della massima parte dei cristalli e delle loro sezioni.

Io ritengo che l'accrescimento della dachiardite possa spiegarsi in un modo molto semplice nella seguente maniera. Supponiamo per primo costituito il geminato 1-2, poi gli altri fino al 7-8 (fig. 9); avverrà allora che l'individuo che fa seguito all'8° per continuare l'accrescimento del gruppo mantenendosi parallelo al 1°, formerà con la linea di unione 8-1, per essere il 1° settore ridotto a 38°, un angolo reale di 75° anzichè di 67°, e così si continuerà l'accrescimento regolare a cartoccio, come è indicato dalla figura. Può anche facilmente calcolarsi quale sarà l'aumento

di raggio per le spire successive supposte a regolare sviluppo, aumento tanto maggiore quanto più ci si allontana dal centro del gruppo. Con ciò

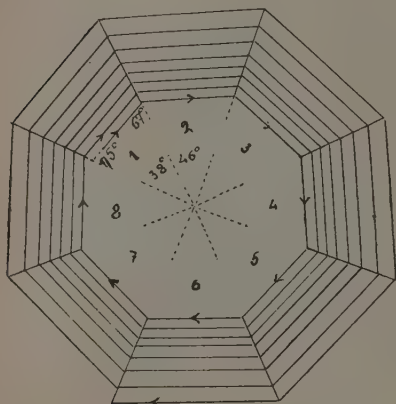


Fig. 9.

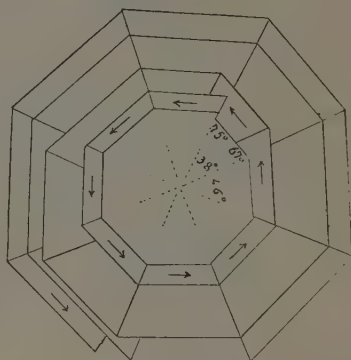


Fig. 10.

è in armonia quanto si osserva in alcune sezioni, le quali mostrano zone molto fitte di accrescimento all'interno, e assai diradate all'esterno (fig. 8).

Se invece di un accrescimento destrorso, come quello prima figurato, se ne supponga uno sinistrorso, per ispiegarlo può ammettersi, ad es., la sovrapposizione dell'ottavo individuo al primo nel modo rappresentato dalla

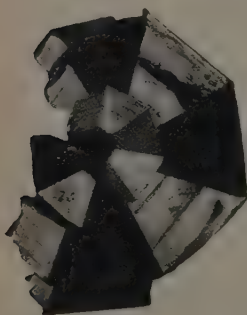


Fig. 11.

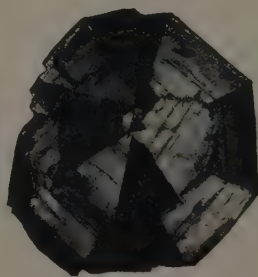


Fig. 12.

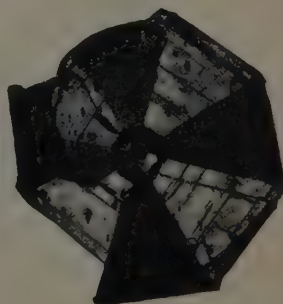


Fig. 13.

fig. 10, modo di accrescimento che può valere, e si verifica, anche per spire destrorse. A conferma infatti di questa spiegazione stanno le sezioni sottili che mostrano, quasi sempre, la non perfetta corrispondenza fra le varie zone di accrescimento di ciascun settore, che ben si osserva special-

mente, quando l'esame sia fatto a luce parallela e nicols incrociati in posizione da aversi la quasi completa estinzione di quattro settori alterni opposti (figg. 5, 6, 8, 11, 12, 13, 15).

L'accrescimento a spirale non può mettersi in dubbio, perchè le sezioni lo mostrano chiaramente (figg. 5, 6, 15); talora in alcuni gruppi è anche evidentissimo l'inizio della spirale, che si presenta come una specie di ric-

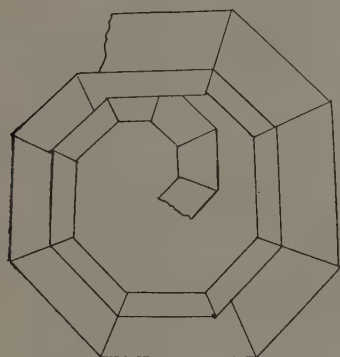


Fig. 14.

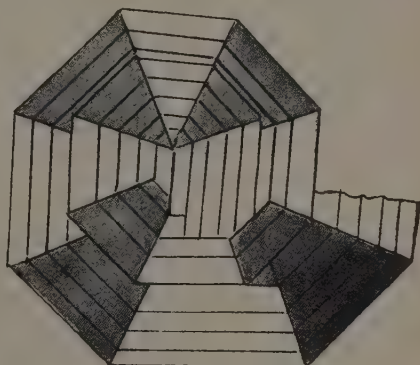


Fig. 15.

ciolo nell'interno della tramoggia (fig. 14). In varie sezioni può anche vedersi come all'inizio della formazione del gruppo i settori sono in numero minore di 8 (figg. 5, 6, 12, 15).

Essa in ogni caso deve avvenire in modo che aumentando il gruppo in larghezza, gli individui che man mano prendono parte alla sua costituzione, aumentano anche in altezza, onde le loro faccette terminali, inclinate verso il centro del gruppo, vengono a porsi ad uno stesso livello per ciascuno degli otto settori a costituire nel loro insieme le otto superfici pianeggianti, tutte striate, che formano la tramoggia terminale.

Patologia vegetale. — *Comportamento dell'olivo sotto l'influenza delle radiazioni dell'uranio e della ionizzazione dell'aria.*
Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. L. PETRI.

In quest'ultimo decennio è stato dimostrato, per merito specialmente di R. Stoppel e di M. Henrici, che l'intensità dei principali processi fisiologici delle piante varia parallelamente, entro certi limiti, con la conduttività elettrica dell'atmosfera e quindi col grado di ionizzazione di questa ⁽²⁾.

Una simile nozione permette di considerare da uno stesso punto di vista alcuni effetti fisiologici delle sostanze radioattive e delle scariche elettriche oscure sulle piante. In attesa che possa venir stabilito in qual modo gli ioni dell'aria possano favorire i processi di nutrizione e di accrescimento delle piante, è necessario che la serie della semplice constatazione del fatto si allarghi più che sia possibile, estendendo le ricerche sopra piante le più diverse, giacchè ancora non sappiamo se il fenomeno sia generale o se soltanto alcune piante ricevono dalla ionizzazione dell'aria un'azione stimolatrice benefica.

Nel corso di alcune ricerche sopra un simile argomento mi è avvenuto di fare alcune osservazioni sul comportarsi dell'olivo esposto in aria ionizzata dalle radiazioni di minerali radioattivi. È questa la condizione che si verifica in natura nel caso di terreni radiferi, in corrispondenza dei quali la ionizzazione dell'aria raggiunge sempre un grado superiore all'ordinario ed agisce in modo continuativo sulla vegetazione ⁽³⁾.

Su queste mie ricerche essendo in corso di pubblicazione una breve comunicazione sulla « Zeitschrift für Phytopathologie », nella presente Nota desidero soltanto render noto un fatto che col proseguire delle esperienze si è reso sempre più evidente, e cioè che l'azione stimolatrice dell'aria ionizzata sull'accrescimento dell'olivo è del tutto neutralizzata dalle radiazioni emesse dal materiale radioattivo quando queste superino un certo limite d'intensità. Nelle mie esperienze ho adoperato dell'ossido verde di

(1) Presentata nella seduta del 3 febbraio 1929.

(2) R. STOPPEL, *Die Pflanze in ihrer Beziehung zur atmosphärischen Elektrizität*, « Zeitschr. f. Bot. », 1920, XII, p. 529; Id., *Die Beziehungen tagesperiodischer Erscheinungen beim Tier und bei der Pflanzen den tagesperiodischen Intensitätsschwankungen der elektrischen Leitfähigkeit der Atmosphäre*, *Planta*, 1926, II, p. 356; M. HENRICI, *Influence de la conductibilité de l'air sur la photosynthèse*, « Arch. Sc. Phys. et Nat. », Genève, 1921, p. 726.

(3) Sui valori del grado di ionizzazione dell'aria sul Vesuvio, Solfatara e Posillipo si veda il lavoro di J. STOKLASA et J. PENKAVA, *La radioactivité des gaz éruptifs du Vésuve et des volcans de Solfatara et leur influence sur le développement des bactéries et des plantes supérieures*, « Rev. Intern. de Rens. Agr. », vol. III, 1925, p. 351.

Uranio (U_3O_8). La ionizzazione dell'aria, misurata con un elettroscopio alla estremità aperta del cilindro di vetro dove erano poste le piante, ed espressa come intensità della corrente di saturazione, è risultata del valore di Amp. $2,89 \cdot 10^{-12}$.

In un secondo periodo delle stesse esperienze la ionizzazione dell'aria è stata notevolmente aumentata (sino ad Amp. $1,346 \cdot 10^{-11}$).

Mentre nel primo periodo le piante presentavano una rapidità di accrescimento leggermente maggiore di quella delle piante di controllo, nel secondo periodo, oltre a presentare anomalie di sviluppo sulle foglie, dopo 6 mesi dall'inizio delle esperienze, le piante esposte all'aria ionizzata ed alle radiazioni dell'Uranio si erano accresciute di circa $1/5$ meno del controllo, con foglie di circa la metà più piccole di quelle delle piante vegetanti nelle condizioni normali.

L'accrescimento poi si è arrestato completamente al sopravvenire dei primi freddi nel mese di dicembre, mentre le piante in condizioni normali hanno continuato ad accrescersi anche a temperature relativamente basse, fra 5 e 15° C. In relazione alla ridotta attività funzionale, le piante sottoposte alle radiazioni dell'uranio hanno consumato circa la metà di acqua di quelle di controllo.

Eliminando l'azione dei raggi emessi dall'uranio, la sola ionizzazione dell'aria non favorisce in modo apprezzabile l'accrescimento dell'olivo, come al contrario avviene per altre piante (*Phaseolus*) che sono state esposte all'aria ionizzata nell'Istituto botanico della Scuola Superiore di Agricoltura di Bonn-Poppelsdorf⁽¹⁾.

È da notare però che in questo caso la ionizzazione dell'aria è stata ottenuta per mezzo della scarica oscura di una corrente d'induzione ad alta tensione, liberando l'aria dall'ozono che è dannoso alla vegetazione; ma quando l'azione diretta delle radiazioni dell'uranio sulle piante è eliminata, la differenza relativa al mezzo ionizzante adoperato non dovrebbe influire sui risultati dell'esperienza. È invece molto probabile che la ionizzazione dell'aria agisca più o meno attivamente sulle piante, secondo che si tratti di piante a rapido sviluppo, come le erbacee annuali, o di legnose, a lento sviluppo, come l'olivo.

Le esperienze saranno continuate estendendole in modo comparativo ad altre piante, cercando di stabilire anche su quale processo fisiologico influisce maggiormente o esclusivamente la ionizzazione dell'aria da sola o insieme alle radiazioni di minerali radioattivi. Lo studio di questo problema ha una speciale importanza anche in patologia vegetale giacchè variazioni di resistenza a malattie si osservano in relazione a variazioni dello stato di conduttività elettrica dell'atmosfera.

(1) M. KOERNICKE, *Zur Frage einer Förderung des Pflanzenwachstums durch Elektrizität*, «Ber. d. d. Bot. Ges.», 1927, XLV, p. 245; LIPPERHEIDE, *Neuere Untersuchungen über den Einfluss der Elektrizität auf Pflanzen*, «Angewandte Botanik», 1927, IX, p. 561.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Le identità di Bianchi per i simboli di Riemann nel calcolo assoluto generalizzato.* Nota di G. VITALI, presentata ⁽¹⁾ dal Corresp. U. AMALDI.

1. Nella sua tesi di laurea la dott. Sacilotto ha introdotto i simboli di Riemann di classe n , ed ha trovato valevole l'espressione sintetica

$$(1) \quad (r, s; q, p)_n = \int_g f_{r,q} f_{s,p} dt - \int_g f_{r,p} f_{s,q} dt,$$

dove $(r, s; q, p)_n$ indica il simbolo di Riemann di 1^a specie e di classe n , e dove r ed s sono indici di classe n e p e q sono indici di classe 1 ⁽²⁾.

Anche per questi simboli valgono le identità di Bianchi, cioè si ha, se h è un indice di classe 1,

$$(2) \quad (r, s; q, p)_h + (r, s; p, h)_q + (r, s; h, q)_p = 0,$$

dove con $(r, s; q, p)_h$ indico la derivata covariante rispetto ad u_h di $(r, s; q, p)_n$, ed ho, per brevità, sottinteso la n .

La verifica è immediata, perchè tenendo presente la (1) e le regole di derivazione covariante, si ha

$$(r, s; q, p)_h = \int_g f_{r,q,h} f_{s,p} dt + \int_g f_{r,q} f_{s,p,h} dt - \int_g f_{r,p,h} f_{s,q} dt - \int_g f_{r,p} f_{s,q,h} dt,$$

e quindi il 1° membro della (2) diventa la somma di 6 termini del tipo

$$\int_g (f_{r,q,h} - f_{r,h,q}) f_{s,p} dt.$$

Ma, per la formula (3') della Nota citata della Sacilotto, si ha

$$\int_g (f_{r,q,h} - f_{r,h,q}) f_{s,p} dt = \sum_{\gamma} \{ r, \gamma; q, p \}_n \int_g f_{\gamma} f_{s,p} dt.$$

(1) Nella seduta del 6 gennaio 1929.

(2) I. SACILOTTO, *I simboli di Riemann nel calcolo assoluto generalizzato* [questi « Rendiconti », 1929].

Ora, si verifica subito, tenendo presente la definizione di derivata covariante⁽¹⁾, che, per γ di classe n ,

$$(3) \quad \int_{\mathcal{S}} f_{\gamma} f_{r,p} dt = 0$$

e quindi la (2) è dimostrata.

2. Per la verifica della (3) si può osservare che per gli stati di s che hanno meno di n cifre è

$$(4) \quad f_{s,p} = 0$$

e che per gli stati di s che hanno n cifre le $f_{s,p}$ sono parametri del σ_{n+1} perpendicolari al σ_n ⁽²⁾.

3. Dalle (1) e (4) risulta che i simboli di Riemann di 1^a specie e di classe n

$$(r, s; q, p)_n$$

in cui uno degli indici r, s passa per uno stato con un numero di cifre minore di n sono nulli.

Per tutti gli altri stati, mettiamo in evidenza le cifre di r e di s , e supponiamo che sia

$$\begin{aligned} r &= i_1 i_2 \dots i_n \\ s &= j_1 j_2 \dots j_n \end{aligned}$$

ed allora si potrà scrivere

$$(r, s; q, p)_n = (i_1 i_2 \dots i_n, j_1 j_2 \dots j_n; q, p),$$

essendo inutile scrivere esternamente la n , che già figura due volte dentro parentesi.

Si dimostra subito che, essendo

$$s = j_1 j_2 \dots j_n,$$

il sistema

$$H_{j_1, j_2, \dots, j_n, p} = f_{j_1 i_2 \dots i_n, p} = f_{s, p}$$

(1) G. VITALI, *Sulle derivazioni covarianti nel calcolo assoluto generalizzato* [questi «Rendiconti», vol. VI, serie 6^a, 1^o sem. 1928, fasc. 8, pp. 628-629].

(2) È appunto la ricerca di tali parametri che mi ha condotto a trovare le derivate covarianti nel calcolo assoluto generalizzato. Vedi G. VITALI, *Geometria nello spazio hilbertiano*, [«Atti del R. Ist. Veneto», t. LXXXVII, parte seconda, 1927-28, pp. 413-421] e G. VITALI, *Rapporti inattesi fra alcuni rami della matematica* [«Atti del Congresso Int. dei Matematici di Bologna», di prossima pubblicazione].

è un sistema covariante ad $n + 1$ indici j_1, j_2, \dots, j_n, p , di classe 1⁽¹⁾.
Ne risulta che il sistema

$$K_{i_1, i_2, \dots, i_n, j_1, j_2, \dots, j_n, q, p} = (i_1 i_2 \dots i_n, j_1 j_2 \dots j_n; q, p)$$

è un sistema covariante a $2(n + 1)$ indici di classe 1.

Fisica matematica. — *Interpretazione elettrostatica del teorema di Kutta-Joukowski.* Nota di A. SIGNORINI, presentata ⁽²⁾ dal Socio C. SOMIGLIANA.

È recentemente comparsa in questi « Rendiconti », presentata all'Accademia dal Corrisp. U. Cisotti, una comunicazione di B. Finzi ⁽³⁾ allo scopo di provare che nella mia Nota sul teorema di Kutta-Joukowski ⁽⁴⁾ ho implicitamente escluso il solo caso che mi proponevo di trattare, cioè quello di profili con punti angolari.

È molto strano che B. Finzi mi attribuisca una simile ingenuità: ma in questi « Rendiconti » sarebbe del tutto fuori di luogo l'insistere sul fatto che una serie di potenze può presentare svariatissime singolarità alla periferia del suo cerchio di convergenza. Tanto meno è il caso che io mi appellassi all'esempio troppo noto della progressione geometrica, che pure automaticamente si sarebbe presentato a B. Finzi, se egli avesse accettato il consiglio di riferire la mia rigorosa dimostrazione — anzi, semplicemente lo sviluppo in serie da lui discusso — proprio al caso particolare che dovrebbe essere intaccato dall'eccezione di Cisotti ⁽⁵⁾.

Preferisco mettere in evidenza colla presente Nota (n. 1) come il teorema di K.-J. non modificato equivalga al seguente teorema di elettrostatica piana:

« Un conduttore di carica e viene immerso in un dielettrico omogeneo, « sede di un campo elettrostatico uniforme d'intensità E_∞ . Ad equilibrio

(1) Questa proposizione figura già nelle mie *Lezioni di Analisi superiore* che spero di poter pubblicare fra breve sotto il titolo di *Lezioni di geometria nello spazio hilbertiano*. Essa già figura per $n = 2$ nelle pagine citate della mia Memoria *Geometria nello spazio hilbertiano*.

(2) Nella seduta del 6 gennaio 1929.

(3) Questi « Rendiconti », vol. VIII, serie 6^a, 2° sem., pp. 210-214.

(4) Questi « Rendiconti », vol. VII, serie 6^a, 1° sem., pp. 823-829.

(5) Vedi U. CISOTTI, *Una notevole eccezione del teorema di Kutta-Joukowski*, questi « Rendiconti », vol. V, serie 6^a, 1° sem., pp. 16-21; e, per quanto riguarda l'interesse della cosa dal lato fisico, il 2° capoverso della mia Nota precedentemente citata.

« elettrico ristabilito, la risultante \mathbf{R} delle forze ponderomotrici agenti sul « conduttore è data da

$$(I) \quad \mathbf{R} = e \mathbf{E}_{\infty} .$$

In tre dimensioni la (I) corrisponde ad un'applicazione immediata della prima formola (I) di una mia recente Nota ⁽¹⁾. La stessa formola nell'Idromeccanica tridimensionale dà luogo al paradosso del d'Alembert, nella sua semplice espressione: mentre, ridotta in due dimensioni, porterebbe ad una più nuova dimostrazione del teorema di K.-J. (esente dall'intervento di ogni quantità complessa) non appena la si applicasse (non al polidromo potenziale di velocità, ma invece) alla funzione di Stokes.

Nell'occasione espongo (n. 2) una semplice proprietà geometrico-meccanica di ogni famiglia di linee di livello chiuse in un qualunque campo a potenziale armonico. Non mi risulta che essa sia stata ancora osservata, quantunque sussista anche in tre dimensioni e si presti nell'Idromeccanica piana alla seguente interpretazione ⁽²⁾:

« Per una generica corrente liquida irrotazionale permanente, siano s_1 ed s_2 due linee di flusso chiuse costituenti il contorno completo di una « regione di perfetta regolarità per la funzione di Stokes. Attribuita ad ogni « elemento di s_1 ed s_2 una densità proporzionale alla grandezza locale della « velocità, le due linee risultano avere la stessa massa, lo stesso baricentro « ed anche — comunque sia scelta la coppia ortogonale Oxy nel piano del « moto — la stessa differenza per i momenti d'inerzia relativi ad x ed y e « lo stesso valore M pel momento di deviazione » ⁽³⁾.

Nel caso del teorema di K.-J., riferendo la precedente costruzione alle linee di flusso della corrente circolatoria (ognuna delle quali è chiusa ed avvolge il profilo) si troverebbe come loro baricentro comune il cosiddetto centro del profilo, mentre — assunto O coincidente col centro del profilo e diretto x parallelamente alla velocità asintotica della corrente traslatoria — M si presenterebbe come l'unico elemento dipendente dalla forma del profilo, che influisca sul momento risultante delle pressioni subite dall'ostacolo ⁽⁴⁾.

(1) *Espressione asintotica di una formola del Levi-Civita*, questi « Rendiconti », vol. VIII, serie 6^a, 2^o sem., pp. 45-49.

La (I) sussiste anche quando si sostituisca al conduttore un coibente di carica (vera) e . Per dimostrarlo, in tre dimensioni basta servirsi della citata formola (I) nella sua forma completa, tenendo presente l'espressione delle tensioni di Maxwell alla superficie di separazione di due dielettrici distinti ed applicando al volume occupato dal coibente una sponentanea estensione della formola del Levi-Civita.

(2) Presenta un qualche interesse anche l'interpretazione elettrostatica, nel piano e nello spazio [ad es., nel caso di un condensatore].

(3) Ciò può riassumersi dicendo che, per ogni O, l'ellisse d'inerzia di s_1 è omofocale all'analogia per s_2 .

(4) Considerando solo il profilo s (che evidentemente è linea di flusso anche della sola corrente circolatoria) si ricade sulle osservazioni geometrico-meccaniche di FRANK-

1. Nel piano (x, y) sia s un profilo rigido regolare investito da una corrente liquida irrotazionale permanente di densità uniforme $= \mu$, la quale risulti: 1° da una corrente traslatoria la cui velocità asintotica abbia la grandezza V_∞ e sia orientata come l'asse delle x ; 2° da una corrente circolatoria la cui circolazione, computata positivamente nel verso $y \rightarrow x$, sia C .

Rappresentando con j il versore dell'asse y , con p la pressione e con n il versore della normale esterna nel punto generico di s , il teorema di K.-J. resta tradotto dall'equazione vettoriale

$$(2) \quad - \int p \mathbf{n} ds = \mu C V_\infty \mathbf{j}.$$

l'acciamo intervenire la funzione di Stokes ψ , legata al potenziale di velocità φ dalle ben note relazioni

$$(3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

È pure noto che, pel modo stesso in cui si definisce la corrente circuito-traslatoria (e prescindendo da un'inessenziale costante additiva) la ψ rimane univocamente determinata in tutto il campo σ del moto dalle condizioni seguenti ⁽¹⁾:

α) è regolare ed armonica in ogni punto P al finito interno a σ (e sul bordo esterno di s);

β) è monodroma in σ ;

γ) si annulla su tutto s ;

$$\delta) \quad \int \frac{\partial \psi}{\partial n} ds = C, \quad \lim_{P \rightarrow \infty} \text{grad } \psi = V_\infty \mathbf{j},$$

perchè in ogni punto di σ [cfr. (3)] $\text{grad } \psi$ non differisce da $\text{grad } \varphi = \mathbf{v}$ altro che per una rotazione di 90° nel verso $x \rightarrow y$.

LÖWNER («Math. Zeitschr.», 3, 1919, pp. 78-86) e MÜLLER («Zeitschr. für angewandte Math. und Mech.», 4, 1924, pp. 186-187).

(1) Perchè ψ sia rigorosamente determinata in σ , basta aggiungere ad α), β), γ) ed alla 1ª delle δ) la condizione che, in corrispondenza ad ogni numero positivo ε , esista nel piano (x, y) un cerchio tale che in ogni P ad esso esterno risulti

$$(a) \quad |\text{grad } \psi - V_\infty \mathbf{j}| < \varepsilon$$

[V. PICONE, *Dimostrazione di un teorema di cui è fatto uso in Fisica piana*, questi «Rendiconti», vol. VIII, serie 6ª, 2° sem., seduta del 12 dicembre 1928].

Nel definire la corrente circuito-traslatoria — come nell'analogia questione di elettrostatica piana — di solito si precisa la 2ª delle δ) in condizioni asintotiche apparentemente molto più restrittive di (a).

Dal teorema di Bernoulli, da (3) e da γ) segue

$$-\int p \mathbf{n} ds = \frac{1}{2} \mu \int_s v^2 \mathbf{n} ds = \frac{1}{2} \mu \int \text{grad } \psi^2 \cdot \mathbf{n} ds = \frac{1}{2} \mu \int_s \frac{\partial \psi}{\partial n} \text{grad } \psi ds :$$

onde [cfr. (2) e δ)] il teorema di K.-J. si tramuta nell'eguaglianza

$$(4) \quad \frac{1}{2} \int_s \frac{\partial \psi}{\partial n} \text{grad } \psi ds = \int_s \frac{\partial \psi}{\partial n} ds, \quad \lim_{P \rightarrow \infty} \text{grad } \psi,$$

valida per ogni $\psi(x, y)$ che soddisfi a condizioni del tipo indicato sotto α), β), γ), δ).

Ciò premesso, riferiamoci al campo elettrostatico bidimensionale E che si stabilisce in σ quando un conduttore di profilo s e carica e viene a trovarsi in presenza di un campo uniforme, d'intensità \mathbf{E}_∞ , nel vuoto od in qualunque dielettrico omogeneo.

Il potenziale u di E — legato alla forza elettrica \mathbf{E} dall'equazione $\mathbf{E} = -\text{grad } u$ — notoriamente soddisfa a condizioni del tipo α), β), γ): mentre la supposta uniformità del campo all'infinito si traduce in ⁽¹⁾

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \text{grad } u = -\mathbf{E}_\infty.$$

Al tempo stesso la densità elettrica (lineare) ω nel punto generico di s e la carica totale e del conduttore non possono rispettivamente differire da $\frac{\partial u}{\partial n}$ ed $\int_s \frac{\partial u}{\partial n} ds$ altro che per uno stesso fattore, dipendente solo dalla natura del dielettrico e dalla scelta del sistema di misura.

Vuol dire che, non soltanto nella (4) si può identificare ψ con u , ma questa applicazione porta all'eguaglianza

$$\frac{1}{2} \int_s \omega \mathbf{E} ds = e \mathbf{E}_\infty :$$

la quale non differisce da (1), perchè nel punto generico di s la tensione elettrostatica (lineare) è rappresentata da $\frac{1}{2} \omega \mathbf{E}$.

2. Nel piano Oxy siano s_1 ed s_2 due linee chiuse costituenti il contorno completo di una regione σ di perfetta regolarità per la funzione armonica $\psi(x, y)$: colla condizione ulteriore che la ψ si riduca su s_1 alla costante ψ_1 e su s_2 alla cost. $\psi_2 \neq \psi_1$ ⁽²⁾.

(1) Cfr. la nota precedente.

(2) Naturalmente va esclusa l'ipotesi $\psi_2 = \psi_1$, che ridurrebbe la ψ ad una costante in tutta σ .

Riduciamo s_1 ed s_2 a due linee materiali attribuendo al generico elemento di ognuna di esse una densità (lineare) proporzionale al valore locale di $\text{grad } \psi$: valore che evidentemente non dipende dalla scelta degli assi coordinati. Ci proponiamo di provare che le due linee materiali risultano avere la stessa massa, lo stesso baricentro, la stessa differenza per i momenti d'inerzia relativi ad x ed y , lo stesso momento di deviazione.

Intanto è quasi evidente che s_1 ed s_2 risultano avere la stessa massa. Invero — dovendo il valore di ψ , in ogni punto di σ , esser compreso tra ψ_1 e ψ_2 — la derivata normale di ψ non può cambiar segno lungo s_1 e neppure lungo s_2 : in modo che l'eguaglianza

$$\int_{s_1} \frac{\partial \psi}{\partial n} ds_1 + \int_{s_2} \frac{\partial \psi}{\partial n} ds_2 = 0$$

(dove con n è sempre indicata la normale interna a σ) può esser sostituita con

$$\int_{s_1} \left| \frac{\partial \psi}{\partial n} \right| ds_1 = \int_{s_2} \left| \frac{\partial \psi}{\partial n} \right| ds_2,$$

cioè con

$$\int_{s_1} |\text{grad } \psi| ds_1 = \int_{s_2} |\text{grad } \psi| ds_2.$$

Osservato questo, sia $f(xy)$ una qualunque funzione regolare ed armonica dentro s_1 e dentro s_2 .

Dal 2° lemma di Green segue

$$\int_{s_1} \left(f \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds_1 + \int_{s_2} \left(f \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds_2 = 0,$$

mentre (essendo f regolare ed armonica dentro s_i)

$$\int_{s_i} \psi \frac{\partial f}{\partial n} ds_i = \psi_i \int_{s_i} \frac{\partial f}{\partial n} ds_i = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Si ottiene così l'eguaglianza

$$\int_{s_1} f \frac{\partial \psi}{\partial n} ds_1 + \int_{s_2} f \frac{\partial \psi}{\partial n} ds_2 = 0:$$

la quale, sempre pel fatto che $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ non può cambiar segno lungo s_1 , ecc., può essere sostituita con

$$\int_{s_1} f |\text{grad } \psi| ds_1 = \int_{s_2} f |\text{grad } \psi| ds_2.$$

Basta allora particularizzare la f in x , in y , in $x^2 - y^2$, in xy , perchè l'asserto rimanga completamente dimostrato.

Calcolo funzionale. — *Gli operatori funzionali e il calcolo delle matrici infinite nella teoria dei quanti.* Nota II di L. FANTAPPIÈ, presentata ⁽¹⁾ dal Socio V. VOLTERRA.

6. Così pure si ha una diversità sostanziale tra le matrici finite e quelle infinite ⁽²⁾, relativamente alla *traccia* o *somma diagonale* $D(A)$ di una matrice A , definita come somma dei termini principali

$$(24) \quad D(A) = \sum_n^{\infty} a_{nn}.$$

Se consideriamo infatti tutte quelle matrici A , per cui questa serie converge, ad ognuna di queste, e quindi anche ad ognuna delle funzioni $a(\tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2)$, ad esse coordinate, verrà a corrispondere un numero ben determinato $D(A)$, il quale risulterà dunque un *funzionale* della funzione di due variabili $a(\tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2)$, coordinata alla matrice A . Indicheremo questo funzionale, evidentemente *analitico*, della funzione $a(\tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2)$, coi simboli

$$(25) \quad P[a(\tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2)] = a(\tilde{\chi}, \tilde{\chi}) = D(A) = \sum_n^{\infty} a_{nn}$$

e col nome di *prodotto (funzionale) simmetrico interno* della funzione $a(\tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2)$ (relativo alla coppia di variabili $\tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2$), o con quello, più breve, di *traccia* della funzione $a(\tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2)$.

Se sono allora A e B due matrici con somme diagonali (24) convergenti, si avrà

$$(26) \quad D(A + B) = \sum_n^{\infty} (a_{nn} + b_{nn}) = \sum_n^{\infty} a_{nn} + \sum_n^{\infty} b_{nn} = D(A) + D(B)$$

(1) Nella seduta del 20 gennaio 1929.

(2) Cfr. la Nota I, pubblicata collo stesso titolo, in questi « Rendiconti », vol. VIII, serie 6^a, 2° sem. 1928.

e quindi anche, corrispondentemente, per le funzioni $a(\zeta_1, \zeta_2)$, $b(\zeta_1, \zeta_2)$, ad esse coordinate

$$(27) \quad P[a(\zeta_1, \zeta_2) + b(\zeta_1, \zeta_2)] = P[a(\zeta_1, \zeta_2)] + P[b(\zeta_1, \zeta_2)].$$

Dunque il prodotto simmetrico interno, o traccia, di una funzione di due variabili è un *funzionale lineare* di questa funzione.

D'altra parte, per tutte le funzioni $a(\zeta_1, \zeta_2)$, regolari per ζ_1 e ζ_2 interni a un cerchio del piano complesso, con centro nell'origine e raggio $R > 1$, la serie (24) converge (assolutamente) e la sua somma è data dall'espressione integrale

$$(28) \quad D(A) = P[a(\zeta_1, \zeta_2)] = a(\overset{\circ}{\zeta}, \overset{\circ}{\zeta}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\overset{\circ}{C}} \frac{1}{\zeta} a\left(\zeta, \frac{1}{\zeta}\right) d\zeta$$

essendo C un cerchio con centro nell'origine e raggio 1.

Poichè l'espressione (28) definisce per queste funzioni un funzionale, non solo *lineare*, ma anche *analitico* della funzione $a(\zeta_1, \zeta_2)$, viene allora naturale di definire in ogni caso (anche quando la serie (24) *non* converge) la *traccia* di una funzione $a(\zeta_1, \zeta_2)$ (somma diagonale della matrice, a cui essa è coordinata) come il valore di questo funzionale $P[a(\zeta_1, \zeta_2)]$, considerato però con tutti i suoi prolungamenti analitici, considerato cioè nel suo campo naturale di esistenza⁽¹⁾.

Ma la funzione indicatrice $v(\alpha, \beta)$ di questo funzionale lineare P è data da

$$(29) \quad v(\alpha, \beta) = P_{\zeta_1, \zeta_2} \left[\frac{1}{(\zeta_1 - \alpha)(\zeta_2 - \beta)} \right] = \frac{1}{\alpha\beta - 1}$$

la quale è singolare sull'iperbole equilatera

$$(30) \quad \alpha\beta - 1 = 0$$

che ha per assintoti gli assi. In base ai risultati generali sui funzionali lineari di una funzione di due variabili, si ha però che il valore di questi funzionali è dato dalla somma dei « residui » del prodotto $v(\alpha, \beta) a(\alpha, \beta)$ in alcune soltanto delle intersezioni delle varietà singolari di v e a (v funzione indicatrice del funzionale; a , funzione a cui il funzionale è applicato); questo valore non è quindi determinato univocamente, nemmeno se v e a sono *monodrome*, quando dette intersezioni possono scambiarsi l'una nell'altra, al variare continuo della funzione a , o, più precisamente, delle sue varietà singolari.

(1) Per queste nozioni e per le altre proprietà, ricordate in seguito, cfr. le mie Note: *I funzionali analitici delle funzioni di due variabili complesse*, questi « Rendiconti », vol. V, serie 6^a, 1^o sem. 1927; e *I funzionali lineari delle funzioni di due variabili complesse*, Nota I, II, III, questi « Rendiconti », vol. VII, serie 6^a, 1^o sem. 1928.

Questa possibilità c'è per l'appunto nel caso del funzionale P , bastando, per ciò, far variare con continuità, in modo opportuno, la funzione $a(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2; \epsilon)$, in dipendenza da un parametro ϵ ; e precisamente far rotare ϵ attorno a un valore $\bar{\epsilon}$, per cui la funzione $a(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2; \bar{\epsilon})$ venga ad avere qualche varietà singolare tangente a quella dell'indicatrice, cioè all'iperbole (30).

Il prodotto simmetrico interno, o traccia, di una funzione di due variabili risulta cioè un funzionale polidromo; e precisamente $a(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}; \epsilon)$ è una funzione del parametro ϵ (in generale polidroma) che ha per punti di diramazione quei valori $\bar{\epsilon}$, per cui la $a(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2; \bar{\epsilon})$ ha qualche curva singolare tangente all'iperbole equilatera (30).

Se dunque si vuole estendere, nel modo detto precedentemente, la definizione di *somma diagonale* anche a quelle matrici infinite A , per cui la serie (24) non converge, o la definizione di *traccia* alle relative funzioni coordinate, si presenta questo fatto abbastanza interessante; che cioè, contrariamente a quanto accade per le matrici finite, la *somma diagonale di una matrice infinita ha, in generale, più valori*.

7. Se alla matrice infinita A è coordinata la funzione $a(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$, alla matrice infinita $f(A)$, funzione della A , definita dalla serie

$$(19') \quad f(A) = \sum_0^{\infty} f_n A^n \quad \left(f(u) = \sum_0^{\infty} f_n u^n \right)$$

sarà coordinata la funzione, che indicheremo con $f(\tilde{a})$,

$$(31) \quad f(\tilde{a}) = \sum_0^{\infty} f_n \tilde{a}^n(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = b(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) \quad , \quad \left(\tilde{a}^0(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = \frac{1}{1 - \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2} \right)$$

che si dirà una *serie di composizione* o *funzione di composizione simmetrica* della $a(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$ ⁽¹⁾.

Tutte le volte che questa serie è uniformemente convergente in un campo contenente l'origine $\tilde{\alpha}_1 = 0, \tilde{\alpha}_2 = 0$, la sua somma definisce in modo univoco una funzione $b(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = f(\tilde{a})$ regolare in questo campo, e quindi una matrice ben determinata $f(A)$, a cui la funzione stessa è coordinata.

Supponiamo ora che esista una funzione $\Gamma(\lambda; \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$, regolare nell'intorno di $\lambda = 0$, rappresentata in questo intorno dalla serie di potenze

$$(32) \quad \Gamma(\lambda; \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = \sum_0^{\infty} \lambda^n \tilde{a}^n(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) .$$

(1) Le proprietà di queste funzioni di composizione di una funzione analitica fanno perfetto riscontro ad analoghe proprietà delle serie di composizione di 1^a e 2^a specie, definite e studiate nel campo reale dal prof. Volterra; cfr. V. VOLTERRA et J. PÉRÈS, *Leçons sur la composition*. « Coll. Borel », Gauthier-Villars, Paris, 1924.

Questa è una particolare funzione di composizione della funzione $a(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$, del tipo (31) (in cui $f_n = \lambda^n$), corrispondente alla funzione

$$(33) \quad f(u) = \sum_n f_n u^n = \sum_n \lambda^n u^n = \frac{1}{1 - \lambda u},$$

che chiameremo il *nucleo associato* della funzione (o « nucleo ») $a(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$. Il nucleo associato $\Gamma(\lambda; \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$ gode di proprietà in tutto simili a quelle del cosiddetto *nucleo risolvante* di un'equazione integrale di Fredholm, nel campo reale; quando esiste, *potremo definire ogni altra funzione di composizione* $f(\tilde{a})$ *della funzione data* $a(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$, *mediante il prodotto simmetrico della funzione* $f(\lambda)$ *e del nucleo associato, ponendo*

$$(34) \quad f(\tilde{u}) = f(\tilde{\lambda}) \Gamma(\tilde{\lambda}; \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2).$$

Questa espressione, quando converge la serie (31), ha infatti lo stesso valore, ma conserva un significato anche in casi ben più generali di questo, e cioè *tutte le volte che la funzione* $f(\lambda)$ *sia regolare nei valori reciproci* $k_r = \frac{1}{\lambda_r}$ *dei punti singolari* λ_r *del nucleo associato* $\Gamma(\lambda; \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$. Se questi punti singolari λ_r son sempre gli stessi, per qualunque coppia $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$, essi si diranno gli *autovalori* del nucleo $a(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$, e i reciproci k_r i *valori caratteristici* di questo nucleo.

8. Colla costruzione del nucleo associato Γ , la determinazione di qualunque funzione di composizione $f(\tilde{a})$, e quindi della matrice $f(A)$, è dunque ridotta al calcolo del prodotto simmetrico (34). Vediamo ora come possa calcolarsi una matrice infinita $H(P, Q)$, funzione, non più di una sola, ma di due matrici infinite P, Q . Osserviamo perciò che, se le due matrici non sono permutabili, se cioè $PQ \neq QP$, per definire la matrice $H(P, Q)$, corrispondente a una data funzione $H(\lambda, \mu) = \sum_{m,n} b_{mn} \lambda^m \mu^n$, bisognerà precisare l'ordine con cui, in ogni termine dello sviluppo

$$(35) \quad H(P, Q) = \sum_{m,n} b_{mn} P^m Q^n$$

si susseguono le potenze delle due matrici. In ogni caso però dalla definizione stessa (35) della matrice $H(P, Q)$ si vede come questa matrice $H(P, Q)$ dipenda linearmente dalla funzione $H(\lambda, \mu)$, a cui corrisponde.

Anche la funzione $b(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$, coordinata alla matrice $H(P, Q)$ e che indicheremo anche con $H(\tilde{p}, \tilde{q}) = b(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$, dipenderà quindi linearmente dalla funzione $H(\lambda, \mu)$, sarà cioè un *funzionale lineare* L , evidentemente *analitico*, della funzione di due variabili $H(\lambda, \mu)$

$$(36) \quad H(\tilde{p}, \tilde{q}) = b(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = L[H(\lambda, \mu); \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2].$$

Conformemente alla teoria generale dei funzionali lineari di una funzione di due variabili, sviluppata nelle mie ultime Note, già citate, avremo quindi che il calcolo della funzione $b(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$ e quindi anche quello della matrice $H(P, Q)$, a cui essa è coordinata, si ridurrà al calcolo di un integrale doppio, quando si conosca la cosiddetta funzione indicatrice v del funzionale lineare L , definita dalla relazione

$$(37) \quad v(\alpha, \beta; \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = L_{\lambda, \mu} \left[\frac{1}{(\lambda - \alpha)(\mu - \beta)}; \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 \right].$$

Si ha infatti, in generale,

$$(38) \quad b(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = L[H(\lambda, \mu); \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2] = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\Gamma} v(\lambda, \mu; \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) H(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = \\ = H(\lambda, \mu) v(\lambda, \mu; \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$$

essendo l'integrale doppio esteso ad un conveniente ciclo chiuso Γ , a due dimensioni, concatenato colle varietà singolari dell'indicatrice v e di H .

9. Se, in particolare, come accade appunto nelle applicazioni alla teoria dei quanti, le due matrici P e Q , non permutabili, soddisfano alla relazione

$$(39) \quad PQ - QP = \frac{h}{2\pi i} U \quad (U = \text{matrice unitaria})$$

anche le funzioni ad esse coordinate non saranno permutabili; e alla condizione di quantizzazione (39) farà riscontro, per le funzioni coordinate p e q , la relazione

$$(40) \quad p(\tilde{\alpha}_1, i) q(\tilde{i}, \tilde{\alpha}_2) - q(\tilde{\alpha}_1, i) p(\tilde{i}, \tilde{\alpha}_2) = \frac{h}{2\pi i} \frac{1}{1 - \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2}.$$

Se inoltre, come fanno Born e Jordan (op. cit.) facciamo corrispondere a ogni termine $b_{mn} \lambda^m \mu^n$ di $H(\lambda, \mu)$, la matrice

$$(41) \quad b_{mn} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n Q^{n-i} P^m Q^i$$

alla funzione $H(\lambda, \mu)$, corrisponderà una matrice $H(P, Q)$ e una funzione di composizione $H(\tilde{p}, \tilde{q}) = b(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$, che, come abbiamo visto dipenderanno linearmente da $H(\lambda, \mu)$.

L'indicatrice v del funzionale lineare $L[H(\lambda, \mu); \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2] = b(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$ si otterrà dalla definizione (37), per $H(\lambda, \mu) = \frac{1}{(\lambda - \alpha)(\mu - \beta)}$; cioè come

si può verificare con facili calcoli, si avrà

$$(42) \quad v(\alpha, \beta; \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2) = \int_{\beta}^{\infty} \frac{1}{\alpha \beta^2} \mathcal{Q} \left(\frac{1}{\beta}; \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_1 \right) \mathfrak{S} \left(\frac{1}{\alpha}; \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 \right) \mathcal{Q} \left(\frac{1}{\beta}; \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_2 \right) d\beta$$

se sono \mathfrak{S} e \mathcal{Q} i nuclei associati di p e q rispettivamente.

Dunque anche nel caso di una matrice infinita $H(P, Q)$, funzione di due altre non permutabili P e Q , definita al modo di Born-Jordan, potremo sempre calcolare la relativa funzione coordinata $H(\tilde{p}, \tilde{q}) = h(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2)$ (e quindi i singoli elementi della matrice stessa) con una formula integrale del tipo (38), in cui per v s'intenda l'espressione (42), ottenuta una volta per sempre, indipendentemente dalla funzione $H(\lambda, \mu)$, quando solo siano conosciuti i due nuclei associati \mathfrak{S} e \mathcal{Q} di p e q , rispettivamente.

10. Concludendo possiamo dire che colla nozione di prodotto funzionale simmetrico o emisimmetrico, e in generale colle nozioni della teoria dei funzionali analitici, non solo possono sostituirsi tutte le formazioni simboliche (serie, in generale, divergenti) usate nel calcolo delle matrici di Heisenberg, Born, Jordan, con altrettante formazioni integrali, aventi un significato ben definito, ma anche tutto detto *calcolo delle matrici* può ridursi al *calcolo di composizione simmetrica* delle funzioni di due variabili, coordinate alle matrici stesse. Di più, con la precisazione di questa formazioni simboliche, vengono a svelarsi fatti, che credo nuovi, quale quello del significato molteplice che ha in generale la *traccia* di una matrice infinita (v. n. 6), e la determinazione *non più univoca*, del *prodotto* di due matrici, quando la funzione coordinata a una di queste risulti polidroma.

Non sembra quindi giustificata l'estensione immediata, senza ulteriori studi, delle proprietà delle forme lineari e delle matrici finite alle forme lineari e alle matrici infinite.

Matematica. — *Transports superficiels.* Nota di A. DE MIRA FERNANDES, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Étant donnée une variété riemannienne V_n et deux directions quelconques a et a' , définies tout le long d'une courbe Γ de la variété, on a, comme on sait ⁽²⁾, l'équation

$$(1) \quad \frac{d(\cos \varphi)}{d\sigma} = \frac{\cos \beta}{R} + \frac{\cos \beta'}{R'}$$

entre l'angle φ des deux directions, les courbures associées $\frac{1}{R}$ (avec a) et $\frac{1}{R'}$ (avec a'), les angles β (de a' avec la direction associée de a) et β' (de a avec la direction associée de a') et la longueur σ de l'arc de Γ .

Si la variété V_n est une surface V_2 de l'espace ordinaire, la direction associée avec une direction quelconque a , appartenante (c'est-à-dire, tangente) à la surface, est la direction orthogonale à a , sur le plan tangent. Donc, si a et a' sont deux directions tangentes à V_2 , le long de Γ , et α et α' les directions associées, on a ⁽³⁾

$$(2) \quad \begin{cases} \cos \beta = \cos(\widehat{\alpha, a'}) = \pm \sin \varphi \\ \cos \beta' = \cos(\widehat{\alpha', a}) = \mp \sin \varphi. \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$(3) \quad -\frac{d\varphi}{d\sigma} = \pm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right).$$

Il faut prendre le signe $+$ lorsque $(\widehat{\alpha, a'}) < \frac{\pi}{2}$, et le signe $-$ lorsque $(\widehat{\alpha, a'}) > \frac{\pi}{2}$.

I. Si la courbe Γ est une *asymptotique* de la surface V_2 et la direction a' est celle de la tangente à la courbe Γ , $\frac{1}{R'}$ est la courbure de Γ ; si, en

(1) Nella seduta del 6 gennaio 1929.

(2) Cfr. la Note de l'auteur dans ces « Rendiconti », 1928, 7, p. 486, note (5).

(3) On suppose la continuité des paramètres.

outre, le déplacement de la direction a est parallèle, $\frac{I}{R} = 0$. On a donc

$$(4) \quad -\frac{d\varphi}{d\sigma} = \pm \frac{I}{R'}.$$

La courbe Γ est la ligne de *striction* de la surface réglée lieu de la direction $a^{(1)}$; elle en est aussi une asymptotique; et l'équation (4) résout, comme on sait, le problème de la *détermination d'une surface réglée dont une courbe donnée est asymptotique de striction*.

II. Si la courbe Γ est une géodésique de la surface V_a et a' est la direction de la tangente à Γ , on a $\frac{I}{R'} = 0$ et

$$(5) \quad -\frac{d\varphi}{d\sigma} = \pm \frac{I}{R}.$$

Cette formule donne la définition de la courbure associée avec une direction a , le long d'une géodésique Γ de la surface.

III. Si la courbe Γ est quelconque et a' est la direction tangente à Γ ; si, en outre, le déplacement de la direction a est parallèle, on a

$$(6) \quad -\frac{d\varphi}{d\sigma} = \pm \frac{I}{R'}^{(2)}.$$

Nous avons ainsi une définition de la courbure géodésique de Γ , analogue à celle de Gauss.

IV. Si l'on suppose encore que la direction a' est celle de la tangente à la courbe Γ , on voit que, sur la surface réglée lieu de la direction a , et d'après la formule (3), deux des conditions

$$\varphi = \text{const.}, \quad \frac{I}{R} = 0, \quad \frac{I}{R'} = 0$$

entraînent la troisième. (Théorème de Bonnet).

V. Si le déplacement des directions a et a' est *isoclinal*, on a $\frac{I}{R} = \frac{I}{R'}$; et, si la direction a' est celle de la tangente à Γ , la courbure associée avec la direction a est égale à la courbure géodésique de Γ .

VI. Soient S et S' deux surfaces quelconques et Γ une courbe commune; a et a' deux directions définies le long de Γ , la première tangente à S et la seconde tangente à S' ; φ et ψ les angles de a et a' avec la tangente T à la courbe Γ ; $\frac{I}{R}$ la courbure associée avec la direction a , sur S ;

(1) Cfr. la Note de M. A. MYLLER (« Comptes-rendus », t. 174 [1922], p. 997.

(2) Cfr. *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto*, de M. LIPKA, p. 155. On y trouve ce résultat.

$\frac{1}{R}$, la courbure associée avec la direction a' , sur S' ; $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{\rho'}$ les courbures géodésiques de Γ sur les deux surfaces S et S' . On aura

$$(7) \quad \begin{cases} -\frac{d\varphi}{d\sigma} = \pm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho} \right) \\ -\frac{d\psi}{d\sigma} = \pm \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{\rho'} \right). \end{cases}$$

D'après la définition, si l'on change une direction a pour son opposée, il en est de même de son associée. Nous conviendrons, s'il le faut, de faire cette substitution, de telle façon que les angles (α, Γ) et (α', Γ) soient toujours aigus. On aura donc

$$(7') \quad \begin{cases} -\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{1}{R} - \frac{1}{\rho} \\ -\frac{d\psi}{d\sigma} = \frac{1}{R'} - \frac{1}{\rho'}; \end{cases}$$

et

$$(8) \quad -\frac{d(\varphi - \psi)}{d\sigma} = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right) - \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} \right).$$

C'est-à-dire, deux des conditions

$$\varphi - \psi = \text{const.}, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R'}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho'}$$

entraînent la troisième (théorème analogue à celui de Bonnet).

Également, si l'on a $\varphi - \psi = \text{const.}$

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'};$$

c'est-à-dire, la différence des courbures associées est égale à la différence des courbures géodésiques de la courbe de transport.

Matematica. — *Ricerca di un'espressione razionale per le potenze di una matrice del terz'ordine.* Nota di SILVIA MARTIS in BIDDAU, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. GIORGI.

1. Avendomi il prof. Giorgi segnalato l'importanza che offre il problema di esprimere razionalmente la potenza *massima* di una matrice del terz'ordine in funzione dei suoi elementi, espongo in questa Nota la risoluzione che ho ottenuto, conforme a questi desiderati e in accordo con la definizione generale teoretica di funzione di matrice data dal prof. Giorgi stesso ⁽²⁾, ma applicando le effettive formole di calcolo date dal prof. Fantappiè in un suo scritto recente ⁽³⁾.

Il problema si presentò così:

Fissata una matrice fondamentale

$$(1) \quad \Phi = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{vmatrix}$$

simbolo operatorio di una trasformazione lineare omogenea in tre variabili, mi propongo di calcolare gli elementi ψ_{rs} della matrice

$$(2) \quad \Psi = \Phi^m = \begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} \end{vmatrix}.$$

Nel caso in cui le radici ρ_1, ρ_2, ρ_3 dell'equazione fondamentale della matrice Φ siano distinte, e se $f(\rho) = \rho^m$, detta formola dà, per l'elemento generico ψ_{rs} della matrice Ψ , l'espressione:

$$(3) \quad \psi_{rs} = - \sum_i^3 \frac{D_{sr}(\rho_i)}{D'(\rho_i)} \rho_i^m$$

(1) Nella seduta del 6 gennaio 1929.

(2) G. GIORGI, *Sulle funzioni delle matrici*, questi « Rendiconti » (seduta del 5 febbraio 1928) vol. VII, serie 6^a (1^o sem. 1928), pp. 178-184.

(3) L. FANTAPPIÈ, *Le calcul des matrices*, « C. R. des séances de l'Académie des Sciences de Paris », t. 186 (séance du 5 mars 1928), pp. 619-621.

dove $D'(\rho)$ è la derivata del determinante

$$(4) \quad D(\rho) = \begin{vmatrix} \varphi_{11} - \rho & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} - \rho & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} - \rho \end{vmatrix}$$

e $D_{rs}(\rho)$ è il complemento algebrico, in questo determinante, dell'elemento della riga *resima* e della colonna *sesima*.

L'equazione fondamentale della matrice Φ , che si ottiene uguagliando a zero il determinante (4), può scriversi sotto la forma

$$(5) \quad D(\rho) = -\rho^3 + p_1 \rho^2 - p_2 \rho + p_3 = 0;$$

dove

$$p_1 = \varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33},$$

$$p_2 = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{13} \\ \varphi_{31} & \varphi_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{vmatrix},$$

$$p_3 = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{vmatrix}$$

sono i tre invarianti della matrice Φ ; e da essa risulta

$$(6) \quad D'(\rho) = -3\rho^2 + 2p_1\rho - p_2.$$

D'altra parte, se indichiamo con φ_{rr} il complemento algebrico dell'elemento φ_{rs} nella matrice Φ , si hanno le relazioni

$$(7) \quad \begin{cases} D_{rr}(\rho) = \rho^2 + \varphi_{rr}\rho + \bar{\varphi}_{rr} \\ D_{sr}(\rho) = \varphi_{rs}\rho + \bar{\varphi}_{sr} \end{cases}$$

e tenendo conto di queste e della (6) si ha dalla (3):

$$(8) \quad \begin{cases} \psi_{rr} = \sum_i \frac{\rho_i''' + 2 + \varphi_{rr}\rho_i''' + 1 + \bar{\varphi}_{rr}\rho_i'''}{3\rho_i^2 - 2p_1\rho_i + p_2} \\ \psi_{rs} = \sum_i \frac{\varphi_{rs}\rho_i''' + 1 + \bar{\varphi}_{sr}\rho_i'''}{3\rho_i^2 - 2p_1\rho_i + p_2} \end{cases}$$

2. Le formole precedenti esprimono gli elementi ψ_{rs} della matrice Φ''' in funzione delle radici ρ_i dell'equazione fondamentale (5) che quindi bisogna supporre di aver risolto per poter applicare le formole stesse. Essendo però le espressioni ψ_{rs} funzioni razionali simmetriche di queste radici, esse,

per il teorema generale di Gauss, dovranno potersi esprimere razionalmente mediante i coefficienti dell'equazione, mediante cioè gli invarianti della matrice Φ , evitando così la risoluzione dell'equazione algebrica (5).

Volendo ora passare alla ricerca di queste espressioni razionali, premettiamo però che, per maggior semplicità, in questa equazione può sempre supporre $p_1 = 0$, perchè altrimenti, invece di prendere come matrice fondamentale la (2), si potrebbe prendere l'altra

$$(9) \quad \Phi' = \begin{vmatrix} \varphi_{11} - \frac{p_1}{3} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} - \frac{p_1}{3} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} - \frac{p_1}{3} \end{vmatrix}.$$

Infatti, osservando che

$$\Phi' = \Phi - \frac{p_1}{3} \Phi^o$$

o, ciò che è lo stesso

$$(10) \quad \Phi' = \Phi - \frac{p_1}{3} \Phi^o$$

(poichè Φ^o e Φ'^o sono entrambe uguali alla matrice unitaria), si ha che

$$(11) \quad \Phi = \Phi' + \frac{p_1}{3} \Phi^o$$

e quindi

$$(12) \quad f(\Phi) = f\left(\Phi' + \frac{p_1}{3} \Phi^o\right).$$

Coordinare la matrice $f(\Phi)$ alla funzione $f(\rho)$ quando si prenda come matrice fondamentale la Φ , o la matrice $f\left(\Phi' + \frac{p_1}{3} \Phi^o\right)$, che chiamiamo $\bar{f}(\Phi')$, alla funzione $f\left(\rho + \frac{p_1}{3}\right) = \bar{f}(\rho)$ quando si prenda come matrice fondamentale la Φ' è dunque la stessa cosa, col vantaggio che, in questo ultimo caso, si opera sopra una matrice in cui la somma dei termini della diagonale principale è zero.

In particolare, se vogliamo calcolare la potenza *n-esima* Φ^m di una matrice Φ per cui p_1 sia $\neq 0$, avremo, con la posizione (11):

$$\Phi^m = \left(\Phi' + \frac{p_1}{3} \Phi^o\right)^m$$

cioè, per la formola di Newton

$$(13) \quad \Phi^m = \sum_r^m \binom{m}{r} \left(\frac{p_1}{3}\right)^{m-r} \Phi^r$$

e con questa relazione ci siamo ridotti a calcolare le potenze Φ^r della matrice Φ che ha il primo invariante nullo.

3. Cerchiamo allora di ottenere l'espressione generale della potenza m^{esima} di una matrice fondamentale Φ che ha il primo invariante p_1 nullo, per cui cioè

$$(14) \quad p_1 = \varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33} = 0.$$

La sua equazione fondamentale diventa

$$(15) \quad D(\rho) = -\rho^3 - p_2\rho + p_3 = 0$$

mentre

$$(16) \quad D'(\rho) = -3\rho^2 - p_2.$$

Riprendendo allora la formola (3) e scrivendola così

$$(17) \quad \psi_{rs} = - \frac{D_{sr}(\rho_1) D'(\rho_2) D'(\rho_3) \rho_1''' + D_{sr}(\rho_2) D'(\rho_1) D'(\rho_3) \rho_2''' + D_{sr}(\rho_3) D'(\rho_1) D'(\rho_2) \rho_3'''}{D'(\rho_1) D'(\rho_2) D'(\rho_3)}$$

si vede che il prodotto che figura a denominatore nella (17) è una funzione razionale simmetrica intera delle radici dell'equazione (15), quindi esprimibile in funzione razionale intera dei coefficienti della medesima. Di più questo prodotto si annulla quando si annulla uno dei fattori, cioè quando l'equazione (15) ha una radice multipla, e solo allora. Esso sarà quindi, a meno di un fattore costante, il discriminante della detta equazione.

Infatti si trova

$$(18) \quad D'(\rho_1) D'(\rho_2) D'(\rho_3) = -27p_3^2 - 4p_2^3$$

e se indichiamo con R il discriminante della (15), cioè se è

$$(19) \quad R = \frac{p_3^2}{4} + \frac{p_2^3}{27}$$

si vede che

$$(20) \quad D'(\rho_1) D'(\rho_2) D'(\rho_3) = -108 R.$$

Dunque

$$(21) \quad \psi_{rs} = \frac{D_{sr}(\rho_1) D'(\rho_2) D'(\rho_3) \rho_1''' + D_{sr}(\rho_2) D'(\rho_1) D'(\rho_3) \rho_2''' + D_{sr}(\rho_3) D'(\rho_1) D'(\rho_2) \rho_3'''}{108 R}.$$

D'altra parte è

$$(22) \quad D'(\rho_2) D'(\rho_3) = 9(\rho_2 \rho_3)^2 + 3p_2(\rho_2^2 + \rho_3^2) + p_2^2$$

e poichè

$$\rho_1 \rho_2 \rho_3 = p_3, \quad \rho_2^2 + \rho_3^2 = \sum_i \rho_i^2 - \rho_1^2 = 2p_2 - \rho_1^2$$

avremo infine

$$(23) \quad D'(\rho_2) D'(\rho_3) = \frac{9p_3^2}{\rho_1^2} - 3p_2(2p_2 + \rho_1^2) + p_2^2.$$

Con ciò abbiamo espresso questo prodotto in funzione della sola radice ρ_1 , e sostituendo quest'espressione e le analoghe, che si ottengono con permutazione circolare degli indici nella (21), secondo che r è uguale o diverso da s si ha:

$$(24) \quad \begin{cases} \psi_{rr} = \frac{1}{108R} \sum_i \left(\frac{9p_3^2}{\rho_i^2} - 3p_2(2p_2 + \rho_i^2) + p_2^2 \right) (\rho_i^{m+2} + \varphi_{rr} \rho_i^{m+1} + \bar{\varphi}_{rr} \rho_i^m) \\ \psi_{rs} = \frac{1}{108R} \sum_i \left(\frac{9p_3^2}{\rho_i^2} - 3p_2(2p_2 + \rho_i^2) + p_2^2 \right) (\varphi_{rs} \rho_i^{m+1} + \bar{\varphi}_{rs} \rho_i^m). \end{cases}$$

Se sviluppiamo e mettiamo in evidenza le φ_{rs} e φ_{rs} avremo, chiamando con S_m la somma delle potenze *mesime* delle radici ρ_i , le espressioni

$$(25) \quad \begin{cases} \psi_{rr} = \frac{1}{108R} \left\{ -3p_2 S_{m+4} - 5p_2^2 S_{m+2} + 9p_3^2 S_m + \right. \\ \quad + \varphi_{rr} (-3p_2 S_{m+3} - 5p_2^2 S_{m+1} + 9p_3^2 S_{m-1}) + \\ \quad + \varphi_{rr} (-3p_2 S_{m+2} - 5p_2^2 S_m + 9p_3^2 S_{m-2}) \left. \right\} \\ \psi_{rs} = \frac{1}{108R} \left\{ \varphi_{rs} (-3p_2 S_{m+3} - 5p_2^2 S_{m+1} + 9p_3^2 S_{m-1}) + \right. \\ \quad + \bar{\varphi}_{rs} (-3p_2 S_{m+2} - 5p_2^2 S_m + 9p_3^2 S_{m-2}) \left. \right\}. \end{cases}$$

Indicando con K_m la formazione

$$(26) \quad K_m = -3p_2 S_{m+4} - 5p_2^2 S_{m+2} + 9p_3^2 S_m$$

ed osservando che i vari coefficienti delle φ_{rs} e φ_{rs} si ottengono da questa espressione cambiando m in $m-1$ e $m-2$ rispettivamente, potremo scrivere

$$(27) \quad \begin{cases} \psi_{rr} = \frac{1}{108R} (K_m + \varphi_{rr} K_{m-1} + \bar{\varphi}_{rr} K_{m-2}) \\ \psi_{rs} = \frac{1}{108R} (\varphi_{rs} K_{m-1} + \bar{\varphi}_{rs} K_{m-2}). \end{cases}$$

In queste formole, oltre gli elementi φ_{rs} della matrice Φ e ai loro complementi algebrici φ_{rs} , compare dunque la formazione K_m , che è una funzione razionale intera degli invarianti della matrice Φ . Volendo avere esplicitamente la sua espressione per mezzo di questi invarianti, bisogna calcolare le somme S_m delle potenze simili delle radici p_i , tenendo conto dell'ipotesi semplificatrice $p_1 = 0$. Essendo queste somme funzioni razionali simmetriche intere *omogenee* delle radici dell'equazione, si sa che la loro espressione in funzione razionale intera dei coefficienti sarà isobarica, e di peso uguale al loro grado. Perciò, essendo $p_1 = 0$, le somme S_{2n} delle potenze di grado pari dovranno contenere p_3 sempre a potenze pari, mentre le somme S_{2n+1} delle potenze di grado dispari dovranno tutte contenere p_3 a potenze dispari. Secondo che m è pari o dispari avremo quindi due espressioni del seguente tipo:

$$(28) \quad S_{2n} = \sum_0^{N(n)} \alpha_{n,r} p_3^{2r} p_2^{n-3r} \quad \text{per } m = 2n$$

$$(29) \quad S_{2n+1} = p_3 \sum_0^{N(n-1)} \beta_{n,r} p_3^{2r} p_2^{n-1-3r} \quad \text{per } m = 2n+1$$

dove abbiamo indicato con $N(n)$, $N(n-1)$ il massimo intero contenuto rispettivamente in $\frac{n}{3}$ e $\frac{n-1}{3}$.

In queste formole i coefficienti $\alpha_{n,r}$ e $\beta_{n,r}$ possono determinarsi tenendo presenti le formole di Waring

$$(30) \quad S_q = q \sum_{i=1}^{i=q} \left(\frac{(-1)^{q-1}}{i} \cdot \frac{1}{q} S_i c_r \right)$$

che permettono in generale di esprimere le somme S_q delle potenze simili delle radici di un'equazione mediante le funzioni simmetriche elementari c_r , che nel nostro caso coincidono con le p_r , e in cui si è rappresentato con $\sum_i^q c_r$ la somma di tutti i prodotti analoghi $c_{r_1} c_{r_2} \dots c_{r_i}$, essendo $r_1 r_2 \dots r_i$ numeri interi, positivi, uguali o disuguali, aventi per somma q .

Nel nostro caso, nella (28), la $\sum_i^q c_r$ è rappresentata dalla somma di tutti i prodotti $p_3^{2r} p_2^{n-3r}$ in cui $q = 2n$, $i = n-r$, ognuno dei quali va ripetuto tante volte quante sono le permutazioni con ripetizione di $i = n-r$ fattori, di cui $2r$ uguali a p_3 e $n-3r$ uguali a p_2 , cioè in numero di

$$\frac{(n-r)!}{(2r)!(n-3r)!}.$$

Per m pari e uguale a $2n$, avremo dunque

$$(31) \quad \sum_q \binom{i}{q} c_r = \sum_{2n}^{n-r} p_r = \frac{(n-r)!}{(2r)!(n-3r)!} p_3^{2r} p_2^{n-3r}$$

e sostituendo nella (30)

$$(32) \quad S_{2n} = 2n \sum_{n-r=1}^{n-r=2n} \left(\frac{(-1)^{2n-(n-r)} (n-r)!}{(n-r)(2r)!(n-3r)!} \right) p_3^{2r} p_2^{n-3r}$$

da cui, confrontando con la (28), risulta che è

$$(33) \quad \alpha_{n,r} = (-1)^{n+r} \frac{(n-r-1)! 2n}{(2r)!(n-3r)!}.$$

Nella (29) la $\sum_q \binom{i}{q} c_r$ è rappresentata dalla somma di tutti i prodotti $p_3^{2r+1} p_2^{n-3r}$ in cui $q = 2n + 1$, $i = n - r$, e ragionando come precedentemente si ottiene

$$(34) \quad S_{2n+1} = (2n+1) \sum_{n-r=1}^{n-r=2n+1} \left(\frac{(-1)^{2n+1-(n-r)}}{n-r} \frac{(n-r)!}{(2r+1)!(n-1-3r)!} \right) p_3^{2r+1} p_2^{n-1-3r}$$

da cui

$$(35) \quad \beta_{n,r} = (-1)^{n+r+1} \frac{(n-r-1)!(2n+1)}{(2r+1)!(n-1-3r)!}.$$

Ottenute così le espressioni delle somme delle potenze simili delle radici della (15) e dei coefficienti α e β che in esse compaiono, avremo per la formazione K_m , secondo che m è pari o dispari, le espressioni esplicite in funzione degli invarianti p_2 e p_3 mediante le formole

$$(36) \quad K_m = \sum_0^{N(n+4)} (-3\alpha_{n+2,r} - 5\alpha_{n+1,r} - 9\alpha_{n,r-1}) p_3^{2r} p_2^{n+1-3r} \quad \text{per } m = 2n \text{ (pari)}$$

$$(37) \quad K_m = \sum_0^{N(n+1)} (-3\beta_{n+2,r} - 5\beta_{n+1,r} - 9\beta_{n,r-1}) p_3^{2r+1} p_2^{n+1-3r} \quad \text{per } m = 2n+1 \text{ (dispari)}$$

dove abbiamo indicato con $N(n+4)$, $N(n+1)$ il massimo intero contenuto rispettivamente in $\frac{n+4}{3}$ e $\frac{n+1}{3}$.

Sostituendo nelle (27) avremo così finalmente l'espressione esplicita degli elementi ψ_{rs} della potenza Φ^m della matrice Φ in funzione razionale degli invarianti dell'equazione fondamentale, degli elementi φ_r della Φ e dei loro complementi algebrici, cioè

$$\psi_{rr} = \frac{1}{108R} \left\{ \sum_0^{N(n+4)} (-3\alpha_{n+2,r} - 5\alpha_{n+1,r} + 9\alpha_{n,r-1}) p_3^{2r} p_2^{n+1-3r} + \right.$$

$$\begin{aligned} & + \varphi_{rr} \sum_r^{N(n+1)} (-3\beta_{n+1,r} - 5\beta_{n,r} + 9\beta_{n-1,r-1}) p_3^{2r+1} p_2^{n+1-3r} + \\ & + \varphi_{rr} \sum_r^{N(n+2)} (-3\alpha_{n+1,r} - 5\alpha_{n,r} + 9\alpha_{n-1,r-1}) p_3^{2r} p_2^{n+2-3r} \Big\} \\ \psi_{rs} = \frac{1}{108R} & \Big\{ \varphi_{rs} \sum_r^{N(n+1)} (-3\beta_{n+1,r} - 5\beta_{n,r} + 9\beta_{n-1,r-1}) p_3^{2r} p_2^{n+1-3r} + \\ & + \varphi_{rs} \sum_r^{N(n+2)} (-3\alpha_{n+1,r} - 5\alpha_{n,r} + 9\alpha_{n-1,r-1}) p_3^{2r} p_2^{n+2-3r} \Big\} \end{aligned}$$

per m pari e uguale a $2n$

$$\begin{aligned} \psi_{rr} = \frac{1}{108R} & \Big\{ \sum_r^{N(n+1)} (-3\beta_{n+2,r} - 5\beta_{n+1,r} + 9\beta_{n,r-1}) p_3^{2r+1} p_2^{n+2-3r} + \\ & + \varphi_{rr} \sum_r^{N(n+2)} (-3\alpha_{n+2,r} - 5\alpha_{n+1,r} + 9\alpha_{n,r-1}) p_3^{2r} p_2^{n+3-3r} + \\ & + \varphi_{rr} \sum_r^{N(n)} (-3\beta_{n+1,r} - 5\beta_{n,r} + 9\beta_{n-1,r-1}) p_3^{2r+1} p_2^{n+1-3r} \Big\} \\ \psi_{rs} = \frac{1}{108R} & \Big\{ \varphi_{rs} \sum_r^{N(n+2)} (-3\alpha_{n+2,r} - 5\alpha_{n+1,r} + 9\alpha_{n,r-1}) p_3^{2r} p_2^{n+3-3r} + \\ & + \varphi_{rs} \sum_r^{N(n)} (3\beta_{n+1,r} - 5\beta_{n,r} + 9\beta_{n-1,r-1}) p_3^{2r+1} p_2^{n+1-3r} \Big\} \end{aligned}$$

per m dispari e uguale a $2n+1$.

Matematica. — *I simboli di Riemann nel calcolo differenziale assoluto generalizzato.* Nota di INES SACLOTTO, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. U. AMALDI.

Nella presente Nota, io espongo le considerazioni che, nella compilazione della mia tesi di laurea, mi hanno condotto ai simboli di Riemann per il Calcolo differenziale assoluto generalizzato.

Come si vedrà, tanto i simboli di 1^a specie, quanto quelli di 2^a specie qui descritti, per una qualsiasi classe n , hanno espressione analoga a quella nota per i corrispondenti simboli nel Calcolo di Ricci ($n=1$), e che inoltre per i simboli di Riemann di 1^a specie di classe n , si ha ancora una espres-

(1) Nella seduta del 6 gennaio 1929.

sione sintetica analoga a quella data dal Vitali⁽¹⁾ per gli ordinari simboli di Riemann ($n = 1$) a mezzo della rappresentazione funzionale.

1. Sia, al solito,

$$f = f(t, u_1, u_2, \dots, u_n)$$

l'equazione di una varietà generica nello spazio hilbertiano. Indico con g il campo di variabilità della t .

Relativamente alla nostra varietà io indicherò i simboli di Christoffel con le notazioni introdotte ultimamente dal Vitali⁽²⁾. Porrò poi

$$a_{r,s} = \int_g f_r \cdot f_s dt.$$

Se il sistema H_r è covariante, con r di classe n , se con $H_{r,p}$ indico il sistema derivato covariante di H_r ⁽³⁾ e con $H_{r,p,q}$ il sistema derivato covariante di $H_{r,p}$, ho, per definizione:

$$(1) \quad H_{r,p} = \frac{\partial H_r}{\partial u_p} - \sum_{\gamma} C_{rp}^{\gamma} H_{\gamma}^{(4)},$$

ed ancora,

$$(2) \quad H_{r,p,q} = \frac{\partial H_{r,p}}{\partial u_q} - \sum_{\gamma} C_{rq}^{\gamma} H_{\gamma,p} - \sum_{\delta} C_{pq}^{\delta} H_{r,\delta}.$$

Dalla (1), derivando rapporto ad u_q , e tenendo conto ancora della (1), si ottiene:

$$\frac{\partial H_{r,p}}{\partial u_q} = \frac{\partial^2 H_r}{\partial u_p \partial u_q} - \sum_{\gamma} H_{\gamma} \frac{\partial C_{rp}^{\gamma}}{\partial u_q} - \sum_{\gamma} C_{rp}^{\gamma} H_{\gamma,q} - \sum_{\gamma} C_{rp}^{\gamma} \sum_{\mu} C_{\gamma q}^{\mu} H_{\mu}$$

e quindi, sostituendo in (2):

$$\begin{aligned} H_{r,p,q} = & \frac{\partial^2 H_r}{\partial u_p \partial u_q} - \sum_{\gamma} H_{\gamma} \frac{\partial C_{rp}^{\gamma}}{\partial u_q} - \sum_{\gamma} C_{rp}^{\gamma} H_{\gamma,q} - \sum_{\gamma,\mu} C_{rp}^{\gamma} C_{\gamma q}^{\mu} H_{\mu} - \\ & - \sum_{\gamma} C_{rq}^{\gamma} H_{\gamma,p} - \sum_{\delta} C_{pq}^{\delta} H_{r,\delta}. \end{aligned}$$

Analoga espressione si otterrebbe per $H_{r,q,p}$, e sottraendo si ha:

$$H_{r,p,q} - H_{r,q,p} = \sum_{\gamma} H_{\gamma} \left(\frac{\partial C_{rq}^{\gamma}}{\partial u_p} - \frac{\partial C_{rp}^{\gamma}}{\partial u_q} \right) + \sum_{\gamma,\mu} H_{\mu} (C_{rp}^{\gamma} C_{\gamma q}^{\mu} - C_{rq}^{\gamma} C_{\gamma p}^{\mu}),$$

(1) G. VITALI, *Geometria nello spazio hilbertiano* [«Atti del R. Istituto Veneto», t. LXXXVII, parte seconda, 1927-28, p. 394]:

(2) G. VITALI, *Sulle derivazioni covarianti nel calcolo assoluto generalizzato* [«Rendiconti della R. Acc. dei Lincei», serie 6^a, 1^o sem., fasc. 8, vol. VII, 1928, pp. 626-629]. In seguito indicherò questa Nota con (B).

(3) Vedi (B), p. 629.

(4) Vedi (B), p. 629.

poichè

$$\frac{\partial^2 H_r}{\partial u_p \partial u_q} = \frac{\partial^2 H_r}{\partial u_q \partial u_p} \quad \text{e} \quad C_{pq}^{\delta} = C_{qp}^{\delta}.$$

Ed ancora, scambiando nell'ultima sommatoria γ e μ , e raccogliendo quindi H_γ :

$$(3) \quad H_{r,p,q} - H_{r,q,p} = \sum_{\gamma} H_{\gamma} \left[\frac{\partial C_{rq}^{\gamma}}{\partial u_p} - \frac{\partial C_{rp}^{\gamma}}{\partial u_q} + \sum_{\mu} (C_{rq}^{\mu} C_{\mu p}^{\gamma} - C_{rp}^{\mu} C_{\mu q}^{\gamma}) \right].$$

2. Indichiamo col simbolo

$$\{r, \gamma; q, p\}_n$$

l'espressione fra parentesi [] in (3). Questo simbolo si potrà chiamare il *simbolo di Riemann di 2^a specie di classe n*. Con questa notazione la (3) diventa

$$(3') \quad H_{r,p,q} - H_{r,q,p} = \sum_{\gamma} H_{\gamma} \{r, \gamma; q, p\}_n;$$

e poichè il primo membro della (3') è un covariante a tre indici, si può dire che il sistema $\{r, \gamma; q, p\}_n$ è tale che, quando si satura l'indice γ con quello di un covariante qualunque, di classe n , risulta un covariante a tre indici, ed allora, per il teorema fondamentale⁽¹⁾, $\{r, \gamma; q, p\}_n$ è un sistema covariante a tre indici r, p, q (il primo di classe n e gli altri due di prima classe) e controvariante a un indice γ di classe n .

3. Poniamo:

$$(r, s; q, p)_n = \sum_{\gamma} a_{\gamma, s} \{r, \gamma; q, p\}_n,$$

si vede, per principio di saturazione, che

$$(r, s; q, p)_n$$

è un covariante a quattro indici r, s, q, p , i primi due di classe n e i due ultimi di prima classe. È per quanto precede:

$$\begin{aligned} (4) \quad (r, s; q, p)_n &= \sum_{\gamma} a_{\gamma, s} \{r, \gamma; q, p\}_n = \\ &= \sum_{\gamma} a_{\gamma, s} \left[\frac{\partial C_{rq}^{\gamma}}{\partial u_p} - \frac{\partial C_{rp}^{\gamma}}{\partial u_q} \right] + \sum_{\gamma, \mu} a_{\gamma, s} [C_{rq}^{\mu} C_{\mu p}^{\gamma} - C_{rp}^{\mu} C_{\mu q}^{\gamma}] = \\ &= \frac{\partial C_{rq, s}}{\partial u_p} - \frac{\partial C_{rp, s}}{\partial u_q} - \sum_{\gamma} C_{rq}^{\gamma} (C_{\mu p, s}^{\gamma} + C_{\mu q, \gamma}^{\gamma}) + \\ &+ \sum_{\gamma} C_{rp}^{\gamma} (C_{\gamma q, s}^{\gamma} + C_{s q, \gamma}^{\gamma}) + \sum_{\mu} (C_{rq}^{\mu} C_{\mu p, s}^{\gamma} - C_{rp}^{\mu} C_{\mu q, s}^{\gamma}). \end{aligned}$$

(1) G. VITALI, *I fondamenti del calcolo assoluto generalizzato* [«Giornale di Battaglini», vol. LXI (1923), pp. 14 e sgg.].

Si arriva a quest'ultima, scrivendo:

$$\sum_{\gamma} a_{\gamma, s} \frac{\partial C_{r\gamma}^{\gamma}}{\partial u_p} = \frac{\partial \sum_{\gamma} a_{\gamma, s} C_{r\gamma}^{\gamma}}{\partial u_p} - \sum_{\gamma} C_{r\gamma}^{\gamma} \frac{\partial a_{\gamma, s}}{\partial u_p},$$

e osservando che dalle

$$a_{\gamma, s} = \int_{\mathcal{E}} f_{\gamma} f_s dt, \quad C_{\beta\gamma, \alpha}^{\gamma} = \int_{\mathcal{E}} f_{\beta} f_{\gamma} f_{\alpha} dt$$

consegue che

$$\frac{\partial a_{\gamma, s}}{\partial u_p} = C_{\gamma p, s}^{\gamma} + C_{s p, \gamma}^{\gamma}.$$

Semplificando

$$(r, s; q, p)_n = \frac{\partial C_{r\gamma}^{\gamma}}{\partial u_p} - \frac{\partial C_{r p, s}^{\gamma}}{\partial u_q} - \sum_{\gamma} \left(C_{r\gamma}^{\gamma} C_{s p, \gamma}^{\gamma} - C_{r p}^{\gamma} C_{s q, \gamma}^{\gamma} \right).$$

4. Tenendo presente la

$$f_{r, q} = f_{r q} - \sum_{\gamma} C_{r q}^{\gamma} f_{\gamma}$$

e osservando che le $f_{r, q}$ sono parametri ortogonali al σ_n della varietà, si ha

$$(5) \quad \int_{\mathcal{E}} f_{s, p} f_{r, q} dt = \int_{\mathcal{E}} f_{s p} f_{r, q} dt = \int_{\mathcal{E}} f_{s p} f_{r q} dt - \sum_{\gamma} C_{r q}^{\gamma} C_{s p, \gamma}^{\gamma}.$$

Ma da

$$\int_{\mathcal{E}} f_s f_{r q} dt = C_{r q, s}^{\gamma}$$

si ottiene

$$\frac{\partial C_{r q, s}^{\gamma}}{\partial u_p} = \int_{\mathcal{E}} f_{r q p} f_s dt + \int_{\mathcal{E}} f_{s p} f_{r q} dt,$$

e sostituendo in (5)

$$\int_{\mathcal{E}} f_{s, p} f_{r, q} dt = \frac{\partial C_{r q, s}^{\gamma}}{\partial u_p} - \int_{\mathcal{E}} f_{r q p} f_s dt - \sum_{\gamma} C_{r q}^{\gamma} C_{s p, \gamma}^{\gamma},$$

ed allora, osservando che $f_{rp} = f_{pr}$,

$$\int_n f_{s,p} f_{r,q} dt - \int_n f_{r,p} f_{s,q} dt =$$

$$= \frac{\partial C_{rq,s}}{\partial u_p} - \frac{\partial C_{rp,s}}{\partial u_q} - \sum \gamma \left(C_{rq,s,p}^{\gamma} - C_{rp,s,q}^{\gamma} \right) = (r, s; q, p)_n.$$

Si vede così che anche i simboli di Riemann di 1^a specie e di classe n , si possono esprimere mediante la differenza di due integrali che si ottengono l'uno dall'altro scambiando due indici.

Matematica. — *Sulle curve di Galois.* 2 Note di A. COMESSATTI, presentate dal Socio F. SEVERI.

Saranno pubblicate in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *L'effetto Raman e l'assorbimento negativo.* Nota di B. ROSSI, presentata dal Socio A. GARBASSO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Analisi matematica. — *Alcuni teoremi riguardanti le trasformazioni di Darboux generalizzate.* Nota di B. COLOMBO, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. FUBINI.

In questa Nota estendo, per le trasformazioni di Darboux generalizzate ad un numero qualunque di variabili ⁽²⁾, i teoremi contenuti in due mie Note ⁽³⁾ per il caso di due sole variabili; e inoltre stabilisco i teoremi previsti dallo stesso Darboux, che estendono i suoi teoremi ormai classici, con dimostrazioni a mio avviso degne di rilievo perchè, nonostante la maggiore generalità del caso trattato, sono più semplici di quelle di Darboux.

La teoria precedente è poi suscettibile di notevoli applicazioni geometriche, oltre a quelle dovute a Darboux, come ha mostrato il prof. Fubini in ricerche molto recenti ⁽⁴⁾, dalle quali io sono partito per una ricerca che confido presentare in breve all'Istituto Lombardo.

(1) Nella seduta del 20 gennaio 1929.

(2) G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Partie IV, livre VIII, chapitre XII; e, di rimando, partie II, livre IV, chapitre VIII.

(3) *Sulle trasformazioni (m, n)...*, «Rend. Acc. Lincei», vol. V (1927), p. 759 e vol. VI (1927), p. 96.

(4) G. FUBINI, *Sulle trasformazioni di Laplace, Lévy e Moutard*, «Rend. Acc. Lincei», vol. VIII (2° sem. 1928), p. 265 e p. 333 (due Note).

Consideriamo il seguente sistema di $\frac{r(r-1)}{2}$ equazioni

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial u_i \partial u_k} = \alpha_{ik} \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial u_i} + \alpha_{ki} \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial u_k} + \beta_{ik} \tilde{\chi} \quad (i, k = 1, 2, \dots, r; i \neq k),$$

le α_{ik} e le β_{ik} essendo funzioni delle variabili indipendenti u_l ($l = 1, 2, \dots, r$) tali da soddisfare le condizioni d'integrabilità del sistema stesso; e consideriamo inoltre la trasformazione di Darboux generalizzata, ossia l'espressione (m_1, m_2, \dots, m_r)

$$(2) \quad \theta = A_0 \tilde{\chi} + \sum_{j=1}^{m_1} A_{1j} \frac{\partial^j \tilde{\chi}}{\partial u_1^j} + \sum_{j=1}^{m_2} A_{2j} \frac{\partial^j \tilde{\chi}}{\partial u_2^j} + \dots + \sum_{j=1}^{m_r} A_{rj} \frac{\partial^j \tilde{\chi}}{\partial u_r^j},$$

A_0 e le A_{ij} essendo funzioni delle u_l .

Siccome i termini di un'espressione (m_1, m_2, \dots, m_r) sono in numero di $m_1 + m_2 + \dots + m_r + 1$, è unica, a meno di un fattore arbitrario, la θ che si annulla per $m_1 + m_2 + \dots + m_r$ integrali $\tilde{\chi}_b$ del sistema (1), tali che la matrice

$$(3) \quad \left| \tilde{\chi}_b \frac{\partial \tilde{\chi}_b}{\partial u_1} \dots \frac{\partial^{m_1} \tilde{\chi}_b}{\partial u_1^{m_1}} \frac{\partial \tilde{\chi}_b}{\partial u_2} \dots \frac{\partial^{m_2} \tilde{\chi}_b}{\partial u_2^{m_2}} \dots \frac{\partial \tilde{\chi}_b}{\partial u_r} \dots \frac{\partial^{m_r} \tilde{\chi}_b}{\partial u_r^{m_r}} \right|$$

($b = 1, 2, \dots, m_1 + m_2 + \dots + m_r$)

riesca diversa da zero.

Se $\tilde{\chi}$ è un integrale del sistema (1), la $\frac{\partial^{n_1+n_2+\dots+n_r} \tilde{\chi}}{\partial u_1^{n_1} \partial u_2^{n_2} \dots \partial u_r^{n_r}}$ è un'espressione (n_1, n_2, \dots, n_r) ; perciò, sostituendo la θ fornita dalla (2) nel sistema di equazioni

$$(1)^* \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_i \partial u_k} = \alpha_{ik}^* \frac{\partial \theta}{\partial u_i} + \alpha_{ki}^* \frac{\partial \theta}{\partial u_k} + \beta_{ik}^* \theta,$$

analogo al sistema (1), ed eliminando le derivate miste mediante le (1), si ottiene un sistema di $\frac{r(r-1)}{2}$ equazioni che consistono nell'annullare delle espressioni $(m_1, \dots, m_i + 1, \dots, m_k + 1, \dots, m_r)$.

TEOREMA I. — Se la (2) muta $m_1 + m_2 + \dots + m_r + 3$ integrali $\tilde{\chi}_b$ del sistema (1), tali che i determinanti

$$(4) \quad \left| \tilde{\chi}_b \frac{\partial \tilde{\chi}_b}{\partial u_1} \dots \frac{\partial^{m_1} \tilde{\chi}_b}{\partial u_1^{m_1}} \dots \frac{\partial \tilde{\chi}_b}{\partial u_i} \dots \frac{\partial^{m_i+1} \tilde{\chi}_b}{\partial u_i^{m_i+1}} \dots \frac{\partial \tilde{\chi}_b}{\partial u_k} \dots \frac{\partial^{m_k+1} \tilde{\chi}_b}{\partial u_k^{m_k+1}} \dots \frac{\partial \tilde{\chi}_b}{\partial u_r} \dots \frac{\partial^{m_r} \tilde{\chi}_b}{\partial u_r^{m_r}} \right|$$

($b = 1, 2, \dots, m_1 + m_2 + \dots + m_r + 3; i, k = 1, 2, \dots, r; i \neq k$)

siano tutti diversi da zero, in integrali θ_b del sistema analogo $(I)^*$, muta ogni integrale di (I) in un integrale di $(I)^*$.

Infatti le $\frac{r(r-1)}{2}$ equazioni ottenute precedentemente dalle $(I)^*$ sono allora delle identità, perchè in ciascuna di esse i coefficienti, in numero di $m_1 + m_2 + \dots + m_r + 3$, soddisfano altrettante equazioni lineari omogenee indipendenti.

TEOREMA II. — Se la (2) muta $m_1 + m_2 + \dots + m_r + 2$ integrali z_b del sistema (I) in integrali θ_b di un sistema analogo $(I)^*$, non muta necessariamente ogni integrale di (I) in un integrale di $(I)^*$, anche se le matrici

$$(5) \quad \left\| z_b \frac{\partial z_b}{\partial u_1} \dots \frac{\partial^{m_1} z_b}{\partial u_1^{m_1}} \dots \frac{\partial z_b}{\partial u_i} \dots \frac{\partial^{m_i+1} z_b}{\partial u_i^{m_i+1}} \dots \frac{\partial z_b}{\partial u_k} \dots \frac{\partial^{m_k+1} z_b}{\partial u_k^{m_k+1}} \dots \frac{\partial z_b}{\partial u_r} \dots \frac{\partial^{m_r} z_b}{\partial u_r^{m_r}} \right\|$$

($b = 1, 2, \dots, m_1 + m_2 + \dots + m_r + 2$; $i, k = 1, 2, \dots, r$; $i \neq k$)

sono tutte diverse da zero.

Infatti, con gli stessi criteri utilizzati nelle mie Note citate, è possibile costruire un esempio che dimostra l'asserto.

TEOREMA III. — Se la (2) si annulla per $m_1 + m_2 + \dots + m_r$ integrali z_b del sistema (I) , tali che la matrice (3) riesca diversa da zero, muta ogni integrale di (I) nell'integrale di un sistema analogo $(I)^*$.

Infatti supponiamo dapprima che i e k siano tali che $\frac{\partial \theta}{\partial u_i}$ e $\frac{\partial \theta}{\partial u_k}$, le quali sono rispettivamente delle espressioni $(m_1, m_2, \dots, m_i + 1, \dots, m_r)$ e $(m_1, m_2, \dots, m_k + 1, \dots, m_r)$, abbiano diverso da zero il coefficiente di $\frac{\partial^{m_i+1} z}{\partial u_i^{m_i+1}}$ e $\frac{\partial^{m_k+1} z}{\partial u_k^{m_k+1}}$, avvertendo che, se m_i e m_k non sono nulli, l'ipotesi precedente è appunto verificata, ma non viceversa. Siccome per un integrale di (I) sono arbitrari (in un punto) i valori di z e delle sue derivate non miste, si possono trovare tre nuovi integrali di (I) z'_1, z'_2 e z'_3 , che conviene anche indicare rispettivamente con $z_{m_1+\dots+m_r+1}, z_{m_1+\dots+m_r+2}$ e $z_{m_1+\dots+m_r+3}$, i quali rendano diverso da zero il determinante

$$(6) \quad \left| \frac{\partial \theta'_s}{\partial u_i} \frac{\partial \theta'_s}{\partial u_k} \theta'_s \right| \quad (s = 1, 2, 3),$$

che è facile riconoscere non identicamente nullo nelle z'_s e loro derivate, e inoltre, insieme agli integrali z_b dell'enunciato, rendano diverso da zero il determinante (4). In conseguenza si possono determinare le α_{ik}^* e le β_{ik}^* dell'equazione $(I)^*$ in modo che θ muti z'_1, z'_2 e z'_3 in integrali della stessa $(I)^*$; la θ muta allora $m_1 + m_2 + \dots + m_r + 3$ integrali generici di (I) in integrali dell'equazione $(I)^*$ e perciò, col ragionamento del Teorema I, muta ogni integrale di (I) in un integrale dell'equazione $(I)^*$.

Supponiamo ora che i sia tale che $\frac{\partial \theta}{\partial u_i}$ abbia eguale a zero il coefficiente di $\frac{\partial^{m_i+1} \chi}{\partial u_i^{m_i+1}}$, ossia di $\frac{\partial \chi}{\partial u_i}$, essendo necessariamente $m_i = 0$. Scegliamo un nuovo generico integrale χ' di (1), che conviene indicare anche con $\chi_{m_1+\dots+m_r+1}$, il quale renda diversa da zero la corrispondente θ' (s'intende escluso il caso banale di θ identicamente nulla) e, insieme agli integrali χ_h dell'enunciato, renda diverso da zero il determinante

$$(7) \quad \left| \chi_h \frac{\partial \chi_h}{\partial u_1} \dots \frac{\partial^{m_1} \chi_h}{\partial u_1^{m_1}} \frac{\partial \chi_h}{\partial u_2} \dots \frac{\partial^{m_2} \chi_h}{\partial u_2^{m_2}} \dots \frac{\partial \chi_h}{\partial u_r} \dots \frac{\partial^{m_r} \chi_h}{\partial u_r^{m_r}} \right|$$

$$(h = 1, 2, \dots, m_1 + m_2 + \dots + m_r + 1).$$

Ponendo $\gamma_i = \frac{1}{\theta'} \frac{\partial \theta'}{\partial u_i}$, otteniamo che θ muti χ' in un integrale dell'equazione

$$(8) \quad \frac{\partial \theta}{\partial u_i} = \gamma_i \theta.$$

La θ muta allora $m_1 + m_2 + \dots + m_r + 1$ integrali generici di (1) in integrali della (8), la quale, consistendo per l'ipotesi fatta nell'annullare un'espressione (m_1, m_2, \dots, m_r) , si riconosce identicamente soddisfatta, con un ragionamento analogo a quello del Teorema I; pertanto la θ muta ogni integrale di (1) in un integrale dell'equazione (8) di primo ordine e perciò in un integrale di infinite equazioni del secondo ordine del tipo (1)*, ottenibili derivando parzialmente la (8) rispetto ad u_k e combinando colla (8) stessa (1).

In definitiva la θ muta ogni integrale del sistema (1) in un integrale di un sistema (1)* (2).

(1) Il caso in cui qualche $\frac{\partial \theta}{\partial u_i}$ abbia nullo il coefficiente di $\frac{\partial^{m_i+1} \chi}{\partial u_i^{m_i+1}}$ ossia di $\frac{\partial \chi}{\partial u_i}$, anzi addirittura il caso in cui qualche m_i è nulla, è appena accennato dal Darboux (e per due sole variabili), sicchè non è da lui notato come θ possa mutare ogni integrale di (1) in un integrale di infiniti sistemi (1)*.

(2) Nel caso generico in cui le $\frac{\partial \theta}{\partial u_i}$ hanno tutte diverso da zero il coefficiente di $\frac{\partial^{m_i+1} \chi}{\partial u_i^{m_i+1}}$ la nostra dimostrazione, che a differenza da quella di Darboux (per due sole variabili) evita l'effettiva costruzione delle equazioni (1)*, rende il Teorema III un immediato corollario del Teorema I, perchè si può asserire, molto semplicemente, che sono determinabili le α_{ik}^* e le β_{jk}^* delle (1)* in guisa che θ muti tre nuovi integrali generici di (1), oltre a quelli dell'enunciato, in integrali di (1)* e perciò ogni integrale di (1) in un integrale di (1)*.

TEOREMA IV. — Se la (2) muta ogni integrale del sistema (1) nell'integrale di un sistema analogo (1)*, si annulla per $m_1 + m_2 + \dots + m_r$ integrali ζ_b di (1), tali che la matrice (3) riesca diversa da zero; a meno che sia nullo un indice m_i e inoltre $\frac{\partial \theta}{\partial u_i}$ abbia nullo il coefficiente di $\frac{\partial \zeta}{\partial u_i}$.

Infatti le equazioni già considerate, che si ottengono dalle (1)* sostituendovi la θ fornita dalla (2) ed eliminando poi le derivate miste mediante le (1), e che consistono nell'annullare delle espressioni

$$(m_1, \dots, m_i + 1, \dots, m_k + 1, \dots, m_r),$$

sono allora delle identità.

Pertanto, supposto che le $m_1 + m_2 + \dots + m_r + 1$ quantità

$$(9) \quad \zeta, \frac{\partial \zeta}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial^{m_1} \zeta}{\partial u_1^{m_1}}, \dots, \frac{\partial \zeta}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial^{m_2} \zeta}{\partial u_2^{m_2}}, \dots, \frac{\partial \zeta}{\partial u_r}, \dots, \frac{\partial^{m_r} \zeta}{\partial u_r^{m_r}}$$

verifichino la $\theta = 0$ e che le $\frac{\partial^{m_i+1} \zeta}{\partial u_i^{m_i+1}}$, insieme alle precedenti, verifichino

le relazioni $\frac{\partial \theta}{\partial u_i} = 0$, consistenti nell'annullare delle espressioni

$$(m_1, \dots, m_i + 1, \dots, m_r)$$

per ipotesi risolubili rispetto a $\frac{\partial^{m_i+1} \zeta}{\partial u_i^{m_i+1}}$, esse verificano anche le relazioni

$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u_i \partial u_k} = 0$, consistenti nell'annullare delle espressioni

$$(m_1, \dots, m_i + 1, \dots, m_k + 1, \dots, m_r).$$

Sono insomma soddisfatte tutte le condizioni di integrabilità per il sistema formato colle (1) e colla $\theta = 0$, e per un loro integrale sono arbitrari (in un punto) i valori di $m_1 + m_2 + \dots + m_r$ fra le $m_1 + m_2 + \dots + m_r + 1$ quantità (9).

In conseguenza esistono $m_1 + m_2 + \dots + m_r$ integrali ζ_b del sistema (1), tali che la matrice (3) riesca diversa da zero, i quali verificano anche la $\theta = 0$, ossia annullano la θ .

Fisica. — *Sull'allargamento delle righe per risonanza.* Nota I di A. CARRELLI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio M. CANTONE.

Una nuova e notevole causa di allargamento delle righe, oltre quelle già note dipendenti dallo smorzamento (natürliche Breite), dall'effetto di pressione o Stark, dall'effetto degli urti, e dall'effetto Döpler è stato messo in evidenza da Holtzmark ⁽²⁾. Essa è originata da un'azione mutua dei vari atomi fra di loro, e per tale ragione si parla di un effetto di allargamento per risonanza. La teoria sviluppata da Holtzmark si basa sulla meccanica classica e parte dal concetto che nell'equazione di moto di un vibratore classico oltre al termine proporzionale allo spostamento del vibratore considerato compaiono altri termini che sono appunto proporzionali agli spostamenti degli altri vibratori presenti e che agiscono su quello considerato.

Il Mensing ⁽³⁾ ha trattato lo stesso problema nella teoria delle perturbazioni applicate all'atomo di Bohr ottenendo anch'egli un allargamento della riga caratteristica degli atomi considerati in virtù di un'azione mutua dei vari atomi uguali fra di loro. Il Rasetti ⁽⁴⁾ trattando il problema in meccanica ondulatoria è giunto allo stesso risultato: che cioè l'uguaglianza delle frequenze caratteristiche è condizione fondamentale per tale azione di allargamento.

Dalla teoria di Holtzmark risulta che l'effetto dipende da tutte quantità note, e più precisamente che la larghezza $\Delta\nu$ della riga espansa per effetto di risonanza è proporzionale, con coefficiente di proporzionalità noto, alla radice quadrata dei vibratori presenti; più precisamente

$$\Delta\nu = \frac{2.63 \times 10^7}{2 \nu_0 r^2} \sqrt{\mathfrak{N}}$$

dove \mathfrak{N} è la concentrazione dei vibratori ν_0 è la frequenza fondamentale caratteristica di essi e r_0 è il raggio o minima distanza mutua degli atomi che si considerano. Altro risultato della teoria di Holtzmark è che il prodotto della frequenza di una riga e della sua larghezza è proporzionale al coefficiente d'assorbimento massimo. Il Trumpy ⁽⁵⁾ ha trattato il problema sperimentalmente per vapori di Na e di Hg in assorbimento, specialmente

(1) Nella seduta del 6 gennaio 1929.

(2) HOLTZMARK, « Zeit. f. Phys. », 34, 722 (1925).

(3) MENSING, « Zeit. f. Phys. », 34, 611 (1925).

(4) RASETTI, « Rend. Acc. Lincei », aprile 1928.

(5) TRUMPY, « Zeit. f. Phys. », 34, 715 (1925); 40, 594 (1927).

avendo come scopo la verifica della seconda deduzione. Per ciò che riguarda la variazione con la concentrazione si hanno in assorbimento dati relativamente poco estesi, e in emissione il Rasetti ha mostrato la presenza di questa notevolissima causa di allargamento quando la concentrazione degli atomi emittenti è molto notevole.

In questo lavoro abbiamo voluto analizzare il problema dell'effetto Holtzmark principalmente da due punti di vista. In primo luogo abbiamo voluto verificare la proporzionalità di $\Delta\nu$ alla radice quadrata della concentrazione per una riga in emissione facendo variare notevolmente la concentrazione ed in secondo luogo, per portare ancora un nuovo elemento allo studio di questo effetto, abbiamo voluto stabilire qual'è la legge di distribuzione delle intensità specialmente al bordo di una riga espansa per effetto di risonanza. Dalla teoria di Holtzmark si ricava infatti una certa legge di distribuzione delle intensità mentre legge di altro tipo si ricavano in base alla teoria di Mensing. Entrambe queste ricerche sono state fatte in emissione. Le esperienze sono state condotte su vapori di Na. Volendo studiare la variazione di larghezza in funzione della concentrazione in emissione abbiamo fatto uso come sorgente di una fiamma Bunsen nella quale venivano iniettate mediante uno spruzzatore soluzioni acquose di NaCl variamente concentrate. La iniezione della soluzione nella fiamma veniva fatta sempre nello stesso modo di guisa che la variazione di larghezza era soltanto attribuibile alla variazione di concentrazione del Na nella fiamma per la variazione di concentrazione della soluzione. La luce della sorgente così colorata cadeva sull'interferometro di Fabry e Buisson a specchi spostabili, sul campo del quale si vedevano gli anelli interferenziali prodotti dalla luce della sorgente. Si allontanavano gli specchi gradatamente osservando sempre nelle condizioni per le quali i due sistemi interferenziali della D_1 e D_2 erano sovrapposti, fino alla scomparsa totale di ogni fenomeno interferenziale e la distanza massima D espressa in centimetri permetteva di determinare la larghezza $\Delta\nu$ in base alla formula

$$\Delta\nu = \frac{1.98 \times 10^{10}}{2D} = \frac{9.9 \times 10^9}{D}.$$

Siamo partiti da una soluzione notevolmente diluita, ma tale da colorare nettamente la fiamma ed abbiamo quindi aumentato man mano la concentrazione. Si è osservato che effettivamente la larghezza della riga variava per l'aumento del numero di atomi sulla fiamma. Per accertare che tale effetto dipendeva dall'aumento di atomi uguali abbiamo aggiunto ad una soluzione di NaCl che dava righe piuttosto sottili una notevole quantità di LiCl e mediante l'uso di uno spettroscopio abbiamo potuto accertare che la presenza degli atomi di Li, i quali danno per loro conto una riga espansa, non alterava in maniera apprezzabile la larghezza delle righe del Na; dunque l'allargamento è prodotto dall'azione mutua di atomi uguali.

Il campo di variazione di $\Delta\nu$ nelle nostre misure è compreso fra 8.75×10^{10} e 1.38×10^{10} . Poichè

$$\Delta\nu = 3 \cdot 10^{10} \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$$

nel caso che c'interessa le stesse variazioni espresse in lunghezza d'onda vanno da 1.0 a 0.27 Å.

Il Fabry ⁽¹⁾, ha ottenuto valori più piccoli ($\Delta\lambda = 0.08 \text{ Å}$) avendo usato fiamme estremamente deboli proprio al limite di visibilità. In assorbimento Fürchthauer e Hoffmann ⁽²⁾ ottengono per la larghezza delle D del vapore di Na contenuti in tubi il valore di 5.5×10^{10} e cioè un valore compreso fra i nostri; il numero di atomi per unità di volume era di $3 \cdot 10^{11}$ ed è interessante notare che in emissione da fiamma si è ritrovato lo stesso ordine di grandezza; noi non conosciamo la concentrazione del vapore nelle fiamme adoperate ma l'ordine di grandezza trovato da altri sperimentatori nello studio del fenomeno di Macaluso-Corbino porta appunto ad un valore molto vicino a quello di Fürchthauer e Hoffmann.

Il Trumphy ha ottenuto valori molto più elevati ($\Delta\nu = 10^{12}$) il Minkowski valori molto più bassi ($\Delta\nu = 10^7$). Ma riducendo i vari dati alle stesse condizioni di concentrazione si ottengono valori concordanti.

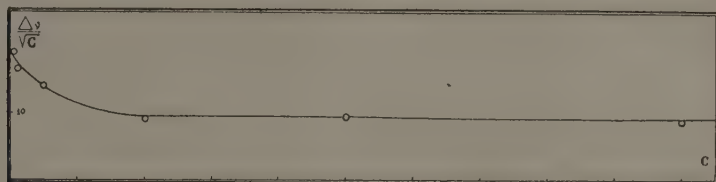
Sono state eseguite numerose serie di misure e nella seguente tabella sono riuniti i valori medi dei risultati. Le concentrazioni delle soluzioni sono conosciute con notevole precisione, invece le misure della distanza massima non sono naturalmente ugualmente precise. L'errore medio che effettua la quantità $\frac{I}{D} = A$, proporzionale alla larghezza, è del 10 % circa.

c	\sqrt{c}	A	$\frac{A}{\sqrt{c}}$
1.000	1.000	8.86	8.86
0.500	0.708	6.79	9.58
0.200	0.448	4.14	9.25
0.050	0.224	3.12	14.30
0.010	0.100	1.69	16.90
0.005	0.071	1.40	19.00

(1) FABRY; *Le Radium* (1914).

(2) FÜRCHTHAUER e HOFFMANN, « Ann. d. Phys. », 43, 126 (1924).

Nella prima colonna della tabella sono riportate le concentrazioni in scala arbitraria, nella seconda le radici quadrate di questi numeri, nella terza la quantità A e nella quarta le quantità $\frac{A}{\sqrt{c}}$ che secondo la teoria di Holtzmark dovrebbero essere costanti:



Nella figura sono riportati i suddetti quozienti in funzione della concentrazione; come vedesi questa va da un valore ad un altro che è duecento volte più grande. Come si può notare dalla tabella e come chiaramente risulta dalla curva la costanza della quantità $\frac{\Delta\nu}{\sqrt{c}}$ è verificata in un lungo tratto di concentrazioni e precisamente quando queste sono elevate; per piccole concentrazioni si hanno spostamenti sistematici che diventano mano a mano più notevoli.

Da questi dati possiamo ricavare che la teoria di Holtzmark per ciò che riguarda la dipendenza della concentrazione è verificata sperimentalmente in emissione per concentrazioni piuttosto elevate.

La larghezza delle righe diminuisce invece meno rapidamente di quello che richiede l'effetto Holtzmark nel caso che le concentrazioni sono basse.

Di questo fatto può darsi la seguente interpretazione: le cause di allargamento di una riga, come abbiamo detto in principio, sono numerose. Al diminuire della concentrazione degli atomi di Na, per esempio, va annullandosi l'effetto di risonanza ma incomincia a diventare preponderante l'effetto di pressione o Stark, il quale effetto⁽¹⁾ è proporzionale non al numero di atomi della stessa specie ma al numero totale di atomi o joni di qualunque specie presenti nella fiamma. Del resto quando la concentrazione è estremamente piccola, la riga pur avendo una larghezza nulla, per effetto Holtzmark o per effetto di pressione ha una larghezza finita per autosmorzamento o per effetto Döppler quindi deve aversi una zona di valori per la concentrazione nella quale si incominciano a notare anomalie del comportamento previsto da Holtzmark. È interessante notare che tale zona è stata riscontrata in facili condizioni sperimentali.

(1) HOLTZMARK, « Ann. d. Phys. », 613, 58 (1919).

Chimica. — *Prodotti di condensazione tra glucosio e p-anisidina* ⁽¹⁾. Nota di M. AMADORI, presentata ⁽²⁾ dal Socio N. PARAVANO.

L'esistenza di due prodotti di condensazione tra glucosio e p-fenetidina, che ho dimostrato in precedenti Note⁽³⁾, mi ha indotto a studiare se per condensazione di altre basi con il glucosio si possano avere due prodotti dello stesso tipo. Riferisco in questa Nota le ricerche eseguite con la p-anisidina. Nella letteratura chimica non risulta che siano stati studiati composti tra glucosio e anisidina. Per reazione tra le due sostanze ho ottenuto due prodotti; l'uno di p. f. 86°, l'altro di p. f. 140°.

Composto A: p. f. 86°: corrisponde al composto della p-fenetidina a p. f. 118.

Il miglior metodo di preparazione è quello di porre a reagire p-anisidina gr. 5,5 e glucosio gr. 8 (in rapporto molecolare) in soluzione di alcool metilico gr. 35, o di alcool etilico gr. 50.

Si può far compiere la reazione a freddo agitando a tratti la miscela; lentamente, in seguito a condensazione, il glucosio passa in soluzione, e dopo 8-10 giorni per la soluzione metilica, 15-20 giorni per l'etilica, esso è completamente sciolto: lasciando evaporare l'alcool spontaneamente all'aria si deposita il prodotto. Questo si può avere poi puro ricristallizzandolo dall'alcool, raccogliendo i cristalli che si depositano, lavandoli con alcool e con etere, ponendoli a seccare su cloruro di calcio nel vuoto; si può anche omettere il lavaggio con etere.

Si può far avvenire la reazione anche a caldo; essa è allora molto più rapida; ma è necessario badare di non scaldare troppo forte, e a lungo, cioè di giungere appena ad una moderata ebollizione, e di non prolungare il riscaldamento oltre la condensazione che risulta dalla scomparsa del glucosio solido. Anche l'evaporazione successiva del solvente può esser fatta a caldo, ma anche in questa operazione si deve badare di non elevare troppo la temperatura.

Se non si seguono queste precauzioni, e si riscalda troppo, si forma parzialmente l'altro prodotto a punto di fusione più elevato.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica della R. Università di Modena.

(2) Nella seduta del 3 febbraio 1929.

(3) Questi « Rendiconti », II, 2° sem., 337 (1925); IX, 1° sem., p. 68 (1929).

Non si hanno notevoli differenze nell'uso dell'alcool etilico e metilico; il composto preparato con l'alcool metilico appare più ben cristallizzato. Usando l'alcool metilico è necessario prolungare maggiormente l'evaporazione per ottenere che il prodotto cristallizzi, cosicchè stante la maggior solubilità del glucosio, ed anche del prodotto, è consigliabile operare in soluzioni più concentrate. Il rendimento della preparazione del composto con l'anisidina è un po' inferiore a quello con la fenetidina, causa la maggior solubilità del composto.

Anche impiegando una quantità maggiore di anisidina rispetto al glucosio (2 mol. : 1 mol.) si ottiene lo stesso prodotto; e nella preparazione, specialmente a freddo, è consigliabile usare una quantità di anisidina eccedente a quella che corrisponde al rapporto equimolecolare dato precedentemente.

Il composto che si prepara nelle modalità ora descritte, è bianco, cristallizzato in aghetti. È solubile in acqua a freddo, ma lentamente si scompone. In alcool metilico ed in alcool etilico è solubile a freddo, molto più a caldo; è insolubile in etere, benzolo, anche a caldo. Fonde a 86°.

Questo composto è più stabile del corrispondente derivato della fenetidina, e si conserva meglio anche esposto all'aria.

Analisi del prodotto, preparato con alcool metilico, e lavato con etere:

gr. 0.1564 di sostanza diedero gr. 0.3127 di CO_2 e gr. 0.0953 di H_2O
gr. 0.2540 di sostanza diedero cc. 10.8 di azoto a 22° e 754.5 mm.

$\text{C} = 54.54\%$ $\text{H} = 6.82\%$ $\text{N} = 4.75\%$
calcolato per $\text{C}_{13}\text{H}_{19}\text{O}_6\text{N}$ $\text{C} = 54.73\%$ $\text{H} = 6.66\%$ $\text{N} = 4.91\%$

Peso molecolare:

In acqua al congelamento (p. f. 0°), $k = 18^\circ.5$

concentrazione = 2.83 $\Delta = 0.19^\circ$ peso molecolare = 275.3

» = 4.94 $\Delta = 0.33^\circ$ » » = 276.9

In alcool etilico all'ebollizione (p. e. = 78° 2), $k = 11^\circ.5$

concentrazione = 4.05 $\Delta = 0.155^\circ$ peso molecolare = 300.6

» = 8.03 $\Delta = 0.28^\circ$ » » = 329.7

calcolato per $\text{C}_{13}\text{H}_{19}\text{O}_6\text{N}$ » » = 285.0

È evidente che nella reazione la condensazione avviene tra una molecola di glucosio e una molecola di anisidina, con eliminazione di una molecola di acqua. Le prove di diazotazione, eseguite allo stesso modo che le riferite nella Nota precedente per il composto con la fenetidina, dimostrano nel composto la mancanza del gruppo aminico $-\text{NH}_2$, e confermano anche per questo composto la poca stabilità in soluzione acida.

Potere rotatorio specifico:

Soluzione acquosa a 2 %; appena preparata $[\alpha]_D^{20} = -86^\circ$; lentamente il potere rotatorio diminuisce, nello stesso tempo però la soluzione si decompone con intorbidamento.

Soluzione in alcool metilico a 2 %; appena preparata $[\alpha]_D^{20} = -82^\circ$; dopo 8 ore -38° ; successivamente costante.

Soluzione alcalina:

a) in acqua: 100 cc.

2 gr. prodotto + 2 cc. NaOH 2N $[\alpha]_D^{20} = -70^\circ$, costante

2 gr. prodotto + 2 cc. NaOH 10N $[\alpha]_D^{20} = -70^\circ$, costante;

b) in alcool metilico: 100 cc.

2 gr. prodotto + 2 cc. NaOH 2N: appena preparata $[\alpha]_D^{20} = -76^\circ$; poi scende a -45° in 6 ore, poi costante

2 gr. prodotto + 2 cc. NaOH 10N: appena preparata $[\alpha]_D^{20} = -75^\circ$, poi scende a -45° in 4 ore, poi costante.

Soluzione acida:

a) in acqua: 100 cc.

2 gr. prodotto + 2 cc. HCl 1:4: appena preparata $[\alpha]_D^{20} = +36^\circ$; poi scende a $+30^\circ$, e si mantiene costante.

2 gr. prodotto + 2 cc. HCl concentrato $[\alpha]_D^{20} = +30^\circ$ costante;

b) in alcool metilico: 100 cc.

2 gr. prodotto + 2 cc. HCl 1:4

2 gr. prodotto + 2 cc. HCl. concentrato;

il potere rotatorio, levogiro dapprima, lentamente diminuisce e assume anche valori positivi.

Queste ricerche polarimetriche dimostrano che questo composto tra glucosio e anisidina è alquanto stabile di fronte agli alcali, ancora più stabile che il composto corrispondente tra glucosio e fenetidina.

Con gli acidi, come il composto della fenetidina, anche il composto della anisidina dimostra una notevole instabilità, con scissione in glucosio e anisidina: è da rilevare che per il composto con la anisidina si può osservare in soluzione acquosa una lieve mutarotazione del glucosio che si libera nella scomposizione.

Composto B: p. f. 140° , corrisponde al composto della fenetidina a p. f. 155° .

Si forma facendo bollire a lungo in alcool metilico la miscela di glucosio e anisidina, o il composto precedente. Si prepara più conveniente-

mente scaldando la miscela di glucosio e anisidina in rapporto molecolare a secco, a 70-80°, e facendo cristallizzare il prodotto da una soluzione bollente in alcool metilico; si purifica ricristallizzandolo dall'alcool.

Cristallizza in scaglie, o in aghi, con leggero colore pagliarino. È poco solubile in acqua a freddo; più solubile a caldo; anche in alcool metilico e in alcool etilico è poco solubile a freddo; più solubile a caldo. Il prodotto è molto stabile: anche la sua soluzione acquosa è alquanto stabile. Fonde indecomposto a 140°.

Analisi:

gr. 0.1604 di sostanza diedero gr. 0.3222 di CO₂ e gr. 0.0992 di H₂O
gr. 0.2266 di sostanza diedero cc. 9.8 di azoto a 23° e 758 mm.

C = 54.78 % H = 6.92 % N = 4.83 %
calcolato per C₁₃H₁₉O₆N C = 54.73 % H = 6.66 % N = 4.91 %

Peso molecolare:

In acqua al congelamento (p. f. 0°), k = 18°.5

concentrazione = 1.050 Δ = 0.07° peso molecolare = 277.5

In alcool etilico all'ebollizione (p. e. 78°.2), k = 11°.5

concentrazione = 4.34 Δ = 0.17° peso molecolare = 293.6
calcolato per C₁₃H₁₉O₆N peso molecolare = 285.0

Anche per questo composto si ha quindi condensazione di una molecola di anisidina con una molecola di glucosio, con eliminazione di una molecola di acqua. Le prove di diazotazione sono negative, e dimostrano che manca il gruppo aminico, —NH₂; esse dimostrano anche la facile decomponibilità in soluzione alcalina.

Potere rotatorio specifico:

Soluzione acquosa a 1 % [α]_D^{20°} = — 28° costante.

Soluzione in alcool metilico a 1 %: appena preparata [α]_D^{20°} = — 40°; poi scende a — 25°, e si mantiene costante.

Soluzione alcalina:

a) in acqua: 100 cc.

2 gr. prodotto + 2 cc. NaOH 2N: [α]_D^{20°} = — 25°, costante

2 gr. prodotto + 2 cc. NaOH 10N: [α]_D^{20°} = — 20°, costante

le soluzioni sono colorate in giallo tuttavia si ha visibilità attraverso il tubo polarimetrico; il potere rotatorio si mantiene inalterato per vario tempo;

b) in alcool metilico: 100 cc.

2 gr. prodotto + 2 cc. NaOH 2N: [α]_D^{20°} = — 20°, costante

la soluzione è colorata in giallo

2 gr. prodotto + 2 cc. NaOH 10N: $[\alpha]_D^{20} = -10^\circ$ costante;
la soluzione si colora di giallo; si ha intorbidamento
dopo un paio di ore.

Soluzione acida:

a) in acqua: 100 cc.

2 gr. prodotto + 2 cc. HCl 1:4: $[\alpha]_D^{20} = -50^\circ$, costante

2 gr. prodotto + 2 cc. HCl concentrato: $[\alpha]_D^{20} = -50^\circ$, co-
stante;

b) in alcool metilico: 100 cc.

2 gr. prodotto + 2 cc. HCl 1:4: appena preparata $[\alpha]_D^{20} =$
 $= -50^\circ$, poi scende a -25°

2 gr. prodotto + 2 cc. HCl concentrato: appena preparata
 $[\alpha]_D^{20} = -42$, poi scende a -25° .

Anche questo composto tra glucosio e anisidina, come già si è visto per il composto tra glucosio e fenetidina, mostra una notevole stabilità verso gli acidi. Verso le basi questo composto della anisidina ha una stabilità superiore a quella del corrispondente composto della fenetidina, come è provato da una notevole costanza del potere rotatorio delle soluzioni.

A conclusione di quanto ho qui esposto, va affermato anche per la anisidina l'esistenza di due composti con il glucosio di tipo analogo a quelli indicati per la fenetidina; per le considerazioni allora svolte, al composto a p. f. 86° va attribuita la costituzione di derivato glucosidico, al composto a p. f. 140° la costituzione di base di Schiff.

Chimica. — *Conduttività di soluzioni miste di nitrato di piombo e nitrato di ammonio* ⁽¹⁾. Nota di G. MALQUORI, presentata ⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

In un lavoro precedente ⁽³⁾ ho attribuito alla formazione di complessi una delle probabili cause che determinano le influenze di solubilità fra nitrato di piombo e nitrato ammonico.

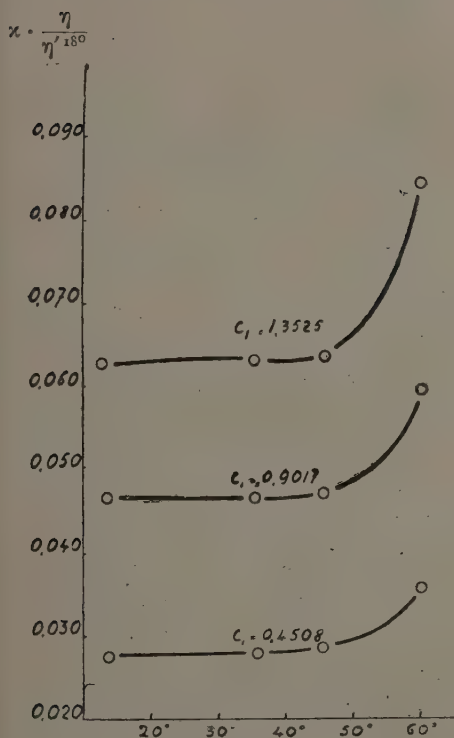


Fig. 1.

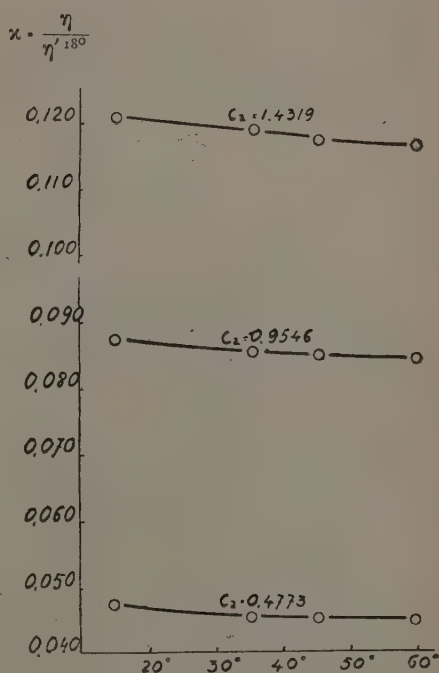


Fig. 2.

A conferma di questo ho preso in esame la conduttività corretta con la viscosità di soluzioni miste dei due nitrati: di piombo e di ammonio.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 3 febbraio 1929.

(3) « Gazz. Chimica », 58, 203 (1928).

La tecnica seguita per accertare i valori riportati nelle figg. 1, 2, 3, 4 è quella descritta da C. Mazzetti⁽¹⁾ nel suo studio sulle soluzioni di cloruro di cobalto.

Le diverse curve rappresentano, per differenti concentrazioni, la variazione con la temperatura della conduttività corretta (con C_1 è indicata la

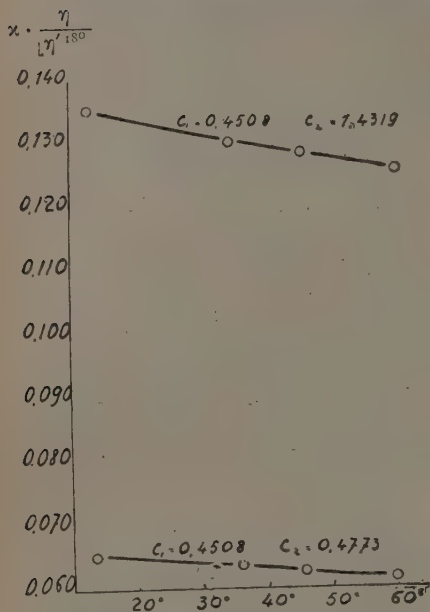


Fig. 3.

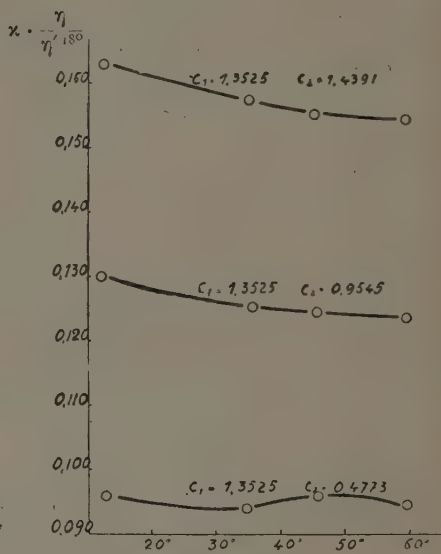


Fig. 4.

concentrazione di $\text{Pb}(\text{NO}_3)_2$ in equivalenti per litro, con C_2 quella di NH_4NO_3).

Prendendo in esame i valori delle conduttività corrette per le soluzioni dei due nitrati da soli (figg. 1 e 2) si osserva che $\kappa \cdot \frac{\eta}{\eta'_{180}}$ decresce normalmente con l'aumentare della temperatura per le soluzioni di nitrato ammonico alle concentrazioni indicate per ogni curva, mentre aumenta per le soluzioni di nitrato di piombo, rendendo evidente un fenomeno di dissociazione che diviene tanto più marcato quanto più la temperatura si innalza.

Per le soluzioni miste (figg. 3 e 4) si nota una regolare diminuzione di $\kappa \cdot \frac{\eta}{\eta'_{180}}$ per le alte concentrazioni di nitrato ammonico. Alle basse concentrazioni la curva: $\kappa \cdot \frac{\eta}{\eta'_{180}}$ — temp. presenta un flesso dopo il

(1) « Gazz. Chimica », 54, 891, 908 (1924); 56, 595 (1926).

quale il valore della conduttività corretta tende a risalire. Basta osservare le diverse figure per rendersi ragione che l'anomalia riscontrata è specifica delle soluzioni miste e non risulta dalla sovrapposizione dei due effetti dovuti alle soluzioni semplici.

Questo comportamento può essere messo in relazione con l'esistenza di un complesso la cui stabilità all'azione dissociante della temperatura aumenta con l'aumentare della concentrazione del nitrato ammonico.

Come verrà riferito altrove, i risultati di questa ricerca si prestano ad altre considerazioni inerenti alla natura ed alla composizione del complesso. Ho infatti potuto accertare la probabile esistenza di complessi tipo $Pb(NO_3)_4$.

Chimica. — *Analisi chimica di una Mummia: contributo agli studi sulla mummificazione.* Nota di A. TULLI, presentata⁽¹⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

I risultati ottenuti dai nostri studi sulla Mummia di

Htp . hr . t-⁶

del Museo Egizio Vaticano⁽²⁾ ci hanno confortato ad estendere le indagini scientifiche per portare qualche altro contributo alla Mummiologia.

Abbiamo sottoposto così ad una rigorosa analisi, affidata al prof. Berlingozzi dell'Istituto Chimico della R. Università di Roma, la Mummia N. 2 del medesimo Museo⁽³⁾.

Il cadavere è virile; ma ciò è in singolare contrasto con quanto dicono le iscrizioni geroglifiche del cofano osiriano, entro il quale giace la Mummia. Esse ci fanno sapere, in modo *filologicamente* sicuro, che ivi è racchiusa la salma di una nobile signora:

« nbw . t prj t'-rsj . t-jrj-nfr . t m'. t hrw »

cioè: « la Signora di Casa (Matrona) T'-rsj . t-jrj-nfr . t giustificata ».

(1) Nella seduta del 3 febbraio 1929.

(2) Cfr. « Atti della P. Accademia delle Scienze Nuovi Lincei », anno LXXXI, sessione III del 19 febbraio 1928; sessione IV del 18 marzo del medesimo anno; sessione VII del 17 giugno 1928.

(3) MARUCCHI, *Il Museo Egizio Vaticano*, pp. 145 e sgg., Roma 1899; *Guide du Musée Égyptien du Vatican*, pp. 71 e sg., Rome 1927.

(4) BOLDRINI, *Sull'attività enzimatica dei muscoli di alcune mummie* in Rivista « Zacchia » di studi medico-legali, vol. I, n. 1, maggio-giugno 1921.

Ad ogni modo, mentre assolviamo il dovere di rendere grazie all'illustre prof. comm. Nicola Parravano, Direttore dell'Istituto Chimico della R. Università di Roma, per il mecenatismo dato ai nostri studi egittologici, diremo che sulla Mummia sono state eseguite prove preliminari e speciali, come l'estrazione con acqua, il trattamento con acido cloridrico, e così via.

È stata dimostrata così l'*assenza del natron*, contrariamente alla opinione oggi prevalente della salagione delle Mummie.

Sono state eseguite poi anche le prove di solubilità con diversi solventi usando etere di petrolio in ebollizione, e, separatamente, adoperando prima alcool caldo, quindi acqua, pure calda, sui residui delle estrazioni.

Sulla base della cospicua solubilità in tutti i solventi si è indotti ad accettare, come più verosimile, l'impiego di *balsami naturali* nel processo mummificatorio; e, d'altra parte, si può escludere la presenza del bitume, come l'apparenza suggeriva, e suggerirebbe tuttavia, perchè l'estratto con etere di petrolio era quasi incolore.

La Mummia, conseguentemente, non subì nè un processo bituminatorio nè uno natronatorio, ma un processo balsamatorio, di cui l'elemento più probabile e più importante dovette essere la stiracina.

Siamo poi grati al prof. dott. Sergio Berlingozzi del R. Istituto Chimico, ora nella R. Università di Napoli, per la sua cooperazione accurata e disinteressata; egli con pazienza pari alla sua scienza ha saputo obbligare alla scomposizione chimica sostanze, che, per la loro alta antichità, opponevano una resistenza veramente refrattaria.

SESSUALISMO DELLA MUMMIA.

Prima di esporre, però, il procedimento tenuto, è bene intendersi sull'accennato contrasto sessuale.

Giovanni Marro ha fatto studi assai interessanti sulla costituzione fisica degli Egiziani antichi ⁽¹⁾ punto limitandosi all'elemento antropologico diretto, l'osteologico, ma estendendoli ai prodotti della statuaria del R. Museo di Antichità della città medesima; le sue ricerche, tuttavia, intese anche come contributo alla psicologia dei popoli ⁽²⁾, non sembra che si possano appli-

(1) MARRO: 1. *Osservazioni Morfologiche ed Osteometriche sullo Scheletro degli Egiziani Antichi* in « Riv. di Antropologia di Roma », vol. XVIII; 2. *Sulla così detta Perforazione Olecranica e sul significato anatomico ed antropologico della medesima*, ivi, vol. XVIII; 3. *Sul significato delle varie forme dell'Apertura Pyriformis*, ivi, vol. XIX; 4. *Il profilo della Faccia negli Egiziani Antichi* in « Annali di Freniatria e Scienze Affini », vol. XXIII; 5. *Nuovo metodo per lo studio del Profilo della Faccia e sua applicazione ad una centuria di crani egiziani antichi* in « Archivio di Antropologia Criminale, ecc. », Torino, vol. XXXVII.

(2) MARRO, *Sulla psicologia dell'antico Egitto* in « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. XXV, 1920: dello stesso *Il corpo e la statua del defunto nell'Egitto antico. Contributo alla psicologia dei popoli* in « Archiv. It. di Psicologia », vol. V, 1927.

care al caso nostro, perchè esse si riferiscono soprattutto alle indagini osteologiche, che, per le stesse condizioni somatiche della Mummia, sarebbero qui impossibili.

Le nostre osservazioni, d'altra parte, hanno potuto assodare che il cadavere è veramente virile; e, naturalmente, non staremo qui a rendere conto particolareggiato di esse, bastandoci di rilevare che abbiamo constatato con sicurezza *la perfetta assenza* delle mammelle galattiche.

Non discuteremo, per ora, se queste spoglie mortali appartenevano veramente ad un egiziano di puro tipo, perchè è ben questa una questione che potrà sollevarsi in seguito e che stiamo esaminando sulla scorta di altri studi del Direttore dell'Istituto di Antropologia della R. Università di Torino.

Ad ogni modo, la Mummia è saitica ⁽¹⁾.

PROVE PRELIMINARI.

Esse sono state le seguenti:

1° *Estrazione con acqua*: l'estratto acquoso ha avuto reazione praticamente neutra.

2° *Trattamento con acido cloridrico*: non si è avvertito svolgimento gassoso alcuno che denoti anidride carbonica.

3° *Ricerca dell'arsenico*: si è avuto esito negativo.

4° *Ricerca dei metalli pesanti*: sulla base dell'esperimento si può dire che non si può ammettere la presenza di essi altro che in minime tracce; ma questo medesimo fatto dice in buoni termini correlativi che tali tracce non possono essere in relazione col materiale adoperato per la mummificazione.

Conclusione di queste prove:

assenza del natron, dell'arsenico e dei metalli pesanti.

Ora, chi ben guardi, è ben questa una conclusione che ha la sua importanza, non solo perchè ci dà un referto chimico nuovo, in quanto l'analisi, di cui è risultato, non era stata mai precedentemente eseguita sulla nostra Mummia, ma anche perchè ci presenta la prova del processo *anatronatorio* di un altro cadavere.

Come si sa, oggi delle varie ipotesi fatte per spiegare il processo della mummificazione degli Egiziani antichi sembra avvalorarsi quella della salagione, perchè, è stato detto, la secchezza del clima concorreva alla conservazione dei cadaveri.

(1) Per la cronologia, tra gli altri, si possono consultare: LIEBLEIN, *Recherches sur la chronologie égyptienne*, Christianie, 1873; WALLIS BUDGE, *A History of Egypt*, London, 1902; BISSING, *Geschichte Aegyptens im Umriss*, Berlin, 1904; MEYER, *Aegyptische Chronologie*, Berlin, 1904; BREASTED, *A History of Egypt*, New-York, 1905; PETRIE, *A History of Egypt*, London, 1905.

Sulle Mummie in questi ultimi tempi sono stati fatti studi interessanti ed originali anche su problemi specifici come ci insegnano le indagini del SEHRT⁽¹⁾ sulla attività glicolitica dei muscoli, del RUFFER⁽²⁾ sulle lesioni delle arterie, del LUCAS⁽³⁾ sul materiale di preservazione; e simili indagini sono state estese non solo a muscoli di mummia peruviana e di Ferentillo, come ha fatto il BOLDRINI⁽⁴⁾, ma portate anche su preparazioni recenti con l'azione diretta del bromogassoso, come ha potuto fare il Lo MONACO⁽⁵⁾.

Quelli, però, che si sono maggiormente distinti, per abbondanza di materiale osservato, nelle indagini mummiologiche sono stati appunto ELLIOT SMITH⁽⁶⁾ e lo SCHMIDT⁽⁷⁾.

Lo SCHMIDT, facendo le sue osservazioni sopra un numero considerevole di Mummie nel Museo del Cairo, poté distinguere le fasi seguenti nel processo mummicatorio⁽⁸⁾:

- a) rimozione dei visceri;
- b) bagno di cloruro di sodio;
- c) essiccamento somatico aereo;
- d) avviluppamento nelle bende.

Le regioni cavarie venivano riempite di trona, che era carbonato di sodio, poi saponificato. Si comprende bene che assicuravano la mummicazione non solo l'avvolgimento nelle bende, ma anche la secchezza del clima del paese; poco, d'altra parte, contro i nemici esterni, insetti e vermi, avrebbero potuto fare il vino di palma, le droghe e i balsami, se il cadavere non fosse stato solidamente avvolto nelle numerose bende, imbevute di resina e di succo di gomma elastica.

Secondo il LUCAS⁽⁹⁾, il bagno avveniva in una soluzione di carbonato di soda, almeno in determinate contingenze.

(1) SEHRT, *Zur Fermentwirkung der Mummien muskels*, Berlin, 1904.

(2) RUFFER, *On arterial lesions found in egyptian Mummies* in «Cairo Scientif. Journal», gennaio 1910.

(3) LUCAS, *Preservative Materials used by the ancient Egyptians in Embalming* in «Survey Department Paper», n. 12, Cairo, 1911.

(4) BOLDRINI, op. cit.

(5) Lo MONACO, *Su un nuovo metodo per la conservazione delle sostanze animali e vegetali con i gas asfissianti*, «Arch. Farm. sper.», vol. XXIV, 1917.

(6) ELLIOT SMITH, *A Contribution to the Study of Mummification in Egypt* nelle «Mémoires Inst. égypt.», vol. V, 1906; *History of Mummification in Egypt* in «Proceed. R. Philosoph. Society of Glasgow», 1910; *Heart and Reins in Mummification* in «Journ Manchester Or. Soc.», 1911-12, etc.

(7) SCHMIDT, *Chemische und biologische Untersuchungen von ägyptischem Mummie-material, nebst Betrachtungen über das Einbalsamierungsverfahren der alten Ägypter* in «Zeitschrift für allgemeine Physiologie», Bd. VII, 1907, pp. 369-392.

(8) SCHMIDT, *Chemische und biologische Untersuchungen*, etc., op. cit.

(9) LUCAS, *The use of Natron by the Ancient Egyptians in Mummification* in «The Journal of Egyptian Archaeology», 1914, p. 119.

Le nostre ricerche, però, hanno potuto costatare che non solo la Mummia presente, ma anche quella ⁽¹⁾ di *Hoteb-hir-ies* subirono un vero processo balsamatorio, come balsamica fu la polvere interfasciale di quest'ultima ⁽²⁾.

PROVE DI SOLUBILITÀ CON VARI SOLVENTI.

Esse sono state effettuate usando etere di petrolio in ebollizione; e a parte adoperando prima alcool caldo, poi, nei residui delle estrazioni, acqua pure calda.

La solubilità si presenta come segue:

a) Etere di petrolio	38,1 %
b) Alcool	19,3 %
c) Acqua (con riferimento alla sostanza principale)	29,8 %

La cospicua solubilità è in accordo con il fatto che il materiale è ricco di sostanze organiche tuttora presenti e provenienti dalla scomposizione degli organi; ciò, anzi, rende difficile o, meglio, impossibile fare induzioni sulla natura del materiale di mummificazione impiegato. Si è però indotti ad accettare *come più verosimile l'impiego di balsami naturali nelle operazioni.*

Inoltre, si può escludere la presenza del bitume, perchè l'estratto con etere di petrolio era quasi incolore.

Questa conclusione era opportuna sia perchè il cadavere desta l'idea della bituminazione, sia perchè quest'ultima non era ignota agli antichi Egiziani ⁽³⁾.

Chimica. — *Ricerche sugli spinelli.* Nota di L. PASSERINI, presentata dal Socio G. BRUNI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Il supposto sesquisolfuro di molibdeno.* Nota di V. MONTORO, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) TULLI, Sessione IV del 18-marzo 1928 in «Atti P. Acc. delle Scienze».

(2) TULLI, Sess. III del 19 febbraio 1928.

(3) LUCAS, *The use of Bitumen by the Ancient Egyptians in Mummification* in «The Journal of Egyptian Archaeology», 1914, p. 241.

Chimica. — *Il sistema* $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 - \text{HNO}_3 - \text{H}_2\text{O}$ *a* 25°. Nota di G. MALQUORI, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica Agraria. — *Ricerche sullo scambio dell'acido fosforico del terreno con acido arsenico.* Nota di C. ANTONIANI e G. FONIO, presentata dal Socio A. MENOZZI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Botanica. — *Sull'assorbimento del biossido di carbonio per opera delle radici e sulla sua utilizzazione nella fotosintesi clorofilliana.* Nota di MARIA BERGAMASCHI, ⁽¹⁾ presentata dal Socio B. LONGO.

Nel 1917 il Pollacci in un suo lavoro *Sul carbonio delle piante verdi* ⁽²⁾ aveva trattato dell'assorbimento del biossido di carbonio per mezzo delle radici e della sua utilizzazione nella fotosintesi clorofilliana dando uno studio critico della letteratura che risale al 1804 colle esperienze del De Saussure ⁽³⁾ ed inoltre esponendo i risultati di ricerche sue originali in tale campo.

L'Autore era giunto alla conclusione che le piante possono assimilare almeno in parte il CO_2 assorbito per mezzo delle radici.

Aveva, il Pollacci, fatto vegetare piante verdi in terreno ricco di sostanze umiche e trovato che queste piante venivano, utilizzando il CO_2 ceduto dal terreno, a formare amido anche quando l'atmosfera in cui si trovavano fosse privata del biossido stesso.

Constatò l'aumento nel peso secco di piantine nate da semi di peso noto e vegetanti con le radici in acqua chimicamente pura avente in soluzione CO_2 e con gli organi vegetativi in atmosfera che ne fosse priva ed inoltre la formazione evidente al microscopio di granuli di amido in foglie di piante tenute lungo tempo al buio e poi in ambiente privo di CO_2 di modo che non potessero che usufruire del biossido sciolto nella soluzione nutritiva in cui le radici si trovavano.

Senonchè la conclusione alla quale giunse il Pollacci benchè basata come si vede su dati sperimentali ben da pochi è stata accettata. Si ritiene

(1) Nella seduta del 3 febbraio 1929.

(2) GINO POLLACCI, *Sul carbonio delle Piante verdi.* « Atti dell'Istituto Botanico dell'Università di Pavia », Ser. II, vol. XVII.

(3) DE SAUSSURE TH., *Recherches chimiques sur la végétation.* Paris, 1804.

(da M. Raoul Cerighelli⁽¹⁾ e Sir Jagadis Chunder Bose⁽²⁾) che la funzione dal Pollacci attribuita al CO_2 assorbito per mezzo delle radici venga assunta nella pianta dal biossido di carbonio formatosi durante la respirazione, non emesso completamente, ma trattenuto nelle parti superiori della pianta. Ravenna⁽³⁾ pure non ammette la possibilità di questo assorbimento.

Numerosi lavori riguardanti la concimazione delle piante con CO_2 (Fischer, Lemmermann, Bornemann, Gerlach, Riedel, ecc.) si riferiscono non già alla possibilità di assorbimento del biossido di carbonio per mezzo delle radici ma per mezzo delle foglie.

Solo Banol ricordando come già Stoklasa (1922) e Mack (1922) abbiano accennato a fatti interessanti l'argomento, fa rilevare come la conclusione alla quale giunse il Pollacci possa acquistare un interesse oltreché scientifico anche pratico qualora si pensi che le piante sottoposte ai processi di concimazione vadano debitrice anche all'assorbimento di CO_2 per mezzo delle radici, del loro grande sviluppo in terreno ricchi di humus.

Interessante quindi sarebbe stato il riprendere l'argomento; fu questo appunto lo scopo delle mie ricerche, eseguite sotto la guida del prof. Pollacci, iniziate da più di un anno e che espongono ora brevemente, per prenderne data, mentre la Memoria dettagliata con figure e tavole verrà presto pubblicata negli Atti dell'Istituto Botanico di Pavia.

Le mie esperienze furono rivolte le une alla ricerca microscopica dell'amido, le altre alla determinazione quantitativa del carbonio in piante aventi a loro disposizione solo il CO_2 assorbito per mezzo delle radici dalla soluzione nutritizia o dal terreno in cui le radici stesse si trovavano.

Per la *ricerca microscopica* furono usati i tre tipi di esperienza seguenti:

1° Piante in buona condizione di sviluppo vennero tolte dal terreno in cui vivevano, messe in vasi contenenti terra comune, indi private delle loro foglie. Dopo alcuni giorni di permanenza all'aria ed alla luce le piante venivano sottoposte ad esperienza in modo che la parte aerea (le nuove foglie che si sarebbero formate) introdotta in una campana di vetro trasparente a perfetta tenuta d'aria e sotto la quale si erano posti dei recipienti con soluzione al 30 % di potassa, visse in ambiente privo di CO_2 mentre le radici, essendo stato il fusto fatto passare attraverso un foro del tavolo (chiuso poi perfettamente con paraffina), si trovavano a contatto con l'aria atmosferica. Nella campana non poteva entrare che aria (costretta prima ad attraversare vasi di assorbimento a potassa solida) completamente priva di biossido di carbonio. Le radici invece venivano abbondantemente inaffiate con acqua ricca di CO_2 . Posta la campana in piena luce sino a che le

(1) RAOUL CERIGHELLI, *Sur les échanges gazeux de la racine avec l'atmosphère*. « Comptes Rendus des Seances de l'Académie des Sciences » n. 13, 1920.

(2) SIR JAGADIS CHUNDER BOSE, *La physiologie de la photosynthese*. Editeurs Gauthier Villars, 1927.

(3) CIRO RAVENNA, *Chimica vegetale*, 1925.

piante avessero ripreso a vegetare, delle nuove foglie formatesi venivano poi osservate al microscopio sezioni trasversali e tangenziali trattate con tintura iodo-iodurata.

2° Posi piante vegetanti in vasi contenenti terra comune, in camera oscura sino a che constatai dall'osservazione microscopica di sezioni di foglie trattate con tintura iodo-iodurata che tutto l'amido era scomparso.

Sempre agendo all'oscuro introdussi alcune di queste foglie in provette di vetro trasparente, nell'interno delle quali collocai frammenti di potassa in piccole provettine. Chiusi poi perfettamente con paraffina e dopo aver provocato il vuoto immisi una nuova corrente di aria priva di CO_2 . Le radici furono infiatte abbondantemente con acqua ricca di CO_2 e le piante poste in piena luce. Esaminai sezioni trasversali e tangenziali di foglie, viste sia in atmosfera priva di CO_2 , sia in atmosfera normale.

3° Piante già in precedenza sviluppate in terra comune, poste prima in bocce Woulf contenenti la seguente soluzione nutritizia:

nitrato di calcio	gr.	1.00
cloruro di potassio	«	0.25
cloruro di sodio	«	0.02
solfato di magnesio	«	0.25
fosfato di potassio	«	0.50
fosfato di ferro	«	0.10
silicato di calcio	«	0.25
acqua	«	1000.00

arricchita al momento opportuno di CO_2 , furono collocate in camera oscura fino a che tutto l'amido presente nei tessuti delle loro foglie fosse scomparso e poi poste sotto campane di vetro in modo che solo la parte vegetativa aerea si trovasse in ambiente privo di CO_2 (la campana come al solito era a perfetta tenuta d'aria, si era fatto all'inizio il vuoto e immesso nuova corrente d'aria costretta prima ad attraversare vasi d'assorbimento a potassa. Sotto la campana furono collocati recipienti con soluzione di potassa).

Le radici invece avevano a loro disposizione aria normale comunicando la boccia Woulf con l'esterno per mezzo di tubo di gomma. Dopo parecchio tempo di permanenza in piena luce le piante venivano tolte e di esse si esaminavano sezioni trasversali e tangenziali (trattate con tintura iodo-iodurata) di foglie preesistenti e di foglie di nuova formazione.

Per la *determinazione quantitativa del carbonio* usai invece il seguente metodo:

Scelsi semi di una stessa pannocchia di Zea Mays a peso sensibilmente uguale. Alcuni sottoposi alla determinazione quantitativa del carbonio, altri posi a germinare al buio in germinatoio ad acqua distillata oppure in capsule

Passerini. Per la determinazione quantitativa del carbonio usai il metodo della combustione in piccola navicella modificato però convenientemente per poter trattare i carbonati delle ceneri rimaste alla fine della combustione con acido solforico e determinare in tal modo anche la quantità di carbonio in esse contenuto. Il dispositivo, del quale dirò dettagliatamente e darò lo schema nella Memoria, consiste in un tubicino di vetro con relativo imbuto che introdotto, attraverso il tappo di gomma, nel tubo a combustione, permette di far gocciolare l'acido solforico nella navicella senza il contatto coll'aria atmosferica.

Delle piantine nate (A) introdussi il fusto nel collo di boccie Woulf contenenti la soluzione nutritizia seguente:

nitrato di calcio	gr.	1.00
cloruro di potassio	«	0.25
fosfato monopotassico	«	0.25
solfato di magnesio	«	0.25
percloruro di ferro		tracce
acqua distillata	gr.	1000.00

in cui veniva sciolto poi a tempo opportuno del biossido di carbonio. Lasciai ancora alcuni giorni al buio indi imparaffinai il collo della bottiglia attraverso cui il fusto passava e posi poi sotto campana nel modo indicato già all'esperienza n. 3. Le piante lasciate 15-20 giorni in piena luce, esposte durante la notte e nelle giornate buie alla luce di una lampada a 1000 candele, venivano poi tolte, messe ad essicare, indi sottoposte alla determinazione quantitativa del carbonio (metodo già usato per i semi).

Analizzai pure le piantine controllo seguenti:

A': Piante cresciute con radici in soluzione ricca di CO_2 e con foglie in aria ricca di CO_2 .

A'': Piante cresciute in camera oscura.

Le piante **A'** nate da semi germinati in camera oscura, vegetarono in soluzione nutritizia già usata per le piante **A** e furono poi sottoposte alle stesse condizioni di esperienza. L'aria però entrante nella campana non fu privata di CO_2 .

Le piante **A''** nate pure da semi germinati in camera oscura, poste nella soluzione nutritizia vennero lasciate al buio, indi analizzate.

RISULTATI OTTENUTI:

1. *Dalla ricerca microscopica* in foglie di piante vegetanti in atmosfera priva di CO_2 e con le radici in soluzione nutritizia o in terreno ricco di CO_2 :

Evidente presenza di forti ammassi di granuli d'amido negli stomi e nelle cellule endodermiche della nervatura principale della foglia. Amido pure è presente sebbene in quantità minore, nelle cellule del tessuto a pa-

lizzata e del tessuto spugnoso. *Piante usate*: *Acer pseudo platanus*, *Nerium oleander*, *Alisma plantago*, *Camellia thea*, *Tilia europaea*.

2. *Dalla determinazione quantitativa del carbonio*:

La percentuale di carbonio delle piante A è sensibilmente superiore a quella dei semi (semi 41 %, piante A 43 %). Le piante A'' hanno percentuale di carbonio inferiore a quella dei semi. Le piante A' una percentuale superiore a quella delle piante A. Nelle piante A'' vissute in camera oscura si è avuto quindi distruzione di sostanza organica formatasi poi di nuovo nelle piante A a spese esclusivamente del CO₂ assorbito per mezzo delle radici, nelle A' a spese anche del CO₂ atmosferico assimilato normalmente.

CONCLUDENDO: *Le piante assimilano almeno in parte il CO₂ assorbito per mezzo delle radici*, o più precisamente:

1. Piante vissute in ambiente privo assolutamente di CO₂ formano amido nelle loro foglie utilizzando CO₂ assorbito per mezzo delle radici dal terreno o dalla soluzione nutritizia in cui le radici stesse si trovano.

2. Piante nate da semi (a percentuale di carbonio nota) poste a vegetare in ambiente privo di CO₂ e con le radici in soluzione ricca di CO₂ hanno dimostrato di saper organizzare biossido di carbonio assorbito per mezzo delle radici dando così all'analisi una percentuale di carbonio superiore a quella dei semi.

3. È dimostrato chiaramente, dalla percentuale di carbonio in piante vissute al buio, come l'unica fonte possibile di CO₂ per le piante in condizione d'esperienza debba ricercarsi nel biossido di cui è ricca la soluzione e che le piante devono inevitabilmente aver assorbito per mezzo delle radici.

4. Si dimostra in tal modo che l'obiezione secondo la quale la sostanza organica si formerebbe totalmente in questo caso a spese del CO₂ derivante dalla respirazione, non ha ragione di esistere.

5. Non ci si deve attendere da queste piante viventi in condizioni tanto anormali una vegetazione quale si potrebbe avere all'aria libera; la pianta ha anche bisogno in seguito del CO₂ assimilato normalmente; pur tuttavia è chiara l'importanza che questa constatazione ha nel campo fisiologico, e nella pratica culturale, poichè nella concimazione l'acido carbonico potrà essere offerto oltre che alle foglie che l'assimileranno normalmente, anche alle radici che l'assorbiranno.

6. Interessanti e necessarie saranno le nuove ricerche sul quoziente assimilatorio $\frac{O}{CO_2}$, poichè non essendosi sino ad oggi nelle determinazioni tenuto calcolo del CO₂ assorbito per mezzo delle radici, non sono più da ritenersi esatti i lavori sinora pubblicati sull'argomento.

Fisiologia. — *Ricerche sul meccanismo di formazione della linfa.*
Nota ⁽¹⁾ di G. QUAGLIARIELLO, presentata dal Socio F. BOTTAZZI ⁽²⁾.

È noto come sul meccanismo di formazione della linfa esistano due teorie: una teoria chimico-fisica e una teoria secretoria.

Secondo la prima teoria, la linfa è un ultrafiltrato imperfetto ⁽³⁾ del plasma del sangue, modificato nella sua composizione chimica e chimico-fisica per i processi di osmosi e di diffusione che si svolgono tra l'ultrafiltrato e l'ultrafiltrante attraverso la parete dei capillari.

Secondo l'altra teoria, fattori determinanti nella formazione della linfa sono, non solamente l'ultrafiltrazione, l'osmosi e la diffusione, ma anche processi secretori specifici svolgentisi nella parete dei capillari.

Questa attività secretrice dell'endotelio dei capillari sanguigni, che non trova alcun sostegno nella osservazione istologica, fu messa in campo per la difficoltà incontrata a spiegare, con processi puramente fisici quali quelli della filtrazione, della osmosi e della diffusione, alcuni fenomeni inerenti alla formazione della linfa. Ma dopo che fu presa in giusta considerazione il fatto che detti fenomeni si compiono attraverso una membrana costituita da cellule viventi e da sostanza cementante di natura colloidale, per cui la sua permeabilità può variare da un momento all'altro per l'influenza dei più diversi agenti chimici o fisici, l'invocata attività secretrice non parve più, almeno alla maggioranza degli Autori, strettamente necessaria.

Se non che le indagini che venivano intanto compendosi sulla precisa composizione chimica della linfa e sulle sue proprietà chimico-fisiche in confronto con quelle del plasma del sangue, misero in rilievo differenze che non parvero altrimenti spiegabili se non ricorrendo ancora a un intervento attivo delle cellule dell'endotelio; onde la teoria secretiva prese nuovo vigore, ed ha ancora oggi sostenitori.

Le differenze chimiche e chimico-fisiche più importanti fra plasma e linfa, che apparvero inconciliabili con la teoria chimico-fisica, sono le seguenti:

a) la linfa ha un contenuto in cloro maggiore del plasma ⁽⁴⁾;

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica biologica della R. Università di Napoli.

(2) Presentata nella seduta del 2 dicembre 1928.

(3) Coll'aggettivo «imperfetto» voglio indicare, che le membrana dell'ultrafiltro (la parete dei capillari) lascia passare, non solo i cristalloidi, ma anche una parte dei colloidali: una parte delle albumine e una parte anche minore di globuline.

(4) CARLSON, GREER e LUCKHARDT, «Ann. Journ. of Physiol.», 1908, 22, 91.

b) la linfa presenta un abbassamento del punto di congelamento e una conduttività elettrica maggiori che il plasma ⁽¹⁾.

La maggiore conduttività elettrica della linfa ha, veramente, un'importanza affatto trascurabile, potendo dipendere dal diverso contenuto in proteine: queste, ostacolando la mobilità degli ioni, abbassano la conduttività elettrica tanto più quanto maggiore è la loro concentrazione, e quindi nel plasma più che nella linfa. Il maggior abbassamento del punto di congelamento è considerato da Carlson come una conseguenza della maggiore concentrazione del cloro, la quale potrebbe spiegare anche la maggiore conduttività elettrica; ma questa spiegazione non è soddisfacente, perchè prende in considerazione soltanto i cloruri, facendo astrazione dagli altri elettroliti. Del resto, maggiore conduttività e più basso punto di congelamento potrebbero spiegarsi semplicemente pensando che la linfa, oltre che dal sangue, è formata anche dai tessuti, i quali versano in essa i prodotti del loro catabolismo, che tendono ad aumentarne la pressione osmotica, e, se pure in misura minore, la conduttività elettrica.

Ma una simile spiegazione non vale certamente pel cloro: se questo provenisse dai tessuti, si avrebbe una corrente continua di Cl dai tessuti verso il sangue, il che non è neppure lontanamente concepibile. Ma non perciò è necessario ammettere una secrezione di cloruri da parte dell'endotelio dei capillari nella direzione dal sangue verso gli spazi interstiziali, tanto più che non si comprenderebbe lo scopo di questo lavoro secretivo, dal momento che l'eccesso di cloro si ritrova nella linfa del dotto toracico, nel punto cioè in cui essa ritorna al sangue.

Già da parecchio tempo ⁽²⁾ ho espresso l'opinione, che la differenza della concentrazione dei cloroioni nella linfa e nel plasma sia semplicemente un effetto dello speciale equilibrio di membrana che si stabilisce o tende a stabilirsi fra plasma e linfa. Dico «speciale equilibrio», non tanto perchè i colloidi si trovano, sebbene a differente concentrazione, da tutti e due i lati della membrana (caso considerato in modo speciale da De Caro ⁽³⁾), ma perchè esso ha questo di singolare, che uno dei liquidi, rinnovandosi continuamente e con grande velocità, resta praticamente sempre lo stesso; mentre, d'altra parte, anche la linfa, sebbene con velocità incomparabilmente minore, si rinnova, onde è prevedibile che un vero stato di equilibrio non venga mai raggiunto, e si tratti piuttosto di una tendenza all'equilibrio medesimo.

Dal punto di vista teorico, poichè la linfa contiene circa la metà di sostanze colloidalì di quante ne contiene il plasma, e poichè la membrana che separa i due liquidi, se pure non affatto impermeabile ai colloidi, lo è

(1) «*Ergebn. d. Physiol.*», 1926, 25, pp. 574 e segg.

(2) QUAGLIARIELLO, Traduzione italiana di TIGERSTEDT, *Handb. d. Physiol.*, Torino, 1926, vol. I, p. 552.

(3) DE CARO, «*Arch. di Sc. Biol.*», 1925, 7, 128.

certamente meno che agli elettroliti, è prevedibile che la concentrazione di questi debba essere diversa ai due lati della membrana. E poichè i colloidi, nel caso speciale le proteine del plasma, si trovano nei due liquidi al lato alcalino del loro punto isoelettrico, cioè allo stato di anioni, è da attendersi che la concentrazione degli anioni debba essere maggiore nella linfa, quella dei cationi maggiore nel plasma. Dunque il comportamento dei cloroioni constatato da Carlson rientra perfettamente nel quadro di queste previsioni teoriche; e lo stesso va detto del comportamento dei HCO_3^- (Meyer-Bisch ⁽¹⁾) che sono più concentrati nella linfa che nel plasma; mentre gl'idrogenioni (Quagliarello ⁽²⁾) sempre conforme alla teoria, sono più concentrati nel plasma (pH = 7,6) che nella linfa (pH = 7,8). L'indagine potrebbe essere estesa anche ad altri ioni; ma poichè quelli sopra nominati sono i più precisamente determinabili, e gli unici forse, insieme coi sodioioni, interamente liberi nel plasma, i dati esistenti sono sufficienti per far ammettere che tra plasma e linfa debba sussistere un equilibrio di membrana.

Sempre conforme all'equilibrio di membrana, la concentrazione complessiva degli elettroliti (Hamburger ⁽³⁾) è maggiore nella linfa che nel plasma, il che contribuisce, sebbene in grado molto minore che la differenza di concentrazione delle proteine, a conferire alla linfa una maggiore conduttività elettrica.

Circa la pressione osmotica, la maggiore concentrazione degli elettroliti nella linfa dovrebbe essere ultracompensata dalla maggiore concentrazione delle proteine nel plasma, così che, teoricamente, la pressione osmotica di questo dovrebbe essere, sia pure in misura minima, maggiore di quella della linfa. Ora, per quanto è a mia conoscenza, non esistono misure dirette di pressione osmotica che contraddicano a questa previsione. Esistono, bensì, misure di abbassamento del punto di congelamento che dimostrano che la linfa ha un punto di congelamento di circa il 4% (0,02° C) più basso del plasma (Bottazzi ⁽⁴⁾). Ma non è prudente, soprattutto quando si tratta di differenze di quest'ordine di grandezza, considerare senz'altro gli abbassamenti del punto di congelamento proporzionali alla pressione osmotica. Overton ⁽⁵⁾ ha dimostrato, che liquidi aventi la stessa pressione osmotica, hanno differente tensione di vapore e diverso punto di congelamento se il loro peso specifico è diverso: e precisamente la soluzione di più basso peso specifico ha più alta tensione di vapore e più basso punto di congelamento. Lo stesso A. calcola che per ciò solo (ammessa la precisa eguaglianza della pressione osmotica) la linfa (p. s. 1,01) debba

(1) MEYER-BISCH u. WOHLBERG, « *Ergeb. d. Physiol.* », 1926, 25, 574.

(2) QUAGLIARELLO, questi « *Rendiconti* » (serie 5), 1911, 20 (2°), 273.

(3) HAMBURGER, « *Zeitschr. f. Biol.* », 1893, 30, 143.

(4) BOTTAZZI, « *Ergebn. d. Physiol.* », 1908, 7, 161.

(5) OVERTON, in NAGEL, *Handb. d. Physiol.*, Braunschweig, 1907, vol. 2°, nota a p. 775.

abbassare il punto di congelamento dell'acqua del 5 % più che il plasma (p. s. 1,03). La differenza sperimentalmente constatata fra plasma e linfa è del 4 %, dunque minore di quella prevista da Overton, il che consente di ammettere, almeno sino a prova contraria, che effettivamente la pressione osmotica del plasma è alquanto maggiore di quella della linfa, come si richiede dall'equilibrio di membrana.

È dunque possibile spiegare le differenze nella costituzione chimica e nelle proprietà chimico-fisiche della linfa e del plasma, quando si ammetta che fra i due liquidi, separati da una membrana permeabile agli elettroliti molto più che ai collodi, debba stabilirsi o tendere a stabilirsi un equilibrio di membrana.

Volendo dare una prova che nelle condizioni di formazione della linfa deve necessariamente intervenire un equilibrio di membrana, ho fatto le esperienze che sommariamente riferisco in questa nota. Con soluzioni etero-alcooliche di collodio variamente concentrate preparavo dei grossi sacchetti cilindrici della capacità di 100-150 cm³, che poi riempivo di plasma (ossalato) o di siero di sangue. L'estremità superiore aperta del sacchetto era legata a perfetta tenuta intorno a un tappo di caucciù forato. Il foro era attraversato da un robusto tubo di vetro che inferiormente non oltrepassava la superficie del tappo, mentre la porzione sporgente, che serviva anche alla fissazione del tubo, era destinata ad essere collegata con un apparecchio di pressione. Questo era costituito da due tubi comunicanti contenenti mercurio, uno aperto, l'altro terminante con un tubo a T, di cui una branca era saldata a un manometro a mercurio, l'altra serviva per il collegamento, mediante tubo di caucciù, col sacchetto di collodio,

Stabilite tutte le connessioni, immergevo il sacchetto, per tutta la sua lunghezza, in un tubo di vetro della stessa forma e avente un diametro di 1-2 mm maggiore del sacchetto. Questo era poi fissato, per mezzo di un sostegno, ad un'altezza tale che il suo fondo distasse circa 1 mm dal fondo del tubo di vetro: in questo modo tra il sacchetto di collodio e il tubo di vetro restava uno spazio della capacità totale di una diecina di cm³. Quando tutto era a posto, stabilivo nel sistema una pressione di 10-25 mm di mercurio e lasciavo ultrafiltrare per 6-12 ore. Questo tempo era sempre sufficiente per raccogliere i 7-8 cm³ di ultrafiltrato occorrenti per le analisi. Naturalmente, secondo la concentrazione della soluzione di collodio adoperata, secondo lo spessore della membrana e secondo la pressione esercitata, ottenevo un liquido affatto aproteico o più o meno ricco di proteine (sino al 55% delle proteine del liquido ultrafiltrante). Ma in ogni caso, l'ultrafiltrato, appena raggiunto il volume di circa 1 cm³, veniva a contatto con la superficie esterna del tubo di collodio, così che da quel momento l'ultrafiltrazione procedeva di pari passo con la diffusione. D'altra parte, dati i rapporti tra i volumi dell'ultrafiltrante e dell'ultrafiltrato, la concentrazione dei colloidi nell'ultrafiltrato non era cospicua, potendo al massimo raggiungere il valore del 0,5 % nel caso di un ultrafiltrato aproteico.

Nell'ultrafiltrato e nel contenuto del sacchetto di collodio, alla fine dell'ultrafiltrazione, ho determinato le proteine totali, il cloro ed il sodio, e poi, in alcuni casi, il CO₂ totale e gli idrogenioni. In qualche esperimento ho determinato anche la conduttività elettrica e l'abbassamento del punto di congelamento.

Le proteine sono state determinate per differenza fra il residuo secco e le ceneri; il Cl è stato determinato col metodo di Whitehorn; il CO₂ col metodo di Van Slyke; il Na col metodo di Kramer e Gittleman; gli idrogenioni, col metodo elettrometrico; la conduttività elettrica, col metodo di Kohlrausch; l'abbassamento del punto di congelamento, coll'apparecchio di Bekmann con termometro diviso a $\frac{1}{100}$ di grado.

I risultati ottenuti, riferiti nella Tabella I, sono in perfetto accordo con le previsioni.

TABELLA I

N.	Proteine, g %			Cl, mg %			Na, mg %			CO ₂ , vol. %		Abbassamento punto con- gelamento		Conducibilità elettrica specificità X 10 ⁴ · T 25°				[H'] X 10 ⁸	
	ultrafiltrato		rapporto (1)	ultrafiltrato	plasma	rapporto	ultrafiltrato	plasma	rapporto	ultrafiltrato	plasma	ultrafiltrato	plasma	ultrafiltrato	plasma	ultrafiltrato	plasma	ultrafiltrato	plasma
1	0	7,40	—	415	373	111	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	0,46	7,20	6,4	590	335	110	287	304	94	—	—	0°,593	0°,551	—	—	—	—	0,78	0,81
3	0,30	6,98	7,2	388	349	111	278	320	87	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	0,63	7,63	8,2	410	372	110	305	288	106	46	45	—	—	142	120	144	143	—	—
5	1,30	6,47	20	376	361	104	286	304	94	46	44	—	—	—	—	—	—	—	—
6	2,51	7,48	33	408	381	104	300	324	92	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	3,43	6,47	48	379	363	104	314	310	101	45	42	—	—	165	149	178	173	—	—
8	3,73	6,78	53	402	381	103	306	329	93	—	—	—	—	130	120	142	140	—	—

(1) È il quoziente, tra la concentrazione della sostanza considerata nell'ultrafiltrato e nel plasma, moltiplicato per 100.

Per ciò che riguarda le proprietà chimico-fisiche, l'abbassamento del punto di congelamento dell'ultrafiltrato ($0,595^{\circ}$) è dell'8% maggiore di quello del plasma ($0,551^{\circ}$). Se si tien conto che nell'esperienza in cui quel valore fu determinato solo una minima parte delle proteine era passata attraverso il collodio, la differenza di peso specifico fra i due liquidi è più che sufficiente a spiegare la differenza nei punti di congelamento.

Per la conduttività elettrica, si nota che essa è nell'ultrafiltrato notevolmente più alta che nel plasma; ma se i valori trovati sono corretti dall'errore dovuto alle proteine (applicando la formula di Bugarszky e Tangl), le differenze si riducono nei limiti dell'errore sperimentale, o, se mai, resta un piccolo vantaggio a favore dell'ultrafiltrato, come è appunto richiesto dall'equilibrio di membrana.

Anche il comportamento degli elettroliti conferma le previsioni: pel sodio, su sette esperienze, in due casi ho trovato un aumento di questo elemento nell'ultrafiltrato, ma si tratta di una piccola differenza che non esito ad attribuire ad errore sperimentale. Negli altri cinque casi, la diminuzione è netta e cospicua. L'unica determinazione di H' mostra chiaramente che la concentrazione di questi ioni diminuisce nell'ultrafiltrato. (I valori trovati sono per altro bassi tanto nel plasma che nell'ultrafiltrato, il che dipende dal fatto che molto acido carbonico va perduto durante l'ultrafiltrazione). Regolare appare anche il comportamento degli anioni (HCO_3' e Cl'), che sono più concentrati nell'ultrafiltrato. Interessante è che l'aumento di concentrazione dei cloroioni nell'ultrafiltrato e, *grosso modo*, tanto maggiore quanto maggiore è la differenza di concentrazione dei colloidali ai due lati della membrana. L'accordo è più che soddisfacente, se si pensa che nelle mie esperienze (come del resto accade quando da un animale si prelevano campioni di sangue e di linfa) la ultrafiltrazione era interrotta contemporaneamente alla diffusione, vale a dire in un momento in cui l'equilibrio di diffusione non era raggiunto, e che, inoltre, da tale equilibrio si era tanto più lontani quanto meno la membrana dializzante era permeabile.

Ma che la ripartizione fra ioni elettronegativi ed elettropositivi avvenga secondo le leggi dell'equilibrio di membrana, è dimostrato dalla Tabella II, in cui ho calcolato il coefficiente di ripartizione fra plasma e ultrafiltrato, dei cloroioni da una parte, dei sodioioni e degli idrogenioni dall'altra, ottenendo valori che, nei limiti dell'errore sperimentale, possono ritenersi abbastanza soddisfacenti.

I risultati dei miei esperimenti mi pare dimostrino, dunque, chiaramente, che tra plasma ultrafiltrante e ultrafiltrato, quando vengano e restino a contatto tra di loro attraverso la stessa membrana ultrafiltrante (e queste mi pare siano le condizioni tra sangue e linfa), si stabilisce — o tende a stabilirsi — un equilibrio di membrana che porta a una distribuzione degl'ioni analoga a quella constatata fra sangue e linfa.

TABELLA II

N. esp.	Cl ⁻ ultrafiltrato	H ⁺ plasma	Na ⁺ plasma
	Cl ⁻ plasma	H ⁺ ultrafiltrato	Na ⁺ ultrafiltrato
1	1,1	1,5	—
2	1,1	—	1,06
3	1,1	—	1,1
4	1,1	—	0,94
5	1,04	—	1,06
6	1,07	—	1,08
7	1,04	—	0,98
8	1,05	—	1,07

Non credo, per altro, che tutte le differenze esistenti nella costituzione chimica del sangue e della linfa debbano essere esclusivamente attribuite ad un equilibrio chimico-fisico. Sangue e linfa non rappresentano un sistema semplice come il modello sul quale io ho sperimentato: basta considerare che la linfa, oltre che dal sangue, è formata anche dai tessuti e, che questi possono sottrarre alla linfa un elemento a preferenza di un altro, per comprendere come sarebbe assurdo pretendere di verificare in ogni caso e quantitativamente le leggi dell'equilibrio di membrana. Ma certo è che da tale equilibrio non possiamo astrarre, se vogliamo comprendere la composizione chimica della linfa come di tutti i liquidi interni dell'organismo.

E pur riconoscendo, che l'esistenza di una distribuzione degli elettroliti conforme alle leggi di tale equilibrio non sia sufficiente ad escludere un processo secretivo quando, accanto a differenze negli altri costituenti chimici, esistano disposizioni strutturali che facciano seriamente pensare ad un'attività secretrice, credo che nel caso della formazione della linfa le osservazioni istologiche e chimiche permettano di escludere in modo assoluto l'esistenza di un tale processo.

Biologia. — *Microrganismi simbiotici nell'uovo di Pieris brassicae L.* Nota di R. GRANDORI, presentata dal Socio A. MENOZZI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Carattere ureotelico del Metabolismo azotato dei cheloni e legge dell'arginasi.* Nota di A. CLEMENTI, presentata dal Socio A. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Patologia. — *I veleni emolitici e le alterazioni del fegato.* Nota di B. ALOSI, presentata dal Socio A. DIONISI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà il doloroso annunzio della morte del Socio ALDO PERRONCITO, del quale sarà tenuta una speciale commemorazione in una delle prossime sedute.

Dà anche comunicazione della grave sciagura che ha colpito il Socio CORBINO e invia a nome della Classe al Collega assente le espressioni della più viva partecipazione al Suo dolore.

Il Corrispondente STELLA pronuncia una dotta commemorazione del compianto Socio Corrispondente CLAUDIO SEGRÈ.

Il Corrispondente GUIDI come presidente della Società Italiana per lo studio dei materiali da costruzione, della quale il Segrè era vice-presidente, si associa alla bella commemorazione fatta dal prof. Stella.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Corrispondente VINASSA presenta in omaggio un suo volume dal titolo « Antagonismo ».

Il Socio MAJORANA, a nome del Comitato organizzatore delle onoranze a Volta, presenta in omaggio i due volumi degli « Atti del Congresso internazionale dei fisici » tenutosi a Como nel settembre del 1927, e coglie l'occasione per riferire sui lavori e i risultati del Congresso stesso. Chiude formulando l'augurio che il prof. Pontremoli, membro della spedizione polare Nobile, e che con tanto amore e tanto zelo si occupò dell'organizzazione del Congresso, sia ancora tra i vivi e possa essere ritrovato con le ricerche che si condurranno nella prossima estate.

Il Presidente ringrazia il Socio MAJORANA per l'interessante comunicazione, si associa al suo augurio per il prof. Pontremoli e mette in rilievo la parte notevolissima che il Majorana stesso ebbe nell'organizzazione del Congresso di Como.

Il Socio PINCHERLE riferisce sul Congresso internazionale dei matematici tenutosi a Bologna nell'estate scorsa.

Il Presidente ringrazia il Socio PINCHERLE per la sua comunicazione e per l'opera validissima data per la piena riuscita del Congresso che fu il primo grande Congresso veramente internazionale dopo la guerra.

Il Corrispondente BAGLIONI presenta in omaggio i due primi fascicoli del suo trattato « Elementi di Fisiologia Umana ».

Il Socio SACCO presenta in omaggio una sua breve Nota dal titolo: « La grande faglia del M. Rocchetta ».

L'Accademico Segretario prof. PARRAVANO presenta i libri giunti in dono segnalando in particolar modo il « Dizionario di merceologia e di Chimica applicata » dal prof. Vittorio Villavecchia.

PRESENTAZIONE DI NOTE

Presentano infine Note per l'inserzione nei Rendiconti i Soci AMERIO, BAGLIONI, CASTELNUOVO, CROCCO, D'ACHIARDI, FRANCHI, GARBASSO, M. GIACOMO LEVI, MARCOLONGO, PARRAVANO, PETRI, SCORZA, SEVERI.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 3 febbraio 1929

- BELLI A. — Lazzaro Spallanzani nella vita, negli studi e nel culto dei posteri. Reggio Emilia, 1929. 8°. pp. 1-65.
- Congresso Internazionale dei matematici. (Estr. dal « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana ». Anno VII, 1928). Bologna, 1928. 8°, pp. 1-27.
- DOBELL C. — A Note on the Generic Name of the Spirochaete of Syphilis (*Treponema Pallidum* Schaudin, 1905). (From « Parasitology ». Vol. XVIII, pp. 368-369). Cambridge, 1926. 8°.
- DOBELL C. — Further Observations and Experiments on the Cultivation of *Entamoeba Histolytica* from Cysts. (From « Parasitology ». Vol. XIX, pp. 287-313). Cambridge. 1927. 8°.
- DOBELL C. — Researches on the Intestinal Protozoa of Montheys and Man. (From « Parasitology » Vol. XX, pages 367-412). Cambridge, 1928. 8°.
- GILMORE C. W. — Fossil Footprints from the Fort Union (Paleocene) of Montana (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Volume 74). Washington, 1928. 8°, pp. 1-4.
- LIDLAW P. P. and DOBELL C. — Further Experiments of the Action of Ermetine in Cultures of *Entamoeba Histolytica*. (From « Parasitology ». Vol. XX, pagine 207-220). Cambridge, 1928. 8°.
- LONGO B. — Sulla fioritura di un'Araucaria Bidwilli Hook (Estr. dagli « Atti della Società Toscana di Scienze Naturali ». Processi Verbal, Vol. XXXVII). Pisa, s. d. 8°, pp. 1-3.
- Papers of the Karpow Chemical Institute. Moscow, 1927. 8°, pp. 1-229.
- RANZI S. — Correlazioni tra organi di senso e centri nervosi in via di sviluppo. (Sonderabd. aus « Wilhelm Roux'Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen ». Band. 114, pp. 364-370). Berlin, 1928. 8°.
- RUSO A. — L'azione delle sorgenti luminose su gli animali marini nei riguardi della pesca. (Estr. dagli « Atti del Convegno di Biologia marina ». 1928). Messina, 1928. 8°, pp. 1-31.
- SABBATANI L. — In memoria del prof. Luigi Sabbatani (1863-1928) per il dr. Giuseppe Mazzini. Imola, 1928. 8°, pagine 1-14.
- SACCO F. — La grande foglia del M. Rocchetta. (Estr. dal « Bollettino della Società Geologica Italiana ». Vol. XLVII, pp. 180-184). Roma, 1929. 8°.
- Seconda relazione sull'attività dell'ufficio speciale irrigazione, luglio 1925-giugno 1928. (Ente autonomo per l'acquedotto pugliese). Bari, 1928. 8°, pp. 1-201.
- SHAPLEY H. and SWOPE H. H. — Studies of the Galactic Center. I, II. (Reprint. from the « Proceedings of the National Academy of Sciences ». Vol. XIV, pagine 825-834). Washington, 1928. 8°.
- VILLAVECCHIA G. V. — Dizionario di merceologia e di chimica applicata. Edizione V. Vol. I. Milano, 1929. 8°, pagine 1-1224.
- VINASSA DE REGNY P. — L'antagonismo. Pavia, 1929. 8°, pp. 1-132.
- WENDELL BAILEY J. — A Revision of the Lizards of the Genus Ctenosaura. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 73). Washington, 1928. 8°, pp. 1-55.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 17 febbraio 1929 (anno VII)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulle matrici di Riemann.* Nota⁽¹⁾ del Cor-
risp. G. SCORZA.

Con una Memoria, presentata al « Circolo Matematico di Palermo » fin dal marzo dell'anno scorso, che presto uscirà per le stampe, lo Spampinato ha fatto vedere come lo studio sistematico dell'algebra reale connessa con una matrice di Riemann conduca spontaneamente a stabilire le belle formole che il Rosati comunicò a questa Accademia con una Nota preventiva nel 2° semestre del 1927, e che servono a calcolare gli indici di singolarità e moltiplicabilità ed il rango di una qualsiasi matrice di Riemann, in funzione di convenienti caratteri dei suoi pseudo-assi⁽²⁾.

Le dimostrazioni *in extenso* di codeste formole e di molti altri notevoli teoremi sono esposte in una Memoria del Rosati, che comparirà nel tomo LIII dei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo » e di cui già, per la gentilezza dell'Autore, ho ricevuto l'estratto.

Poichè lo Spampinato non ha avuto occasione di fermarcisi, con le brevi osservazioni che seguono, intese soprattutto a ribadire l'idea fondamentale che soggiace ad una mia Memoria del 1921⁽³⁾, e cioè che *nella*

(1) Presentata nella seduta del 3 febbraio 1929.

(2) I caratteri in discorso introdotti dallo Spampinato non coincidono con quelli del Rosati, ma si passa dagli uni agli altri mediante relazioni semplicissime.

(3) G. SCORZA, *Le algebre di ordine qualunque e le matrici di Riemann* (« Rend. del Circolo Matematico di Palermo », t. XLV, 1921). Nel testo questa Memoria sarà citata con la sigla *L*.

teoria delle algebre sia da ravvisare lo strumento più adatto per lo studio delle omografie di una matrice riemanniana, desidero far rilevare in primo luogo che, per chi faccia ricorso alla teoria delle algebre e tenga presenti i risultati già da me conseguiti sulle matrici di Riemann, il teorema fondamentale del Rosati sulle matrici pure può esser dedotto assai agevolmente da osservazioni del Rosati stesso sugli pseudo-assi di una tal matrice, e in secondo luogo che l'affermazione riguardante gli indici di quelle che egli chiama *le varietà invarianti minime* è contenuta in proposizioni già stabilite in miei lavori precedenti.

A questo proposito avverto che, ad evitare ripetizioni inutili, quando in ciò che segue un'affermazione si giustificherebbe con ragionamenti perfettamente simili ad altri già svolti nella mia Memoria or ora citata, anzi che ripetere tali ragionamenti mi contenterò di rimandare ai passi della Memoria che li contengono.

1. Se una matrice riemanniana ω è dotata di pseudo-assi isolati ed M, N sono due tali pseudo-assi fra loro complementari, ciascuno degli spazi M ed N è mutato in sè da ciascuna omografia di ω .

Allora basta guardare alla forma delle equazioni di una tale omografia rispetto ad una piramide fondamentale i cui vertici siano tutti distribuiti fra M ed N , per riconoscere che il sistema lineare delle omografie reali non nulle di ω è il sistema congiungente di quello delle omografie singolari reali non nulle di ω aventi per primo asse uno spazio contenente M e per secondo asse uno spazio contenuto in N con quello delle omografie singolari reali non nulle di ω aventi per primo asse uno spazio contenente N e per secondo asse uno spazio contenuto in M .

Ciò posto si ha subito (cfr. *L*, parte 2^a, n. 9) che:

L'algebra reale connessa con una matrice di Riemann è riducibile quando, e solo quando, la matrice possiede pseudo-assi isolati.

Da ciò e da miei teoremi precedenti (*L*, Parte 2^a, nn. 14 e 52) discende che:

L'algebra reale connessa con una matrice di Riemann è, in ogni caso, semi-sempliale. È addirittura semplice, se, e solo se, la matrice è priva di pseudo-assi isolati; primitiva, se, e solo se, la matrice è non singolare.

2. Sia G' il gruppo costituito dalle omografie reali di ω . Allora (cfr. *L*, Parte 2^a, nn. 16 e 17) si può asserire, in primo luogo, che:

Gli automoduli dell'algebra reale connessa con ω corrispondono biunivocamente agli automoduli di G' ;

e, in secondo luogo, che:

Ciascun automodulo non identico di G' è un'omografia singolare avente per primo e secondo asse due pseudo-assi complementari di ω .

Viceversa:

Se M ed N sono due pseudo-assi complementari di ω esiste uno ed un solo automodulo di G' col primo asse in M ed il secondo asse in N .

Infatti siano σ_M e σ_N due sistemi nulli reali degeneri di ω aventi per assi rispettivi M ed N. Se σ è un sistema nullo reale del fascio determinato da σ_M e σ_N , diverso da σ_M e σ_N , quindi non degenerare, rispetto a σ M ed N sono l'uno polare dell'altro e il sistema nullo indotto da σ in N coincide con quello ivi indotto da σ_M . Ma allora l'omografia di G' data dal prodotto $\sigma_M \sigma^{-1}$ ha come primo asse M, come secondo asse N e in N induce l'identità; quindi essa è un automodulo, e il teorema è dimostrato.

Segue che:

Se ω è dotata di pseudo-assi (ossia, è singolare), vi è corrispondenza biunivoca fra gli automoduli non identici di G' e le coppie ordinate di pseudo-assi complementari di ω .

3. La matrice ω sia dotata di pseudo-assi e sia A un automodulo non identico dell'algebra reale $[\omega]'$ connessa con ω . Sia inoltre A^* l'automodulo di G' corrispondente ad A e siano M ed N il suo primo e il suo secondo asse.

L'algebra $A[\omega]'$ A è la sotto-algebra di $[\omega]'$ costituita dagli elementi di $[\omega]'$ che hanno un modulo in A. Ad essa risponde in G' il sottogruppo $A^*G'A^*$, che ha per elemento identico A^* .

Evidentemente gli elementi di $A^*G'A^*$ sono omografie reali di ω che hanno per primi assi spazi contenenti M e per secondi assi spazi contenuti in N.

Inversamente, sia B^* un'omografia reale di ω che abbia per primo asse uno spazio contenente M e per secondo asse uno spazio contenuto in N.

Poichè A^* subordina in N l'identità, si vede subito che $A^*B^*A^*$ ha comuni con B^* il primo e il secondo asse, subordinando in N l'omografia subordinatavi da B^* ; dunque è $A^*B^*A^* = B^*$.

Segue che $A^*G'A^*$ è esaurito dalle omografie reali di ω che hanno per primo asse uno spazio contenente M e per secondo asse uno spazio contenuto in N.

Fra codeste omografie ne esistono di quelle aventi per primo asse uno spazio per M e più ampio di M (indi intersecante N secondo uno pseudo-asse di ω), se, e soltanto se, N non è puro; dunque fra le omografie indotte in N da quelle di $A^*G'A^*$ esistono omografie singolari non nulle, se, e soltanto se, N non è puro.

Si conclude che l'algebra $A[\omega]'$ A non è, od è primitiva, secondo che N non è, od è, puro.

Ora l'ordine di $A[\omega]'$ A è ciò che il Rosati direbbe il carattere di N, e, per un teorema classico del Frobenius, un'algebra reale primitiva è dell'ordine 1, 2 o 4; dunque:

Il carattere di uno pseudo-asse puro di una qualsiasi matrice di Riemann è 1, 2 o 4.

Inoltre è chiaro per quanto è stato detto che:

Gli automoduli primitivi dell'algebra $[\omega]'$ corrispondono biunivocamente agli automoduli di G' che hanno per secondi assi gli pseudo-assi puri della matrice.

4. Dalle osservazioni precedenti, il cui parallelismo con quelle contenute in *L*, Parte 2^a, n. 19, è manifesto, segue (cfr. ibid., n. 20) che se *I* è il modulo di $[\omega]'$ e, nell'ipotesi che $[\omega]'$ non sia primitiva,

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

è una decomposizione di *I* in una somma di automoduli primitivi mutuamente nullifici, detti M_j ed N_j il primo e secondo asse dell'automodulo I_j^* di G' rispondente ad I_j ,

$$N_1, N_2, \dots, N_n$$

è per ω un sistema fondamentale di pseudo-assi puri ed M_i è lo spazio congiungente gli spazi N_j con $j \neq i$.

Segue che se $[\omega]'$ non è semplice e le algebre semplici di cui è somma diretta sono in numero di *t*, la somma degli automoduli I_j si scinde in *t* somme parziali che danno i moduli di codeste algebre semplici e lo spazio congiungente gli spazi N_j corrispondenti agli automoduli I_j di una qualsiasi di codeste *t* somme parziali è il secondo asse del modulo dell'algebra semplice corrispondente, ed è uno dei *t* pseudo-assi isolati minimi di ω .

5. E adesso si supponga che ω sia pura e del genere *p*, con l'indice di moltiplicabilità *h* e si indichino con $[\omega]$ l'algebra razionale connessa con ω e con *R* ed *R'* le algebre regolari (di ordine $4p^2$) costituite dalle matrici di ordine $2p$ i cui elementi siano rispettivamente numeri razionali o reali.

Allora $[\omega]$ è una sotto-algebra primitiva di *R*; quindi $h + 1$ è un divisore di $4p^2$ e posto $4p^2 = (h + 1)m$ è possibile determinare in *R* e fuori di $[\omega]$ degli elementi x_1, x_2, \dots, x_{m-1} sì che si abbia

$$(1) \quad R = [\omega] + x_1[\omega] + x_2[\omega] + \dots + x_{m-1}[\omega];$$

di guisa che i sistemi $[\omega], x_1[\omega], x_{m-1}[\omega]$ risulteranno complementari in *R*. Inoltre è chiaro che, senza venir meno alla generalità, le matrici x_1, \dots, x_{m-1} possono esser supposte non degeneri.

Dalla (1) segue naturalmente l'ulteriore eguaglianza:

$$R' = [\omega]' + x_1[\omega]' + x_2[\omega]' + \dots + x_{m-1}[\omega]'$$

Ciò posto, sia x' un qualunque elemento di $[\omega]'$. Sarà

$$R'x' = [\omega]'x' + x_1[\omega]'x' + \dots + x_{m-1}[\omega]'x'.$$

I sistemi $[\omega]'x', x_1[\omega]'x', \dots$ hanno tutti il medesimo ordine, perchè nessun elemento non nullo di $[\omega]'x'$ può avere un nullifico sinistro in x_1, x_2, \dots, x_{m-1} , una volta che queste matrici sono tutte non degeneri; inoltre, essendo $[\omega]'x' \leq [\omega]'$, $x_1[\omega]'x' \leq x_1[\omega]'$, \dots , i detti sistemi sono certo indipendenti; dunque l'ordine di $R'x'$ (cioè la caratteristica di x'

in R') è il prodotto di m per l'ordine di $[\omega]'x'$ (cioè per la caratteristica di x' in $[\omega]'$). Ma, se γ è la caratteristica - nel senso ordinario - della matrice x' , la caratteristica di x' in R' è $2p\gamma$, dunque, se γ' è la caratteristica di x' in $[\omega]'$, si ha $2p\gamma = m\gamma'$, ossia

$$\gamma = \frac{m\gamma'}{2p} = \frac{2p}{h+1}\gamma'.$$

Occorre appena avvertire che considerazioni perfettamente simili potrebbero essere istituite per gli elementi dell'algebra complessa connessa con ω .

6. Ciò posto, mantenuta l'ipotesi che ω sia pura, supponiamo in primo luogo che ω sia priva di pseudo-assi isolati.

In tal caso $[\omega]'$ è semplice; quindi, per un classico teorema di Cartan, essa è il prodotto diretto di un'algebra regolare per un'algebra primitiva dell'ordine 1, 2 o 4 (equivalente al corpo reale, al corpo complesso o all'algebra dei quaternioni reali). Corrispondentemente gli pseudo-assi pari di ω , che corrispondono alle sotto-algebre di $[\omega]'$ aventi per moduli gli automoduli primitivi di $[\omega]'$, hanno tutti per carattere 0, 1, 2, o 4.

Supponiamo, in secondo luogo, che $[\omega]$, non sia semplice, indi somma diretta di t algebre semplici

$$[\omega]'_1, [\omega]'_2, \dots, [\omega]'_t$$

se t è il numero degli pseudo-assi isolati minimi di ω .

L'ordine di $[\omega]'_j$, per il citato teorema di Cartan, sarà a seconda del caso del tipo $r_j^2, 2s_j^2$ o $4\rho_j^2$, con r_j, s_j, ρ_j interi; corrispondentemente il modulo di $[\omega]'_j$ sarà la somma di r_j, s_j o ρ_j automoduli primitivi, in $[\omega]'_j$, indi in $[\omega]'$, avrà la caratteristica $r_j^2, 2s_j^2$ o $4\rho_j^2$, e per conseguenza, considerato come una matrice di ordine $2p$, avrà per caratteristica - nel senso ordinario -

$$\frac{2p}{h+1}r_j^2, \quad \frac{4p}{h+1}s_j^2 \quad \text{oppure} \quad \frac{8p}{h+1}\rho_j^2.$$

Segue che il secondo asse dell'automodulo di G' corrispondente al modulo di $[\omega]'_j$, che è uno pseudo-asse isolato minimo di ω , sarà lo spazio congiungente di r_j, s_j o ρ_j pseudo-assi puri indipendenti di ω e avrà la dimensione

$$\frac{2p}{h+1}r_j^2 - 1, \quad \frac{4p}{h+1}s_j^2 - 1, \quad \text{oppure} \quad \frac{8p}{h+1}\rho_j^2 - 1.$$

Ora, poichè ω è pura, come il Rosati ha fatto vedere, gli pseudo-assi isolati minimi di ω congiungono uno stesso numero di pseudo-assi puri

indipendenti ed hanno la medesima dimensione, dunque se quel numero si indica con r e questa dimensione con λ , deve essere $r_j = r$, $s_j = r$, oppure $\rho_j = r$ e, corrispondentemente,

$$\frac{2p}{h+1} r^2 - 1 = \lambda,$$

oppure

$$\frac{4p}{h+1} r^2 - 1 = \lambda,$$

o, infine,

$$\frac{8p}{h+1} r^2 - 1 = \lambda.$$

Ma fra λ ed r non può sussistere che una determinata di quest'ultime eguaglianze, dunque, di fronte al teorema di Cartan, per tutte le algebre $[\omega]_1, \dots, [\omega]_r$ si presenta una medesima delle tre alternative possibili.

Si conclude che anche nel caso attuale gli pseudo-assi puri di ω hanno caratteri eguali, il valor comune di questi caratteri essendo 1, 2 o 4, secondo che ciascuna delle algebre $[\omega]_j'$ è il prodotto diretto di un'algebra regolare per un'algebra primitiva di ordine 1, 2 o 4.

Con ciò il teorema fondamentale del Rosati per le matrici pure è pienamente dimostrato.

7. Il prolungamento di $[\omega]'$ nel corpo complesso, quando ω è pura (o impura, ma priva di assi isolati), per quanto è detto in *L*, Parte 2^a, n. 37, o è un'algebra regolare o è somma diretta di algebre regolari del medesimo ordine. Tale teorema avrebbe potuto essere invocato nel numero precedente per dimostrare una parte delle conseguenze ivi dedotte dalle proprietà degli pseudo-assi isolati minimi dovute al Rosati; ma da solo non avrebbe condotto alla conclusione cui si mirava.

Piuttosto osserveremo che esso, posto a riscontro col teorema che chiude un mio lavoro sulle algebre regolari ⁽¹⁾, dà subito che le varietà invarianti minime del gruppo G' , quando ω è pura (o impura, ma priva di assi isolati), sono varietà di Segre di 2^a specie aventi tutte i medesimi indici.

(1) G. SCORZA, *Alcune proprietà delle algebre regolari* (« Note e Memorie del Circolo Matematico di Catania », vol. I, 1921), n. 8.

Geometria. — *Le ricerche geometrico-meccaniche di Leonardo da Vinci.* Nota ⁽¹⁾ del Socio R. MARCOLONGO.

In una prima ed estesa Memoria che ho avuto l'onore di presentare recentemente all'Accademia e che sarà stampata nelle Memorie della classe, mi sono sforzato di raccogliere e di esaminare criticamente e storicamente le numerose ricerche del Vinci puramente geometriche e quelle relative alla teoria dei baricentri delle figure piane e solide. Mi sono costantemente valso del ricco materiale sparso in tutti i manoscritti vinciani sinora pubblicati e che non era stato preso in quella considerazione che esso merita; ma ho altresì avuto la ventura di potermi valere di quello in gran parte inedito, seguendo passo a passo la pubblicazione dell'imponente *Codice Arundel 263* del Museo Britannico, ora condotta felicemente a termine dalla R. Commissione vinciana; e dei tre codicetti del Museo Vittoria e Alberto di Londra e la cui stampa è già stata iniziata ⁽²⁾.

Le numerose ricerche del Solmi, del Duhem e di altri nostri benemeriti vinciani, vagliate, corrette e ancor maggiormente precisate, permettono anzitutto di gettar luce quasi completa sulle fonti cui ha attinto Leonardo per i suoi studi e per le sue ricerche geometriche. E quel poco che offrono i suoi scritti finora conosciuti permettono anche, in qualche caso, di assegnare l'epoca in cui esse furono compiute. Ciò risulterà pienamente provato e documentato nella prima parte della mia Memoria.

Mirando poscia a dare uno sguardo d'insieme a tali ricerche, mi è parso opportuno raggrupparle in questo modo:

1. Ricerche sulle lunule e sulla quadratura di figure piane limitate da archi di cerchio;
2. Ricerche su trasformazioni di solidi in solidi equivalenti sotto date condizioni;
3. Ricerche sul problema dell'incidenza o problema di Alhazen;

(1) Presentata nella seduta del 3 febbraio 1929.

(2) Le opere vinciane finora pubblicate dalla R. Commissione, nelle superbe edizioni dello stabilimento romano Danesi, sono:

Il Codice Arundel 263 del Museo Britannico: Parte 1^a, da fol. 1 a fol. 116. Roma, Danesi, 1923; Parte 2^a, da fol. 117 a fol. 220. Ibid. 1926; Parte 3^a, da fol. 221 a fol. 283. Ibid. 1928.

I fogli mancanti al codice di Leonardo da Vinci su 'l volo degli uccelli della Biblioteca reale di Torino. A cura di Enrico Carusi. Roma, Danesi, 1926.

Sono già in stampa il quarto fascicolo del *Codice Arundel* contenente le note ed il particolareggiato indice; e i tre codicetti del Museo Vittoria e Alberto. Il comitato esecutivo, che sotto la presidenza del senatore Gentile, è incaricato della pubblicazione dei detti codici è composto di Mr. Enrico Carusi e Roberto Marcolongo.

4. Ricerche sui centri di gravità delle figure piane e solide;
5. Costruzione di istrumenti matematici.

Ho invece appena accennato a piccoli, ma non disprezzabili complementi e ad interessanti osservazioni di indole più elementare e che trovansi profuse a larga mano in tutti i manoscritti.

Le ricerche sulle lunule sono le più originali ed interessanti e costituiscono un imponente materiale, il *De ludo geometrico*, cui forse Leonardo dette l'ultima mano in Roma e in Belvedere nel primo periodo leoniano. Leonardo, che attinge la maggior parte delle sue conoscenze della geometria greca da una curiosa e quasi dimenticata enciclopedia di Giorgio Valla: *De expetendis et fugiendis rebus*, stampata a Venezia nel 1501, conosce il teorema ora noto col nome di prima lunula di Ippocrate, lo estende al caso del triangolo rettangolo non isoscele (non conoscendo certamente la anteriore scoperta di Alhazen); e da questa prima lunula quadrabile, con metodi elementari e ingegnosi, riesce a quadrare numerosissime figure composte di rette e di archi di cerchio contenuti, forse per scopi artistici, in scompartimenti quadrati e semicircolari. Poscia, valendosi di ribaltamenti e di rotazioni intorno ad assi opportuni riesce a ricavare, da lunule non quadrabili, altre figure quadrabili limitate da archi di cerchio.

Nella impossibilità di riprodurre le centinaia di figure disegnate da Leonardo, specialmente nel Codice Atlantico, ho tentato un primo saggio di raggruppamento secondo tipi e principî determinati; riproducendo così alcune delle figure di Leonardo.

Meno originali e interessanti, ma pur sempre notevoli considerata l'epoca in cui esse furono fatte (primi anni del 1500) sono le ricerche sulla trasformazione *senza diminuzione o accrescimento di materia* di prismi, cilindri, in altri prismi equivalenti e soggetti a date condizioni; sulla somma di due o più cubi, ecc. Leonardo evidentemente si è qui ispirato a precedenti ricerche (non del tutto complete e perfette) del Cusano. Si tratta di problemi che conducono a quello della inserzione di due medie proporzionali; p. e. il seguente:

Del cubo dato si facci una tavola, con lunghezza, larghezza e grossezza proporzionata secondo una proporzione irrazionale d'un'altra tavola data.

Il problema di Alhazen, dal nome del matematico arabo Ibn al-Haitam che primo ne dette la soluzione circa il 1000, è il problema famoso della riflessione su di uno specchio sferico; dato cioè un punto luminoso e l'occhio assegnare il cammino che un raggio deve percorrere perchè dopo una riflessione sullo specchio giunga all'occhio. La sua soluzione semplice ed elegante è dovuta ad Huygens. Non può asserirsi con certezza se Leonardo abbia conosciuta l'opera di Alhazen sull'ottica in cui è esposta la sua complicatissima soluzione; certamente ha conosciuto quella di Vitellio o Vitellone in cui viene riprodotta la soluzione di Alhazen. Ma Leonardo non ha avuta la pazienza di studiarla; il fatto è che in tutti i manoscritti,

ma specialmente nel Codice Arundel egli fa numerosissimi tentativi per la soluzione di questo non facile problema e sempre invano. A volte ritiene che esso sia assolutamente insolubile geometricamente; a volte pare si sforzi di ottenere una soluzione approssimata. Tuttavia anche in questo campo egli ha lasciato traccia della sua profonda ingegnosit , descrivendo, nel Cod. Atl., un strumento (un ingegnoso sistema articolato) che permette di risolvere *per via di strumento* il famoso problema. Esso, secondo le testuali indicazioni di Leonardo, opportunamente interpretate,   stato da me fatto costruire e si conserva nell' Istituto di Meccanica razionale della R. Universit  di Napoli.

I contributi di Leonardo alla teoria geometrica dei centri di gravit  (di altri notevolissimi, in relazione alla dinamica e alla statica, si tratter  in altra occasione) e limitati sin qui alle poche parole del manoscritto *F*, sono specialmente numerosi e nuovi nel Codice Arundel e nei fogli mancanti al Codice sul volo degli uccelli recentemente ritrovati e che M. Carusi ha pubblicati.

Leonardo scopre e dimostra il teorema sul punto d'incontro degli *assis* di un tetraedro; ma dai manoscritti invece non risulta quale via egli abbia seguita per dimostrare che tale punto   il baricentro del tetraedro. Ho cercato di ricostruire, tenuto conto delle conoscenze dei suoi tempi, la via pi  probabile che pu  aver seguita Leonardo. Egli conosce il teorema sul baricentro di quattro masse eguali poste nei vertici, per quanto non esplicitamente enunciato, e che lo conduce alla elegante propriet  dei segmenti che uniscono i punti medi dei lati opposti del tetraedro. Conosce infine il baricentro di ogni figura piramidale e conica.

E pel centro di gravit  di un semicerchio oltre ad un calcolo approssimato per la sua ricerca, egli ricorre al metodo della decomposizione in settori elementari assimilabili a tanti triangoli, riducendo il problema a quello della composizione grafica di un sistema di forze parallele.

Queste ricerche assicurano a Leonardo un posto cospicuo nella storia della statica.

Per quanto riguarda infine la costruzione di strumenti matematici   da notare che nelle carte vinciane si hanno i primi disegni del compasso di proporzione e la sua applicazione alla costruzione della ellissi dal cerchio; di compassi di precisione quali ancora, con lievi varianti, si trovano in commercio; il disegno di un compasso parabolico.

Le affermazioni di contemporanei attribuiscono a Leonardo la invenzione del tornio ovale; e a questo strumento si riferiscono certamente due o tre frasi dei suoi manoscritti; ma, purtroppo, nessun disegno ce ne fa conoscere il principio ed il funzionamento. E per evitare il danno di voler attribuire all'artista-scienziato, che esercita tanta influenza su ogni spirito colto, pi  di quello che risulta dai documenti a noi ora noti, io mi sono limitato a quel poco di certo che ho potuto raccogliere e che pu  essere inoppugnabilmente documentato.

Fisica. — *Nuovo metodo per misurare la velocità del suono nei liquidi.* Nota ⁽¹⁾ del Corresp. A. AMERIO.

Le misure della velocità del suono nei liquidi non sono molto numerose.

Anzitutto, solo per l'acqua si sono potute fare misure dirette; per gli altri liquidi si è dovuto studiare la propagazione del suono, tenendo il liquido in un tubo, e deducendo poi la velocità nel liquido libero e indefinitamente esteso, da quella misurata nel tubo, per mezzo di formule diverse. Di queste, la più semplice, quella del Wertheim, è certamente errata; mentre più approssimate, sebbene non generalmente esatte, sono quelle di Allievi e Vago o di Lamb e quella di Korteweg, già note.

In secondo luogo è da notare che i metodi usati per queste misure sono sempre complicati, di difficile attuazione e richiedono mezzi cospicui.

Il metodo che io ho immaginato, provato e fatto applicare, come verrà riferito in una prossima Nota, ha per scopo di eliminare queste difficoltà, essendo semplice, di facile applicazione e non richiedendo che mezzi modesti.

In questo metodo, come in altro già seguito da me per misurare la velocità del suono nell'acqua del mare, utilizzo quella delicatissima proprietà del nostro organo dell'udito, che permette di determinare la direzione di provenienza di un suono, quand'essa giaccia nel piano orizzontale che passa per gli orecchi.

Questa proprietà, che si affina con l'educazione, è dovuta al cosiddetto effetto binauricolare. Quando cioè un suono proviene frontalmente, esso giunge contemporaneamente, e colla stessa intensità, ai due orecchi e noi lo sentiamo in entrambi egualmente; se proviene da destra, giunge all'orecchio destro prima, e anche più intenso, che al sinistro e a noi pare quasi di sentirlo soltanto a destra.

Delle due cause dette, alle quali nelle ordinarie condizioni si aggiungono altri indizi, dovuti all'educazione del senso, prevale di gran lunga la prima. Le misure fatte in proposito, dicono che la minima differenza di tempo che l'orecchio possa avvertire, dipende dalla frequenza, presentando un minimo, probabilmente alquanto diverso nei varî individui, per suoni della terza e quarta ottava, mentre la differenza nelle intensità aumenta di efficacia col crescere della frequenza.

Se si utilizzano suoni pei quali la differenza di tempi percepibile sia minima, il ritardo di $\frac{1}{100.000}$ di secondo è generalmente avvertito e dà

(1) Presentata nella seduta del 3 febbraio 1929.

la netta sensazione che il suono non provenga frontalmente; con l'educazione si può giungere a $\frac{1}{200.000}$ e anche molto oltre.

L'apparecchio è così costituito: due tubi di acciaio di circa m. 2 di lunghezza, cm. 2 di raggio, mm. 2 di spessore, sono disposti parallelamente a circa 15 cm. tra asse e asse, e rigidamente uniti. Essi sono chiusi a una delle estremità con lamine sottili di gomma elastica, all'altra sono aperti e in essi possono scorrere liberamente due tubi di ottone di mm. 16 di diametro e 1 mm. di spessore; anche questi sono chiusi all'estremo che sta entro ai tubi maggiori, con lamine di gomma, aperti all'altro estremo e per questo comunicano coi due orecchi, mediante due tubi di gomma e due condotti d'ottone, terminati da adatti capezzoli.

I due tubi d'ottone possono scorrere indipendentemente l'uno dall'altro, e le distanze tra le estremità chiuse dei tubi interni e quelle chiuse dei tubi esterni sono leggibili su un regolo di ottone diviso in mm., parallelo al sistema dei tubi e posto fra essi, in modo da costituire un tutto rigido con quelli d'acciaio.

In questi si mette acqua distillata o acqua in uno e il liquido da studiare nell'altro; i tubi d'ottone sono vuoti.

Le estremità chiuse dei tubi maggiori pescano in una vasca piena d'acqua, che serve anche per sorreggere il sistema dei tubi. In essa sono prodotti i suoni, e perchè questi non penetrino anche lungo i tubi stessi, e attraverso alle pareti immerse non possano comunicarsi ovunque al liquido che contengono, essi sono circondati per tutta la parte immersa da un manicotto di lamierino di ferro, in modo che tra il tubo d'acciaio e l'acqua ci sia sempre un'intercapedine di un cm. di aria, che fa da ottimo cuscinetto protettore. Ulteriori precauzioni sono adottate perchè in nessun modo le vibrazioni giungano ai liquidi interni ai tubi, se non per l'estremità chiusa con la gomma, facendo le giunzioni con piombo di notevole spessore.

I suoni vengono prodotti con un interruttore di Wehnelt, chiuso in apposito recipiente tenuto entro la vasca, e l'altezza del suono si regola per mezzo di un'autoinduzione variabile.

Le lunghezze delle colonne liquide interessate nella propagazione dei suoni, che ad esse pervengono attraverso alle lamine di gomma che chiudono i tubi di acciaio, sono comprese fra le due lamine di gomma dei tubi coassiali e sono perciò leggibili sul regolo d'ottone graduato.

Quando tutto è simmetrico, cioè le estremità dei tubi maggiori sono equidistanti dalla sorgente, sono eguali le colonne comprese fra le coppie di lamine di gomma, in entrambi i tubi c'è acqua e le lunghezze dei tubi adduttori dei suoni agli orecchi sono eguali, il suono si sente frontalmente; se per contro si sente lateralmente vuol dire che manca la supposta sim-

metria e si fa la correzione opportuna accorciando o allungando uno dei tubi adduttori o una delle colonne liquide.

Fatta la correzione si sostituisce l'acqua di uno dei tubi col liquido in esame.

Il suono si sposta subito e noi lo avvertiamo come se provenisse dalla parte dell'acqua, se in questa il suono è più veloce che nel liquido.

Allunghiamo allora la colonna di acqua, o accorciamo l'altra, fino a riudire il suono frontalmente.

Siano L_1 e L_2 le lunghezze delle colonne di acqua e del liquido in esame; U_1 e U_2 le rispettive velocità del suono nei liquidi nei tubi; V_1 e V_2 le velocità nei liquidi liberi e indefinitamente estesi.

Avremo:

$$(1) \quad U_1 : U_2 = L_1 : L_2$$

Per mezzo di una delle formule citata o di altra analoga, note le proprietà elastiche del tubo d'acciaio e le sue dimensioni, dalla velocità del suono nell'acqua libera calcoleremo la velocità U_1 nel tubo, e colla (1) calcoleremo la U_2 , dopo di che, applicando ancora la stessa formula di prima, per mezzo di U_2 calcoleremo V_2 , cioè la velocità nel liquido in esame.

In altra Nota verranno riferiti maggiori particolari e alcuni dei risultati ottenuti, mentre altre ricerche sono in corso. Per ora sono state fatte misure con soluzioni acquose di varie concentrazioni di alcool etilico, glicerina e zucchero. Sono state applicate le formule citate di Lamb-Allievi e Vago e di Korteweg; inoltre fu applicata una nuova formula più esatta, dedotta dal dott. Tosini, nella quale si tien conto di tutti gli elementi che interessano il problema cioè: i moduli di rigidità e di comprimibilità, lo spessore e il diametro del tubo, la densità del materiale che lo costituisce e quella del liquido. Essa verrà riferita nella prossima Nota.

L'esattezza di queste misure è deducibile dalla (1) e, con i tubi adoperati, posto eguale a 7 mm. la differenza minima di cammino percepibile nel liquido, a 140 cm. la lunghezza delle colonne liquide, essa è di $\frac{1}{200}$ per ogni misura isolata, così che può essere notevolmente aumentata facendo una serie di misure successive, ciò che si può in pochi minuti, e ricorrendo inoltre a tubi di maggior lunghezza.

La ricerca permette la rapida e comoda deduzione, oltre che delle velocità del suono nei liquidi, dei moduli di elasticità dei medesimi. La nota formula che serve per questa deduzione ci dice che l'errore col quale viene determinato il modulo di elasticità è doppio di quello che affetta la velocità, e poichè questa potrebbe essere facilmente misurata a meno di 1‰, così l'errore del modulo potrebbe essere di 1 su 500, ciò che si otterrebbe molto difficilmente e con molto maggior lavoro con altri mezzi.

Geologia. — *Sull'importanza dei fogli « San Remo » e « Imperia » della Carta geologica d'Italia al 100.000, per la soluzione di grandi quesiti di geologia alpina ed appenninica.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. S. FRANCHI.

I fogli al 100.000 della Carta geologica di « San Remo » e di « Imperia » da me rilevati or fa un trentennio, sono stati solo ora pubblicati (1927); ma alcune parti di essi, interessantissime per la tettonica e la stratigrafia, sono state pubblicate con una cartina e con profili fin dal 1894 ⁽²⁾, e altre, pure con carte e profili nel 1916 ⁽³⁾, senza contare la utilizzazione di essi per la Carta geologica delle Alpi Occidentali, pubblicata nel 1908 dal R. Ufficio geologico ⁽⁴⁾.

La stampa di tali fogli, sebbene fatta con tanto ritardo, cade però in un momento molto opportuno, per contribuire al chiarimento di due questioni della più grande importanza, per la geologia delle Alpi Marittime l'una, per quella dell'Appennino settentrionale l'altra.

La prima è quella dell'età dei *grès d'Annot*, vecchia questione finalmente entrata nella sua fase risolutiva, col contributo di geologi francesi, questione che io ho sollevata or sono dodici anni, e da me mantenuta viva, fino al 1928, senza l'intervento dei Colleghi di Francia, i quali eccettuatone J. Boussac (morto nel 1916 a Verdun), mantennero su di essa un silenzio veramente incomprensibile.

La seconda è quella dell'età delle « argille scagliose », sulla quale io credo di aver portati nel 1927 argomenti inoppugnabili in favore della sua eocenicità ⁽⁵⁾, dopo le brevi trattazioni fattene precedentemente, nel 1905 e nel 1916.

È bensì vero che in questi ultimi mesi si sentirono ancora fautori dell'età cretacea di tali argille, ma ad essi io credo di avere già esaurientemente

(1) Presentata nella seduta del 3 febbraio 1929.

(2) S. FRANCHI, *Contribuzione allo studio del Tortonico e del Cretaceo nelle Alpi Marittime italiane*, « Boll. R. Comit. geolog. d'Italia », 1894.

(3) S. FRANCHI, *La posizione della « zona ad Helminthoidaea labyrinthica » e l'età dei supposti grès d'Annot*, « Boll. Soc. geol. Ital. », vol. XXXIV; ID., *Le « arenarie d'Annot » e la « zona ad Helminthoidaea » nell'Eocene delle Alpi Marittime e dell'Appennino Genovese*, « Boll. R. Comit. Geol. », 1916.

(4) Veramente è colla stampa di questa carta, nella quale i *grès d'Annot* sono stati da me collocati nell'Eocene, che la questione può dirsi nata.

(5) S. FRANCHI, *Ancora sull'età degli scisti argillosi ofiolitiferi della Riviera occidentale e della Lunigiana*, « Boll. Soc. geol. Ital. », 1927.

risposto ⁽¹⁾, riportando la questione alle sue origini: l'età priaboniana e non parisiense della formazione del Monte Antola, da me sempre sostenuta, contro le idee del prof. Sacco, a cominciare dal 1894, e riconosciuta dalla Società geologica di Francia nel 1905.

I.

SULL'ETÀ DELLE « ARENARIE DI POURRIAC » (GRÈS D'ANNOT).

Sulla prima questione, dopo i consensi orali di W. Kilian e P. Termier nell'estate 1925, e quello scritto di quest'ultimo alla fine dello stesso anno ⁽²⁾, dato anche senza essere stato sui luoghi, è ora intervenuto il consenso coraggioso e molto chiaro di una giovane collaboratrice della Carta geologica della Francia, la sig.na Yvonne Gubler-Wahl, con un ampio e pregevolissimo lavoro, avente per principale scopo tutt'altro argomento, scritto con la ispirazione e i consigli di E. Haug, il compianto professore di geologia della Sorbona e autore dell'impareggiabile trattato di geologia, che tutti i geologi conoscono ⁽³⁾.

È stato però destino che il lavoro della sig.na Gubler-Wahl fosse terminato solo con l'aiuto ed i consigli del successore di E. Haug alla cattedra di geologia della Università parigina, il prof. Charle Jacob, come dichiara l'autrice nell'introduzione del suo lavoro.

È vivamente da rammaricare che E. Haug e W. Kilian, i quali tanto erano interessati a questa questione, come principali collaboratori nei rilevamenti dei fogli della Carta geologica francese all'80.000 di « Digne », di « Gap » e di « Larche », nei quali i *grès d'Annot* hanno notevolissimi sviluppi, non abbiano lasciati o almeno pubblicati degli scritti, per esprimere e giustificare il loro mutato convincimento sulla cronologia di quei *grès*, perchè da essi soli forse sarebbero apparse evidenti le cause e le giustificazioni del gravissimo errore di cronologia, in cui così valenti geologi erano incomprensibilmente caduti.

Dopo i consensi di W. Kilian e di P. Termier, degli autorevoli scritti di E. Haug e di W. Kilian avrebbero certamente avuto una grande efficacia per giungere al più presto alla soluzione definitiva della questione, dalla quale siamo ancora un po' lontani, e per impedire, nella cartografia geolo-

(1) S. FRANCHI, *Impressioni sul Congresso della Società geologica italiana a Larderello e osservazioni sull'età del terreno dal quale si sprigionano i « soffici boraciferi »*, « Boll. Soc. geol. Ital. », 1928.

(2) *Comptes-rendus d'une excursion géologique dans les Hautes Vallées de la Dora Riparia, de la Maira et de la Stura, en compagnie de MM. S. Franchi, W. Kilian et E. Raguin*, « Bull. Soc. géol. de France », 1925.

(3) GUBLER-VALL Y., *La nappe de l'Ubaye au sud de la Vallée de Barcelonnette*. Paris, 1928.

gica delle Alpi Marittime francesi, la permanenza di qualche inesattezza, di cui ho avuto sentore, in vivo contrasto colla rappresentazione dell'Eocene nelle più recenti carte geologiche italiane.

La sig.na Gubler-Wahl, nel suo poderoso lavoro, nel quale però tratta solo brevemente dell'Eocene, avendo esso per principale oggetto la *grande nappe de l'Ubaye*, che è una delle meglio definite da Kilian e da Haug, parlando del Nummulitico, del quale farebbero parte i *grès d'Annot*, arriva a questa conclusione, che mi piace trascrivere letteralmente: « De toute façon, qu'on veuille placer les grès d'Annot dans le Barthonien, dans le Ludien ou dans les deux étages, leur âge éocène me paraît un fait établi » ⁽¹⁾.

Questa conclusione, sebbene un po' imprecisa dal lato cronologico, mi dà completamente ragione nel senso che l'età oligocenica di quelle arenarie, finora sostenuta dai Colleghi di Francia, e rappresentata in tutte le carte geologiche francesi al 1.000.000 ed all'80.000, dovrà essere completamente modificata, conformemente a quanto io ho fatto nella carta geologica al 400.000 delle Alpi Occidentali, fin dal 1908, nella quale l'Oligocene è stato soppresso.

Io non voglio menare eccessivo vanto di questo risultato, veramente notevole, per cui viene mutata la fisionomia di tante carte geologiche della Francia, da quella al 1.000.000 a quelle all'80.000 attornianti il Massiccio cristallino delle Alpi Marittime; e certo, questo mio successo, forse oltre che a diversi metodi di rilevamento, è in parte dovuto al fatto che io giungevo a rilevare i dintorni del suddetto Massiccio dopo avere in gran parte rilevate le Alpi Liguri, e dopo aver già dato, nel 1894, uno studio dell'Eocene della regione, che, gli studi posteriori hanno dimostrato fondamentalmente giusto.

Per equità si deve però riconoscere che di codesto mio lavoro, da tutti i geologi che si seguirono nello studio dell'Eocene ligure, da Sacco a Bussac, non si tenne il conto che esso meritava, come stanno dimostrando alcune vertenze esaurite o in corso.

Quanto alla questione dei *grès d'Annot*, la conclusione sopra riportata della sig.na Gubler-Wahl, sebbene non completamente soddisfacente per il testo, forse a causa del ristretto territorio esaminato dall'autrice, e per le obiezioni non esatte nè completamente fondate che l'accompagnano, mi è stata causa di una indicibile soddisfazione, pel fatto di vedere finalmente, dopo così lungo e incomprensibile silenzio, riconosciuta la verità, e farsi vivo il senso della responsabilità scientifica, che era rimasto per tanti anni assopito. Io sono perciò vivamente grato alla giovane collaboratrice.

Se la sig.na Gubler-Wahl avesse potuto attraversare il confine, e venire a percorrere il vallone di Pourriac, per controllare il profilo della fig. 3 della tav. IV del mio lavoro del 1916, si sarebbe certamente convinta della

esattezza della parte autoctona di esso, e non mi avrebbe mosse le obbiezioni che figurano alla p. 134 del suo lavoro.

L'età priaboniana inferiore della grande e meravigliosa pila di arenarie che io propongo di denominare, d'ora innanzi, *arenarie di Pourriac*, sopprimendo dalla letteratura geologica l'inafasto nome di *arenarie di Annot*, che è stato oggetto di così deplorabili errori, risulta da quel profilo, il quale non può subire interpretazioni equivocate, della più grande evidenza.

Io ho già in altro mio scritto ⁽¹⁾ manifestata la mia convinzione che questo quesito verrà presto ripreso, poichè una tale lacuna non può essere tollerata nella letteratura geologica delle Alpi, da un giovane geologo francese, il quale si proponga di studiare le cause per cui dei geologi di grande esperienza, di fama mondiale e di indiscusso valore come W. Kilian, E. Haug, ed altri, siano potuti cadere non solo, ma permanere tanto a lungo nel gravissimo errore di cronologia dell'oligocenicità dei *grès d'Annot*; per giungere alfine a riconoscere le verità essenziali da me enunziate nel mio lavoro del 1916, e quindi non solo la eocenicità, ma l'età priaboniana inferiore delle arenarie da me dette *arenarie inferiori* delle Alpi Liguri e del versante orientale del Massiccio delle Alpi Marittime, le quali arenarie sono appunto tipicamente rappresentate nei profili di Pourriac e del Lausannier, e quindi, meno tipicamente, lungo tutto il versante sinistro della Valle Stura e attraverso le valli Gesso, Vermenagna, Roja e Nervia (foglio di San Remo).

Io ho già esposto nel 1916 l'opinione che due orizzonti principali di arenarie si trovino pure oltre confine, come sono perfettamente distinguibili stratigraficamente e tettonicamente al di qua, separati fra loro da una grande potenza di depositi di parecchie centinaia di metri.

E sarebbe un bel risultato quello di potere individuare e definire al di là del confine, come io l'ho fatto al di qua, la « zona ad helminthoidi », che E. Haug e W. Kilian riconobbero e affermarono esistere nell'Ubaye, identica a quella da essi osservata nei dintorni di Genova, nel corso delle escursioni della Società geologica di Francia, nella sua riunione a Torino nel 1905 (*Course du 10 septembre à Gènes*, p. 850).

A mio avviso, una delle cause probabili dell'errore che ebbe sì funeste conseguenze nella cartografia geologica delle Alpi Marittime francesi, è l'aver dato soverchio peso, nel senso stratigrafico, alle forme litologiche delle arenarie, il che parrebbe dimostrato da tutto quello che scrisse J. Boussac sulle sue traversate nelle valli italiane ⁽²⁾, dove, per lui, erano *grès d'Annot* tanto le arenarie del Priaboniano inferiore, di poco soprastanti al banco inferiore

(1) S. FRANCHI, *Osservazioni sulla tettonica delle Alpi Cozie franco-italiane*, « Mem. del R. Uff. Geol. », vol. XXII. In questo lavoro ho già espresso il rammarico che durante la escursione fatta con me da E. Haug e da F. Zürcher nel vallone di Pourriac nel 1902 i Colleghi di Francia non abbiano manifestato le loro idee contrarie a quelle che io apertamente manifestavo sull'età eocenica di quelle arenarie.

(2) J. BOUSSAC, *Le Nummulitique alpin* (Paris, 1912).

luteziano basale dell'Eocene, quanto quelle associate agli alberesi e scisti ardesiaci della *zona ad Helminthoida*, soprastanti ai precedenti per 400 o 500 m. di depositi.

Io confido che la sig.na Gubler-Wahl, che ha così coraggiosamente incominciato ad occuparsi della questione, e che avrà probabilmente avuti su di essa consigli dal suo Maestro E. Haug ⁽¹⁾, od altri giovani geologi, come A. Rivière, che già dette prova delle sue belle attitudini di geologo, ed è stato anche da me iniziato, in Val Stura, allo studio della importantissima questione, dopo attento esame dei miei lavori del 1894 e del 1916, nonchè delle carte geologiche di San Remo e di Imperia, ora pubblicate, le quali faciliteranno molto la comprensione di essi, potranno giungere a districare, nelle regioni oltre confine, la matassa; la quale deve essere alquanto complicata, se geologi di così grande ed indiscusso valore vi si trovarono impigliati, ed a trovarne, come si suol dire, il bandolo.

Intanto questo riconoscimento completo dell'età eocenica dei *grès d'Annot* avrà queste principali conseguenze:

1) Grandi mutamenti delle carte geologiche al 1.000.000 e nei terreni terziari di quelle all' 80.000 di Larche, Digne, Gap, Saint Martin-Lantosque e Nice, attornianti il Massiccio cristallino.

2) Il riconoscimento della ante-oligocenicità del sollevamento delle Alpi Marittime, sempre da me sostenuto; il che porterà grandi mutamenti nei concetti sulla tettonica e sulla cronologia di molte regioni delle Alpi Marittime e delle Basse Alpi.

3) Un così grande mutamento nella tettonica delle Alpi Marittime, che sono parte così importante delle Alpi Occidentali, avrà certamente una ripercussione sulla tettonica di tutta questa parte delle Alpi.

4) Anche i concetti sulla sintesi tettonica delle Alpi in genere dovranno essere riveduti.

II.

SULL'ETÀ DEGLI SCISTI OFIOLITIFERI DEI DINTORNI DI GENOVA E DELLA LUNIGIANA ⁽²⁾.

Mentre la precedente questione, che dico dell'età delle « Arenarie di Pourriac » è legata alla parte inferiore del nostro Eocene, tanto sviluppato nelle valli circuenti a levante il Massiccio cristallino delle Alpi Marittime

(1) Benchè E. Haug non abbia fatto il minimo cenno della presente questione, al punto che non vi si legge la parola *Annot*, in un suo pregevolissimo lavoro stampato nel 1925, nel quale sarebbe stato doveroso trattarne, si deve ritenere probabile che delle sue mutate convinzioni in proposito egli abbia parlato colla sig.na Gubler-Wahl.

(2) Questo scritto si riferisce a questa parte ben determinata e non a tutto l'Appennino settentrionale, in alcune parti del quale io non escludo che possono esistere regioni di scisti ofiolitiferi di età cretacea.

e nelle basse valli della Roja e della Nervia, la presente è invece legata alla parte superiore di quel terreno, pel fatto che la « zona ad *Helminthoida* », oltre ad avere un enorme sviluppo nelle alte valli Roja, Argentina e Arroschia e nella Valle Imperia, si estende, con caratteri quasi immutati, all'Appennino Genovese, dove essa è chiaramente sovrapposta ai noti scisti variegati tanto caratteristici, in tutte le Alpi Liguri e Marittime, e, mediatamente, con una distanza stratigrafica imprecisabile, alle argille scagliose ofiolitifere.

La identità litologica del Monte Antola, retrostante a Genova, colla mia « zona ad *Helminthoida labyrinthica* » della Riviera di Ponente, è stata da me riconosciuta e affermata in un lavoro del 1894 (« Boll. R. Comit. geol. », 1894, pp. 49-50), ed è stata riconfermata con un lavoro posteriore ⁽¹⁾, nel quale ho esposte le divisioni della serie eocenica della Liguria occidentale, quali risultavano dai miei rilevamenti (p. 308). In questo lavoro, a p. 309 scrivevo: « quando venni a rilevare nella Valle Polcevera, la corrispondenza perfetta fra le masse di calcari alberesi ad *Helminthoida lab.* dei forti Due Fratelli, Castelluccio, ecc., a nord di Genova, e degli scisti varicolori sottostanti di Camporsella, Zemignano, Begato e Staglieno, e le identiche formazioni della Liguria occidentale, mi risultò tanto chiara ed evidente, che io non esitai a ritenere come corrispondente al termine 3° della mia serie (cioè al *Flysch* sopra-luteziano) la formazione scistosa della Valle Polcevera, nella cui parte più bassa sono le diabasi di Conegliano e del M. Figogna e alcune masse di serpentina, e nella parte più alta gli scisti varicolori di Zemignano e Camporsella ».

Nel resoconto ufficiale della riunione in Torino della Società geologica di Francia dell'escursione fatta a Genova il 10 settembre 1905 ⁽²⁾, dove si parla della visita fatta al Castelluccio dei calcari ad *Helminthoida* che costituiscono la regione, è detto: « *M. Kilian a été frappé de l'identité presque absolue que présentent les calcaires à Helminthoïdes (alberese) des environs de Gênes avec des assises très-développées dans la région de l'Ubaye et des Hautes Alpes, et que M. Haug et lui ont désignées sous le nom de "Flysch calcaire"* ».

Così sull'età priaboniana della formazione del M. Antola, e non parissiana, come è stata indicata in qualche carta geologica ⁽³⁾, credo non potrà più sussistere il minimo dubbio.

La pubblicazione dei fogli di San Remo e di Imperia della carta geologica al 100.000, nei quali la « zona ad *Helminthoida* » è stata da me distinta il più esattamente possibile, e seguita in tutte le sue pieghe e attraverso a numerose valli, può servire a dimostrare la grave inesattezza di due fatti affermati nel 1913: 1° Che la *Helminthoida labyrinthica*, Herr, possa

(1) Loc. cit.

(2) « Bull. Soc. géol. de France », 1905, p. 849-850.

(3) F. SACCO, *Carta geologica dell'Appennino settentrionale*, 1891.

figurare nella lista dei fossili del Luteziano della Mortola ⁽¹⁾. 2° Che la zona ad *Helminthoida*, possa comprendere tutto l'Eocene e giungere ad includere il Luteziano ⁽²⁾.

A questo proposito osservo che il mio invito ad indicarmi un banco con *Helminthoida labyrinthica* soprastante stratigraficamente al Luteziano a meno di 300-400 m., non è stato risposto, come del pari rimase senza risposta l'invito ad indicarmi una nummulite del Parisiano negli alberesi del M. Antola. Si tratta di errori gravi e incomprensibili.

Quello di ristabilire la verità sulle possibili divisioni dell'Eocene della Riviera di Ponente sarà certo uno dei risultati più notevoli della pubblicazione dei due suindicati fogli della carta geologica.

Quanto all'Eocene della Riviera di Levante, dopo le discussioni avvenute in parte con una Memoria, nella nostra Accademia (serie 6ª, vol. I, fasc. 10) e in parte nel « Bollettino della Società geologica italiana » (1927) io credo superfluo il ritrattarne qui.

Solo debbo avvertire che una nuova discussione, si è aperta sullo stesso argomento alla riunione della Società geologica del settembre 1928, a Lardarello, sulla quale io ho riferito nel « Bollettino » di quest'anno, ora stampato, riportando gli argomenti da me tratti dallo studio delle Alpi Liguri, che gli studiosi potranno controllare, coll'esame, oltre che di alcuni miei lavori, dei due suddetti fogli della Carta geologica.

A riguardo del mio lavoro del 1927 io desidero far ben notare che le conclusioni da me tratte, come chiaramente risulta dal loro tenore, si riferiscono puramente alla regione della Liguria orientale compresa fra la Polcevera ed il Serchio, regione per la quale io mi permetto di ricordare di aver dimostrato, quasi matematicamente, che la ipotesi avanzata: « che gli scisti argillosi ofiolitiferi possano, nella serie stratigrafica, tenere il posto della tanto nota lacuna anteriore alla Scaglia delle Apuane », dopo la prova fattane, applicandola a due profili geologici, si è dimostrata assolutamente inaccettabile.

Io debbo ora aggiungere che non credo di aver mai affermato che nell'Appennino settentrionale non possano esistere scisti ofiolitiferi, od anche arenarie di età cretacea: io ho solo affermato che per alcune regioni ben determinate a me note, i fatti sono o chiaramente contrari o insufficienti a dimostrare tale esistenza ⁽³⁾.

(1) F. SACCO, *Les Alpes occidentales*, 1913, p. 76.

(2) Id., p. 78.

(3) Vengo ora a conoscenza di un nuovo lavoro presentato all'Accademia delle Scienze di Torino dal prof. F. SACCO: *Nuovi dati di fatto riguardo l'età degli Argilloscisti ofiolitiferi dell'Appennino* (Adunanza 18 novembre 1928), alla quale mi riservo di rispondere, occupandomi puramente di dati di fatto; ma fin d'ora debbo dichiarare che io non posso accettare la forma imprecisa attribuitami nelle divisioni dell'Eocene della Liguria occidentale e tanto meno l'estensione arbitraria data alle mie idee sull'Eocene della Liguria orientale, a p. 27 dell'estratto di tale Nota.

Biologia. — *L'organo simbiotico di « Silvanus surinamensis (L) ».* Nota del Corrisp. U. PIERANTONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DAI SOCI

Matematica. — *Sulle curve di Galois.* Nota I, di A. COMES-SATTI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. SEVERI.

È noto che il gruppo di monodromia d'una funzione algebrica w della variabile complessa z , può interpretarsi come il gruppo di Galois dell'equazione $\varphi(w, z) = 0$ che lega w a z , considerata nel campo di razionalità di tutte le costanti complesse, a cui si aggiunga il parametro z ⁽²⁾.

Nell'ambito di tale interpretazione, la teoria di Galois acquista un significato geometrico, che conferisce a talune sue concezioni notevole valore espressivo. Il quale si ravviva attraverso alle interpretazioni funzionali, magistralmente delineate, in casi tipici, dal Klein, nelle lezioni sull'icosaedro e sulle funzioni modulari ⁽³⁾.

Le stesse concezioni, trasportate al caso più generale di funzioni algebriche del punto di una curva algebrica f , anche non razionale, si presentano naturalmente nella teoria dei sottogruppi appartenenti a gruppi fuchsiani, quando, attraverso ad un teorema generale di diramazione, se ne consideri l'essenziale significato algebrico-geometrico. E ne vien suggerita una presentazione autonoma, che ci sembra meriti di venir segnalata (com'è nel programma di questa Nota e d'altra successiva) per la sua aderenza al pensiero geometrico, ed ai problemi nuovi che l'interpretazione comporta; pur lasciando per ora da parte i riflessi nel campo automorfo, che ci proponiamo d'illustrare altrove.

1. Sia f una curva algebrica irriducibile di genere π , e C un'altra curva, pure irriducibile, di genere p , rappresentata sulla f n -pla, cioè contenente un'involuzione γ_n' birazionalmente identica ad f . Indicheremo coi simboli f, C anche le relative riemanniane, e con D_1, D_2, \dots, D_b i punti del gruppo di diramazione Δ esistente su f .

(1) Nella seduta del 3 febbraio 1929.

(2) Cfr. JORDAN, *Traité des substitutions*, ecc. [Paris, Gauthier-Villars (1870)] Liv. III^e, Cap. I, IV; BIANCHI, *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni*, ecc. [Pisa, Spoerri (1899)] Cap. VIII.

(3) KLEIN, *Vorlesungen über das Ikosaeder*, ecc. [Leipzig, Teubner (1884)]; KLEIN-FRICKE, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen* [ibid. (1890-92)].

In particolare se f è razionale (piano complesso \bar{z}) la C si potrà rappresentare con un'equazione $\varphi(w, \bar{z}) = 0$, la w essendo funzione algebrica da n valori di \bar{z} , diramata in D_1, D_2, \dots, D_h .

Fissiamo, una volta per sempre, sulla riemanniana f , un punto A diverso dai D_i , e così pure l'ordinamento degli indici per i punti A_1, A_2, \dots, A_n di C corrispondenti ad A . Con riferimento ai cammini chiusi (che supporremo sempre *orientati*) coll'origine e l'estremo in A (*relativi ad A*) resterà individuato senz'ambiguità il *gruppo di monodromia* M della rappresentazione di C su f . Esso è un gruppo *transitivo*, d'ordine $N \cong n$, le cui operazioni s'indicheranno con $s_1, s_2, \dots, s_N (s_1 = 1)$.

Consideriamo in particolare un *cappio*, relativo al punto D_i , ed avente per *direttrice* una linea l da A a D_i ; e indichiamo con v'_i, v''_i, \dots gli ordini dei cicli in cui si decompone la relativa sostituzione s del gruppo M . I numeri v'_i, v''_i, \dots sono indipendenti dalla l , in quanto un cambiamento di quella direttrice non fa che sostituire ad s una sua trasformata; essi danno notoriamente le *molteplicità delle coincidenze* che si verificano fra i punti del gruppo di γ_n^1 corrispondente a D_i . Il m. c. m. v_i dei numeri v'_i, v''_i, \dots , cioè il *periodo* della sostituzione s , si dirà l'*indice di diramazione* relativo al punto D_i ; in particolare se $v'_i = v''_i = \dots = v_i$ la diramazione in D_i si dirà *regolare*.

È pur noto, che, segnati per A $2p$ cicli costituenti un *sistema di retrosezioni*, ed h cappi relativi ai punti D_i , il gruppo M può venir generato mediante le $2p + h$ sostituzioni relative; le quali son legate da una *relazione fondamentale* che esprime la *condizione d'esistenza* di C (rappresentata sulla f n -pla coi punti di diramazione D_i ed il gruppo di monodromia M) e che non abbiamo bisogno di scrivere in modo esplicito⁽¹⁾.

2. Pensiamo ora s_1, s_2, \dots, s_N come *simboli od elementi*, e ad ogni operazione s del nostro gruppo M associamo la sostituzione

$$(1) \quad \sigma = \left(\begin{matrix} ss_1, ss_2, \dots, ss_N \\ s_1, s_2, \dots, s_N \end{matrix} \right),$$

nel cui numeratore ogni prodotto ss_i si pensi surrogato col corrispondente simbolo s_j ⁽²⁾. Al variare di s in M , σ varia in un *gruppo regolare* Γ di sostituzioni, d'ordine eguale al grado, *olodricamente isomorfo ad M*, e *transitivo*, la cui considerazione risale notoriamente al Jordan.

(1) Basterà sia tenuto presente che quella relazione si scrive eguagliando all'identità un prodotto, i cui fattori sono le $2p + h$ generatrici e le inverse delle prime $2p$ (in ordine opportuno). Cfr. p. es. HURWITZ, *Sulle superficie di Riemann con dati punti di diramazione* (trad. ital. di A. BRAMBILLA) [«Giornale di Mat.» XLI (1903) pp. 337-376] Parte V, § 1. Le sostituzioni ivi considerate son relative agli *attraversamenti* anziché ai *percorsi* dei cammini considerati; ma i due punti di vista son del tutto equivalenti.

(2) Avvertiamo che scriveremo i prodotti nell'*ordine operatorio*, cioè cominciando da destra.

Immaginiamo ancora di attribuire ogni σ a quei cicli della f (relativi ad A) che producono la corrispondente s . Allora è facile vedere anche Γ si può considerare come gruppo di monodromia per una curva G rappresentata sulla f *N-pla* col gruppo di diramazione Δ .

Tutto si riduce ad osservare che le relazioni esprimenti le condizioni d'esistenza di C e G , si deducono una dall'altra per il tramite dell'isomorfismo oloedrico fra i corrispondenti gruppi M e Γ .

Chiameremo G , la *curva di Galois* relativa alla rappresentazione di C su f , o, il che è lo stesso, alla γ_n^i di C ; nè ci tratteremo sulla sua costruzione algebrica che ci ricondurrebbe alla nota definizione della *risolvante di Galois*, colle avvertenze derivanti dalla presenza del parametro α (f razionale) o dei due parametri legati dall'equazione di $f^{(1)}$.

La curva G contiene un'involuzione γ_N^i , birazionalmente identica ad f , che verrà indicata con J ; i punti del gruppo Σ corrispondente ad A designandosi con S_1, S_2, \dots, S_N . In modo preciso converremo che il punto S_i resti associato al simbolo s_i della (1), con che ad un cammino della riemanniana G congiungente S_i con S_i corrisponderà su f un cammino *chiuso* (relativo ad A) che opera la s_i del gruppo M e l'associata σ_i di Γ che muta s_i in s_i .

3. Si osserva subito (ed è *proprietà caratteristica dei gruppi regolari*) che ogni operazione non identica di Γ sposta tutti gli elementi, quindi è individuata dal simbolo che associa ad s_i (o ad un qualunque s_i) e che appena una σ lascia fisso un simbolo, è necessariamente identica. Da ciò scende immediatamente una *proprietà fondamentale* della nostra curva G .

Si faccia descrivere ad S_i un *ciclo chiuso* γ_i della riemanniana G , e sia γ il ciclo corrispondente su f . La sostituzione σ di Γ inerente a γ dovrà lasciar fermo l'elemento s_i , quindi sarà identica; sicchè i cammini descritti contemporaneamente dai punti S_i saranno *chiusi* al pari di γ_i . Da ciò con un notissimo ragionamento si deduce che S_i ed S_i si corrispondono in una trasformazione birazionale τ_i della G in se stessa, ed in definitiva che l'involuzione J è generata da un gruppo T di N trasformazioni birazionali della curva G .

Si ha così l'interpretazione geometrica, d'altronde ben nota, d'una proprietà fondamentale della risolvante di Galois. E si apprende inoltre che la nostra G , in quanto multipla sulla f , è una *riemanniana regolare* nel senso di Klein e Dyck.

Vien fatto ora naturalmente di associare alla τ_i , che muta S_i in S_i , la sostituzione s_i di M legata ad S_i ; con che si viene a fissare i due gruppi T ed M una corrispondenza biunivoca. Vedremo subito che tale

(1) Il lettore avrà notato che (in accordo con vari AA.), per *risolvante di Galois* intendiamo, non l'equazione di grado $n!$ costruita nel modo noto, ma il suo *fattore irriducibile essenziale*,

corrispondenza muta $\tau_i \tau_k$ in $s_k s_i$; si tratta dunque d'un *isomorfismo sgheambo*, che può convertirsi in *oloedrico* surrogando ciascuna τ_i colla propria inversa τ_i^{-1} .

La prova dell'asserto si raggiunge facilmente. Dicasi S_j il punto trasformato di S_k mediante τ_i , in simboli $S_j = \tau_i(S_k) = \tau_i(\tau_k(S_i)) = \tau_i \tau_k(S_i)$, e si indichino con λ_i, λ_k due cammini, tracciati sulla G , da S_i ad S_i e da S_i ad S_k , con l_i, l_k i corrispondenti cammini *chiusi* di f relativi ad A . La trasformazione τ_i muta λ_k in un cammino λ'_k dal punto $S_i = \tau_i(S_i)$ al punto $S_j = \tau_i(S_k)$, la cui immagine è ancora l_k ; e siccome $\lambda_i + \lambda_k$ congiunge S_i con S_j , così il ciclo omologo $l_i + l_k$ dovrà produrre in M la sostituzione s_j . Ma d'altra parte l_i, l_k operano rispettivamente le s_i, s_k , onde risulta $s_j = s_k s_i$; e pertanto tale è l'operazione di M associata alla $\tau_i \tau_k$ di T .

Dal *carattere regolare* dell'involuzione J , cioè dal suo modo di generazione, si desume in modo noto, la *regolarità delle sue coincidenze*, le quali si presentano nei gruppi corrispondenti ai punti D_i ; intendendosi con ciò di dire che ciascuno di quei gruppi consta d'un certo numero $\frac{N}{v}$ di punti distinti, ciascuno dei quali è coincidenza *v-pla* per la J .

Ma si può facilmente precisare di più, mostrando che $v = v_i$. Basta perciò tener presente che ogni σ di Γ si decompone in cicli *tutti dello stesso ordine* v eguale al *periodo* della corrispondente s , dei quali ad es. quello che contiene s_i è $(s_i, s s_i, \dots, s^{v-1} s_i)$, indi identificare s colla sostituzione di M prodotta da un *cappio* relativo a D_i , che ha precisamente il periodo v_i .

4. Fin qui si è considerata la curva G come multipla della f ; ma è facile conseguire, nell'attuale interpretazione, un altro teorema fondamentale della teoria di Galois, mostrando che *la G è anche multipla della C* , e precisamente che l'involuzione J è composta con un'involuzione I , d'ordine $m = \frac{N}{n}$, *birazionalmente identica a C* . Anzi, come vedremo, di tali involuzioni, ve n'ha, su G , n tra di loro distinte.

Si osservi perciò che se al punto A_1 di C si associano i punti S_1, S_2, \dots, S_m di G legati alle m sostituzioni s_1, s_2, \dots, s_m di M che lasciano fisso l'indice 1 (le quali son proprio m per la transitività di M) una circolazione qualunque di A_1 , sulla C , ha solo l'effetto di permutare tra loro quei punti, senza mai scambiarli con altri del gruppo Σ . Ed inverso a quella circolazione di A_1 , corrisponde una circolazione di A su f la quale produce una s che lascia fisso l'indice 1, quindi una σ (associata) del gruppo Γ che permuta tra di loro le s_1, s_2, \dots, s_m .

Tanto basta per concludere, che, al variare di A_1 sopra C , i punti S_1, S_2, \dots, S_m variano in un'involuzione I d'ordine m , ecc.; in particolare se A_1 si porta in A_2 , quei punti si portano nei punti del gruppo Σ associati alle sostituzioni di M che mutano l'indice 1 nell'indice 2, e così via.

Tutto va sostanzialmente allo stesso modo, se (fisso restando il riferimento ad A_1) per s_1, s_2, \dots, s_m s'intendono le sostituzioni che mutano un assegnato indice i in 1 ; e così si ottengono le n involuzioni distinte di cui sopra.

Tali osservazioni si completano notando, che, come la J , anche la I è generata da un gruppo T_1 di trasformazioni birazionali della curva G in sé; per guisa che G è riemanniana regolare anche come multipla di C . Il gruppo T_1 , costituito dalle trasformazioni $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ (associate alle s_1, s_2, \dots, s_m) è un sottogruppo d'indice n in T ; trasformandolo mediante le operazioni di T si hanno in tutto, con T_1 , n sottogruppi distinti che generano le involuzioni predette. E per ottenerli tutti basta assumere come sostituzioni trasformanti quelle d'un sistema completo di rappresentanti delle classi in cui si decompone T (mod. T_1).

5. Lasciando al lettore l'esame d'altri dettagli, vogliam trattenerci brevemente, in tema di raffronti, sopra alcune modalità dei rapporti considerati, che riportano ad una nota osservazione.

Fatto riferimento all'involuzione I , indichiamo con R il simbolo dell'operazione razionale, che, applicata ad un punto di G dà la sua immagine su C (nella corrispondenza $(m, 1)$ definita da I), talchè sarà $A_1 = R(S_1)$. Fissiamo poi nel gruppo M , n operazioni $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_n$ ($s_1 = 1$), delle quali la i -esima muti 1 in i ; allora, per un'osservazione al numero precedente, se τ_i è la trasformazione di T associata ad \bar{s}_i , il punto $\tau_i(S_1)$ avrà per corrispondente su C il punto A_i , e ciò potrà esprimersi scrivendo $A_i = R(\tau_i(S_1))$.

La $R(\tau_i)$ è un'operazione razionale del tipo R ; indicandola con R_i , e per simmetria, scrivendo R_i in luogo di R avremo

$$(2) \quad A_1 = R_1(S_1), A_2 = R_2(S_1), \dots, A_n = R_n(S_1).$$

Se ora immaginiamo di porre al posto di S_1 un altro, S_b , fra i punti del gruppo Σ , è chiaro che le (2) daranno ancora i punti A_1, A_2, \dots, A_n ma in ordine alterato. Ebbene, ciò che vogliamo osservare, si è che quei punti si permutano a norma della sostituzione s_b , cioè che se s_b muta l'indice α nell'indice β si ha $R_\alpha(S_b) = A_\beta$.

Ed invero, detta al solito τ_b l'operazione di T associata ad s_b , si ha $R_\alpha(S_b) = R_\alpha(\tau_b(S_1)) = R(\tau_\alpha \tau_b(S_1))$; e d'altronde, a motivo dell'isomorfismo sghembo segnalato al n. 3, il punto $S_j = \tau_\alpha \tau_b(S_1)$ è associato alla sostituzione $s_j = \bar{s}_b s_\alpha$. Ma questa muta l'indice 1 nell'indice β , dunque, per l'osservazione del numero precedente, S_j appartiene al gruppo di I omologo di A_β , ed infine $R(S_j) = R_\alpha(S_b) = A_\beta$, c. d. d.

6. Poniamoci ora la domanda: Qual'è il gruppo di monodromia della rappresentazione di G su C ? Anche a questa domanda si risponde facilmente.

Si tratta di precisare come si permutano i punti S_1, S_2, \dots, S_m , vale a dire i relativi simboli s_1, s_2, \dots, s_m , quando il punto A_1 descrive su C un cammino chiuso γ_1 . A ciò valgono le considerazioni seguenti:

Al cammino γ , risponde su f un cammino chiuso γ , e la relativa s lascia fisso l'indice τ , appunto perchè A_τ ritorna in se stesso. Di conseguenza i punti S_1, S_2, \dots, S_N si permutano a norma della (1) associata ad s ; ma poichè s non sposta l'indice τ , così quella σ permuta fra di loro i simboli s_1, s_2, \dots, s_m alla guisa della sostituzione:

$$(3) \quad \eta = \begin{pmatrix} s s_1 & s s_2 & \dots & s s_m \\ s_1 & s_2 & \dots & s_m \end{pmatrix}.$$

L'insieme delle η associate alle s che non spostano l'indice τ porge il gruppo cercato e pertanto:

Il gruppo di monodromia relativo alla rappresentazione di G su C è il gruppo regolare di sostituzioni su $m = \sum_{n=1}^N$ elementi, associato al sottogruppo M_τ delle m operazioni di M che lasciano fisso l'indice τ .

Dopo ciò riesce pur facile precisare il modo di diramazione della rappresentazione considerata. Ed anzitutto è chiaro che i punti di diramazione dovranno, sulla C , cercarsi nei gruppi di γ_n^1 dotati di coincidenze, cioè corrispondenti ai punti D_i di f .

Sia D'_i uno di questi punti, omologo di D_i , multiplo secondo v'_i (divisore di v_i) per la γ_n^1 , ed l_i un *cappio*, coll'origine in A_τ , circondante D'_i . Ad l_i risponde su f un *cappio* l che gira v'_i volte intorno a D_i ; sicchè se s è la sostituzione di M relativa ad un *cappio semplice* colla stessa direttrice, la sostituzione relativa ad l sarà $s^{v'_i}$. Ma s ha, come si è visto, il periodo v_i , quindi $s^{v'_i}$ avrà il periodo $\mu'_i = \frac{v_i}{v'_i}$, e la corrispondente η si

decomporrà in $\frac{m}{\mu'_i}$ cicli d'ordine μ'_i . In conclusione il gruppo dell'involuzione I omologo di D'_i si compone di $\frac{m}{\mu'_i}$ punti μ'_i -pli, o in altre parole D'_i è un *punto di diramazione regolare* d'indice $\mu'_i = \frac{v_i}{v'_i}$ per la rappresentazione di G su C .

La diramazione in D'_i *scompare* se $v'_i = v_i$, e può anche mancare del tutto sulla C se ciò si verifica per ogni v'_i , cioè se la γ_n^1 è *regolarmente diramata* sulla f . Ci si persuade su facili esempî che ciò può verificarsi *senza che la γ_n^1 sia regolare*, cioè generata da un gruppo di trasformazioni birazionali della C in sè; essendo d'altronde chiaro che, in quest'ultima ipotesi, la C è *curva di Galois di sè medesima*, e l'involuzione I si riduce, su essa, all'identità.

7. Accanto alla considerazione della *curva di Galois*, si presenta spontaneamente quella di altre curve covarianti del legame razionale tra C ed f . Sono le *curve risolventi* che restan così definite:

Sia M_i un sottogruppo del gruppo di monodromia M , T_i il corrispondente sottogruppo, d'ordine m_i del gruppo di trasformazioni birazionali T della G . Le operazioni di T_i , applicate ai punti di G generano un'involuzione I_{m_i} colla quale risulta composta la J . La curva C_i immagine di I_{m_i} è quella che si dirà *curva risolvente* relativa al sottogruppo M_i ; ed è chiaro ch'essa è *multipla sulla f* secondo l'intero $n_i = \frac{N}{m_i}$, ch'è l'indice di M_i in M .

I rapporti fra la curva C_i e le curve G, f possono venir facilmente precisati seguendo il modello dei ragionamenti esposti. Si trova così che il gruppo di monodromia della rappresentazione di G su C_i è il gruppo regolare di sostituzioni su m_i elementi associato (come sopra) ad M_i , mentre il gruppo di monodromia della rappresentazione di C su f è oloedricamente isomorfo al gruppo complementare di M_i in M . Quando M_i è, come al numero precedente il sottogruppo delle operazioni di M che lasciano fisso l'indice i (o l'indice h) si ricade naturalmente sulla C .

La curva di Galois G_i della corrispondenza tra C_i ed f , è anch'essa una risolvente, e precisamente è l'immagine dell'involuzione Λ generata su G dal gruppo comune a T_i ed a tutti i suoi trasformati mediante le operazioni di T . I casi, per dir così, estremi, sono quello in cui Λ si riduce all'identità, quindi $G_i = G$, che si presenta ad es. per la C , e quello in cui il sottogruppo M_i è invariante in M (quindi T_i in T). Allora Λ coincide con I_{m_i} , e la curva C_i è anche la curva di Galois di sé medesima.

Matematica. — *L'omografia di Riemann per le ipersuperficie di uno spazio curvo.* Nota di T. BOGGIO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In alcune Note, pubblicate lo scorso anno in questi « Rendiconti » ⁽²⁾, ho esposto una nuova trattazione vettoriale, molto semplice e diretta, delle proprietà fondamentali dell'omografia di Riemann relativa ad uno spazio curvo qualunque.

In questa Nota, proseguendo nello stesso ordine di idee, stabilisco la relazione che intercede fra l'omografia di Riemann relativa ad uno spazio curvo qualunque e quella relativa ad una ipersuperficie in esso immersa.

Ne discende poi subito una relazione fra la curvatura riemanniana dello spazio curvo e quella dell'ipersuperficie considerata.

(1) Nella seduta del 17 febbraio 1929.

(2) T. BOGGIO, *Omografie e differenziali relativi ad uno spazio curvo*; *Id.*, *L'omografia di Riemann relativa ad uno spazio curvo*; *Id.*, *Identità di Bianchi e omografia di gravitazione*; *Id.*, *Spazi curvi a tre dimensioni ed omografia di Ricci*. Nelle citazioni indicherò queste Note rispettivamente con Nota I, Nota II, Nota III, Nota IV.

La relazione accennata, fra le due omografie di Riemann, che equivale, in sostanza, alle note equazioni di Gauss e Codazzi, generalizzate agli spazi curvi, viene qui ottenuta con calcoli estremamente semplici e brevi, laddove nelle trattazioni usuali si richiedono pagine e pagine di calcoli; e ciò dovrebbe ormai convincere anche gli ultimi dubbiosi circa l'utilità dei metodi vettoriali applicati alla Géometria differenziale.

In una Nota successiva saranno esposte alcune applicazioni delle formule qui ottenute, a spazi con curvatura costante.

1. *Relazione fra omografie di Riemann.* — Sia V_n una varietà ad n dimensioni, descritta dal punto variabile Q , e W_{n-1} una ipersuperficie di V_n ; diciamo poi N il vettore unitario, normale alla W_{n-1} in Q , e tangente alla V_n in Q (il cui verso si intende fissato a piacere) il quale come si sa (*Espaces*⁽¹⁾, p. 185) è unico e ben determinato.

Se indichiamo con u un vettore tangente alla W_{n-1} in Q , è chiaro che se al punto Q si dà uno spostamento qualunque dQ sulla ipersuperficie W_{n-1} (e quindi situato anche sulla V_n), il suo differenziale du risulta un vettore non più tangente, in generale, alla W_{n-1} , ma appartenente allo spazio euclideo E_N , ad un numero di dimensioni N abbastanza grande, nel quale si può sempre considerare immersa la V_n .

Consideriamo poi la componente tangenziale, sulla V_n , del vettore du , cioè il vettore proiezione ortogonale di esso sullo spazio euclideo S_n tangente alla V_n in Q ; talè vettore lo indicheremo con $d_v u$ ⁽²⁾, e lo chiameremo *differenziale di u sulla varietà V_n* .

Consideriamo inoltre il vettore proiezione ortogonale del vettore du sullo spazio euclideo S_{n-1} tangente alla W_{n-1} in Q (e quindi contenuto in S_n); esso lo indicheremo con $d_w u$, e lo chiameremo *differenziale di u sulla ipersuperficie W_{n-1}* . È chiaro che il vettore $d_w u$ si può anche considerare come la proiezione del vettore $d_v u$ sull' S_{n-1} considerato, e si ha ovviamente:

$$(1) \quad d_w u = d_v u - d_v u \times N \cdot N.$$

Differenziando col simbolo δ_v di differenziale sulla varietà V_n , il quale, come si sa (Nota I e II), gode di proprietà analoghe a quelle dell'ordinario simbolo differenziale d negli spazi euclidei (eccezion fatta per la proprietà commutativa dei differenziali secondi), si ha:

$$(2) \quad \delta_v d_w u = \delta_v d_v u - \delta_v d_v u \times N \cdot N - d_v u \times \delta_v N \cdot N - \\ - d_w u \times N \cdot \delta_v N.$$

(1) Con questa abbreviazione intendo indicare l'opera: BURALI e BOGGIO, *Espaces courbes; critique de la Relativité* («S. T. E. N.», Torino, 1924).

(2) Nelle mie Note citate avevo invece indicato con du il differenziale sulla varietà V_n e, con d^*u l'ordinario differenziale di u nello spazio euclideo.

A noi interessa calcolare $\delta_u d_w u$, che ci è dato da una relazione analoga alla (1), cioè:

$$(3) \quad \delta_u d_w u = \delta_v d_w u - \delta_v d_u u \times N \cdot N;$$

ora, siccome $N^2 = 1$, ne segue, differenziando,

$$(4) \quad N \times \delta N = 0,$$

perciò il vettore δN è tangente alla W_{n-1} in Q e coincide quindi con $\delta_v N$ e con $\delta_w N$; moltiplicando scalarmente per N si deduce allora dalla (2):

$$(5) \quad \delta_v d_w u \times N = -d_w u \times \delta_v N.$$

Sostituendo i valori (2), (5) nel secondo membro della (3) si ha senz'altro:

$$\delta_u d_w u = \delta_v d_v u - \delta_v d_v u \times N \cdot N - d_w u \times N \cdot \delta N;$$

osservando che $u \times N = 0$, ne segue

$$d_w u \times N = -u \times dN,$$

perciò, sostituendo nell'ultimo termine, si trae:

$$\delta_u d_w u = \delta_v d_v u - \delta_v d_v u \times N \cdot N + u \times dN \cdot \delta N;$$

scambiando i differenziali d e δ risulta:

$$d_w \delta_u u = d_v \delta_v u - d_v \delta_v u \times N \cdot N + u \times \delta N \cdot dN,$$

e sottraendo dalla precedente:

$$\begin{aligned} \delta_u d_w u - d_w \delta_u u &= (\delta_v d_v u - d_v \delta_v u) - (\delta_v d_v u - d_v \delta_v u) \times N \cdot N + \\ &+ u \times dN \cdot \delta N - u \times \delta N \cdot dN. \end{aligned}$$

Indicando con \mathfrak{R}_v e con \mathfrak{R}_w le omografie di Riemann relative alle varietà V_n e W_{n-1} , e ricordando che si ha ad es. (Nota II):

$$(7) \quad \delta_v d_v u - d_v \delta_v u = \mathfrak{R}_v dQ \delta Q u,$$

potremo scrivere l'eguaglianza precedente così:

$$(8) \quad \mathfrak{R}_w dQ \delta Q u = (\mathfrak{R}_v dQ \delta Q u - \mathfrak{R}_v dQ \delta Q u \times N \cdot N) + \\ + u \times dN \cdot \delta N - u \times \delta N \cdot dN.$$

Questa è la *formula fondamentale* che volevamo ottenere, e che stabilisce una relazione molto semplice fra l'omografia di Riemann \mathfrak{R}_v relativa alla varietà V_n e l'omografia analoga \mathfrak{R}_w relativa all'ipersuperficie W_{n-1} immersa nella V_n .

È chiaro che nella (8) l'espressione chiusa fra le parentesi non è altro che la proiezione, sullo spazio S_{n-1} tangente alla W_{n-1} in Q , del vet-

tore $\mathfrak{N}_v dQ \delta Q u$, cioè è la componente tangenziale relativa a W_{n-1} , di questo vettore.

2. *Trasformazioni della formula fondamentale.* — La formula fondamentale (8) può scriversi sotto altre forme che è utile esaminare.

Se si indica con σ l'omografia fondamentale relativa all'ipersuperficie W_{n-1} , che risulta definita da (*Espaces*, p. 185):

$$(9) \quad \sigma = dN/dQ, \quad \text{cioè} \quad dN = \sigma dQ,$$

colla condizione $\sigma N = 0$, la σ è una dilatazione (*Espaces*, p. 186) e la (8) diventa:

$$(8') \quad \mathfrak{N}_w dQ \delta Q u = \mathfrak{N}_v dQ \delta Q u - \mathfrak{N}_v dQ \delta Q u \times N \cdot N + \\ + u \times \sigma dQ \cdot \sigma \delta Q - u \times \sigma \delta Q \cdot \sigma dQ,$$

ed è chiaro che si possono sostituire a dQ e δQ due vettori unitari tangenti alla W_{n-1} in Q .

Se si introduce l'omografia $H(a, b)$, che è precisamente una *diade* (*Espaces*, p. 13), per la quale si ha:

$$H(a, b) c = a \times c \cdot b,$$

la (8') può ancora scriversi

$$(8'') \quad \mathfrak{N}_w dQ \delta Q u = \mathfrak{N}_v dQ \delta Q u - \mathfrak{N}_v dQ \delta Q u \times N \cdot N + \\ + \{ H(\sigma dQ, \sigma \delta Q) - H(\sigma \delta Q, \sigma dQ) \} u^{(1)}.$$

Se nella (8') si pone $u = d'Q$, e poi si moltiplica scalarmente per un altro differenziale $\delta'Q$ che sia, come $d'Q$, tangente alla W_{n-1} in Q , si ha:

$$(8_1) \quad \mathfrak{N}_w dQ \delta Q d'Q \times \delta'Q = \mathfrak{N}_v dQ \delta Q d'Q \times \delta'Q + \\ + d'Q \times \sigma dQ \cdot \delta'Q \times \sigma \delta Q - d'Q \times \sigma \delta Q \cdot \delta'Q \times \sigma dQ;$$

se ora qui si introducono le coordinate dei punti di V_n e di W_{n-1} si ottengono le cosiddette formule di Gauss generalizzate ⁽²⁾.

Facendo invece il prodotto scalare della (8) per N si ottiene ovviamente un'identità.

(1) Introducendo l'omografia di 3° ordine ξ_3 tale che (*Espaces*, pp. 48 e 49)

$$\xi_3 ab = H(a, b) - H(b, a),$$

è facile vedere che la (8'') può scriversi semplicemente così:

$$\mathfrak{N}_w = \{ 1 - H(N, N) \} \mathfrak{N}_v - \sigma K(\xi_3).$$

(2) BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, 3ª ediz., vol. II, parte II, p. 452 (Zanichelli, Bologna). Per il caso particolare in cui la varietà V_n sia euclidea, le formule di Gauss si trovano pure in: LEVI-CIVITA, *Calcolo differenziale assoluto*, p. 272, formula (30), (Stock, Roma, 1925); in queste formule va però cambiato il segno al primo membro.

Però, tenendo conto della relazione, facile da stabilire,

$$(\delta_v d_v \mathbf{u} - d_v \delta_v \mathbf{u}) \times \mathbf{N} = -\mathbf{u} \times (\delta_u d\mathbf{N} - d_u \delta \mathbf{N}),$$

dalla (8) si deduce, moltiplicando scalarmente per \mathbf{N} ,

$$\mathfrak{R}_w dQ \delta Q \mathbf{u} \times \mathbf{N} + \mathbf{u} \times (\delta_u d\mathbf{N} - d_u \delta \mathbf{N}) = 0;$$

supponendo qui, come prima, $\mathbf{u} = d'Q$, poi introducendo le coordinate si ricavano le cosiddette formule di Codazzi generalizzate⁽¹⁾.

3. *Curvature di Riemann.* — Dalla (8₁) si può trarre una notevole relazione fra le curvature riemanniane \mathfrak{R}_v e \mathfrak{R}_w delle varietà V_n e W_{n-1} , relative al punto Q e alla giacitura individuata da due spostamenti qualunque dQ e δQ , tangenti alla W_{n-1} in Q .

Ricordiamo perciò che, ad es., la curvatura \mathfrak{R}_v è espressa da (*Espaces*, p. 153):

$$(10) \quad \mathfrak{R}_v = \frac{(\delta_v d_v dQ - d_v \delta_v dQ) \times \delta Q}{dQ^2 \cdot \delta Q^2 - (dQ \times \delta Q)^2},$$

ovvero, in virtù della (7):

$$\mathfrak{R}_v = \frac{\mathfrak{R}_v dQ \delta Q dQ \times \delta Q}{dQ^2 \cdot \delta Q^2 - (dQ \times \delta Q)^2},$$

e analogamente per \mathfrak{R}_w , perciò dalla (8₁) avremo, supponendo $d'Q = dQ$ e $\delta'Q = \delta Q$:

$$(11) \quad \mathfrak{R}_w = \mathfrak{R}_v + \frac{dQ \times \sigma dQ \cdot \delta Q \times \sigma \delta Q - (dQ \times \sigma \delta Q)^2}{dQ^2 \cdot \delta Q^2 - (dQ \times \delta Q)^2},$$

che è la relazione cercata; ed è chiaro che in questa frazione è lecito sostituire a dQ e δQ due vettori unitari aventi le stesse direzioni di essi.

Se, in particolare, supponiamo che i vettori dQ , δQ siano tangenti a due linee di curvatura della W_{n-1} passanti per Q , allora essi sono direzioni unite (ortogonali) per la dilatazione σ (*Espaces*, p. 192), perciò si può porre:

$$(11_1) \quad \sigma dQ = -c_1 dQ, \quad \sigma \delta Q = -c_2 \delta Q, \quad (dQ \times \delta Q = 0)$$

ove c_1, c_2 sono le due curvature principali della W_{n-1} in Q , corrispondenti alle linee di curvatura considerate. La (11) ci dà allora:

$$(12) \quad \mathfrak{R}_w = \mathfrak{R}_v + c_1 c_2,$$

perciò si conclude:

Il prodotto di due curvature principali di una ipersuperficie è uguale alla differenza fra le curvature riemanniane (relative alla giacitura determinata dalle

(1) BIANCHI, loc. cit., p. 453.

tangenti alle due linee di curvatura considerate) dell'ipersuperficie e della V_n in cui è immersa l'ipersuperficie.

Una relazione analoga alla (12) sussiste per ogni coppia di linee di curvatura della W_{n-1} passanti per Q .

Supponiamo ora che la varietà V_n , in cui è immersa la W_{n-1} , abbia curvatura riemanniana costante R_0 ; allora è noto (*Espaces*, p. 194) che, per l'omografia di Riemann, si ha:

$$(13) \quad R_v dQ \delta Q = R_0 \{ H(dQ, \delta Q) - H(\delta Q, dQ) \},$$

perciò risulta $R_v dQ \delta Q u \times N = 0$, e allora la (8'') porge:

$$(14) \quad R_w dQ \delta Q = R_0 \{ H(dQ, \delta Q) - H(\delta Q, dQ) \} + \\ + \{ H(\sigma dQ, \sigma \delta Q) - H(\sigma \delta Q, \sigma dQ) \};$$

da questa formula, come mostrerò in una Nota successiva, si può dedurre una notevole proprietà per le ipersuperficie degli spazi a quattro dimensioni.

Matematica. — *Sulle decomposizioni in somme di quadrati dei polinomi definiti o semidefiniti.* Nota di S. CHERUBINO presentata ⁽¹⁾ dal Corresp. G. SCORZA.

Il problema della ricerca di una condizione necessaria e sufficiente cui debbano soddisfare i coefficienti di un polinomio reale $f(x)$ di grado assegnato perchè il suo segno resti costante su tutto l'asse delle x (o in un intervallo) sembra sia rimasto nell'ombra, sino al recente Congresso di Bologna, nel quale il prof. Picone ⁽²⁾ ha posto in rilievo come una importante questione di approssimazione (che risale a Tchebichef) si riduca, in sostanza, appunto alla ricerca della condizione predetta.

Nello stesso Congresso ⁽³⁾ comunicammo un primo criterio — che ci è parso in seguito anche il più notevole — contenente appunto una interessante condizione necessaria e sufficiente perchè un polinomio $f(x)$ sia definito o semidefinito, cioè di segno costante, su tutto l'asse delle ascisse. Insieme a questo criterio facemmo conoscere anche alcuni teoremi sull'enumerazione delle radici di un tal polinomio, e sulle sue decomposizioni in somme di quadrati.

(1) Nella seduta del 17 febbraio 1929.

(2) Nella seduta del 5 settembre 1928 (Sezione IV, A) in occasione di una brillante comunicazione del CANTELLI. Il prof. PICONE si era imbattuto nello stesso problema anche nel corso di altre sue ricerche e ce ne aveva fatto cenno, sì che ci sembrò utile di studiare la questione. Cfr anche il problema trattato da A. HURWITZ nella Note: *Ueber definite Polynome* [*Math. Ann.*, Bd. 73 (1913), pp. 173-176].

(3) Nella seduta di sabato 8 settembre 1928 (Sezione I, A).

Nel redigere per iscritto la comunicazione predetta, ci siamo accorti che i vari teoremi che già possedevamo potevano esser meglio precisati con l'aggiunta di altre proposizioni, sì che ne risultava un complesso di osservazioni che crediamo metta conto di segnalare subito agli studiosi, specie a coloro che ebbero ad interessarsi alla quistione indicata dal Picone e che altre analoghe potrebbero porsi.

Intanto poniamo subito in rilievo che benchè, almeno sotto un certo aspetto ⁽¹⁾, la quistione sembri strettamente collegata con quella che diede origine al teorema di Sturm, pure nella nostra analisi non abbiamo mai fatto ricorso a questo celebre teorema, nè ai lavori che da esso ebbero origine.

Invece il problema propostoci si è rivelato intimamente legato a quello della decomposizione di un polinomio definito o semidefinito in somme di quadrati ed a certe forme quadratiche, che diciamo *connesse* al polinomio.

Ciò non farà meraviglia quando si ricordi che i classici lavori dello Hermite sulle funzioni di Sturm sono appunto imperniati sulla teoria delle forme quadratiche ⁽²⁾ e che il bel teorema di Cayley-Borchardt ⁽³⁾ si dimostra ricorrendo ad una forma quadratica.

1. È chiaro che i polinomi definiti o semidefiniti (a coefficienti reali) sono tutti e soli quelli le cui radici o sono tutte complesse ovvero alcune reali e le rimanenti complesse, con quelle reali tutta di molteplicità pari. Quindi il grado del polinomio è sempre pari e il suo segno costante coincide con quello del coefficiente del termine di grado massimo.

Ne segue facilmente che ogni polinomio $f(x)$ definito o semidefinito è necessariamente quadrato di un altro polinomio, ovvero è somma dei quadrati di due o più polinomi: il che, ovviamente, è anche sufficiente (ed è noto) ⁽⁴⁾.

Fra le decomposizioni di $f(x)$, definito o semidefinito, in somme di quadrati di altri polinomi, interessano principalmente quelle in cui le basi di questi quadrati sono linearmente indipendenti (*decomposizioni irriducibili*).

Orbene, un primo risultato notevole è che:

a) perchè un polinomio $f(x)$, di grado $2m$, sia definito occorre e basta che sia decomponibile nella somma di $m + 1$ quadrati a basi (linearmente) indipendenti (a meno di un fattore eguale al primo coefficiente del polinomio).

b) perchè sia semidefinito occorre e basta che nelle somme di quadrati in cui esso è decomponibile, quelli a basi indipendenti siano sempre in numero non superiore ad m (a meno, etc., c. s.)

(1) Ad es. quando, dato un polinomio a coefficienti numerici, ci si proponga di riconoscere se esso è oppur no di segno costante in un dato intervallo.

(2) Cfr., ad es., la Monografia di MIGNOSI G., *Teorema di Sturm e sue estensioni*. [« Rend. Circ. di Pal. », t. XLIX (1925) fasc. I].

(3) Pochi anni fa acutamente perfezionato dal CIPOLLA M., *Il discriminante e il numero delle radici...* [« Atti Acc. Gioenia », vol. X (1917)].

(4) Cfr., ad es., HILBERT, *Ueber Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten*. [« Math. Ann. » Bd. 32, 1888, pp. 342-350].

c) perchè sia semidefinito ed abbia radici tutte reali occorre e basta che sia quadrato di un altro polinomio, senza poter essere somma di due o più quadrati a basi indipendenti (a meno, etc., c. s.).

Questi tre teoremi dipendono da quest'altro la cui dimostrazione è molto semplice, e da alcune osservazioni elementari sul prodotto di matrici:

d) ogni polinomio definito o semidefinito di grado $2m$, a radici non tutte reali, è sempre eguale al primo coefficiente moltiplicato per la somma dei quadrati di due polinomi uno di grado m , l'altro di grado $\leq m-1$, quindi linearmente indipendenti.

2. Il nostro polinomio $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, $n = 2m$, definito o semidefinito, sia decomposto nella somma di $q+1$ quadrati.

$$(1) \quad f(x) = a_0 \cdot \sum_{r=0}^q (e_{r0} x^m + e_{r1} x^{m-1} + \dots + e_{rm})^2 = a_0 \cdot \sum_{k=0}^{0 \dots m} \sum_{r=0}^q e_{rk} e_{rs} x^{m-(k+s)}.$$

Ponendo

$$(2) \quad a_{ks} = a_0 \sum_{r=0}^q e_{rk} e_{rs} = a_{sk} \quad (k, s = 0, 1, \dots, m)$$

e considerando la forma quadratica

$$\varphi(y) = \varphi(y_0, y_1, \dots, y_m) = \sum_{k,s} a_{ks} y_k y_s$$

si ha

$$(3) \quad \varphi(y) = a_0 \sum_{r=0}^q (e_{r0} y_0 + e_{r1} y_1 + \dots + e_{rm} y_m)^2.$$

Dalle (1)–(2) seguono subito le

$$(4) \quad a_i = \sum_{k+s=i} a_{ks} \quad (k, s = 0, 1, \dots, m) \\ (i = 0, 1, \dots, 2m)$$

mentre la (3) dà luogo all'identità

$$(5) \quad \varphi(x^m, x^{m-1}, \dots, 1) = f(x)$$

Le forme quadratiche i cui coefficienti soddisfano alle (4) le diciamo *associate* ad $f(x)$: quelle fra esse che, come la $\varphi(y)$, sono definite o semidefinite le diciamo *connesse* ad $f(x)$.

È chiaro che ad ogni decomposizione di $f(x)$ in somma di quadrati corrisponde una forma quadratica ad esso connessa, mentre ogni tal forma dà luogo ad infinite decomposizioni di $f(x)$ in somme di quadrati.

Ponendo

$$a = \| a_{ks} \|, \quad e = \| e_{rk} \|^2$$

ed osservando che le (2) dicono che $a = a_0 \cdot e_{-1} \cdot e$, si dimostra che la caratteristica di a , ossia di φ , coincide con quella di e . Da ciò, dal fatto

che, se la matrice e ha caratteristica $p + 1$, $\varphi(y)$ risulta equivalente ad una forma quadratica $\Phi(Y)$ su $p + 1$ variabili, e dalle proposizioni sopra indicate, completate con opportune osservazioni, possono dedursi le seguenti interessanti conseguenze:

a) perchè $f(x)$ sia definito, occorre e basta che fra le forme quadratiche ad esso connesse ve ne sia una (almeno) definita.

b) perchè $f(x)$ sia semidefinito, occorre e basta che esista qualche forma quadratica ad esso connessa, ma che fra queste non ve ne sia alcuna definita.

c) se $f(x)$ è un polinomio semidefinito a radici tutte reali, di forme ad esso connesse ve ne è una ed una sola e questa è di caratteristica uno.

3. L'importanza delle forme connesse a un dato polinomio (definito o semidefinito) oltre che dalle proposizioni precedenti, è messa in rilievo dal teorema che andiamo ad enunciare, il quale dipende dalla seguente osservazione sulle decomposizioni di una forma quadratica reale definita o semidefinita in somma di quadrati di forme lineari omogenee (a coefficienti reali):

se una forma quadratica si trova decomposta in una somma di quadrati di forme lineari omogenee indipendenti (in numero necessariamente eguale alla sua caratteristica) ogni altra decomposizione si ottiene da questa operando sulle forme basi con una sostituzione lineare omogenea la cui matrice dei coefficienti è ortogonale ⁽¹⁾.

Esprimendo questo fatto col dire che: *le decomposizioni in somme di quadrati di forme lineari omogenee di una stessa forma quadratica sono fra loro equivalenti* e dicendo che due decomposizioni di uno stesso polinomio in somme di quadrati sono fra loro *equivalenti* quando una di esse è a basi (linearmente) indipendenti e quando da questa si passa all'altra operando come sulle forme lineari di cui all'enunciato precedente, si ottiene che ⁽²⁾:

Le decomposizioni di $f(x)$ — definito o semidefinito — in somme di quadrati si distribuiscono in tante classi distinte rispetto alla relazione di equivalenza quante sono le forme quadratiche connesse ad $f(x)$, fra loro distinte. Ogni classe è pienamente caratterizzata dalla corrispondente forma quadratica $\varphi(y)$, connessa ad $f(x)$, nel senso che le decomposizioni di ciascuna classe sono tutte e sole quelle assegnate dalle decomposizioni della forma quadratica $\varphi(y)$ in somme di quadrati.

(1) Se questa matrice è quadrata, si ottengono ancora decomposizioni a basi indipendenti. Se la forma è definita, quindi di caratteristica massima, questa osservazione è quasi immediata: non può dirsi altrettanto quando si tratti di forme semidefinite. Tuttavia, benchè non ci risulti, non intendiamo escludere che questa (e così qualche altra osservazione sulle forme quadratiche che abbiamo inclusa nella memoria) non sia già occorsa altrove, sia pure incidentalmente o sotto altro aspetto.

(2) In questo enunciato, e in tutti quelli che seguono, si suppone, per semplificare gli enunciati, di avere a che fare con polinomi definiti o semidefiniti *positivi*, cioè che $a_0 > 0$.

4. Passando ad esaminare le relazioni esistenti fra queste forme connesse, le decomposizioni in somme di quadrati e le radici del polinomio $f(x)$, ci è riuscito di fare varie osservazioni, di cui le più interessanti sono riassunte brevemente qui appresso:

a) se $f(x)$, semidefinito di grado $2m$, possiede p coppie di radici complesse e le rimanenti $2(m - p)$ sono reali, la massima caratteristica delle forme quadratiche ad esso connesse è $p + 1$ e quindi le sue decomposizioni in somme di quadrati non possono avere più di $p + 1$ basi indipendenti. Anzi esiste certamente (almeno) una forma connessa di caratteristica $p + 1$, quindi una decomposizione in somma di $p + 1$ quadrati a basi indipendenti, e precisamente una tale che le basi di questi quadrati abbiano per massimo comun divisore il polinomio delle radici reali di $f(x)$, ciascuna con molteplicità dimezzata.

Questa proposizione è invertibile in tutte le sue parti.

Dopo aver osservato che: $q + 1$ polinomi di grado m , linearmente indipendenti, hanno il massimo comun divisore di grado non superiore ad $m - q$, si comprende le portata della seguente proposizione, che è conseguenza della precedente:

b) i polinomi semidefiniti di grado $2m$ che ammettono almeno $2(m - q)$ radici reali sono tutti e solo quelli che sono somme dei quadrati di non più di $q + 1$ polinomi (di grado $\leq m$), indipendenti (linearmente).

Questa proposizione, insieme a quella del n. 3, permette di invertire la c) del n. 2, e cioè ci consente di affermare che:

c) affinché un polinomio semidefinito sia a radici tutte reali, occorre e basta che di forme quadratiche ad esso connesse ve ne sia una ed una sola e questa sia di caratteristica uno.

Quindi:

d) un polinomio ha le sue radici tutte reali allora e solo allora che ad esso, od al suo quadrato, sia connessa una ed una sola forma quadratica e questa sia di caratteristica uno.

Vale anche la proposizione più generale:

e) perchè un polinomio di grado m possieda esattamente $m - 2\lambda$ radici reali, occorre e basta che la massima caratteristica delle forme connesse al suo quadrato sia $2\lambda + 1$.

Geometria. — *Sugli elementi di 2° ordine delle curve di una superficie.* Nota di E. BOMPIANI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. In due Note di questi « Rendiconti » ⁽²⁾ ho trovato opportuno associare ad un elemento di 2° ordine di una curva tracciata sopra una superficie dello spazio ordinario due quadriche che ho dette quadriche asintotiche osculatrici dell'elemento. Fra queste trovansi la quadrica di Lie e le quadriche di Darboux.

Considerazioni analoghe a quelle allora svolte permettono di associare ad un tale elemento due nuove quadriche: qui ne dò le equazioni, riservandomi di esporne ulteriori conseguenze in altra Nota.

2. Sia data una superficie σ ad asintotiche non coincidenti (del resto reali o complesse). Assunte queste come linee coordinate u ($dv = 0$) e v ($du = 0$) su σ le coordinate x^i proiettive omogenee dei punti di σ soddisfanno ad un sistema del tipo

$$(1) \quad \begin{cases} x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v + n x \\ x_{vv} = \theta_v x_v + \gamma x_u + v x \end{cases} \quad \left(x_u = \frac{\partial x}{\partial u}; \text{ ecc.} \right)$$

ove θ, β, γ, n e v sono funzioni di u e v soddisfacenti alle condizioni di integrabilità di (1).

Se $\beta\gamma \neq 0$, cioè nessuna delle tangenti asintotiche nella regione considerata σ ha contatto quadripunto con σ , si può porre $\theta = \log \beta\gamma$; le coordinate x^i che soddisfanno ad (1) con questa posizione si dicono le *coordinate normali* (secondo Fubini) dei punti di σ .

Ci serviremo in seguito di queste coordinate normali; i risultati cui si arriva, se conservano senso, valgono anche quando β o γ si annullano.

(1) Nella seduta del 3 febbraio 1929.

(2) *La geometria delle superficie considerate nello spazio rigato* [seduta dell'11 aprile 1926] e *Ancora sulla geometria ecc.* [del 6 settembre 1926].

Le derivate terze delle coordinate normali, tratte dalle (1), valgono

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} x_{uuu} &= \beta x_{uv} + \left[\left(\frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial u} \right)^2 + \frac{\partial^2 \log \beta \gamma}{\partial u^2} + n \right] x_u + \beta \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial u} x_v + n \frac{\partial \log \beta \gamma n}{\partial u} x \\ x_{uuv} &= \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial u} x_{uv} - \beta \gamma \mathcal{K} x_u + \left(\beta \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} + n \right) x_v + (v\beta + n v) x \\ x_{uvv} &= \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial v} x_{uv} - \beta \gamma \mathcal{K} x_v + \left(\gamma \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} + v \right) x_u + (n\gamma + v u) x \\ x_{vvv} &= \gamma x_{uv} + \left[\left(\frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial v} \right)^2 + \frac{\partial^2 \log \beta \gamma}{\partial v^2} + v \right] x_v + \gamma \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial v} x_u + v \frac{\partial \log \beta \gamma v}{\partial v} x \end{aligned} \right.$$

ove

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{\beta \gamma} \left(\frac{\partial^2 \log \beta \gamma}{\partial u \partial v} + \beta \gamma \right).$$

Termino questi richiami con le posizioni

$$(3) \quad T = |X, x, x_u, x_v|, \quad N_1 = |X, x, x_u, x_{uv}|, \\ N_2 = |X, x, x_v, x_{uv}|, \quad \Omega = |X, x_u, x_v, x_{uv}|$$

$$(4) \quad \Delta = |x, x_u, x_v, x_{uv}| \neq 0 \quad \text{su } \sigma$$

ove i secondi membri indicano determinanti costruiti con le x^i e con le X^i (coordinate di un punto generico).

3. Consideriamo una curva \mathcal{C} di σ e siano $P_0(u_0, v_0)$ e $P(u, v)$ due suoi punti. Le asintotiche per P_0 e per P determinano un quadrilatero curvilineo, o *maglia asintotica*, di cui i due ulteriori vertici sono $P_1(u, v_0)$ e $P_2(u_0, v)$.

Si consideri la retta PP_1 o *corda asintotica*; fissato P_0 al variare di P su \mathcal{C} questa retta descrive una *rigata (delle corde asintotiche)* la quale ha, per ogni posizione PP_1 di una sua generatrice una ben determinata quadrica osculatrice. Quando $P \rightarrow P_0$ su \mathcal{C} la posizione limite di questa quadrica, quando esista ben determinata, si dirà la *quadrica, osculatrice a \mathcal{C} in P_0 , delle corde asintotiche*.

Scambiando nella costruzione fatta i due sistemi di asintotiche (cioè la retta PP_1 con la PP_2) si avrà, in generale una seconda quadrica osculatrice delle corde asintotiche a \mathcal{C} in P_0 .

Vogliamo procurarci le equazioni di queste quadriche.

4. La curva \mathcal{C} sia individuata dal porre $u = u(t)$ e $v = v(t)$; le funzioni u e v s'intendono derivabili quante volte occorre. Il punto P_0 corrisponda a $t = 0$; può anche farsi $u_0 = v_0 = u(0) = v(0) = 0$; in P sia $t = t$. S'indicheranno con $x, x_u, \dots, u', \dots, v', \dots$ (senza indicarne esplicitamente gli argomenti) i valori di queste funzioni in P_0 .

In un punto P di \mathcal{C} si avrà

$$x(u(t), v(t)) = x + A_1 t + \frac{1}{2} A_2 t^2 + \frac{1}{3!} A_3 t^3 + \dots$$

e nel punto corrispondente $P_1(u(t), 0)$

$$x(u(t), 0) = x + R_1 t + \frac{1}{2} R_2 t^2 + \frac{1}{3!} R_3 t^3 + \dots$$

ove

$$A_1 = x_u u' + x_v v' ; \quad A_2 = x_{uu} u'^2 + 2 x_{uv} u' v' + x_{vv} v'^2 + x_u u'' + x_v v'' ,$$

$$A_3 = x_{uuu} u'^3 + 3 x_{uuv} u'^2 v' + 3 x_{uvv} u' v'^2 + x_{vvv} v'^3 + \\ + 3 [x_{uu} u' u'' + x_{uv} (u' v'' + u'' v') + x_{vv} v' v''] + x_u u''' + x_v v'''$$

e

$$R_1 = x_u u' ; \quad R_2 = x_{uu} u'^2 + x_u u'' ; \quad R_3 = x_{uuu} u'^3 + 3 x_{uu} u' u'' + x_u u''' .$$

La retta PP_1 contiene i punti

$$X = \frac{1}{2} \{ x(u(t), v(t)) + x(u(t), 0) \} \\ Y = \{ x(u(t), v(t)) - x(u(t), 0) \} / t$$

ed è quindi descritta dal punto

$$Z(t, \lambda) = X(t) + \lambda Y(t)$$

al variare di λ ; variando t e λ il punto Z descrive la rigata delle corde asintotiche (di un sistema) relativa a \mathcal{C} (e al punto fissato su di essa, P_0).

Fissata una generatrice di essa (cioè un valore di t) la tangente asintotica della rigata, distinta dalla generatrice rettilinea, nel punto (t, λ) congiunge Z al punto $dZ = Z_t dt + Z_\lambda d\lambda$ quando si determini $dt/d\lambda$ con la condizione

$$|Z, Z_\lambda, Z_t, Z_u dt + 2 Z_{t\lambda} d\lambda| = 0$$

cioè

$$|X, Y, X' + \lambda Y', Z_u| dt + 2 |X, Y, X', Y'| d\lambda = 0 \quad \left(X' = \frac{dX}{dt}, \dots \right).$$

Fissato t (al variare di λ e con $dt/d\lambda$ determinato nel modo ora detto), la retta congiungente Z a dZ descrive la quadrica osculatrice alla rigata lungo la generatrice fissata; per $t \rightarrow 0$ si avrà la quadrica osculatrice cercata in P_0 .

5. Occorre esplicitare l'ultima condizione; al solito, omettendo l'argomento di una funzione s'indicherà il suo valore per $t = 0$,

Si ha, per $t = 0$,

$$X = x \quad ; \quad Y = x_v v' \quad ; \quad X' = x_u u' + \frac{1}{2} x_v v' \quad ;$$

$$Y' = x_{uv} u' v' + \frac{1}{2} x_{vv} v'^2 + \frac{1}{2} x_v v''$$

$$X'' = \frac{1}{2} (A_2 + R_2) = x_{uu} u'^2 + x_{uv} u' v' + \frac{1}{2} x_{vv} v'^2 + x_u u'' + \frac{1}{2} x_v v''$$

$$Y'' = \frac{1}{3} (A_3 - R_3) = x_{uuv} u'^2 v' + x_{uvv} u' v'^2 + \frac{1}{3} x_{vvv} v'^3 + \\ + x_{uv} (u' v'' + u'' v') + x_{vv} v' v'' + \frac{1}{3} x_v v'''.$$

Ne risulta, tenuto conto di (1),

$$|X, Y, X', Y'| = -\Delta u'^2 v'^2.$$

Poniamo poi

$$|X, Y, X' + \lambda Y', Z_u| = |X, Y, X' + \lambda Y', X'' + \lambda Y''| = A + B\lambda + C\lambda^2$$

con

$$A = |X, Y, X', X''| \quad , \quad B = |X, Y, X', Y''| + |X, Y, Y', X''| \quad ,$$

$$C = |X, Y, Y', Y''|.$$

Si ha, per le (1) e (2)

$$A = -\Delta u'^2 v'^2;$$

$$|X, Y, X', Y''| = - \left| x, x_u, x_v, x_{uuv} u'^2 v' + x_{uvv} u' v'^2 + \frac{1}{3} x_{vvv} v'^3 + x_{uv} (u' v'' + u'' v') \right| u' v'$$

$$= -\Delta \left\{ \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial u} u'^2 v' + \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial v} u' v'^2 + \frac{1}{3} \gamma v'^3 + u' v'' + u'' v' \right\} u' v'$$

$$|X, Y, Y', X''| = \left| x, x_v, x_{uv}, x_{uu} u'^2 + \frac{1}{2} x_{vv} v'^2 \right| u' v'^2 + \frac{1}{2} |x, x_v, x_{vv}, x_{uv}| u' v'^3 = \Delta \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial u} u'^3 v'^2$$

$$B = -\Delta \left\{ \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial v} u' v'^2 + \frac{1}{3} \gamma v'^3 + u' v'' + u'' v' \right\} u' v';$$

$$|X, Y, Y', Y''| = \left| x, x_{uuv} u'^2 v' + x_{uvv} u' v'^2 + \frac{1}{3} x_{vvv} v'^3 + x_{vv} v' v'', x_v, x_{uv} \right| u' v'^2 -$$

$$- \frac{1}{2} \left| x, x_u, x_v, x_{uuv} u'^2 v' + x_{uvv} u' v'^2 + \frac{1}{3} x_{vvv} v'^3 + x_{uv} (u' v'' + u'' v') \right| \gamma v'^3$$

$$C = \Delta \left\{ -\beta \gamma u'^2 v' + \left(\gamma \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} + v \right) u' v'^2 + \frac{1}{3} \gamma \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial v} v'^3 + \gamma v' v'' \right\} u' v'^2$$

$$- \frac{1}{2} \Delta \left\{ \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial u} u'^2 v' + \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial v} u' v'^2 + \frac{1}{3} \gamma v'^3 + u' v'' + u'' v' \right\} \gamma v'^3.$$

Posto

$$\mathfrak{A} = A/\Delta v' \quad , \quad \mathfrak{B} = B/\Delta v' \quad , \quad \mathfrak{C} = C/\Delta v'$$

la condizione che determina le tangenti asintotiche della rigata si scrive

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\lambda + \mathfrak{C}\lambda^2) dt = 2u'^2 v' d\lambda,$$

quindi la quadrica cercata è descritta dal punto

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} &= \mu Z + 2u'^2 v' Z_t + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\lambda + \mathfrak{C}\lambda^2) Z_\lambda \\ &= \mu \left(x + \lambda x_v v' \right) + 2u'^2 v' \left[\left(x_u u' + \frac{1}{2} x_v v' \right) + \lambda \left(x_{uv} u' v' + \frac{1}{2} x_{vv} v'^2 + \frac{1}{2} x_v v'' \right) \right] \\ &\quad + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\lambda + \mathfrak{C}\lambda^2) x_v v' \end{aligned}$$

al variare di λ e μ .

Tenute presenti le espressioni di T, N_1, N_2, Ω esse acquistano per il punto \mathfrak{X} i valori seguenti:

$$T = -2\lambda u'^3 v'^2$$

$$\begin{aligned} N_1 &= \mu \lambda v' + u'^2 v'^2 + \lambda \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial v} u'^2 v'^3 + \lambda u'^2 v' v'' + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\lambda + \mathfrak{C}\lambda^2) v' \\ &= \mu \lambda v' - \frac{\lambda}{3} \gamma u' v'^4 + \frac{C}{\Delta} \lambda^2 \end{aligned}$$

$$N_2 = -2u'^3 v' - \lambda \gamma u'^2 v'^3 \quad ; \quad \Omega = \mu + \lambda \nu u'^2 v'^3.$$

L'eliminazione di λ e μ fra $N_1/T, N_2/T, \Omega/T$ dà l'equazione della quadrica cercata nella forma

$$\begin{aligned} 4 \left(N_1 N_2 - \Omega T - \frac{1}{2} \beta \gamma T^2 \right) du^3 - 2 \gamma N_1 T du^2 dv - \frac{2}{3} \gamma N_2 T dv^2 du + \\ + \gamma \left\{ \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial u} du^2 dv + \frac{1}{3} \frac{\partial \log \gamma / \beta}{\partial v} du dv^2 + du dv^2 - dv^2 du \right\} T^2 = 0 \end{aligned}$$

ove si sono scritti i differenziali in luogo delle derivate di u e v per mettere in evidenza il fatto che il parametro t è del tutto inessenziale.

La quadrica analoga ottenuta scambiando nella costruzione i due sistemi di asintotiche (quindi u con v , β con γ , T in $-T$, Ω in $-\Omega$, N_1 con N_2) ha l'equazione

$$\begin{aligned} 4 \left(N_1 N_2 - \Omega T - \frac{1}{2} \beta \gamma T^2 \right) dv^3 + \frac{2}{3} \beta N_1 T du^2 dv + 2 \beta N_2 T dv^2 du + \\ + \beta \left\{ \frac{1}{3} \frac{\partial \log \beta / \gamma}{\partial u} du^2 dv + \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial v} du dv^2 + (du dv^2 - dv^2 du) \right\} T^2 = 0, \end{aligned}$$

Se s'introducono i differenziali secondi controvarianti rispetto a $\beta\gamma du dv$, cioè se si pone

$$\delta^2 u = d^2 u + \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u} du^2, \quad \delta^2 v = d^2 v + \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v} dv^2$$

le equazioni delle due quadriche trovate si scrivono

$$4 \left(N_1 N_2 - \Omega T - \frac{1}{2} \beta\gamma \mathcal{H} T^2 \right) du^3 - 2 \gamma N_1 T du^2 dv - \frac{2}{3} \gamma N_2 T dv^2 du +$$

$$\gamma \left\{ 2 \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} du^2 dv - \frac{2}{3} \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} du dv^2 + du \delta^2 v - dv \delta^2 u \right\} T^2 = 0$$

e

$$4 \left(N_1 N_2 - \Omega T - \frac{1}{2} \beta\gamma \mathcal{H} T^2 \right) dv^3 + \frac{2}{3} \beta N_1 T du^2 dv + 2 \beta N_2 T du dv^2 +$$

$$+ \beta \left\{ - \frac{2}{3} \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} du^2 dv + 2 \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} du dv^2 - (du \delta^2 v - dv \delta^2 u) \right\} T^2 = 0.$$

La prima si dirà la *quadrica delle corde asintotiche v*, l'altra delle corde asintotiche *u*.

6. Le due quadriche delle corde asintotiche si tagliano (all'infuori delle tangenti asintotiche) in una conica contenuta nel piano di equazione

$$\begin{aligned} & 2 N_1 du^2 dv \left(\frac{\beta}{3} du^3 + \gamma dv^3 \right) + 2 N_2 du dv^2 \left(\beta du^3 + \frac{\gamma}{3} dv^3 \right) = \\ & = \left\{ 2 \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} du^2 dv \left(\frac{\beta}{3} du^3 + \gamma dv^3 \right) - 2 \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} du dv^2 \left(\beta du^3 + \frac{\gamma}{3} dv^3 \right) + \right. \\ & \quad \left. + (du \delta^2 v - dv \delta^2 u) (\beta du^3 + \gamma dv^3) \right\} T. \end{aligned}$$

È da notare il fatto che la traccia di questo piano sul piano tangente $T = 0$ non è la tangente alla curva \mathcal{C} ; ciò avviene se e soltanto se la tangente considerata è una tangente di Segre. Si verifica poi facilmente che per le linee di Segre ($\beta du^3 = \gamma dv^3$), i tre piani precedenti passano per la retta di equazioni

$$N_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} T, \quad N_2 = - \frac{1}{2} \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} T$$

cioè per la direttrice di Wilczynski.

Il piano precedente dipende in generale dall'elemento del 2° ordine E_2 della curva considerata \mathcal{C} (in un suo punto): ma dipende soltanto dall'elemento del 1° ordine (E_1) se e solo se questo appartiene ad una curva di

Darboux. I tre piani relativi ai tre E_i di Darboux passano pure per una retta canonica definita da

$$N_1' = \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} T, \quad N_2 = - \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} T.$$

Questa nuova retta canonica è coniugata armonica della normale proiettiva rispetto alla direttrice di Wilczynski e alla tangente canonica.

Escluso questo caso, il luogo delle coniche intersezioni delle due quadriche in esame relative agli $\infty^1 E_2$ aventi in comune un E_i (du/dv) è la quadrica

$$\begin{aligned} & \left(N_1 N_2 - \Omega T - \frac{1}{2} \beta \gamma \kappa T^2 \right) (\beta du^3 + \gamma dv^3) - \frac{1}{3} \beta \gamma du dv (N_1 du - N_2 dv) T \\ & + \frac{1}{3} \beta \gamma du dv \left(\frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} du + \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} dv \right) T^2 = 0; \end{aligned}$$

per un E_i di asintotica si ha la quadrica di Lie.

Matematica. — *Sulla dipendenza continua degli integrali dell'equazione $y' = f(x, y)$ dai valori iniziali.* Nota di G. SCORZA-DRAGONI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geometria. — *Sui centri di curvatura delle geodetiche di una varietà.* Nota di G. VITALI, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur un déplacement généralisé dans les espaces Riemanniens.* Nota di A. WUNDHEILER, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sur le problème de torsion des cylindres élastiques isotropes.* Nota del prof. N. MOUSKHELICHVILI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

Dans cette Note nous donnons quelques formules bien simples qui fournissent le moyen d'obtenir la solution du problème de torsion⁽²⁾ des cylindres élastiques isotropes et homogènes. Pour appliquer ces formules il faut que l'on sache effectuer la représentation conforme de la section droite du cylindre envisagé sur l'aire du cercle. Au point de vue *théorique* notre procédé n'offre aucun avantage essentiel, car le problème de la représentation conforme est, en général, moins simple que le problème de torsion (qui, en substance, n'est qu'un cas particulier du problème de Dirichlet). Mais, d'un autre côté, il existe un grand nombre de sections d'une importance pratique, dont la représentation sur l'aire du cercle est bien connue et c'est dans ces cas que l'application de nos formules peut apporter, au point de vue des *calculs effectifs*, des simplifications considérables.

1. Prenons pour axe Ox la droite parallèle aux génératrices du cylindre et désignons par S l'une des sections droites que nous supposons placée dans le plan Oxy .

Nous supposons que S est limitée par un contour (fermé) simple C . Soit:

$$(1) \quad F(Z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

la fonction de la variable complexe $Z = x + iy$ qui est holomorphe dans S et qui satisfait, sur le contour C de S , à la condition:

$$(2) \quad \Psi(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \text{const.}$$

Si la fonction $F(Z)$ est trouvée, la solution du problème de torsion sera fournie par les formules bien connues⁽³⁾:

$$(3) \quad u = -\tau\chi y, \quad v = \tau\chi x, \quad w = \tau\Phi(x, y),$$

$$(4) \quad T_x = \mu\tau \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} - y \right), \quad T_y = \mu\tau \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} + x \right),$$

(1) Nella seduta del 20 gennaio 1929.

(2) Nous envisageons ce problème sous la forme classique que lui a donnée B. de Saint-Venant.

(3) A. E. H. LOVE, *Elasticity*, 4^{ème} édit., Cambridge, 1927, ch. XIV (p. 310 et suiv.).

les notations étant celles de Love à cela près que nous avons remplacé $X_{\bar{x}}$ et $Y_{\bar{x}}$ par T_x et T_y .

Le moment de torsion sera donné par la formule ⁽¹⁾

$$N = \mu\tau \iint_S \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial \Phi}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dx dy$$

qu'on peut mettre, en intégrant par parties, sous la forme qui nous sera utile plus tard :

$$(5) \quad N = -\mu\tau \int_C \Phi (x dx + y dy) - \mu\tau \int_C xy (x dy - y dx),$$

les intégrales étant prises le long de C dans le sens direct.

Le problème se réduit donc à la détermination de la fonction $F(Z)$ d'après la condition aux limites (2).

2. Soit :

$$(6) \quad Z = \omega(\zeta)$$

la relation qui effectue la représentation conforme (et biunivoque) de l'aire S sur celle du cercle $|\zeta| \leq 1$ du plan de la variable ζ ; nous désignerons la circonférence de ce cercle par γ . En posant ensuite :

$$(7) \quad F(Z) = F(\omega(\zeta)) = f(\zeta)$$

on est conduit au problème suivant : trouver la fonction $f(\zeta)$, holomorphe à l'intérieur de γ , d'après la condition aux limites ⁽²⁾ :

$$(8) \quad \Re \frac{1}{i} f(\zeta) = \frac{1}{2} \omega(\zeta) \bar{\omega}(\bar{\zeta}) + \text{const.} \quad (\text{sur } \gamma),$$

qu'on déduit immédiatement de la condition (2) en remarquant que $x^2 + y^2 = Z\bar{Z} = \omega(\zeta) \bar{\omega}(\bar{\zeta})$. Il est à remarquer que la constante qui figure dans (8) n'est pas essentielle et on peut lui attribuer une valeur arbitraire.

La solution de ce problème pourrait être obtenue immédiatement en appliquant la formule de H. A. Schwarz qui fournit l'expression de la fonction holomorphe à l'intérieur de γ , étant donnée la valeur de la partie réelle de cette fonction sur γ . On pourrait aussi écrire immédiatement la solution en utilisant l'analogie connue entre le problème de torsion et un problème d'hydrodynamique ⁽³⁾ : il suffirait d'appliquer la formule que nous avons donnée pour la solution de ce problème d'hydrodynamique dans une

(1) LOVE, loc. cit., p. 312.

(2) D'une façon générale nous désignons par $\bar{\varphi}(\bar{\zeta})$ la quantité conjuguée de $\varphi(\zeta)$; \Re = « partie réelle ».

(3) LOVE, loc. cit., p. 314, Art. 218 (a).

Note récente ⁽¹⁾. Mais nous nous permettons de déduire directement la formule demandée par un procédé simple que nous avons utilisé dans des travaux antérieurs pour résoudre quelques problèmes de la Physique Mathématique ⁽²⁾.

Soit à déterminer une fonction $\varphi(\zeta)$, holomorphe à l'intérieur de γ , d'après la condition aux limites:

$$(A) \quad \Re \varphi(\zeta) = U(\vartheta) \quad (\text{sur } \gamma),$$

$U(\vartheta)$ désignant une fonction (réelle) continue de l'arc ϑ de γ .

On peut présenter la condition (A) sous la forme:

$$(A^*) \quad \varphi(\zeta') + \overline{\varphi}(\overline{\zeta}') = 2U,$$

en désignant par $\zeta' = e^{i\vartheta}$ un point arbitraire de γ . En remarquant que

$\overline{\zeta}' = e^{-i\vartheta} = 1 : \zeta'$, on peut remplacer $\overline{\varphi}(\overline{\zeta}')$ par $\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)$. En multipliant

les deux membres de (A^*) par $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\zeta'}{\zeta' - \zeta}$ (ζ désignant un point arbitraire à l'intérieur de γ) et en intégrant le long de γ , on obtient:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta')}{\zeta' - \zeta} d\zeta' + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)}{\zeta' - \zeta} d\zeta' = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{U d\zeta'}{\zeta' - \zeta}.$$

Or, on s'assure immédiatement ⁽³⁾ que la deuxième intégrale du premier membre se réduit à une constante $\alpha - i\beta = \overline{\varphi}(0)$. Donc, d'après la formule de Cauchy il vient:

$$(B) \quad \varphi(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{U d\zeta'}{\zeta' - \zeta} - \alpha + i\beta.$$

Cette dernière formule donne la solution du problème dans le cas où on demande la valeur de $\varphi(\zeta)$ à une constante près, ce qui a lieu précisément dans le cas qui nous intéresse. (Si l'on voulait déterminer α , il suffirait de poser $\zeta = 0$ dans les deux membres de la formule précédente. On obtiendrait de la sorte la formule de H. A. Schwarz; quant à la constante β , elle reste complètement arbitraire).

La formule (B) donne pour la fonction $f(\zeta)$, définie par la condition (8), l'expression:

$$(9) \quad f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \omega(\zeta') \overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta'}\right) \frac{d\zeta'}{\zeta' - \zeta} + \text{const.}$$

(1) Sur le problème fondamental d'hydrodynamique à deux dimensions, ces « Rendiconti », vol. VII, série 6^e, 1^o sem. 1928, pp. 995-1002.

(2) Cfr. Note citée, en particulier pp. 998 et 1000.

(3) Cp. loc. cit., p. 998.

L'application de cette dernière formule est particulièrement simple lorsque la fonction $\omega(\zeta)$ est rationnelle, ou, d'une façon générale, lorsque le produit $\omega(\zeta)\bar{\omega}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)$ est une fonction analytique uniforme à l'intérieur (à l'extérieur) de γ , possédant dans ce domaine un nombre fini de points singuliers isolés. Dans ce cas, en effet, l'intégrale du second membre de (9) se calcule immédiatement d'après la règle de résidus. Il est clair que si $\omega(\zeta)$ est rationnelle, $f(\zeta)$ le sera aussi.

3. Comme dans le cas du problème d'hydrodynamique traité dans la Note citée, il est commode, pour les calculs effectifs, d'introduire les coordonnées curvilignes spéciales définies comme suit: Soit $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$. La relation $x + iy = \omega(\zeta) = \omega(\rho e^{i\vartheta})$ fait correspondre aux cercles $\rho = \text{const.}$ et aux rayons $\vartheta = \text{const.}$ du plan des ζ , certaines courbes du plan Oxy qui forment un système biorthogonal. En prenant ces courbes pour lignes coordonnées, définies par les paramètres ρ, ϑ , nous aurons les coordonnées curvilignes demandées. Les lignes $\vartheta = \text{const.}$ partent tous du point $x_0 + iy_0 = \omega(0)$ pour aboutir au contour C; les lignes $\rho = \text{const.}$ sont des lignes fermées simples qui entourent le point (x_0, y_0) ; la ligne $\rho = 1$ est le contour C lui-même.

Si par v_ρ, v_ϑ on désigne les composantes d'un vecteur quelconque (v_x, v_y) , lié au point (ρ, ϑ) , suivant les tangentes aux lignes $\vartheta = \text{const.}$, $\rho = \text{const.}$ (menées respectivement dans le sens de ρ croissant, ϑ croissant) on aura ⁽¹⁾

$$v_\rho - iv_\vartheta = (v_x - iv_y) \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} \frac{\zeta}{\rho}.$$

En appliquant cette formule au vecteur (T_x, T_y) qui représente la tension, rapportée à l'unité de l'aire de la section S, et en remarquant que d'après les formules (1) et (4)

$$T_x - iT_y = \mu\tau \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} - i \frac{\partial\Phi}{\partial y} - y - ix \right) = \mu\tau \left(\frac{dF(Z)}{dZ} - i\bar{Z} \right),$$

on obtient aisément la formule:

$$(10) \quad T_\rho - iT_\vartheta = \mu\tau\zeta \frac{f'(\zeta) - i\bar{\omega}(\bar{\zeta})\omega'(\zeta)}{\rho|\omega'(\zeta)|},$$

qui est très commode pour les calculs effectifs des tensions.

La formule (5) pour le moment de torsion peut également être mise sous la forme appropriée à notre variable ζ .

(1) Cfr. loc. cit., p. 999, formule (17).

En effet, en remarquant que $x = (Z + \bar{Z})/2$, $y = (Z - \bar{Z})/2i$ on obtient, après quelques transformations toutes élémentaires :

$$(11) \quad N = -\frac{\mu\tau}{4} \int_{\gamma} \left[f(\zeta') + \bar{f}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}'}\right) \right] d \left[\omega(\zeta') \bar{\omega}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}'}\right) \right] + \frac{\mu\tau}{4i} \int_{\gamma} \omega^2\left(\frac{1}{\bar{\zeta}'}\right) \omega(\zeta') d\omega(\zeta').$$

Cette dernière formule permet d'effectuer le calcul presque immédiatement, lorsque $\omega(\zeta)$ et par suite $f(\zeta)$, sont rationnelles.

4. EXEMPLES. — 1° *Contour épitrochoidal sans points doubles.* (Cp. Note citée). Dans ce cas, on a $\omega(\zeta) = b(\zeta^m + a\bar{\zeta})$ (m entier > 1 , a, b constantes positives; $a \geq m$). On obtient immédiatement d'après la formule (9) (cp. loc. cit., p. 1001, 2°): $f(\zeta) = ib^2 a \zeta^{m-1} + \text{const.}$ La formule (10) donne après quelques calculs élémentaires :

$$T_p = -\frac{\mu\tau b a (m-1) \rho^{m-2} (1-\rho^2) \sin(m-1)\vartheta}{\sqrt{m^2 \rho^{2m-2} + 2am\rho^{m-1} \cos(m-1)\vartheta + a^2}},$$

$$T_s = -\mu\tau b \frac{a\rho^{m-2} [m-1-(m+1)\rho^2] \cos(m-1)\vartheta - m\rho^{2m-1} - a^2\rho}{\sqrt{m^2 \rho^{2m-2} + 2am\rho^{m-1} \cos(m-1)\vartheta + a^2}}.$$

La formule (11) donne pour le moment de torsion :

$$N = \frac{1}{2} \mu\tau b^4 \pi (a^4 + 4a^2 + m).$$

2° *Lemniscate de Booth.* On sait que la relation :

$$Z_1 = x_1 + iy_1 = b \left(\zeta + \frac{a}{\bar{\zeta}} \right) \quad (b > 0, \quad a > 1)$$

établit la représentation conforme de l'aire, extérieure à l'ellipse :

$$\frac{x_1^2}{b^2(a+1)^2} + \frac{y_1^2}{b^2(a-1)^2} = 1$$

sur le cercle $|\zeta| \leq 1$. En effectuant l'inversion $Z = 1 : Z_1$, on transforme cette aire en une aire S limitée par la *lemniscate de Booth*. Remarquons que lorsque l'ellipse primitive est très allongée (a voisin de 1), S est très voisine de la figure formée par deux cercles égaux qui se touchent en un point (ce qui correspond au cas de deux cylindres circulaires, soudés le long d'une génératrice).

On a dans le cas envisagé :

$$\omega(\zeta) = \frac{k\zeta}{\zeta^2 + a} \quad \left(k \text{ étant une constante positive} = \frac{1}{b} \right).$$

La formule (9) donne immédiatement:

$$f(\zeta) = \frac{iak^2}{(a^2 - 1)(\zeta^2 + a)} + \text{const.}$$

La formule (10) fournit ensuite les tensions. Nous nous contenterons d'écrire la valeur T du tension le long du contour (comme on sait, sur le contour on a toujours $T_\rho = 0$ et $T = T_\theta$):

$$T = \frac{\mu \tau k (a^2 + 1)}{(a^2 - 1) \sqrt{a^2 - 2a \cos 2\theta + 1}}.$$

3° Notons pour terminer que nos formules donnent parfois le moyen d'obtenir aisément la solution, même dans les cas où le produit $\omega(\zeta) \overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ n'est pas uniforme à l'intérieur de γ (ainsi qu'à l'extérieur). Citons comme exemple le cas: $\omega(\zeta) = a \sqrt{1 + \zeta}$ qui correspond au contour formé par une *branche de lemniscate de Bernoulli*. Faute de place, nous nous contenterons d'énoncer le résultat:

$$f(\zeta) = \frac{a^2}{\pi} \frac{1 + \zeta}{\sqrt{\zeta}} \log \frac{1 + i\sqrt{\zeta}}{1 - i\sqrt{\zeta}} + \text{const.};$$

dans le second membre on doit prendre la branche holomorphe pour $\zeta = 0$.

Meccanica. — *Intorno a due particolari equazioni dinamiche di un sistema materiale vincolato in relazione ai moti di dilatazione e di turbolenza.* Nota di F. LAMBERTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Idrodinamica. — *Sulle azioni dinamiche in un sistema di vortici rettilinei.* Nota di A. MASOTTI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

1. Si consideri il moto piano indotto in un liquido perfetto indefinito da un sistema di n vortici rettilinei, paralleli, isolati, *liberi* (normali al piano sul quale il moto è studiato). Esso è rappresentato dalle seguenti espressioni delle componenti cartesiane u e v della velocità:

$$(1) \quad u = \sum_k^n \frac{C_k}{2\pi\rho_k} \sin \theta_k, \quad v = - \sum_k^n \frac{C_k}{2\pi\rho_k} \cos \theta_k;$$

in esse ρ_k indica la distanza del generico punto considerato $P(x, y)$ dalla traccia $P_k(x_k, y_k)$ dell'asse del vortice k -esimo, la cui intensità è C_k ; θ_k è l'angolo che la congiungente P con P_k , così orientata, forma con l'asse x . Le (1) si riuniscono nella relazione complessa

$$(2) \quad w = u - iv = - \sum_k^n \frac{iC_k}{2\pi} \frac{1}{z - z_k},$$

nella quale compaiono le affisse $z = x + iy$ del punto P e $z_k = x_k + iy_k$ dei punti P_k .

È pure noto che gli assi dei vortici si spostano, pur mantenendosi paralleli; il moto (traslatorio) delle particelle situate sull'asse del vortice h -esimo è esclusivamente quello indotto dai vortici rimanenti, e non è influenzato dalla presenza del vortice stesso. Pertanto i punti P_h sono mobili, e le componenti cartesiane u_h e v_h ($h = 1, \dots, n$) delle velocità rispettive sono

$$(3) \quad u_h = \sum_k^{(h)} \frac{C_k}{2\pi\rho_{hk}} \sin \theta_{hk}, \quad v_h = - \sum_k^{(h)} \frac{C_k}{2\pi\rho_{hk}} \cos \theta_{hk} \quad (h = 1, \dots, n),$$

dove $\rho_{hk} = \overline{P_h P_k}$, θ_{hk} indica l'angolo che la congiungente P_h con P_k , così orientata, forma con l'asse x , e il simbolo $\sum_k^{(h)}$ indica la somma degli $n - 1$ termini ottenuti dando a k tutti i valori interi da 1 a n , escluso h . Le (3) si riuniscono nelle relazioni complesse

(1) Nella seduta del 6 gennaio 1929.

$$(4) \quad w_b = u_b - \dot{w}_b = - \sum_k^n \frac{i C_k}{2 \pi} \frac{1}{\tilde{\gamma}_b - \tilde{\gamma}_k} \quad (b = 1, \dots, n)^{(1)}.$$

2. Ho ricordato sopra che il moto (traslatorio) delle particelle che sono sull'asse del vortice b -esimo è solo quello indotto dagli altri vortici, e nessuna influenza ha sopra di esso la presenza del vortice considerato; questo moto obbedisce pertanto all'equazione

$$(5) \quad a_b = \text{grad}_{p_b} \left(U - \frac{p_b}{\mu} \right),$$

nella quale a_b è l'accelerazione delle particelle considerate, U è il potenziale delle forze unitarie di massa, μ è la densità costante del liquido, e p_b indica la pressione che spetta ad un moto fittizio in cui il vortice b -esimo sia assente ed i vortici rimanenti siano costretti (ad esempio, mediante l'artificio indicato avanti nel n. 3) a muoversi come nel moto effettivo. Ne segue che

$$(6) \quad \text{grad}_{p_b} \left(U - \frac{p_b}{\mu} \right)$$

rappresenta la risultante delle forze subite, per unità di massa, dalle particelle considerate; poichè

$$(7) \quad \text{grad}_{p_b} U$$

rappresenta la risultante analoga in condizioni statiche, sarà

$$(8) \quad - \frac{1}{\mu} \text{grad}_{p_b} p_b$$

l'azione dinamica, per unità di massa, sulle particelle stesse.

Se ora si considera il filetto vorticoso che costituisce l'asse del vortice b -esimo come un sottile cilindro di sezione infinitesima σ_b , si vede che l'azione dinamica che esso sopporta per unità di lunghezza è

$$(9) \quad - \sigma_b \text{grad}_{p_b} p_b,$$

ed è quindi infinitesima come σ_b . In particolare se σ_b è un cerchio di raggio r_b l'azione dinamica predetta è

$$(10) \quad - \pi r_b^2 \text{grad}_{p_b} p_b,$$

ed è quindi infinitesima di secondo ordine rispetto a r_b .

(1) V. HELMHOLTZ, *Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen* [« Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle) », vol. 35 (1858), pp. 25-55; oppure *Wissenschaftliche Abhandlungen*, t. I (Leipzig, Barth, 1881), pp. 101-134], § 5; KIRCHHOFF, *Vorlesungen über Mathematische Physik. Mechanik* (Leipzig, Teubner, 1876), 20. Vorl., § 3.

3. I vortici possono essere *fissi*. Una soluzione corrispondente a questo caso è contenuta in una Nota del prof. Cisotti sopra gli *Effetti dinamici di un fluido che circola tra quantisivogliano cilindri sottili ad assi paralleli*⁽¹⁾; basta supporre che i raggi r_1, \dots, r_n dei cilindri siano infinitesimi per realizzare un sistema di n vortici fissi, l'immobilità dei quali è ottenuta sostituendo i filetti vorticosi costituenti i loro assi con altrettanti cilindri circolari rigidi, di raggi infinitesimi, che sono mantenuti fermi. È soddisfatta, evidentemente, l'ipotesi ammessa dall'Autore che i rapporti dei raggi dei cilindri alle mutue distanze siano quantità del primo ordine, sicchè sono accettabili tanto la soluzione cinematica quanto i risultati relativi alle azioni dinamiche.

La soluzione cinematica è contenuta nella relazione complessa

$$(11) \quad w = - \sum_k^n \left[\frac{i C_k}{2\pi} \frac{1}{\zeta - \zeta_k} + \frac{i c_k}{(\zeta - \zeta_k)^2} \right],$$

essendo le costanti c_k così definite:

$$(12) \quad c_k = r_k^2 \sum_b^n \frac{C_b}{2\pi \rho_{bk}} e^{i\theta_{bk}} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Si osserva che a distanza finita da ciascuno dei vortici la (11) si identifica con la (2), sicchè l'influenza sullo stato cinetico della immobilità dei vortici è risentita soltanto nelle immediate vicinanze dei vortici stessi.

I risultati relativi alle azioni dinamiche sono espressi dalle relazioni seguenti:

$$(13) \quad X_b = -\mu C_b \sum_k^n \frac{C_k}{2\pi \rho_{bk}} \cos \theta_{bk}, \quad Y_b = -\mu C_b \sum_k^n \frac{C_k}{2\pi \rho_{bk}} \sin \theta_{bk},$$

$$M_b = 0 \quad (b = 1, \dots, n);$$

esse forniscono le componenti cartesiane X_b e Y_b dell'azione dinamica subita dal cilindro b -esimo, sostegno del vortice di intensità C_b ; M_b indica il corrispondente momento risultante rispetto all'asse del cilindro stesso.

4. Le azioni dinamiche rappresentate dalle (13) si possono interpretare come attrazioni newtoniane⁽²⁾; ma un'altra interpretazione può essere segnalata, notevole perchè dà a queste azioni dinamiche il carattere di *forze di sostentamento*, e rivela pertanto un più vasto campo di applicazione del teorema di Kutta e Joukowski.

(1) Questi « Rendiconti », vol. III, ser. 6ª, 1º sem. 1926, pp. 517-520.

(2) V. la mia Nota *Sopra una forma delle equazioni dinamiche di un sistema di vortici rettilinei* (questi « Rendiconti », vol. VIII, ser. 6ª, 2º sem. 1928, pp. 300-301).

Infatti, introducendo nelle (13) le componenti della velocità indotta da tutti i vortici, escluso quello considerato, nella località occupata da quest'ultimo, ciò che si fa utilizzando le (3), si ottiene:

$$(14) \quad X_b = \mu C_b v_b, \quad Y_b = -\mu C_b w_b \quad (b = 1, \dots, n).$$

Da queste relazioni scende che l'azione dinamica subita dal vortice b -esimo si può ottenere moltiplicando la velocità locale per μC_b e rotando poi il vettore così ottenuto di un angolo retto nel verso opposto a quello della circolazione. Questo risultato rappresenta l'estensione al caso in esame del teorema di Kutta e Joukowski, e giustifica la denominazione di *forza di sostentamento* per l'azione dinamica considerata. Specialmente notevole sembra la dipendenza dell'azione dinamica dal *comportamento locale* della corrente che investe il vortice.

Astronomia. — *Sul limite di visibilità con refrattori di piccole dimensioni.* Nota di G. B. LACCHINI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrispondente A. BEMPORAD.

L'Astronomia ha come discriminante nel confronto con gli altri rami dello scibile umano l'uso quasi esclusivo, nella grandissima maggioranza degli oggetti dei suoi studi, di uno solo sui cinque sensi attraverso i quali la parte spirituale dell'uomo viene a contatto col mondo materiale: il senso della vista: mancando questo senso l'astronomia non è concepibile, come la pittura non esiste per un cieco o la musica per un sordo.

Alla perfezione di questo senso la Natura ha preso a lavorare sin dai primi gradini della scala zoologica: già nei celenterati incomincia il differenziamento funzionale dei tessuti dove le prime cellule neuroepiteliali indifferenti sono accompagnate dagli *ocelli* (cellule sensoriali e pigmentate) questo per la filogenesi: riguardo alla ontogenesi già nei primi stadi dell'esistenza la vescicola oculare primitiva comunicante col terzo ventricolo si forma alla base del talamencefalo mediante il processo di estroflessione.

Alla Luce, al fattore principale ed essenziale alla vita, la Natura sin dai primordi prepara così un organo di senso che dovrà giungere, col trascorrere di milioni di secoli, alla attuale perfezione nelle più evolute forme animali e nell'uomo.

L'Astronomo nella grandiosità e sublimità dell'oggetto dei suoi studi procede anzitutto con questo strumento nelle sue ricerche. È dunque di capitale interesse conoscere fino a quale estremo limite egli possa a mezzo

(1) Nella seduta del 20 gennaio 1929.

dell'occhio penetrare nei misteri della natura, fin dove cioè abbia i suoi confini la sensibilità retinica del suo occhio, che la fiamma ardente dell'amore pel sapere spinge a scrutare fra le più deboli stelle del firmamento.

Il vedere astronomico è senza dubbio diverso dal vedere comune, anzi può assumere l'aspetto di una vera e propria arte, che può essere appresa solo dopo lunghi anni di esperienza; e per di più è assai vantaggioso apprendere quest'arte nella età giovanile, allorquando cioè i nostri sensi sono peranco in formazione e malleabili, proprio come l'adolescente si addestra nell'arte di Calliope o di Euterpe.

È mio intendimento esporre la personale esperienza acquistata in molti anni con l'uso di istrumenti di piccole o modeste dimensioni: esperienza che mi ha permesso di educare l'occhio in modo da giungere alla percezione di debolissime stelle, che ordinariamente non sono viste se non con istrumenti di dimensioni quasi doppie.

Premetto alcune brevi considerazioni fisiologiche intorno alla visione.

Allo stato di riposo in un occhio emmetropico i muscoli che concorrono al processo di accomodazione sono rilassati, l'iride è così disposta da dare al foro pupillare la massima apertura possibile in relazione all'oscurità ambiente; la messa a fuoco è allora al punto remoto. Quando l'occhio è in funzione, i muscoli ciliari operando sul cristallino ne regolano la curvatura e l'iride con la midriasi o la miosi concorre alla migliore definizione delle immagini sulla retina, correggendo l'aberrazione di sfericità e di cromatismo, oltre che regolare la quantità di luce necessaria alle combinazioni chimiche che daranno poi luogo, attraverso lo strato dei bastoncini e dei coni e delle cellule di varie forme e attraverso il nervo ottico, alla sensazione ultima nella *sfera visiva*.

La quantità di luce che giunge a colpire la retina è evidentemente funzione dell'apertura della pupilla: intorno al diametro di questa, fino a non molti anni fa, si aveva un'opinione errata, in quanto che, non essendosi eseguite ricerche sulla minima quantità di luce percettibile, tale diametro si riteneva di circa 5 mm., cioè all'incirca quello dipendente dall'esposizione a luce non troppo debole.

Nel 1916 il signor W. H. Steavenson, fotografando al lampo di magnesio l'occhio umano previamente tenuto nella semioscurità ambiente per circa 10 minuti, ottenne per la pupilla il diametro di mm. 8,5, valore medio di cinque soggetti in giovane età e con vista normale: non è però stato considerato quale influenza sull'apertura della pupilla potesse avere il cambiamento della messa a fuoco, poichè i soggetti furono fotografati col l'occhio al punto remoto.

Se il processo di accomodazione è divenuto, per forza di abitudine, quasi un movimento riflesso, tuttavia non può essere qualificato come involontario poichè con qualche sforzo si può guardare ad un punto con gli occhi non a fuoco.

Pertanto se il restringimento della pupilla per miosi è utile alla definizione delle immagini e cioè alla acuità visiva, nuoce però alla quantità di luce che dovrebbe entrare nell'interno dell'occhio quando, per la mancata abitudine ad osservare oggetti molto debolmente illuminati e molto l'un l'altro vicini, avviene l'involontario restringimento concomitante all'azione dei muscoli ciliari sul cristallino.

Allorchè l'astronomo osserva con un cannocchiale, l'occhio è normalmente a fuoco per la visione distinta che, come si sa, può avere una latitudine da 20 a 30 cm. ed allora anche l'iride non è completamente dilatata: si può tuttavia educare l'occhio ad essere a fuoco per il punto remoto ed in questo modo l'iride, favorita dalla semioscurità, per midriasi si allarga enormemente: è uno sforzo che si deve compiere, ma un occhio abituato può riuscirvi facilmente: operando però la messa a fuoco dell'occhio per il punto remoto è necessario contemporaneamente cambiare quella dell'istrumento; quantunque questa correzione, per l'enorme allargamento della pupilla, riesca insufficiente e la definizione delle immagini non sia perfetta, però è evidente il vantaggio per la percezione sicura di più deboli stelle, che altrimenti sarebbero invisibili.

Il poter dare dunque alla pupilla la massima apertura ha grande importanza nel raggiungimento di un elevato limite di visibilità di oggetti debolissimi, però un gran numero di altri fattori vi concorrono.

Anzitutto anche se la retina fu esposta a debole luce artificiale pure occorrono almeno 10 minuti prima che la porpora possa essere in piena efficienza: nessuna luce anche laterale deve colpire l'occhio: la posizione persino dell'osservatore, se incomoda, ha un'azione notevole: la diversa sensibilità della retina nelle varie regioni è facilmente constatabile ed il portare l'oggetto ricercato sulla fovea centrale non è, al cannocchiale, così facile come nel vedere comune: si sa che la parte superiore della retina è più sensibile dell'inferiore per la ragione che la grande maggioranza degli oggetti che abbraccia il campo visivo giacciono, esternamente, nella parte inferiore del piano orizzontale.

Come limite di visibilità delle stelle ad occhio nudo si assume ordinariamente la 6ª grandezza; ma, dagli esperimenti eseguiti da H. D. Curtis all'Osservatorio Lick nel 1901, togliendo cioè all'osservatore la visibilità della volta celeste eccetto che in un piccolo foro eseguito in uno schermo posto al luogo dell'obiettivo di un telescopio, si è trovato che quel limite si può portare alla 8ª grandezza e forse più, ciò prova come anche una debole luce quale quella del cielo notturno dia luogo alla contrazione dell'iride.

Un fatto analogo avviene con l'osservazione al telescopio: quantunque l'ingrandimento maggiore non aumenti la luce di una stella, tuttavia le più deboli sono meglio visibili perchè lo sfondo diviene più cupo.

*
**

Come ho già detto più sopra il vedere astronomico si apprende con lunga pratica ed io sin dall'età di circa dodici anni m'ingegnavo di vedere nel cielo con piccoli strumenti fatti con lenti da occhiali o da lanterna magica; ma l'esercizio non era infruttuoso: nel 1903 potei avere un piccolo cannocchiale di 6 cm. di apertura, poi ho migliorato man mano i miei mezzi ottici: ecco ora il limite di visibilità da me raggiunto con diversi strumenti. È dato il diametro dell'obiettivo, la grandezza stellare minima vista in condizioni non *eccezionali* ed il periodo di tempo in cui furono usati:

1° cm. 6.0	12. ^m 5	dal 1903 all'agosto 1918;
2° » 7.2	13. 3	dall'agosto 1918 al novembre 1920;
3° » 10.0	14. 5	dal novembre 1920 al gennaio 1924;
4° » 13.5	14. 8	dal febbraio 1922 al giugno 1928;
5° » 15.0	15. 0	dal giugno 1928 fino ad oggi.

Il primo era un piccolo cannocchiale a tubi rientranti: la definizione delle immagini era scarsa, il vetro però abbastanza trasparente; non portava alcuna marca di fabbrica.

Il secondo pure non era una cosa eccellente: definizione non molto buona, il *crown* era molto colorato in verde; forse era stato costruito intorno al 1870 o prima; senza marca.

Il terzo era un obiettivo di Steinheil di ottima qualità costruito nel 1919; il vetro era trasparentissimo, anche la definizione buona: su di questo gli altri due successivi ebbero, come si vede, poco vantaggio.

Il quarto è un buon obiettivo di Merz come definizione, ma la trasparenza ne è stata menomata da una leggera velatura sulla faccia interna del *flint* (verso il *crown*): fu costruito nel 1864, appartiene all'Osservatorio di Capodimonte ed il prestito mi fu gentilmente ottenuto dal direttore prof. Bemporad.

Il quinto è l'equatoriale Cooke dell'Osservatorio di Catania che ha ottima definizione, come pure la trasparenza è buona: non mi è possibile però darne un giudizio definitivo per la ragione che, mentre i primi quattro furono usati tutti nel medesimo luogo, cioè in Faenza, e per lungo tempo, quest'ultimo è stato usato solo per pochi mesi ed in Catania dove le condizioni di trasparenza potrebbero essere diverse: su questo punto il mio giudizio provvisorio è che la trasparenza non sia diversa; che l'agitazione atmosferica in luglio, agosto e settembre è stata normalmente minore di quella di Faenza, mentre in ottobre, novembre e dicembre è stata notevolmente maggiore.

Queste determinazioni del limite di visibilità si basano in gran parte su osservazioni di stelle variabili; mi limito a riportare *alcuni saggi* in modo da poter dare agio a chiunque di controllare più facilmente l'eventuale differenza di scala: questa è quella di Harvard e le grandezze usate sono quelle delle stelle di confronto che si trovano negli « Annali » di quell'Osservatorio oppure nelle aggiunte all'*Atlas Stellarum Variabilium* di J. G. Hagen: le singole osservazioni poi sono pubblicate nella « Popular Astronomy » per lo più nel mese seguente a quello in cui le osservazioni furono eseguite.

1° strumento cm. 6.0: *R. Coronae Borealis* 21 maggio 1917 12.^m7; *RV Cassiopeiae* 10 gennaio 1915 12.^m5; *U Geminorum* 24 aprile 1917 12.^m4 in aumento.

2° strumento cm. 7.2: nel campo di *U Geminorum* era spesso visibile la stella α (13.^m3); nel campo di *SS Aurigae* era qualche volta visibile la stella t (13.^m3) ma con gran difficoltà.

3° strumento cm. 10.0: nel campo di *U Geminorum* la stella γ (13.^m7) era quasi sempre visibile, ma χ (14.^m1) lo era raramente e con difficoltà: però la luminosità di questa stella è realmente inferiore: infatti nella pubblicazione n. 8 del « Goodsell Observatory of Carleton College » fra le osservazioni di questa Variabile vi si trova annotato: 1919 March 6: *Star marked* (14.^m1) *must be as faint as* 14.^m5: e l'istituto usato è il 16 pollici (40 cm.) col quale *questa stella era presso il limite di visibilità!*

Nel campo di *SS Aurigae* la stella α (13.^m9 Mc Cormick) era sempre vista e la stella χ (14.^m54 Mc Cormick) era pure vista qualche volta.

4° strumento cm. 13.5: le predette stelle erano viste un po' più facilmente, ed anche la stella γ (14.^m83) presso *SS Aurigae* fu vista due o tre volte.

5° strumento cm. 15.0: con questo le medesime stelle poterono essere ancor meglio osservate; oltre a ciò, al fine di far uso di una scala visuale ancor più universalmente accettata, si ricorse all'esame di alcuni dei campi di Variabili misurati fotometricamente e contemporaneamente nei quattro osservatori di Harvard, Yerkes, Lick e Mc Cormick (vedi « Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences », vol. XIV, n. IV).

Nel campo di *S Ceti*: la stella Q (14.^m92) è benissimo visibile (si dovrebbe anzi credere che la stella fosse in realtà più lucida, se fosse lecito mettere in dubbio l'autorità di quattro così importanti osservatori).

Nel campo di *V Aurigae*: la stella R (14.^m70) è vista con grande difficoltà.

Nel campo di *T Hydrae*: L (14.^m93) molto difficile, K (14.^m24) ben vista, Q (15.^m01) non vista.

Nel campo di *R Lacertae*: M (14.^m43) vista facilmente.

È stata pure esaminata la *North Polar Sequence*: la stella 115 (15.^m03) fu certamente vista, ma con qualche difficoltà.

L'esame di questi campi è stato eseguito in notti *non eccezionali* ed una volta sola o due al più. Non si tratta quindi di risultati conseguiti in condizioni straordinarie di trasparenza, quali si possono incontrare poche volte in un anno intero, oltre a ciò le regioni esaminate erano nuove per me e, per esperienza personale, posso asserire che in una regione ben conosciuta riesce assai più facile vedere le stelle più deboli.

Sarebbe assai interessante poter tradurre *sperimentalmente* queste debolissime sensazioni in unità di candela campione o *lumen* e vedere così fino a qual punto la formola teorica risponde alla realtà dei fatti.

Fisica. — *Sull'allargamento delle righe per risonanza.* Nota II di A. CARRELLI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio M. CANTONE.

Stabilito che la teoria di Holtzmark è verificata per ciò che riguarda la variazione di larghezza di una riga in funzione della concentrazione per righe in emissione, rimaneva da riscontrare quale fosse la distribuzione dell'intensità di queste righe espanse per grandi concentrazioni di vapore. Lo studio di tale distribuzione è infatti di grande importanza perchè permette di determinare un elemento caratteristico per la causa che produce il fenomeno. Infatti supponendo che la riga sia espansa per smorzamento, larghezza naturale, la teoria classica fondata sulla concezione di Lorentz-Planck, prevede ⁽²⁾ una legge di variazione dell'intensità ai bordi data da

$$(1) \quad I = \frac{I_0}{\Delta^2}$$

dove $\Delta = \nu - \nu_0$, e cioè è la differenza fra il valore della frequenza di emissione ν_0 e il valore della frequenza per la quale si vuol conoscere l'intensità I , essendo I_0 l'intensità massima. In base alla teoria ondulatoria Persico ⁽³⁾ ha ricavato una legge ancora più lenta di caduta dell'intensità ai bordi della riga. Per l'allargamento sotto l'azione di campi molecolari (effetto Stark o di pressione) si procede in base ai calcoli dello stesso Holtzmark una legge dello stesso tipo della (1).

Nel caso nel quale l'allargamento dipende dalla presenza di atomi della stessa specie il Mensing ⁽⁴⁾ prevede al bordo della riga ancora la stessa legge

(1) Nella seduta del 20 gennaio 1929.

(2) Voigt, *Elektro-und Magnetoptik*.

(3) PERSICO, «Rend. Acc. Lincei», vol. VIII, 3-4, pp. 160, 1928.

(4) MENSING, «Zeit. für Phys.», 34, 611, 1925.

di distribuzione mentre in base alle considerazioni di Holtzmark ⁽¹⁾ risulta una legge di tipo esponenziale e precisamente

$$I = I_0 e^{-\frac{\Delta^2}{\Delta^2}}$$

dove Δ^2 è dato da $0.376 \sqrt{\Delta^2} = \Delta \nu$.

Concludendo dunque sul caso dell'allargamento per smorzamento, per effetto Stark, per risonanza secondo Mensing l'intensità di una riga dovrebbe variare secondo la legge che può mettersi sotto la forma seguente

$$(1) \quad \log I = \text{cost.} - \log \Delta^2$$

mentre nel caso dell'effetto Holtzmark si ottiene

$$(1') \quad \log I = \text{cost.} - k \Delta^2.$$

$$k = \frac{1}{\Delta^2}$$

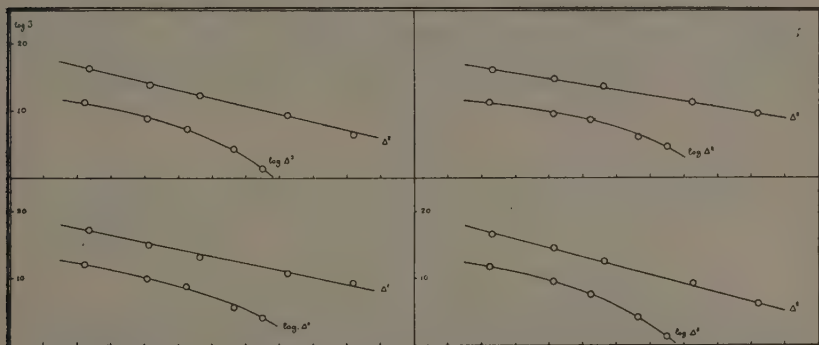
Per verificare quale delle due leggi effettivamente si riscontra in realtà abbiamo ancora fatto uso delle righe del Na in emissione. Si è impiegata come sorgente arco tra carboni molto ricchi di sale di Na e come apparecchio dispersivo un reticolo di Rowland del raggio di 304.8 cm.

Le fotografie della sorgente sono state prese sullo spettro del 1° ordine e sulle lastre le due righe erano tanto espanse da occupare come banda nera una quarantina di Å circa. La posizione precisa delle D era naturalmente data da due sottili righe di assorbimento in questa banda larga di emissione dovute naturalmente all'autoinversione. Le lastre fotografiche venivano quindi microfotometrate mediante apparecchio della casa Kipp, e sulle curve così ottenute si raggiungeva una notevole dispersione, comparando i centri delle due righe D_1 e D_2 , individuati da due minimi per effetto dell'autoinversione, a più di due millimetri di distanza. Da queste microfotometrie sono stati ricavati degl'ingrandimenti e questi riportati su carta millimetrata in modo da ottenere facilmente la misura delle ascisse, che danno la lunghezza d'onda dato che si ha il vantaggio d'avere spettro normale, e delle ordinate che danno quantità proporzionale all'intensità. Le misure sono state condotte sulla D_1 dal lato delle lunghezze d'onde crescenti, tenendo naturalmente conto del contributo all'annerimento che può portare la D_2 . Le misure sono relative al bordo. Sono state ricavate dalle fotografie quattro curve.

(1) HOLTZMARK, « Zeit. für Phys. », 34, 722, 1925.

In figura si riportano i risultati ottenuti. Le misure delle ordinate sono state fatte sempre per le stesse ascisse corrispondenti a lunghezze d'onda distanti di 9.0; 11.2; 12.7; 15.0; 16.5 Å dalla D_1 . Come ordinate in tutte le figure si hanno quantità proporzionali al logaritmo decimale delle intensità. La scala delle ascisse per ogni figura è duplice: per una curva si hanno quantità proporzionali a Δ^2 , per l'altre quantità proporzionali a $\log \Delta^2$. Si vede nettamente che la distribuzione delle intensità segue la legge esponenziale che si ricava dalla teoria di Holtzmark.

Inoltre è possibile ricavare la larghezza della D_1 nelle quattro condizioni corrispondenti alle quattro curve. Infatti conosciuto il valore del coefficiente angolare della retta rappresentata dalla ($1'$), quando cioè si assu-



mono come ordinate le quantità $\log I$ e come ascisse le quantità Δ^2 , si conosce un valore k che è dato da

$$k = \frac{\log_{10} \ell}{\Delta^2} = \frac{\log_{10} \ell}{(\Delta v)^2} \times (0.37)^2$$

e quindi si può ricavare Δv .

Per i nostri dati otteniamo i seguenti valori per Δv :

$$2.47 \times 10^{11}; 3.70 \times 10^{11}; 3.85 \times 10^{11}; 3.23 \times 10^{11}.$$

Si vede quindi che in tal caso si hanno valori più grandi di quelli ottenuti per le fiamme e ciò in dipendenza della maggiore concentrazione del vapore sull'arco; tali valori si avvicinano a quelli ottenuti da Trumpy con grandi densità e in assorbimento.

Un altro effetto di allargamento segue legge esponenziale e questo dipende dall'effetto Doppler, ma per ottenere larghezze dell'ordine di grandezza di quelle osservate bisognerebbe ammettere velocità straordinariamente elevate, resta quindi dimostrato che l'effetto di risonanza porta ad una

distribuzione delle intensità di carattere esponenziale così come è previsto in base alla teoria di Holtzmark.

Concludendo in questi due lavori si è dimostrato: 1° che l'allargamento di una riga in emissione varia come la radice quadrata della concentrazione; 2° che la distribuzione delle intensità segue una legge esponenziale. Queste due leggi sono state ricavate dall'Holtzmark in base alla teoria dell'assorbimento basate sull'azione mutua dei risuonatori uguali fra di loro, e questa teoria risulta quindi verificata dall'esperienza potendosi dunque parlare di un effetto di allargamento per risonanza.

Fisica matematica. — *Sulle operazioni funzionali della fisica matematica che si presentano come funzioni razionali del simbolo di derivazione.* Nota di ANGELINA CABRAS presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. GIORGI.

1. Le nuove ricerche del prof. Sbrana, dell'ing. L. Straneo e del dr. J. J. Smith, intorno ai gruppi di operatori dei tipi Δ^s , $\left(\frac{a+b\Delta}{c+d\Delta}\right)^s$, ecc., dove Δ è il simbolo della derivazione rispetto al tempo, cioè $\Delta = \frac{d}{dt}$, mentre s è un numero reale qualunque, e le discussioni che ne sono conseguite al Congresso di Matematica di Bologna, dove ho presentato una comunicazione sul ponte di Wheatstone a costituzione complessa ⁽²⁾, mi inducono a rendere note altre ricerche che, in occasione di detto lavoro, ho fatto sugli operatori del tipo $\frac{P(\Delta)}{Q(\Delta)}$, essendo P e Q due polinomi qualunque, con coefficienti non funzioni della variabile principale t .

Mostrerò qui un caso generale che fisicamente dà origine a dipendenze funzionali esprimibili con simboli del tipo $\frac{P(\Delta)}{Q(\Delta)}$, e discuterò poi la valutazione di questi operatori, prendendo come punto di partenza le teorie fondamentali date dal Giorgi in varie sue pubblicazioni e nelle sue lezioni e tenendo conto dei risultati che hanno ottenuto gli Autori citati testè.

2. Sia una rete, cioè un sistema finito di resistenze, induttanze e capacità. Su un lato agisca una f. e. m. $V(t)$ data arbitrariamente come funzione qualunque (generalmente non periodica) del tempo. Si vuol conoscere

(1) Nella seduta del 6 gennaio 1929.

(2) *Fenomeni transitori in un ponte di Wheatstone a costituzione complessa.* Comunicazione fatta alla Sezione III-A del Congresso Internazionale di Matematica in Bologna, il giorno 8 settembre 1928; in corso di stampa negli « Atti del Congresso ».

la corrente $I(t)$ che per effetto di questa $V(t)$ viene generata in un altro lato determinato della rete.

Risolvendo il problema per correnti continue come se in luogo delle induttanze e delle capacità vi fossero altrettante resistenze ohmiche, si ottiene

$$(1) \quad I = \frac{P}{Q} V$$

dove P e Q sono determinanti, e quindi polinomi, che contengono le resistenze dei lati della rete ⁽¹⁾.

Di qui si ottiene la soluzione per le correnti variabili, secondo una teoria nota ⁽²⁾ così: In luogo di I, V scrivere $I(t), V(t)$; in luogo di ogni induttanza L , immaginare sostituita una resistenza simbolica $L\Delta$, e in luogo di ogni capacità K una resistenza simbolica $(K\Delta)^{-1}$ dove Δ ha il detto significato di derivatore rispetto al tempo. La soluzione si presenta allora espressa simbolicamente sotto la forma

$$(2) \quad I(t) = \frac{P(\Delta)}{Q(\Delta)} V(t).$$

In essa il simbolo

$$(3) \quad f(\Delta) = \frac{P(\Delta)}{Q(\Delta)}$$

(a cui si può dare il nome di *ammittenza mutua funzionale* dei due lati considerati) deve essere inteso come un operatore funzionale normale lineare, e l'operando è la funzione $V(t)$. Quest'operatore è rappresentato algebricamente come un'espressione razionale nel simbolo Δ e si presenta, come in tutti i casi consimili, il problema di *valutarlo*, cioè di interpretarlo secondo le regole del calcolo degli operatori funzionali, in modo da poter tradurre il risultato in algoritmi di calcolo ordinario.

Un metodo di valutazione ovvio sarebbe quello di trasformare la (3) nella

$$(4) \quad Q(\Delta)I(t) = P(\Delta)V(t)$$

e considerare questa come un'equazione differenziale ordinaria da cui $I(t)$ risulta determinata in unione ai dati fisici (stato iniziale dato, o altre condizioni ai limiti) che intervengono di volta in volta nel problema. Ma per lo scopo di questo scritto interessa considerare il problema da un altro punto di vista, e nel tempo stesso assumere che la condizione determinante sia la nota condizione di *successione* così formulata: si suppone che

(1) Cfr. J. H. JEANS, *The Mathematical theory of Electricity and Magnetism*. Vth ed., Cambridge 1925, Ch. IX, art. 360-364, pp. 324-33.

(2) Cfr. G. GIORGI, *Il metodo simbolico nello studio delle correnti variabili*. «Atti dell'Associazione Elettrotecnica Italiana» vol. VIII, 1904, pp. 65-141; art. 25 e segg.

$V(t)$ sia nota e data per tutti i valori passati del tempo, e che in ogni singolo istante t il valore di $I(t)$ debba dipendere dai valori passati e non da quelli futuri di $V(t)$. Fisicamente è ovvio che questa condizione, in ogni rete fisica reale, basta per determinare la soluzione univocamente, e la soluzione così individuata corrisponde a quella che si chiama valutazione *fondamentale* o valutazione *retrospettiva* ⁽¹⁾ dell'operatore.

3. In base a questa premessa, studiamo i caratteri generali dell'operatore $f(\Delta)$, dato dalla (3), tenendo anzitutto conto del problema fisico.

Se si fa $\Delta = 0$, ogni $L\Delta$ diviene nullo e ogni $(K\Delta)^{-1}$ diviene infinito; quindi è lo stesso che sostituire le induttanze con corti circuiti, e tagliare le capacità. Apprendiamo di qui che il valore $f(0)$ rappresenta il valore che assume il rapporto $\frac{I}{V}$ per le correnti continue, perchè precisamente per le correnti continue le induttanze cessano di opporre ostruzione, mentre i condensatori oppongono ostruzione insuperabile.

In base all'ispezione della struttura della rete, si riconosce facilmente caso per caso che cosa avviene cortocircuitando tutte le L e tagliando tutte le K , e si calcola quindi l'ammettenza mutua che il sistema presenta per corrente continua. Si ha così una prima informazione sul carattere di $f(\Delta)$ in relazione alla struttura della rete.

4. Procedendo oltre: In base alla teoria elementare delle correnti alternanti di Kennelly e Steinmetz, si riconosce che facendo $\Delta = i\omega$ si ottiene l'ammettenza mutua per una corrente sinusoidale di frequenza angolare ω . Scrivendo:

$$(5) \quad \mathbf{I} = f(i\omega) \mathbf{V}$$

dove \mathbf{I}, \mathbf{V} sono le quantità complesse o i vettori del piano rappresentativi delle I, V alternanti, si vede che $f(i\omega)$ rappresenta l'ammettenza mutua complessa dei due lati per una corrente sinusoidale di frequenza angolare ω . In questo modo tutto l'andamento della funzione $f(\Delta)$ per valori immaginari puri dell'argomento viene posto in relazione con un'altra proprietà fisica della rete.

5. E ora infine: — Se si fa $\Delta = \infty$ (non v'è differenza da fare tra $+\infty, -\infty, +i\infty, -i\infty$) si ottiene l'ammettenza mutua per correnti di frequenza infinita. Ora, quando la frequenza diviene infinitamente grande, le induttanze divengono ostacoli insuperabili; cioè più precisamente resi-

(1) Cfr. G. GIORGI, *On the functional dependence of physical variables*. Art. 25 e 26, «Proceedings of the International Mathematical Congress of 1924 in Toronto», vol. II; N. WIENER, *The operational calculus*, «Mathematische Annalen», Bd. 95, 1926, pp. 557-584.

stenze infinite del primo ordine rispetto a ω perchè hanno impedenza complessa $L i \omega$; similmente le capacità divengono corti circuiti, e per precisare tendono a zero del primo ordine rispetto al divenire infinito della frequenza, perchè ogni capacità equivale ad un'impedenza complessa $(K i \omega)^{-1}$. Quindi $f(\infty)$ rappresenta l'ammettenza che si incontra quando le L sono tagliate e le K sono cortocircuitate. Se si applica un teorema che tutti gli autori ammettono e che nessuno ha mai dimostrato con rigore, $f(\infty)$ rappresenta anche il valore iniziale che assume $I(t)$ quando $V(t)$ dopo essere stata sempre zero passa improvvisamente al valore uno.

Si possono, in relazione al modo di divenire di $f(\Delta)$ per $\Delta = i \infty$, distinguere tre casi:

a) se vi è un cammino chiuso tutto di capacità pure (senza resistenze e senza induttanze) che comprenda i due lati della rete che si considerano, diviene possibile per una corrente di frequenza infinitamente grande circolare per quei due lati senza incontrare ostacolo; e allora $f(\infty) = \infty$, ma del primo ordine e non più, salvo casi particolari (posizioni di coniugazione dei due lati, e simili) in cui $f(\infty)$ si riduce ad essere finita o nulla. In questo caso dunque $P(\Delta)$ è generalmente di un grado superiore a $Q(\Delta)$, ma può divenire di grado uguale o inferiore.

b) se non vi è un cammino come sopra con sole capacità, ma ne esiste uno senza induttanze, una corrente di frequenza infinita può circolare lungo di esso senza incontrare altro che resistenze, e allora si ha $f(\infty) = \text{finito}$ e in casi particolari $f(\infty) = 0$; e quindi $P(\Delta)$ e $Q(\Delta)$ hanno grado in generale uguale, salvo riduzione del grado di $P(\Delta)$ in particolare.

c) se ogni cammino chiuso comprendente i due lati contiene induttanze, una corrente di frequenza infinitamente grande non può richiudersi percorrendo i lati medesimi, se non incontrando un'ostruzione infinitamente grande e allora si ha $f(\infty) = 0$, ma generalmente del primo ordine rispetto a Δ ; e quindi $Q(\Delta)$ è di un grado superiore a $P(\Delta)$, salvo casi particolari in cui il grado di $P(\Delta)$ si riduce ulteriormente.

In conclusione, riassumendo i diversi casi: il grado di $P(\Delta)$ può essere al più di una unità superiore a quello di $Q(\Delta)$.

6. Una distinzione tra sistemi fisicamente realizzabili e sistemi non realizzabili è stata fatta da G. Giorgi ⁽¹⁾ considerando nella prima categoria quelli in cui ogni elemento contiene resistenza e induttanza. Forse questa distinzione ha minor valore pratico di quanto appare perchè in molti sistemi la resistenza e l'induttanza di qualche lato possono riuscire realmente trascurabili e può convenire considerarle nulle. Ma nei limiti dell'esatto rigore teorico si deve mantenerla.

(1) G. GIORGI, op. cit., *Il metodo simbolico ecc.*; vedi negli art. 44 e 45 la discussione dei circuiti fondamentali completi.

Limitiamoci così a considerare il caso di una rete in cui ogni lato contenga resistenze induttive. Allora l'operatore di ammettenza:

$$(6) \quad f(\Delta) = \frac{P(\Delta)}{Q(\Delta)}$$

è tale che se n è il grado del denominatore, quello del numeratore è di regola $n - 1$, e in casi particolari può essere anche inferiore ad $n - 1$. In questo caso $f(\infty) = 0$; ciò significa che, se in luogo del simbolo Δ si sostituisce una variabile complessa e si fa tendere questa verso l'infinito per un cammino qualunque, $f(\Delta)$ tende sempre verso zero di ordine non inferiore al primo. Allora, in virtù di teoremi noti ⁽¹⁾, l'operatore è *diffusivo* cioè tale che applicato ad una funzione impulsiva genera una funzione ordinaria; e se viene applicato ad una funzione ordinaria $V(t)$ il risultato è dato da una formola di questo tipo:

$$(7) \quad f(\Delta)V(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t - \tau) V(\tau) d\tau$$

dove la *funzione generatrice* G è una funzione nel senso ordinario della parola, cioè priva di elementi impulsivi. Il problema effettivo della valutazione è ridotto al calcolo esplicito di questa funzione generatrice.

Da un teorema generale del calcolo degli operatori funzionali ⁽²⁾ sappiamo che la funzione generatrice $G(t)$ di un operatore $f(\Delta)$ è data da un integrale di questa forma

$$(8) \quad G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} f(\omega) e^{\omega t} d\omega$$

e che se si vuole ottenere la valutazione fondamentale, cioè quella che soddisfa alla condizione di successione, questo integrale deve essere effettuato lungo un percorso che lasci a sinistra tutti i punti singolari al finito della funzione $f(\omega)$.

Indicando con C questo percorso, il quale può essere anche il semicerchio infinito di destra del piano complesso, scriveremo nel nostro caso

$$(9) \quad G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P(\omega)}{Q(\omega)} e^{\omega t} d\omega.$$

È da notare che $G(t)$ si presenta come una trasformata di Laplace della funzione $\frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$; ciò potrebbe anche ricavarsi per generalizzazione del pro-

(1) Cfr. G. GIORGI, op. cit., *On the functional dependence etc.*, Part. 9, art. 29.

(2) Cfr. G. GIORGI, op. cit., *On the functional dependence etc.*, Part. 7, art. 20 e segg.

cedimento molto ingegnoso esposto da Doetsch e Bernstein nella « Mathematische Zeitschrift » del 1925. Le proprietà di $G(t)$ si lasciano determinare e discutere in base alla teoria delle trasformazioni di Laplace, che è stata esposta da Pincherle, da Le Roux, da Carson e da altri. Ma si può anche esprimere $G(t)$ in termini finiti. A questo scopo si deve risolvere $\frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$ in una somma di frazioni semplici del tipo $\frac{A_{im}}{(\omega - \rho_i)^m}$, tante quant'è il grado del polinomio Q .

L'integrale si spezza allora in tanti altri e il calcolo si riduce a quello di valutare integrali del tipo

$$(10) \quad \varphi(t) = \frac{A_{im}}{2\pi i} \int_C \frac{e^{\omega t}}{(\omega - \rho_i)^m} d\omega$$

dove ρ è una radice generica del denominatore e dove m si riduce all'unità per le radici semplici.

Scegliendo come percorso C d'integrazione il detto semicerchio infinito di destra, osserviamo che quando t è negativo, $e^{\omega t}$ diviene infinitesimo di ordine esponenziale lungo quel semicerchio; quindi si deduce che l'integrale riesce nullo, cioè:

$$(11) \quad \varphi(t) = 0 \quad \text{per } t < 0.$$

D'altra parte per $t = 0$ non nasce nessuna complicazione perchè $G(t)$ essendo generata da un operatore diffusivo non può avere nessun elemento impulsivo. Siccome $G(t)$ è destinata a figurare solamente sotto un segno integrale, il valore singolo di $G(t)$ per $t = 0$ non interessa.

Resta dunque da considerare il caso di t positivo. Facciamo il cambiamento di variabile

$$\omega = \frac{w}{t} + \rho_i$$

e notiamo che essendo $t > 0$ le due variabili ω, w percorrono simultaneamente la linea C per lo stesso verso. Quindi:

$$(12) \quad \varphi(t) = A_{im} \frac{e^{\rho_i t} t^{m-1}}{2\pi i} \int_C \frac{e^w}{w^{im}} dw \quad \text{per } t > 0.$$

Ora è da osservare che lungo il semicerchio infinito di sinistra, la funzione sotto il segno integrale diviene esponenzialmente infinitesima; quindi questo semicerchio infinito può aggiungersi al percorso d'integrazione senza alterare il valore dell'integrale: il percorso C diviene allora il cer-

chio all'infinito, preso a partire dal punto $w = -\infty$. E allora in base alla teoria dei residui di *Cauchy* si ricava che:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{wz}}{w^m} dw = \frac{1}{(m-1)!}$$

con l'avvertenza di prendere $0! = 1$ quando il caso si presenta.

Sostituendo questo risultato si ricava:

$$\varphi(t) = \frac{A_{im} e^{\rho_i t}}{(m-1)!} t^{m-1} \quad \text{per } t > 0.$$

7. Riassumendo, ne risulta una $G(t)$ così fatta:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} G(t) = 0 \quad \text{per } t < 0 \\ G(t) \text{ non impulsiva, per } t = 0 \\ G(t) = \text{somma di termini del tipo } A_{i0} e^{\rho_i t} \\ \quad \text{e di termini del tipo } A_{im} \frac{e^{\rho_i t}}{(m-1)!} t^{m-1}, \text{ per } t > 0. \end{array} \right.$$

Tenendo conto di questo risultato nella formula (7) si ottiene la formola finale

$$(14) \quad I(t) = \frac{P(\Delta)}{Q(\Delta)} V(t) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum A_{i0} e^{\rho_i t} + \sum A_{im} \frac{e^{\rho_i (t-\tau)}}{(m-1)!} (t-\tau)^{m-1} \right] V(\tau) d\tau.$$

Questa è valida, ricordiamo, nel caso considerato in cui il grado del denominatore Q è superiore a quello del numeratore P .

L'estensione agli altri due casi possibili in cui il grado di P è uguale o immediatamente superiore a quello di Q si effettua scrivendo

$$(15) \quad \frac{P(\Delta)}{Q(\Delta)} = a + b\Delta + \frac{P_0(\Delta)}{Q(\Delta)}$$

col coefficiente b eventualmente nullo, e con P_0 di grado inferiore a Q . Allora l'operatore $a + b\Delta$ si sa applicare direttamente perchè implica al più una sola derivazione e l'operatore $\frac{P_0(\Delta)}{Q(\Delta)}$ rientra nel caso precedente.

Il problema di valutare fisicamente gli operatori $\frac{P(\Delta)}{Q(\Delta)}$ quali si presentano nello studio delle correnti variabili nelle reti è così risoluto.

Fisica teorica. — *L'effetto Raman e l'assorbimento negativo.*
Nota di B. ROSSI, presentata⁽¹⁾ dal Socio A. GARBASSO.

1. Si considera generalmente l'effetto Raman come una prova sperimentale dell'emissione indotta o assorbimento negativo (*negative Einstrahlung*) postulato da Einstein nella sua ben nota deduzione della formula di Planck⁽²⁾.

Esaminando la cosa più da vicino, si riconosce però come questa interpretazione dia luogo a notevoli difficoltà. Poichè, se si assimila l'emissione indotta di Einstein ad un effetto Raman di seconda specie, essa dovrebbe possedere una frequenza doppia di quella assorbita od emessa spontaneamente dall'atomo.

Appare quindi non priva di interesse una analisi accurata del fenomeno, la quale valga a chiarire la vera natura del rapporto, che intercede tra l'effetto Raman e l'assorbimento negativo. A questa analisi è appunto dedicata la presente Nota.

2. Consideriamo un mezzo materiale, composto di atomi tutti identici fra loro in equilibrio termodinamico alla temperatura T . Siano, per semplicità, due soli gli stati quantici possibili, di energia rispettivamente E_1 ed E_2 ($E_1 < E_2$). Se hanno il medesimo peso statistico, i numeri degli atomi che si trovano nel primo e nel secondo di essi sono:

$$(1) \quad N_1 = Ce^{-\frac{E_1}{kT}} \quad ; \quad N_2 = Ce^{-\frac{E_2}{kT}}.$$

Questo mezzo materiale sia immerso in un campo di radiazione; indichiamo con $n(\nu) d\nu$ il numero di quanti di luce per unità di volume, di frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$. La densità di energia è $\rho(\nu) = h\nu n(\nu)$.

Gli scambi energetici fra materia e radiazione avvengono in due modi:

a) *Per effetto Raman di prima specie*: un quanto di frequenza ν incontra un atomo nello stato E_1 ; ne provoca il passaggio allo stato E_2 cedendogli l'energia necessaria e si trasforma in un quanto di frequenza $\nu - \nu_{12}$ (essendo $\nu_{12} = \frac{E_2 - E_1}{h}$).

(1) Nella seduta del 3 febbraio 1929.

(2) Vedi RAMAN e KRISHNAN, «Nature», 1928, vol. 122, p. 12 e «Proc. Roy. Soc.», 1929, vol. 122, p. 23. Sull'esattezza di questa interpretazione espongono qualche dubbio, ma in modo assai vago, SAHA, KOTHARI e TOSHNIWAL («Nature», 1928, vol. 122, p. 398).

b) Per effetto Raman di seconda specie: un quanto di frequenza ν incontra un atomo nello stato E_2 ; ne provoca il passaggio allo stato E_1 , arricchendosi dell'energia liberata in questa transizione e si trasforma in un quanto di frequenza $\nu + \nu_{12}$.

I numeri dei quanti di frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$ che, nella unità di tempo, subiscono effetto Raman di prima e di seconda specie possono porsi rispettivamente eguali ad $A_1^2(\nu) N_1 n(\nu) d\nu$ e ad $A_2^1(\nu) N_2 n(\nu) d\nu$; dove i coefficienti $A_1^2(\nu)$ e $A_2^1(\nu)$ vanno determinati colla condizione che, quando la distribuzione dei quanti obbedisce alla legge di Planck:

$$(2) \quad n_o(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

sussista equilibrio statistico negli scambi d'energia fra materia e radiazione; ossia che tanti siano i quanti di luce che, nell'unità di tempo, passano dall'intervallo $\nu'' \rightarrow \nu' + d\nu'$ all'intervallo $\nu' \rightarrow \nu' + d\nu'$ ($\nu'' = \nu' + \nu_{12}$) quanti quelli che eseguiscano il passaggio inverso ⁽¹⁾. Ciò porta all'equazione:

$$(3) \quad A_1^2(\nu'') N_1 n_o(\nu'') d\nu'' = A_2^1(\nu') N_2 n_o(\nu') d\nu'.$$

Ora è facile convincersi che tale equazione non può essere soddisfatta per tutti i valori di T se si ammette (come sembra, a prima vista, naturale) che A_1^2 e A_2^1 dipendano soltanto dalla natura dell'atomo e dalle frequenze ν'' e ν' rispettivamente.

Ma tale ipotesi appunto non è lecita.

I quanti di luce infatti obbediscono, come è noto, alla statistica di Bose-Einstein, la quale presuppone che la probabilità che un quanto possieda una determinata energia (e quindi una determinata frequenza) non è indipendente dalla circostanza che altri quanti posseggano la medesima energia ⁽²⁾. Perciò la probabilità che un quanto passi, per effetto Raman, dalla frequenza ν'' alla frequenza ν' deve dipendere non solo da $n(\nu'')$, ma anche da $n(\nu')$; ossia A_1^2 deve essere funzione di $n(\nu')$ e, analogamente, A_2^1 funzione di $n(\nu'')$.

Per determinare la forma di tali funzioni, osserviamo che, per le (1) e (2), si ha identicamente:

$$N_1 n_o(\nu'') \left[n_o(\nu') + \frac{8\pi\nu'^2}{c^3} \right] = N_2 n_o(\nu') \left[n_o(\nu'') + \frac{8\pi\nu''^2}{c^3} \right].$$

(1) Che questa condizione, evidentemente sufficiente, sia anche necessaria può dimostrarsi in modo simile a quello seguito da KLEIN e ROSSELAND (« Zs. f. Phys. », 1921, vol. 4, p. 46) nel problema analogo relativo all'urto fra atomi ed elettroni.

(2) Vedi EINSTEIN, « Sitz. ber. d. Preuss. Ak. d. Wiss. », 1925, p. 3.

Da un confronto colla (3) si ricava (poichè $dv'' = dv'$):

$$(4) \quad A_1^2(v'') = A \left[n_0(v') + \frac{8\pi v'^2}{c^3} \right] \quad ; \quad A_2^1(v') = A \left[n_0(v'') + \frac{8\pi v''^2}{c^3} \right] \quad (1).$$

La quantità A non dipende da $n_0(v'')$ perchè A_1^2 non dipende da $n_0(v'')$, nè da $n_0(v')$, perchè A_2^1 non dipende da $n_0(v')$. Essa quindi dipende soltanto dalla natura dell'atomo e dalla frequenza. Più simmetricamente, possiamo scrivere i coefficienti di probabilità dell'effetto Raman di prima e di seconda specie, relativi alla medesima frequenza ν , nel modo seguente:

$$(4a) \quad \begin{cases} A_1^2(\nu, n(\nu - \nu_{12})) = A'(\nu) \left[n(\nu - \nu_{12}) + \frac{8\pi(\nu - \nu_{12})^2}{c^3} \right] \\ A_2^1(\nu, n(\nu + \nu_{12})) = A''(\nu) \left[n(\nu + \nu_{12}) + \frac{8\pi(\nu + \nu_{12})^2}{c^3} \right] \end{cases}$$

dove le funzioni $A'(\nu)$ e $A''(\nu)$ sono legate dalla relazione:

$$(5) \quad A'(\nu) = A''(\nu - \nu_{12}).$$

Si è posto di nuovo n in luogo di n_0 perchè le (4a) debbono valere indipendentemente dall'ipotesi che la distribuzione dei quanti sia quella che corrisponde all'equilibrio termodinamico.

3. Conviene soffermarsi sul significato delle (4a).

Esse ci dicono che quando un quanto di frequenza ν incontra un atomo eccitato, la probabilità che si produca un effetto Raman di seconda specie è tanto più grande, quanto più numerosi sono i quanti di frequenza $\nu + \nu_{12}$ presenti. In altre parole, la presenza di quanti di frequenza $\nu + \nu_{12}$ aumenta la probabilità che un quanto di frequenza ν provochi il passaggio $E_2 \rightarrow E_1$. Indipendentemente da ciò poi, i quanti di frequenza $\nu + \nu_{12}$ aumentano la probabilità della transizione $E_2 \rightarrow E_1$ perchè provocano essi stessi un effetto Raman di seconda specie, da cui prendono origine quanti di frequenza $\nu + 2\nu_{12}$. È evidente che queste due azioni sono di carattere completamente diverso e non debbono venir confuse l'una coll'altra.

Considerazioni perfettamente analoghe valgono per l'effetto Raman di prima specie.

4. Quando si eseguisce l'esperienza dell'effetto Raman, come di solito avviene, con luce monocromatica, si deve porre $n(\nu - \nu_{12}) = n(\nu + \nu_{12}) = 0$; si ricava quindi dalle (4a):

$$A_1^2(\nu) = A'(\nu) \frac{8\pi(\nu - \nu_{12})^2}{c^3} \quad ; \quad A_2^1(\nu) = A''(\nu) \frac{8\pi(\nu + \nu_{12})^2}{c^3}.$$

(1) Per questa deduzione cfr. PAULI, «Zs. f. Phys.», 1923, vol. 18, p. 272; EINSTEIN u. EHRENFEST, «Zs. f. Phys.», 1923, vol. 19, p. 301; JORDAN, «Zs. f. Phys.», 1927, vol. 41, p. 711.

Il rapporto fra le intensità dell'effetto Raman di prima e di seconda specie risulta eguale a:

$$\frac{A_1^2(\nu) N_1 n(\nu) b(\nu - \nu_{12}) d\nu}{A_2^2(\nu) N_2 n(\nu) b(\nu + \nu_{12}) d\nu} = \frac{A'(\nu) \left(\frac{\nu - \nu_{12}}{\nu + \nu_{12}} \right)^3 e^{\frac{E_2 - E_1}{kT}}}{A''(\nu) \left(\frac{\nu - \nu_{12}}{\nu + \nu_{12}} \right)^3 e^{\frac{E_2 - E_1}{kT}}} =$$

$$= \frac{A''(\nu - \nu_{12})}{A''(\nu)} \left(\frac{\nu - \nu_{12}}{\nu + \nu_{12}} \right)^3 e^{\frac{E_2 - E_1}{kT}}$$

($d\nu$ rappresenta qui la larghezza della riga spettrale della radiazione incidente).

Il rapporto considerato dipende quindi dalla forma della funzione $A''(\nu)$; ma poichè, essendo in generale, $\nu_{12} \ll \nu$, il termine $\frac{A''(\nu - \nu_{12})}{A''(\nu)} \left(\frac{\nu - \nu_{12}}{\nu + \nu_{12}} \right)^3$ non deve discostarsi molto dall'unità, la sua grandezza è determinata essenzialmente dal termine $e^{\frac{E_2 - E_1}{kT}}$. Ciò è in accordo colle esperienze di Raman e Krishnan⁽¹⁾.

5. Torniamo al caso dell'equilibrio termodinamico. L'effetto Raman di prima specie, come si è visto, consiste nelle due trasformazioni contemporanee:

per il quanto: $\nu \rightarrow \nu - \nu_{12}$

per l'atomo: $E_1 \rightarrow E_2$.

Se facciamo tendere ν a ν_{12} la frequenza del quanto riemesso tende a zero; al limite, l'energia del quanto si trasforma per intero in energia atomica e l'effetto Raman di prima specie si identifica col fenomeno dell'assorbimento. Appare quindi assai naturale ammettere che il numero μ di quanti assorbiti nell'unità di tempo sia eguale (quando ci si trova nelle condizioni dell'equilibrio termodinamico) al limite a cui tende il numero di quanti, che subiscono effetto Raman di prima specie, al tendere di ν a ν_{12} :

$$\mu = \lim_{\nu \rightarrow \nu_{12}} N_1 n_0(\nu) A'(\nu) \left[n_0(\nu - \nu_{12}) + \frac{8\pi(\nu - \nu_{12})^2}{c^3} \right] d\nu.$$

Posto:

$$(6) \quad b = \lim_{\nu \rightarrow \nu_{12}} A'(\nu) n_0(\nu - \nu_{12}) d\nu$$

si ha (essendo $n_0(\nu - \nu_{12})$ infinitesimo di primo ordine e $\frac{8\pi(\nu - \nu_{12})^2}{c^3}$ infinitesimo di secondo ordine per $\nu \rightarrow \nu_{12}$):

$$(7) \quad \mu = b N_1 n_0(\nu_{12}).$$

(1) Vedi «Proc. Roy. Soc.», loc. cit.

Poichè b è finito, la (6) ci dice che $A'(v)$ tende all'infinito al tendere di v a v_{12} .

Analogamente il fenomeno Raman di seconda specie può schematizzarsi nella seguente coppia di trasformazioni contemporanee:

$$\text{per il quanto: } v \rightarrow v + v_{12}$$

$$\text{per l'atomo: } E_2 \rightarrow E_1.$$

Il quanto riemesso per effetto Raman di seconda specie ha dunque una frequenza che tende a v_{12} quando v tende a zero; al limite quindi *l'effetto Raman di seconda specie si identifica col fenomeno dell'emissione* (spontanea e indotta).

Il numero dei quanti emessi, per la seconda delle (4 a) risulta eguale a:

$$\mu' = \lim_{v \rightarrow 0} N_2 n_o(v) A''(v) \left[n_o(v + v_{12}) + \frac{8\pi(v + v_{12})^2}{c^3} \right] dv$$

ossia, per la (7) e la (5)

$$(8) \quad \mu' = b N_2 n_o(v_{12}) + a N_2$$

con:

$$(9) \quad \frac{a}{b} = \frac{8\pi v_{12}^2}{c^3} \quad (1).$$

Le formule (7), (8), (9) sono identiche a quelle di Einstein; ma il modo con cui siamo giunti ad esse mette bene in chiaro il significato del termine $b N_2 n_o(v_{12})$, che corrisponde all'assorbimento negativo di Einstein. Esso infatti traduce l'influenza che, in virtù del legame stabilito tra i quanti dalla statistica di Bose-Einstein, i quanti di frequenza v_{12} esercitano sulla emissione da parte dell'atomo di quanti di questa medesima frequenza. Non si tratta quindi di un fenomeno Raman di seconda specie, provocato dai quanti di frequenza v_{12} ; quest'ultimo fenomeno effettivamente sussiste e dà luogo all'emissione di una frequenza $2v_{12}$; ma non ha nulla a che fare con l'assorbimento negativo postulato da Einstein.

6. Le precedenti considerazioni mostrano come la teoria corpuscolare della luce permetta di riunire in un unico schema perfettamente coerente l'effetto Raman e i fenomeni dell'assorbimento e dell'emissione (spontanea e indotta). Secondo questo schema l'effetto Raman di seconda specie va considerato come un urto superelastico di un quanto di luce con un atomo eccitato, mentre l'emissione indotta come una modificazione della probabi-

(1) Quando si considera la densità $\rho(v)$ anzichè il numero di quanti $n(v)$ si ha naturalmente $\frac{a}{b} = \frac{8\pi h v_{12}^3}{c^3}$.

lità, che ha un atomo di emettere una radiazione di data frequenza per effetto della presenza di altri quanti della frequenza medesima.

Questo legame fra i quanti di luce, la cui natura ci appare oggi completamente oscura, è analogo a quello stabilito dal principio di Pauli fra le molecole di un gas o gli elettroni di un metallo, che obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac ⁽¹⁾.

Mineralogia. — *Heulandite di Monastir.* Nota di G. MARTINEZ, presentata dal Socio G. BOERIS.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Il sistema $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3$ — HNO_3 — H_2O a 25°* ⁽²⁾.
Nota di G. MALQUORI, presentata ⁽³⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Per lo studio del diagramma di equilibrio del sistema $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3$ — KNO_3 — HNO_3 — H_2O a 25° , sul quale riferirò in una prossima Nota, è necessaria la conoscenza del sistema: $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3$ — HNO_3 — H_2O a questa temperatura.

Cameron e Robinson ⁽⁴⁾ hanno trovato che fino a concentrazioni acide corrispondenti al 55,2 % di N_2O_5 per 100 gr. di soluzione esiste in equilibrio con la soluzione satura il solo idrato $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$ e a concentrazioni più forti hanno ammesso l'esistenza di un nitrato acido di formula $\text{Fe}_2\text{O}_3 \cdot 4\text{N}_2\text{O}_5 \cdot 18\text{H}_2\text{O}$.

La composizione di questo solido fu stabilita dai due Autori americani esclusivamente con il metodo del resto, e servendosi di due soli valori sperimentali; essa perciò mi è parsa poco sicura tanto da indurmi a studiare di nuovo il sistema $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3$ — HNO_3 — H_2O a 25° nel campo delle concentrazioni elevate di acido nitrico.

I miei risultati riportati nella tabella e nella figura ⁽⁵⁾ escludono infatti l'esistenza a 25° del sale acido $\text{Fe}_2\text{O}_3 \cdot 4\text{N}_2\text{O}_5 \cdot 18\text{H}_2\text{O}$, e portano a riconoscere la presenza, per forti concentrazioni di HNO_3 , di una fase solida diversa da $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$, e precisamente $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ già ottenuto da Ditte ⁽⁶⁾.

(1) Vedi PERSICO, questi « Rendiconti », 1928, vol. 7, 1° sem., p. 235.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(3) Nella seduta del 3 febbraio 1929.

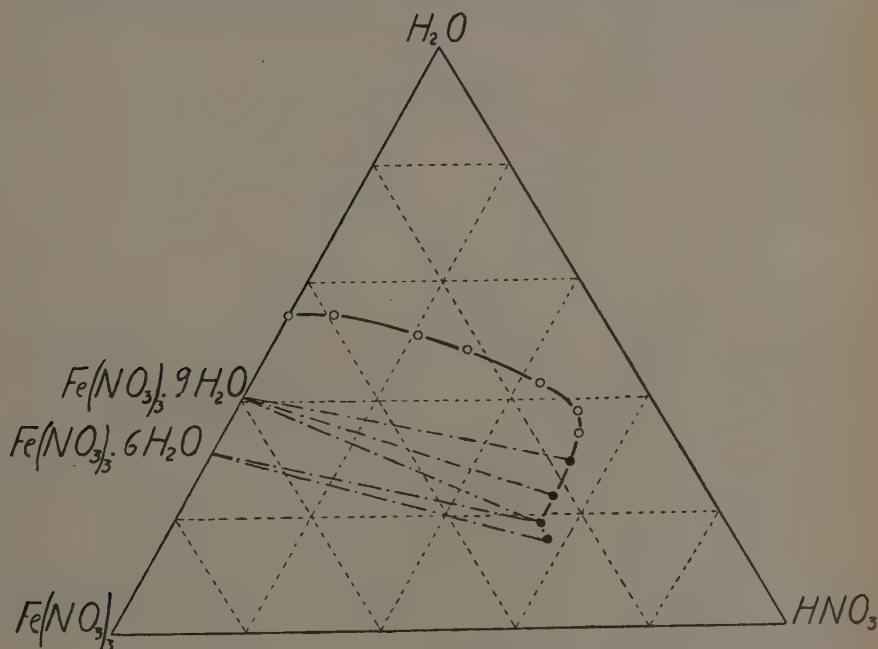
(4) « J. Phys. Chem. », 13, 251 (1909).

(5) I cerchietti bianchi indicano alcuni dei valori ottenuti da Cameron e Robinson.

(6) « Ann. Chim. Phys. », (5), 18, 336 (1879).

Sistema $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 - \text{HNO}_3 - \text{H}_2\text{O}$ a 25°

N°	Composizione della soluzione			Fasi solide
	$\text{Fe}(\text{NO}_3)_3$ %	HNO_3 %	H_2O %	
1	18,15	53,48	28,37	$\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$
2	22,41	53,79	23,80	»
3	28,02	54,23	17,75	$\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O} + \text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$
4	28,11	57,03	14,86	$\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$



Ho potuto facilmente preparare questo idrato sottoponendo la soluzione satura di $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$ in HNO_3 ($d = 1,52$) all'azione dell'anidride nitrica.

Soluzioni sature aventi a corpo di fondo: $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$ e $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ in diversi rapporti accusano all'analisi la stessa composizione (n. 3 tab.).

La natura dei solidi in equilibrio con le soluzioni nn. 1, 2, 4 (tab.) è stata accertata con l'analisi dopo completa separazione dal liquido per compressione fra placche di porcellana porosa.

Chimica. — *Azione dei diazotati sopra gli azossifenoli.* Nota di D. BIGIAVI e di S. STEFANIC O. F. M. ⁽¹⁾ presentata ⁽²⁾ dal Socio A. ANGELI.

Esperienze di questi ultimi anni pongono in rilievo il diverso comportamento in varie reazioni dei due isomeri p-ossiazossibenzoli e l'analogia dell'isomero di forma β con il p-nitrofenolo ⁽³⁾. Ricordiamo qui:

1° alcuni dati relativi ai tre composti in questione e a loro derivati, dati che pongono in evidenza differenze fra i due isomeri ⁽⁴⁾ e somiglianza del β con il p-nitrofenolo;

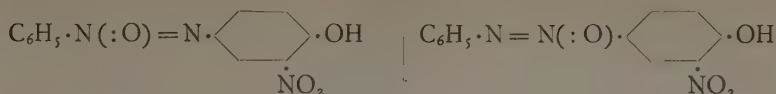
$\text{C}_6\text{H}_5 \cdot \text{N}(\text{:O}) = \text{N} \cdot \langle \text{---} \rangle \cdot \text{OH}$ <p>α p. f. 156°, cristalli gialli</p>	$\text{C}_6\text{H}_5 \cdot \text{N} = \text{N}(\text{:O}) \cdot \langle \text{---} \rangle \cdot \text{OH}$ <p>β p. f. 118° aghi giallo chiari</p>
$\text{O} : \text{N}(\text{:O}) \cdot \langle \text{---} \rangle \cdot \text{OH}$ <p>p. f. 114° aghi giallo chiari (biancastri)</p>	
$\text{C}_6\text{H}_5 \cdot \text{N}(\text{:O}) = \text{N} \cdot \langle \text{---} \rangle \cdot \text{OCH}_3$ <p>p. f. 73° aghi giallo chiari</p>	$\text{C}_6\text{H}_5 \cdot \text{N} = \text{N}(\text{:O}) \cdot \langle \text{---} \rangle \cdot \text{OCH}_3$ <p>p. f. 54° lamine bianco argenteo</p>
$\text{O} : \text{N}(\text{:O}) \cdot \langle \text{---} \rangle \cdot \text{OCH}_3$ <p>p. f. 54° prismi bianchi</p>	

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Organica della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 17 febbraio 1929.

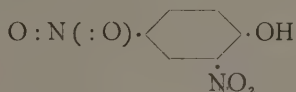
(3) A. ANGELI, «R. A. L.», 3 (1926), 454; BIGIAVI, «R. A. L.», 5 (1927), I, 444. Contrariamente a quanto è scritto in quest'ultima Nota, lo stannito sodico riduce entrambi i p-ossiazossibenzoli e i p-aminoazossibenzoli.

(4) Le recenti ricerche di SZEGÖ («B.», 61 (1928), 2087), eseguite a Milano nel Laboratorio del prof. Cambi, per un altro lato mettono in rilievo una notevole differenza fra i due p-ossiazossibenzoli nello spettro di assorbimento della regione dell'ultravioletto. L'isomero α presenta uno spettro che molto assomiglia a quello del benzolazofenolo (cfr. BRODE, «B.», 61 (1928), 1922). Anche il comportamento chimico degli azocomposti e dei relativi azossiderivati di forma α in molti casi è simile.



dà sali di Na, K, rosso scuri

dà sali di Na, K, aranciati



dà sali di Na, K, gialli

2° l'azione degli ossidanti. Al permanganato ⁽¹⁾ in soluzione alcalina l'isomero α risulta poco stabile, mentre il β -p-ossiazossibenzolo (p. f. 118°) e il p-nitrofenolo sono invece molto più resistenti. In modo analogo si comportano gli acetilderivati dei tre composti in questione quando sono sottoposti in soluzione acetica all'azione dell'acido cromico: l'acetilderivato dell'isomero α risulta più facilmente ossidabile che non gli eteri acetilici dell'isomero β e del p-nitrofenolo.

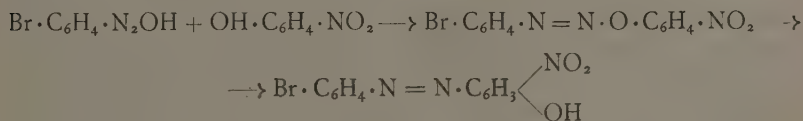
3° Il comportamento verso l'acido nitroso (prodotto da NaNO_2 sopra la soluzione acetica del composto) ⁽²⁾: l' α -ossiazossibenzolo fornisce quanti-

tativamente un mononitroderivato: $\text{C}_6\text{H}_5 \cdot \text{N}(\text{:O}) = \text{N} \cdot \text{C}_6\text{H}_3 \begin{matrix} \text{OH} \\ \text{NO}_2 \end{matrix}$ mentre

l'isomero β e il p-nitrofenolo, se si opera nelle stesse condizioni, rimangono inalterati.

4° L'azione dei diazotati sopra i tre composti in questione, argomento di cui qui riferiamo.

Una reazione interessante del p-nitrofenolo è quella che concerne l'azione dei diazoidrati sopra di esso. Come è noto dalle belle esperienze di Dimroth ⁽³⁾ nella reazione fra diazotati e fenoli si perviene in alcuni casi, anzichè all'ossiazocomposto, ad un termine intermedio, il diazoetere, il quale successivamente si trasforma nell'isomero ossiazocomposto. Ora appunto Dimroth e Hartmann ⁽⁴⁾ dal p-nitrofenolo per azione del p-bromofenildiazotato hanno ottenuto:



(1) A. ANGELI, «G.», 51 (1921), 35.

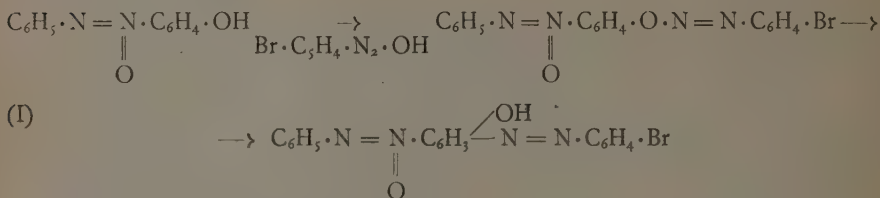
(2) ANGELI, BIGIARI, CARRARA, «R. A. L.», 31 (1922), I, 439.

(3) «B.», 41 (1928), 4012; «B.», 50 (1917), 1536; cfr. POLLAK, GEBAUER-FÜL-NEGG, «Monatscheft», 1929, 242.

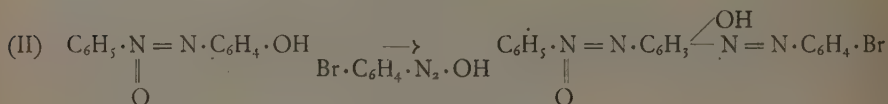
(4) «B.», 41 (1908), 4012.

Applicando ora agli azossifenoli l'azione dei diazotati, abbiamo potuto constatare che

1° come era da prevedersi, con l'isomero β si ha un diazoetere: di questo composto abbiamo potuto mettere in evidenza la proprietà che ha di copularsi con il β -naftolo e di trasformarsi rapidamente nel derivato ossiazoico isomero:



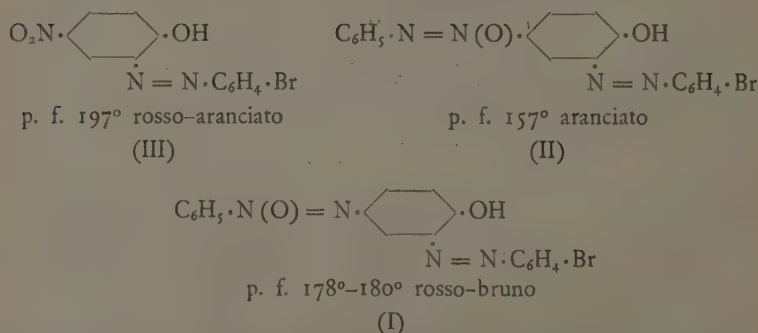
2° con l' α -benzolzossifenolo, invece, si ottiene direttamente l'ossiazocomposto corrispondente:



e non si riesce non solo ad isolare ma neppure a provare la formazione di un diazoetere sia pure in quantità minima.

La struttura dei composti (I) e (II) è stata determinata riducendo questi con stagno e acido cloridrico: si ha anilina, p-bromoanilina, 2-4-diamminofenolo.

I tre prodotti che si ottengono per azione del p-bromodiazotato rispettivamente sul p-nitrofenolo e sui due isomeri p-ossiazossibenzoli:

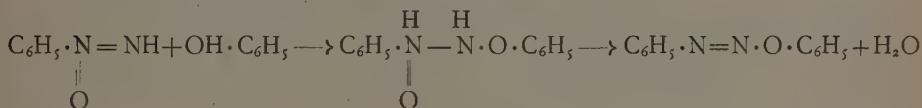


appartengono alla classe degli o-ossiazocomposti. Non troviamo esatta l'asserzione che il primo di questi, appunto per la sua qualità di o-ossiazo-

composto, non dia sali con gli idrati alcalini in soluzione acquosa. Si ottiene invece da esso, come dagli altri due, un sale sodico rosso che è poco solubile in acqua fredda e che mediante acido acetico diluito ripristina l'ossiazoderivato.

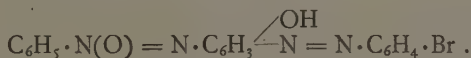
Dai tre suddetti composti si ottengono dei sali complessi fra cui in speciale modo caratteristici quelli di rame, che sono abbastanza stabili all'acido cloridrico diluito, pochissimo od affatto solubili nei solventi eccetto che in piridina e che assomigliano al sale di rame dell'o-ossiazobenzolo, descritto da Bamberger⁽¹⁾.

Per quel che riguarda la formazione dei diazoeteri, è interessante la recente ipotesi di Angeli⁽²⁾, cioè che abbia luogo un termine di addizione del fenolo ai doppi legami coniugati del diazotato (secondo formula di Angeli), con successiva eliminazione di acqua:



DATI SPERIMENTALI.

D) Azoderivato dell' α -p-ossiazossibenzolo (I):



Gr. 6.8 p-bromoanilina si sciolgono in 15 gr. HCl conc. e diluito a 60 cc.³ e si diazotano: si neutralizza con soluzione satura di carbonato sodico e poi si aggiungono gr. 12.8 acetato sodico. Si filtra e il filtrato (circa 120 cc.³) a -10° si versa lentamente in una soluzione di gr. 8.5 α -benzolazonifenolo in 170 cc.³ alcol, tenuta a -10° . Subito la soluzione scurisce e tosto si separa un precipitato fioccoso giallo-bruno. Dopo 18 ore si filtra e si purifica il prodotto trattandolo prima con alcol bollente e poi cristallizzando da benzolo o da acetone: cristallini brillanti color ruggine, che fondono a $178^\circ-180^\circ$ (N% trov. 14.46; per $\text{C}_{18}\text{H}_{13}\text{O}_2\text{N}_4\text{Br}$ N% calc. 14.11).

Riduzione con stagno e acido cloridrico: dopo eliminazione dello stagno come solfuro si ottengono per svaporamento prima i cloridrati di anilina e di p-bromoanilina sotto forma di aghetti e successivamente il cloridrato del 2-4-diamminofenolo con aspetto di cristallini duri grigio-scuri. Il diamminofenolo è stato riconosciuto per la proprietà caratteristica di dare soluzione azzurra all'aria in presenza di idrato sodico (cfr. Dimroth, l. c.).

(1) «B.», 32 (1902), 1610.

(2) «R. A. L.» (1922), I, 287.

Ricerca del diazoetere. — Una porzione del precipitato, formatosi mescolando le soluzioni del diazotato e dell' α -p-ossiazossibenzolo si filtra rapidamente e si lava accuratamente con acqua ghiacciata: fonde intorno a 125° senza decomposizione e, sospeso in acqua, non dà cambiamento di colore nè con R-salz, nè con β -naftolo.

Derivati. — 1° Il sale sodico cristallizza da acqua in fiocchi rosso-scuri brillanti. Il sale di rame si prepara da soluzioni piridiniche dell'azoderivato e di acetato di rame e si presenta sotto forma di cristallini rosso-rame che deflagrano a 285° ; è assai stabile all'acido acetico; con acidi minerali a caldo rigenera la sostanza di partenza (N % trov. 13.29; per $C_6H_4O_4N_8Br_2Cu$ N % calc. 13.10).

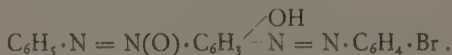
Il sale di nichel ha l'aspetto di cristallini rosso-violacei a riflessi metallici; si altera senza fondere verso 290° (N % trov. 13.04; N % calc. 13.17).

2° Etere etilico: da benzolo lunghi aghi amiantacei rosso-aranciati fondenti a $163^{\circ}.5$ (N % trov. 13.24; N % calc. 13.18).

3° Acetilderivato: da acido acetico aghi felposi giallo-aranciati fondenti a 154 – 156° (N % trov. 12.71; N % calc. 12.76).

4° Benzoilderivato: da poco benzolo, cristallini giallo-bruni, che fondono a 175° (N % trov. 11.27; N % calc. 11.18).

II) Azoderivato del β -p-ossiazossibenzolo (II):



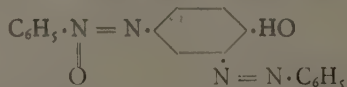
Si prepara come l' α -ossiazocomposto (I) precedente ottenuto dall'azossifenolo α ; mescolando le due soluzioni tenute a -10° del diazotato e del β -p-ossiazossibenzolo si ha un liquido che scurisce poi si intorbida e infine separa un precipitato fioccoso giallo-marrone. Dopo 18 ore si filtra. Per purificare il prodotto si fa bollire con alcol e a freddo si filtra; ripetutamente si cristallizza da benzolo: fini aghetti aranciati fondenti a 157° (N % trov. 14.16; per $C_{18}H_{13}O_2N_4Br$ N % calc. 14.11).

Riduzione con stagno e acido cloridrico: dà origine agli stessi composti come nel caso del prodotto (I).

Diazoetere ⁽¹⁾. — Una porzione di cristallini fioccosi giallo-bruni ottenuti dopo circa mezz'ora mescolando le soluzioni fredde del diazotato in acqua

(1) Facendo agire il fenildiazotato sopra i due isomeri p-ossiazossibenzoli si ottengono i seguenti prodotti;

1° L'isomero α dà direttamente (senza formazione intermedia di diazoetere) il seguente derivato:



p. f. 149° aghi giallo-marroni (N % trov. 17.73; per $C_{18}H_{14}O_2N_4$ N % calc. 17.62).

più prolungato la desolforazione è completa e si ha formazione di una ghisa di molibdeno.

Ho creduto perciò opportuno di controllare le osservazioni di Guichard con l'esame röntgenografico di campioni di molibdenite parzialmente desolforata.

Ho impiegato per le mie esperienze molibdenite sarda molto pura (39 % di S, 0.6 % di Fe, 0.4 % di Si) (Spettro n. 1). Per desolforarla invece del forno ad arco mi son servito del forno a vuoto, giacchè Parravano e Malquori hanno trovato che si può privare completamente di solfo la molibdenite riscaldandola nel vuoto a 1400°-1500°⁽¹⁾.

Ho preparato così campioni con 0; 6; 18; 28; 36 % di solfo e di essi ho fotografato gli spettri assieme con quelli di molibdeno e molibde-

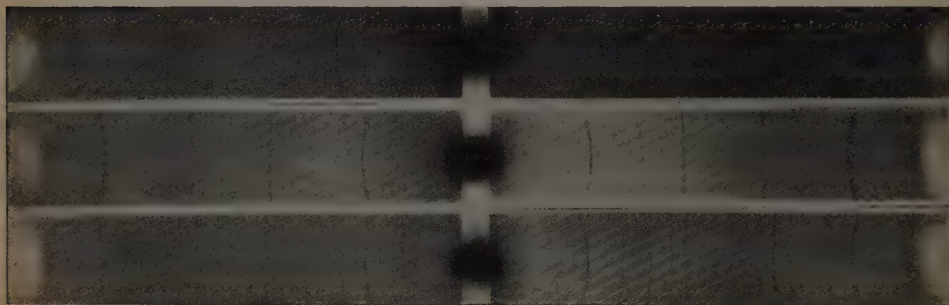


Fig. 1. - Spettro n. 1 - Molibdenite.

- » n. 2 - Molibdeno ottenuto da molibdenite ridotta in corrente di idrogeno a 1000°.
- » n. 3 - Molibdeno ottenuto da molibdenite per desolforazione nel vuoto a 1500° in crogiuolo di grafite.

nite da servire di confronto. Il materiale è stato esaminato con il metodo Debye-Hull mediante le radiazioni caratteristiche di un tubo Coolidge ed anticatodo di rame, alimentato con corrente di 40 KV e 7 mA.

I campioni con 36 % e 28 % di S presentano uno spettro risultante dalla sovrapposizione di righe della molibdenite con altre poco distinte. I campioni con tenore in solfo inferiore al 20 % invece presentano attenuate le righe della molibdenite e bene evidenti le altre.

Dopo attacco con acqua regia i vari campioni hanno presentato sempre lo spettro della molibdenite.

Tutti i prodotti esaminati risultano perciò di una miscela di molibdenite e una sostanza solubile in acqua regia diluita.

(1) PARRAVANO e MALQUORI, « Gazz. Chim. It. », 58, p. 279 (1928).

La natura di questa ho potuto stabilirla confrontandone lo spettro con quelli del molibdeno e di una molibdenite privata completamente di solfo nella maniera sopra indicata (spettri n. 2 e 3, fig. 1).

L'esame röntgenografico del prodotto completamente desolfurato ha dato i risultati riprodotti nella tabella I. In questa sono riportati il numero d'ordine delle righe notate dal centro verso gli estremi del film, l'intensità osservata, l'angolo θ di riflessione, la natura α o β delle radiazioni caratteristiche, gli indici $h k l$ ($j = -(h + k)$) attribuiti con i diagrammi di Hull, la costante reticolare a_0 ed il rapporto assiale $\frac{c_0}{a_0}$.

L'esattezza di a_0 e di $\frac{c_0}{a_0}$ risulta dalla concordanza fra le costanti $\frac{\sin^2 \theta}{\Sigma i^2}$, $\left(\Sigma i^2 = \frac{4}{3} (h^2 + k^2 + hk) + \frac{l^2}{\left(\frac{c_0}{a_0} \right)^2} \right)$, dedotte da ogni singola riga.

Per il calcolo delle intensità delle riflessioni è servita la formula Debye-Scherrer:

$$I \equiv H \frac{1 + \cos^2 2\theta}{\sin^2 \theta \cos \theta} |S|^2$$

nella quale H rappresenta il numero di piani equivalenti che danno la stessa riflessione, θ l'angolo di riflessione, $|S|^2$ ⁽¹⁾ il fattore di struttura, calcolato in base alla qualità al numero ed alla posizione degli atomi nella cella elementare.

Questi valori portano ad attribuire alla sostanza un reticolo esagonale compatto con una costante reticolare $a_0 = 2.992 \text{ \AA}$ e un rapporto assiale $\frac{c_0}{a_0} = 1.581$.

Questi dati concordano molto bene con quelli di una lega $\text{Mo} - \text{C}$ ⁽²⁾ con un contenuto di 30 % atomi di C. In buona concordanza col valore che si deduce dallo spettro, l'analisi ha dato un contenuto di carbonio del 6.14 % in peso $\equiv 32.9$ % atomico.

$$(1) |S|^2 = A^2 + B^2 = [\text{Mo} \Sigma \cos 2\pi n (hx_r + ky_r + lz_r) + C \cos 2\pi n (hx_p + ky_p + lz_p)]^2 + [\text{Mo} \Sigma \sin 2\pi n (hx_r + ky_r + lz_r) + C \sin 2\pi n (hx_p + ky_p + lz_p)]^2$$

nella quale formula:

$\text{Mo} = 42$, $C = 6$ (numeri atomici);

n = ordine della riflessione.

$$(x \ y \ z)_{\text{Mo}} : \left(0 \ 0 \ 0 \right) \left(\frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ \frac{1}{2} \right) \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. = \text{coordinate misurate sui lati del prisma esag.}$$

$$(x \ y \ z)_C : \left(\frac{2}{3} \ \frac{1}{3} \ , \ \frac{1}{4} \ 0 \ \frac{3}{4} \right) \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right.$$

(2) WESTGREN e PHRAGMEN, «Z. f. an. u. allg. Chem.» 156, 32, 1926.

TABELLA I.

N.	I(oss.)	sen θ	λ	(h k l)	Σi^2 $\left(\frac{c_0}{a_0} = 1.581\right)$	$\left(\frac{\text{sen}^2 \theta}{\Sigma i^2}\right)_\alpha$	$\left(\frac{\text{sen}^2 \theta}{\Sigma i^2}\right)_\beta$
1	m	0.299	α	(100)	1.333	0.06707	—
2	m	0.3057	β	(101)	1.733	—	0.05393
3	m	0.3272	α	(002)	1.60	0.06691	—
4	ff	0.3404	α	(101)	1.733	0.06686	—
5	dd	0.3988	β	(102)	2.933	—	0.05423
6	m	0.4408	α	(102)	"	0.06625	—
7	d	0.4633	β	(110)	4.00	—	0.05366
8	f	0.5148	α	(110)	"	0.06626	—
			β	(103)	4.933	—	0.05372
9	dd	0.5495	β	(112)	5.60	—	0.05392
10	dd	0.5593	β	(201)	5.733	—	0.05457
11	f	0.5714	α	(103)	4.933	0.06619	—
12	dd	0.598	α	(200)	5.333	0.06705	—
13	f	0.6067	α	(112)	5.60	0.06573	—
			β	(202)	6.933	—	0.05439
14	f	0.6141	α	(201)	5.733	0.06578	—
			β	(104)	7.733	—	0.05492
15	dd	0.6517	α	(004)	6.40	0.06636	—
16	d	0.6743	α	(202)	6.933	0.06558	—
17	ddd	0.6924	β	(203)	8.933	—	0.05367
18	dd	0.7136	β	(120)	9.333	—	0.05456
19	d	0.7208	α	(104)	7.733	0.06718	—
			β	(121)	9.733	—	0.05338
20	ddd	0.7462	β	(114)	10.40	—	0.05354
			β	(122)	10.933	—	0.05349
21	f	0.7647	α	(203)	8.933	0.06546	—
22	d	0.781	β	(105)	11.333	—	0.05395
			α	(120)	9.333	0.06536	—
23	ff	0.790	α	(121)	9.733	0.06559	—
			β	(300)	12.00	—	0.05320
24	mf	0.8266	α	(114)	10.40	0.06570	—
			β	(123)	12.933	—	0.05284

Segue TABELLA I.

N.	I(oss.)	sen θ	λ	(h k l)	Σi^2 $\left(\frac{c_0}{a_0} = 1.581\right)$	$\left(\frac{\text{sen}^2 \theta}{\Sigma i^2}\right)_\alpha$	$\left(\frac{\text{sen}^2 \theta}{\Sigma i^2}\right)_\beta$
25	mf	0.8457	$\left. \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right\}$	(122)	10.933	0.06543	—
				(302)	13.60	—	0.05259
26	mf	0.864	α	(105)	11.333	0.06588	—
27	dd	0.8776	α	(204)	11.733	0.06565	—
28	m	0.8858	α	(300)	12.00	0.06539	—
29	ff	0.9212	α	(123)	12.933	0.06562	—
			β	(220)	16.00	—	0.05304
30	f	0.9442	α	(302)	13.60	0.06555	—
Media . . .						0.06603	0.05375

$$a_0 = 2.992 \text{ \AA} \quad c_0 = 4.75 \text{ \AA}.$$

Reticolo esagonale compatto con rapporto assiale $\frac{c_0}{a_0} = 1.581$

$$d^2 = \frac{\lambda^2}{4 \text{sen}^2 \theta} = \frac{a_0^2}{\frac{4}{3} (h^2 + k^2 + hk) + \frac{l^2}{\left(\frac{c_0}{a_0}\right)^2}} = \frac{a_0^2}{\Sigma i^2}; \quad \frac{\lambda^2}{4 a_0^2} = \frac{\text{sen}^2 \theta}{\Sigma i^2} = \text{Cost.}$$

Dalla composizione della lega (67.1% atomi di Mo + 32.9% atomi di C, corrispondente a 2 atomi di Mo per 1 di C) e dalla densità si deduce che nella cella elementare sono contenuti due atomi di Mo e uno di C. Infatti in questo caso si calcola una densità:

$$\rho = 1.662 \frac{M}{V} = 9.245 \quad \left(\begin{array}{l} (M = 2 \times 96 + 12) \\ \left(v = \frac{\sqrt{3}}{2} a_0^2 C_0 = 36.660 \text{ \AA}^3 \right) \end{array} \right)$$

contro un valore sperimentale:

$$\rho_{sp.} = 9.$$

In quanto alla posizione dei vari atomi nella cella elementare, dalle dimensioni dell'esagono compatto, compatibilmente con i diametri atomici, risultano possibili le seguenti coordinate:

$$\begin{array}{l} \text{Mo } (0 \ 0 \ 0) \ (1/3 \ 2/3 \ 1/2) \\ \text{C } (2/3 \ 1/3, \ 1/4 \ 0 \ 3/4). \end{array}$$

Le figg. 2 e 3, illustrano la struttura risultante, la quale è confermata dalla concordanza fra le intensità osservate (Tab. I) e quelle calcolate (fig. 4).

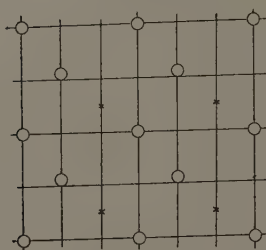
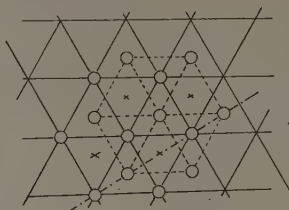


Fig. 2. - Schema di struttura di Mo_2C .

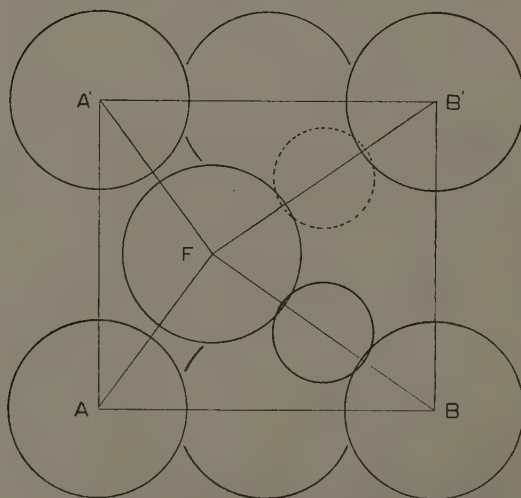


Fig. 3. - Sezione della cella Mo_2C secondo il piano (110).

Nella fig. 3 è riprodotta la cella elementare secondo la sezione (110). L'atomo di carbonio si trova sulla congiungente FB di lunghezza 4,187 Å.

Ammettendo una configurazione sferica degli atomi, la somma dei diametri ⁽¹⁾ è:

$$\Delta_{\text{Mo}(n)} + \Delta_{\text{C}(n)} = 4.26 \text{ \AA}$$

ed essa differisce di 0.073 Å dalla FB. La differenza si può spiegare ammettendo che gli atomi di Mo si contraggano assumendo la forma di elisoidi schiacciati, e questo può essere messo d'accordo col rapporto assiale che è 1.581 contro 1.633 quale corrisponde al caso ideale del sistema esagonale compatto. Gli atomi di carbonio invece, per il piccolo numero di elettroni, 6 contro 42 del Mo, conservano una configurazione più stabile.

La presenza del carbonio pertanto provoca una deformazione del reticolo del molibdeno il quale passa dalla simmetria cubica a quella esagonale.

L'esistenza nella cella elementare di un secondo spazio libero a

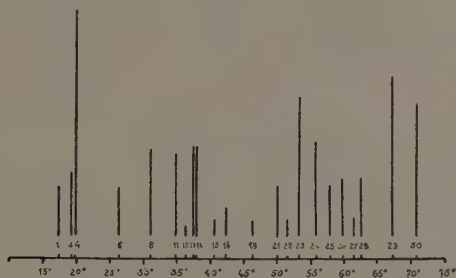


Fig. 4. — Angoli θ e intensità calcolate delle riflessioni α di Mo_2C .

$z = \frac{3}{4}$, di diametro uguale al diametro atomico del carbonio fa prevedere che la cella elementare può assorbire fino a 50 atomi % di carbonio, per modo che fino a questa concentrazione le leghe Mo — C avranno la stessa struttura esagonale compatta.

Negli spettri di tutti i campioni esaminati di molibdenite parzialmente desolforata si osservano, oltre le righe della molibdenite, solo quelle della soluzione solida di carbonio in molibdeno. Per modo che per desolforazione nel vuoto in crogiuolo di grafite ⁽²⁾ si ottengono miscele di MoS_2 e soluzione solida di carbonio nel molibdeno.

Risulta così confermato con l'esame diretto quanto era stato dedotto dallo studio degli equilibri di riduzione, e cioè che un composto più povero di solfo di MoS_2 non esiste.

(1) GOLDSCHMIDT, *Diametri atomici*, in GLOCKER, p. 247. Springer, Berlin, 1927.

(2) Riducendo MoS_2 a 1000° con idrogeno si ha molibdeno regolare, il quale differisce da quello campione (Kahlbaum) per la costante reticolare un po' più elevata ($a_0 = 3.145 \text{ \AA}$ contro 3.137 Å del molibdeno Kahlbaum). Probabilmente questo maggior valore della costante è da attribuirsi all'idrogeno assorbito.

Chimica. — *Ricerche sugli spinelli*⁽¹⁾. Nota di L. PASSERINI, presentata⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

Sono noti sotto il nome di spinelli numerosi composti dalla formula generica Me_2RO_4 che cristallizzano nel sistema cubico, classe esacisottaedrica, e che posseggono una struttura reticolare caratteristica ed una cella elementare contenente 8 molecole.

Gli spinelli più noti sono quelli che risultano dalla combinazione tra un ossido di un metallo bivalente e quello di un metallo trivalente, la cui formula generica è $\text{MeO} \cdot \text{Me}_2\text{O}_3$. Non tutti però i composti di questo tipo, tra ossidi, appartengono alla classe degli spinelli come, ad esempio, il crisoberillo.

Furono descritti sinora solo degli spinelli che derivano dagli ossidi di alluminio, cromo e ferro trivalenti e da quelli dei bivalenti zinco, magnesio, cobalto, ferro, manganese, cadmio⁽³⁾; recentemente sono stati studiati anche degli spinelli del cobalto trivalente⁽⁴⁾.

Non soltanto i composti del tipo $\text{MeO} \cdot \text{Me}_2\text{O}_3$ posseggono la struttura reticolare degli spinelli, ma anche altri composti del tipo $\text{Me}_2\text{O} \cdot \text{MeO}_3$, tra ossidi di metalli monovalenti ed esavalenti, come il molibdato di argento. Si intuisce che la possibilità di cristallizzare nella classe degli spinelli è in relazione con le grandezze atomiche degli elementi costituenti, ma tali relazioni non sono ancora state determinate.

Allo scopo appunto di stabilire i limiti di esistenza della struttura reticolare degli spinelli in relazione col diametro degli elementi che entrano a costituire questi composti e di vedere quali deformazioni porta nel reticolo la sostituzione degli atomi che occupano certe determinate posizioni, con altri di diametro atomico diverso, ho iniziato da vario tempo l'esame, coi raggi X, di un gran numero di composti del tipo $\text{MeO} \cdot \text{Me}_2\text{O}_3$.

Solo ora sono venuto a conoscenza di un lavoro di Holgersson recensito in un fascicolo di gennaio del « Zentralblatt »⁽⁵⁾, in cui sono esposti i risultati dell'esame, coi raggi X, di numerosi spinelli naturali e artificiali. La maggior parte di questi è stata anche esaminata da me e i risultati,

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Nella seduta del 3 febbraio 1929.

(3) GROTH, « Chemische Krystallographie », II parte, Lipsia (1908), 749-754.

(4) G. NATTA e M. STRADA, « Rend. R. Acc. Lincei », VII, 6 (1928), 1024.

(5) HOLGERSSON, « Chem. Zentralblatt », I (1929), 372-373.

pur essendo in genere concordanti, non sempre coincidono con quelli di Holgersson per quello che riguarda il lato della cella elementare.

Unisco qui la lista degli spinelli da me sinora esaminati oltre a quelli di cui tratto in questa Nota e paragono i valori da me trovati per il lato della cella elementare (contenuti nella prima colonna), con quelli determinati da Holgersson (nella seconda colonna).

CuAl_2O_4	$a = 8.050 \text{ \AA} \pm 0.005$	$a = 8.072 \text{ \AA} + 0.007$
MgAl_2O_4	» 8.050 » »	» 8.090 » 0.003
MgFe_2O_4	» 8.360 » »	» 8.342 » 0.005
ZnAl_2O_4	» 8.060 » »	» 8.099 » 0.003
ZnCr_2O_4	» 8.300 » »	» 8.320 » 0.004
ZnFe_2O_4	» 8.380 » »	» 8.403 » 0.004
MnFe_2O_4	» 8.510 » »	» 8.572 » + 0.006

La conoscenza esatta del valore del lato della cella è importante per gli scopi che mi sono prefisso.

Riservandomi di riesaminare più attentamente gli altri spinelli, comunico soltanto in questa Nota i risultati ottenuti dallo studio di alcuni spinelli non esaminati da Holgersson e precisamente del cromito di magnesio, MgCr_2O_4 , e del ferrito di nichelio NiFe_2O_4 . In prossime Note esporrò i risultati concernenti gli altri spinelli.

Cromito di magnesio. MgCr_2O_4 .

Questo composto è stato ottenuto da Ebelmen in piccoli ottaedri per fusione di Cr_2O_3 e MgO con acido borico e con procedimenti simili da diversi altri autori ⁽¹⁾. Si conosce anche un minerale, la picotite, di color bruno, che ha una composizione vicina a MgCr_2O_4 contenente anche ferro bivalente e alluminio e ferro trivalenti ⁽²⁾.

Ho preparato il composto partendo dalle quantità necessarie dei nitrati, sciolti prima in acqua poi tirati a secco e calcinati successivamente verso gli 800°. Il cromito di magnesio così ottenuto si presenta come una massa non cristallina di color verde cupo.

È stato esaminato coi raggi X, col metodo delle polveri, usando un tubo Philips ad anticatodo di cromo.

(1) EBELMEN, « Mem. prés. par div. sav. », 13, 532; SCHWEITZER (« Journ. f. prakt. Chem. », 39 [1846], 259), ottenne il MgCr_2O_4 per riscaldamento del cromato di potassio e magnesio; GERBER, (« Bull. Soc. Chim. » [2], 27 [1877], 437) per fusione di $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ con MgCl_2 anidro; NICHOLS (« Am. Journ. of Sc. and Arts, [2], 47, 16, « Jahresberichte üb. die Fortsch. der Chem. » [1869], 894), per calcinazione di $\text{Mg}(\text{OH})_2$ e $\text{Cr}(\text{OH})_3$; DUFAU (« Compt. rend. de l'Ac. des Sc. », Paris, 123 [1896], 886, « Ann. Chim. Phys. » [7], 12 [1897], 263), per riscaldamento, ad alta temperatura, di MgO e Cr_2O_3 .

(2) DANA, « Descriptive Mineralogy », New-York (1914), 228.

Nella tabella I espongo i dati ottenuti, dal calcolo dei fotogrammi, per gli indici delle faccie, la radiazione a cui si deve la riflessione, il seno degli angoli di riflessione, le distanze reticolari, il lato della cella elementare, le intensità osservate e quelle calcolate.

TABELLA I.

h k l	λ	$\sin \theta/2$	d	a	I. oss.	I. calc.
202	α	0.400	2.857	8.08	d	27
113	β	0.426	2.441	8.09	d	—
113	α	0.468	2.444	8.10	f	196
222	α	0.489	2.338	8.10	d	15
004	β	0.512	2.033	8.13	d	—
004	α	0.561	2.040	8.16	f	481
151	β	0.661	1.574	8.18	dd	—
333						
224	α	0.683	1.673	8.19	d	31
440	β	0.716	1.454	8.22	d	—
151	α	0.721	1.586	8.24	mf	125
333						
440	α	0.783	1.460	8.26	ff	1149
351	α	0.816	1.401	8.28	d	41
260	α	0.871	1.312	8.29	d	24
353	α	0.903	1.267	8.29	mf	99
262	α	0.914	1.251	8.29	d	23
444	α	0.954	1.198	8.30	mf	383

I fotogrammi ottenuti sono stati ordinati nel sistema monometrico; come lato della cella elementare si trova $a = 8.290 \text{ \AA} \pm 0.005$.

Il volume della cella risulta $v = 569.72 \times 10^{-24} \text{ cc}$, la densità calcolata ha un valore vicino a quello trovato sperimentalmente per questo composto, $4.415^{(1)}$, solo ammettendo che la cella elementare contenga 8 molecole MgCr_2O_4 . Si trova allora $d = 4.49$.

Per la ricerca della struttura reticolare del composto sono partito dall'ipotesi che questa sia del tipo spinello e ne ho cercato la conferma

(1) EBELMEN, loc. cit.

nel calcolo dell'intensità teorica delle linee che compaiono nei fotogrammi. Ho applicato la formula seguente :

$$I = \sim \frac{n}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} S^2$$

dove n è il numero dei piani cooperanti alla riflessione della faccia (hkl) e S è il fattore di struttura dato da

$$S = \sum_s^n N_s e^{-\pi i (hx_s + ky_s + lz_s)}$$

dove N_s è il numero di elettroni non nucleari dell'ione avente le coordinate x_s, y_s, z_s , la sommatoria s'intende estesa a tutti gli atomi contenuti nella cella.

Credo inutile ripetere le coordinate degli atomi per la struttura reticolare tipo spinello; per il parametro u , che definisce la posizione dell'atomo di ossigeno e sul valore del quale regna ancora qualche incertezza, ho assunto il valore di $1/8$.

Nelle due ultime colonne della tabella I, sono paragonate le intensità calcolate per le varie faccie, con quelle osservate. Esiste un accordo, soddisfacente che, con ogni probabilità, sarebbe migliore se al parametro u si attribuisse un valore leggermente diverso di $1/8$. Tuttavia quanto risulta è sufficiente a permettere di assegnare al cromito di magnesio una struttura reticolare tipo spinello.

Ferrito di nichelio. NiFe_2O_4 .

All'infuori del metodo di preparazione non si conoscono di questo composto altri dati, anche cristallograficamente non è stato studiato.

Ho ottenuto il ferrito di nichelio, come prodotto pulverulento, di color grigio scuro, calcinando, a circa 800° , la miscela degli idrossidi nicheloso e ferrico ottenuti, per precipitazione con KOH , da una soluzione acquosa di cloruri⁽¹⁾. Ho esaminato il composto coi raggi X, col metodo delle polveri, usando un tubo Philips ad anticatodo di ferro, con un dispositivo sperimentale analogo a quello servitomi per il precedente spinello. I dati inerenti ai fotogrammi ottenuti sono riportati nella tabella II.

(1) LIST, « Ber. der Deutsch. Chem. Ges. », XI (1878), 1514.

TABELLA II.

hkl	λ	$\sin \theta_{\lambda}$	d	a	I. oss.	I. calc.
202	α	0.337	2.870	8.12	md	183
113	β	0.355	2.470	8.18	d	—
113	α	0.391	2.473	8.20	f	501
222	α	0.408	2.368	8.20	dd	100
004	α	0.469	2.060	8.24	mf	346
313	α	0.511	1.895	8.26	dd	38
151	β	0.552	1.590	8.26	d	—
333						
224	α	0.572	1.691	8.28	md	212
440	β	0.599	1.465	8.29	d	—
151	α	0.606	1.595	8.29	f	320
333						
440	α	0.659	1.468	8.31	ff	1700
351	α	0.688	1.405	8.31	dd	56
260	α	0.736	1.314	8.32	d	164
353	α	0.763	1.267	8.32	m	252
262	α	0.772	1.251	8.32	d	157
444	α	0.806	1.199	8.31	d	266
604	α	0.839	1.153	8.32	d	144
246	α	0.869	1.112	8.33	m	278
713	α	0.891	1.085	8.34	f	432
553						
800	α	0.928	1.042	8.34	mf	602

Questi sono stati ordinati nel sistema monometrico. Come lato della cella elementare si trova $a = 8.340 \text{ \AA} \pm 0.005$, come volume della cella $v = 580.09 \times 10^{-24} \text{ cc}$, come densità, calcolata per una cella contenente 8 molecole NiFe_2O_4 , $d = 5.37$, valore di poco superiore a quello sperimentale, 5.268.

Da un paragone tra i dati ottenuti dai fotogrammi di questo composto con quelli avuti dal cromito di magnesio, si vede come compaiono le stesse faccie, con intensità analoghe ed assolutamente paragonabili quando si tenga

conto dell'influenza esercitata sull'intensità delle linee che compaiono nei fotogrammi, dalla differenza esistente tra i numeri atomici del nichelio e del magnesio e tra quelli del cromo e del ferro.

Da questa osservazione si può già desumere la probabilità dell'esistenza, pei due composti, di una analoga struttura reticolare. A conferma ho eseguito per il NiFe_2O_4 il calcolo della intensità teorica delle linee ottenute nei fotogrammi con l'ipotesi che la struttura reticolare del composto sia del tipo spinello.

I dati ottenuti concordano abbastanza coi valori delle intensità osservate per poter attribuire al ferrito di nichelio una struttura reticolare del tipo detto.

Riassunto.

1. - Sono stati esaminati coi raggi X, col metodo delle polveri, numerosi spinelli. Sono qui descritti particolarmente i seguenti composti: MgCr_2O_4 , NiFe_2O_4 ; ottenuti per calcinazione a circa 800° della miscela dei corrispondenti nitrati per il primo, di quella degli idrossidi per l'altro.

2. - Questi composti cristallizzano nel sistema cubico con una struttura reticolare del tipo spinello, come è stato confermato, mediante il calcolo del fattore di struttura, dal confronto tra intensità osservate e calcolate.

3. - Per il MgCr_2O_4 si trova: lato della cella elementare $a = 8.290 \text{ \AA} \pm \pm 0.005$, volume della cella $v = 569.72 \times 10^{-24} \text{ cc}$, densità calcolata $d = 4.49$.

4. - Per il NiFe_2O_4 si trova: lato della cella $a = 8.340 \text{ \AA} \pm \pm 0.005$, volume $v = 580.09 \times 10^{-24} \text{ cc}$, densità calcolata $d = 5.37$, densità sperimentale $d = 5.268$.

Chimica. — *Ricerche sui polialogenuri. Sull'acido clorojodico HJCL_4 , $4\text{H}_2\text{O}$.* Nota di V. CAGLIOTI, presentata dal Socio F. ZAMBONINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Ricerche sui solfosali. VIII. Persolfosali.* Nota di L. FERNANDES, presentata dal Corrisp. L. ROLLA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica agraria. — *Ricerche sullo scambio dell'acido fosforico del terreno con acido arsenico* ⁽¹⁾. Nota di C. ANTONIANI e G. FONIO presentata ⁽²⁾ dal Socio A. MENOZZI.

La possibilità di spostamento dell'anione PO_4 delle combinazioni di assorbimento del terreno da parte di soluzioni diluite di acido arsenico, venne già rilevata da uno di noi in un lavoro precedente ⁽³⁾. Il notevole interesse che a tale fatto si collega, ci ha suggerita l'utilità di ulteriori ricerche, atte a confermare l'ipotesi verosimile, già enunciata, di un'azione di scambio tra i due anioni analoghi, da porsi a base dell'azione di spostamento. A tale scopo, operando su terreni trattati in precedenza con soluzione di fosfato sodico, abbiamo studiato comparativamente l'azione di spostamento determinata dal dilavamento con acqua in rapporto a quella che si manifesta per effetto del trattamento con soluzioni diluite di acido arsenico, misurando, in quest'ultimo caso, tanto l'anione spostato quanto l'anione analogo eventualmente assorbito.

PARTE SPERIMENTALE

Abbiamo operato sulla terra fine (setaccio di 1 mm.) di tre diversi terreni della seguente composizione (su 1000 parti di terra fine):

	Terreno a	Terreno b	Terreno c
Sabbia greggia ⁽⁴⁾	768.2	800.2	857.3
Argilla greggia ⁽⁴⁾	231.8	199.8	142.7
Umidità	32.20	17.20	9.35
Sostanza org. (perdita a fuoco) .	45.00	32.80	28.65
Culcare	100.00	65.25	1.25
Azoto.	1.51	1.54	1.40
Anidridrite fosf. tot.	1.06	0.98	0.89
pH	8.0	7.6	9.6

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Agraria del R. Istituto Superiore Agrario di Milano.

(2) Nella seduta del 3 febbraio 1929.

(3) C. ANTONIANI, *Il comportamento dell'arsenico di fronte al potere assorbente del terreno*. (Questi « Rendiconti », vol. VI, 1927).

(4) Determinazioni eseguite col Levigatore Appiani. Sono espresse come sabbia le particelle dotate di velocità di caduta maggiore di 0.2 mm. per secondo; come argilla le particelle con velocità di caduta inferiore a 0.2 mm. per secondo.

gr. 300 di terreno venivano introdotti in una allunga di vetro chiusa inferiormente da un diaframma metallico a piccoli fori. Il terreno veniva inizialmente trattato con soluzione di fosfato sodico assai diluita, il che consentiva di ridurre a quantità trascurabili la frazione di PO_4 trattenuta a contatto del terreno coll'acqua di imbibizione. La soluzione veniva lasciata liberamente percolare attraverso al terreno; di essa si raccoglieva la frazione percolata determinandosene il volume totale e la concentrazione. Allo scopo di allontanare dal terreno le piccole quantità di fosfato trattenute dalla soluzione residua imbibente, veniva in seguito operato un lavaggio con acqua distillata, misurando la quantità totale di PO_4 asportata con tale trattamento. Dopo di ciò il terreno veniva essiccato su acido solforico, poscia esposto per alcuni giorni all'aria ambiente.

A questo punto, nota la quantità totale di PO_4 di assorbimento presente nel terreno, si ricollocava il terreno stesso nell'allunga e lo si sottoponeva a trattamento sistematico con acqua o con soluzione diluita di acido arsenico a tenore noto di AsO_4 . Per ciascun trattamento si determinava la quantità di PO_4 spostata ed oltre a ciò, nel caso del trattamento con acido arsenico, si eseguivano le seguenti determinazioni:

- 1° misura del volume complessivo iniziale della soluzione di H_3AsO_4
- 2° » » » finale della soluzione stessa
- 3° » della concentrazione iniziale in AsO_4
- 4° » » » finale in AsO_4 , tenendosi conto, in

questo caso, e pei trattamenti successivi al primo, delle variazioni di concentrazione dipendenti dal liquido di imbibizione del trattamento precedente.

Per quanto concerne la parte analitica per la determinazione dell'arsenico abbiamo adottato il procedimento di separazione come pentasolfuro in soluzione cloridrica; il fosforo venne dosato come fosfomolibdato di stricnina previa separazione dell'arsenico ⁽¹⁾.

RISULTATI SPERIMENTALI.

Trattamento con H_2O :

Terreno *a* - gr. 300. Trattamento iniziale con cc. 400 di soluzione di fosfato sodico:

concentr. iniziale	concentr. finale	assorb. assoluto	assorb. relativo
gr. 0.0871 %	gr. 0.0020 %	gr. 0.3401 (A)	97.6 %

Volume della soluzione percolata: cc. 250.

PO_4 rimasata nel terreno col liquido di imbibizione (cc. 150): gr. 0.0030 (C)

(1) C. ANTONIANI e R. B. JONA, *Sulla determinazione quantitativa microchimica dell'acido fosforico ecc.* (« Giornale di Chimica Ind. e Appl. », n. 4, 1928); C. ANTONIANI, *Sulla composizione del fosfomolibdato stricnico.* (Idem, n. 8, 1928).

PO_4 ceduta al successivo lavaggio con acqua (cc. 400): gr. 0.0384 (B)
 PO_4 complessivamente presente nel terreno sotto forma di assorbimento:
 (A) — (B-C) = gr. 0.3047
 PO_4 ceduto al trattamento sistematico con H_2O (cc. 400 per ogni trattamento):

1° estrazione	gr. 0.0402 = mgr. mol. 4.2
2° »	» 0.0259 = » » 2.7
3° »	» 0.0210 = » » 2.2
4° »	» 0.0097 = » » 1.0
5° »	» 0.0054 = » » 0.5
6° »	» 0.0019 = » » 0.2
7° »	— —

Quantità totale spostata gr. 0.1041 pari al 34 % della quantità inizialmente contenuta nel terreno sotto forma di assorbimento.

Trattamento con soluzione di H_3AsO_4 :

Terreno a - gr. 300. Trattamento iniziale con cc. 400 di soluzione di Na_2HPO_4 :

concentr. iniziale	concentr. finale	assorb. assoluto	assorb. relativo
gr. 0.0871 %	gr. 0.0074 %	gr. 0.3187 (A)	91.47 %

Volume della soluzione percolata cc. 260

PO_4 rimasto nel terreno col liquido di imbibizione (cc. 140) gr. 0.0104 (C)

PO_4 ceduto al successivo lavaggio con cc. 400 di acqua: gr. 0.0654 (B)

PO_4 complessivamente contenuto nel terreno sotto forma di assorbimento:

(A) — (B-C) = gr. 0.2637

PO_4 ceduto al trattamento sistematico con H_3AsO_4 :

Estrazioni	AsO_4 assorbito		PO_4 spostato	Mgr. mol. AsO_4 assorbito	Mgr. mol. PO_4 spostato	Rapporto $\frac{\text{AsO}_4 \text{ assorb.}}{\text{PO}_4 \text{ ceduto}}$
	Assorbim. relativo	Assorbim. assoluto				
1	51.47 %	gr. 0.6108	gr. 0.0162	43.9	1.7	25.7
2	11.74 %	» 0.1637	» 0.0293	11.7	3.0	3.9
3	12.37 %	» 0.1492	» 0.0234	10.7	2.4	4.4
4	0.22 %	» 0.0029	» 0.0179	0.2	1.9	0.1
5	8.49 %	» 0.1018	» 0.0179	7.3	1.9	3.8
6	10.82 %	» 0.1297	» 0.0117	9.3	1.2	7.7
7	3.20 %	» 0.0379	» 0.0126	2.7	1.3	2.0

PO_4 complessivamente spostato: gr. 0.1290, pari al 48 % della quantità inizialmente contenuta nel terreno sotto forma di assorbimento.

Terreno *b* - gr. 300. Trattamento iniziale con cc. 300 di soluzione di Na_2HPO_4 :

concentr. iniziale	concentr. finale	assorb. assoluto	assorb. relativo
gr. 0.0871 %	gr. 0.0010 %	gr. 0.2581 (A)	98.77 %

Volume della soluzione percolata cc. 150

PO_4 rimasto nel terreno col liquido di imbibizione (cc. 150) gr. 0.0015 (C)

PO_4 ceduto al successivo lavaggio con acqua gr. 0.0248 (B)

PO_4 complessivamente contenuto nel terreno sotto forma di assorbimento:

(A) — (B-C) = gr. 0.2348

PO_4 ceduto al trattamento sistematico con H_3AsO_4 (cc. 300 per ogni trattamento):

Estrazioni	AsO ₂ assorbito		PO ₄ spostato	Mgr. mol. AsO ₄ assorbito	Mgr. mol. PO ₄ spostato	Rapporto AsO ₄ assorb. PO ₄ spostato
	Assorbim. relativo	Assorbim. assoluto				
1	58.47 %	gr. 0.5203	gr. 0.0188	37.4	2.0	18.5
2	19.38 %	» 0.2031	» 0.0272	14.6	2.8	5.2
3	20.59 %	» 0.1865	» 0.0221	13.4	2.3	5.8
4	4.21 %	» 0.0381	» 0.0191	2.7	2.0	1.3
5	8.75 %	» 0.0784	» 0.0151	5.6	1.6	3.5
6	6.85 %	» 0.0141	» 0.0127	4.4	1.3	3.3
7	—	—	—	—	—	—

PO_4 complessivamente spostato gr. 0.1150, pari al 49 % della quantità inizialmente contenuta nel terreno sotto forma di assorbimento.

Terreno *c* - gr. 300. Trattamento iniziale con cc. 300 di soluzione di Na_2HPO_4 :

concentr. iniziale	concentr. finale	assorb. assoluto	assorb. relativo
gr. 0.0871 %	gr. 0.0174 %	gr. 0.2091 (A)	79.95 %

Volume della soluzione percolata cc. 170

PO_4 rimasto nel terreno col liquido di imbibizione (cc. 130): gr. 0.226 (C)

PO_4 ceduto al successivo lavaggio con cc. 300 di acqua: gr. 0.0368 (B)

PO_4 complessivamente contenuto nel terreno sotto forma di assorbimento:

(A) — (B-C) = gr. 0.1949

PO_4 ceduto al trattamento sistematico con H_3AsO_4 (cc. 300 per ogni trattamento):

Estrazioni	AsO ₄ assorbito		PO ₄ spostato	Mgr. mol. AsO ₄ assorbito	Mgr. mol. PO ₄ spostato	Rapporto AsO ₄ assorb. / PO ₄ ceduto
	Assorbim. relativo	Assorbim. assoluto				
1	47.35 %	gr. 0.4214	gr. 0.0101	30.3	1.1	27.5
2	11.02 %	» 0.1202	» 0.0181	8.6	1.9	4.5
3	15.78 %	» 0.1467	» 0.0127	10.5	1.3	8.0
4	13.31 %	» 0.1192	» 0.0136	8.5	1.4	6.0
5	9.07 %	» 0.0801	» 0.0094	5.7	1.0	5.7
6	0.32 %	» 0.0030	» 0.0078	0.2	0.8	0.2
7	8.44 %	» 0.0767	» 0.0087	5.5	0.9	6.1

PO₄ complessivamente spostato gr. 0.0804, pari al 41 % della quantità inizialmente contenuta nel terreno sotto forma di assorbimento.

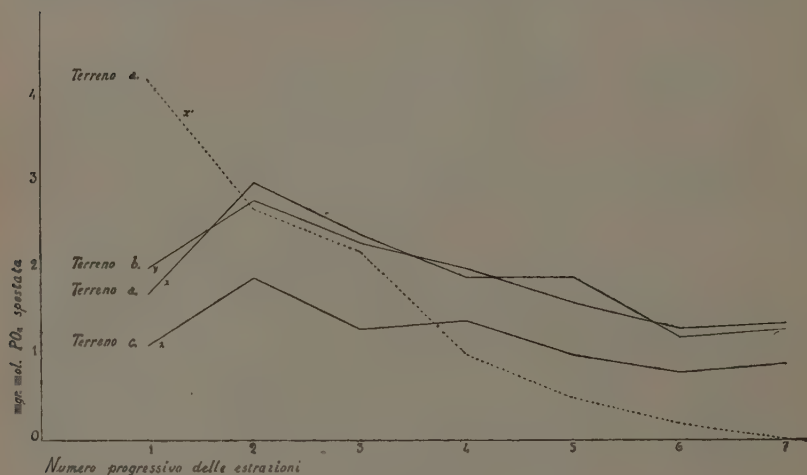


Diagramma n. 1.

CONCLUSIONI. — I risultati sperimentali rivelano una differenza netta di andamento nel processo di spostamento dell'anione PO₄ secondo che esso sia determinato dal dilavamento con acqua oppure dal trattamento con soluzione diluita di H₃AsO₄. L'unito diagramma n. 1 illustra chiaramente tale differenza: la curva X', tratteggiata, rappresenta lo spostamento dell'anione PO₄ per dilavamento con acqua; la curva X traduce l'azione di spostamento, nello stesso terreno, indotta dalla soluzione di acido arsenico.

Simili alla X sono le curve Y e Z che si riferiscono rispettivamente ai terreni *b* e *c* e stanno nel complesso ad indicare che la curva di solubilità dell'anione PO_4 , relativa all'azione dell'acido arsenico, non tende a zero, come nel caso dell'acqua, sibbene ad una solubilità limite, in modo analogo a quanto si riscontra ad es. nello spostamento dello jone potassio ad opera di soluzioni diluite di sali ammoniacali (1).

Interessante è il fatto che, per uno stesso terreno, la quantità di PO_4 ceduta al primo trattamento con H_3AsO_4 è minore di quella ceduta nel corrispondente trattamento con acqua, e altresì minore di quella ceduta al trattamento successivo con acido arsenico. Il fatto, a prima vista contradd-

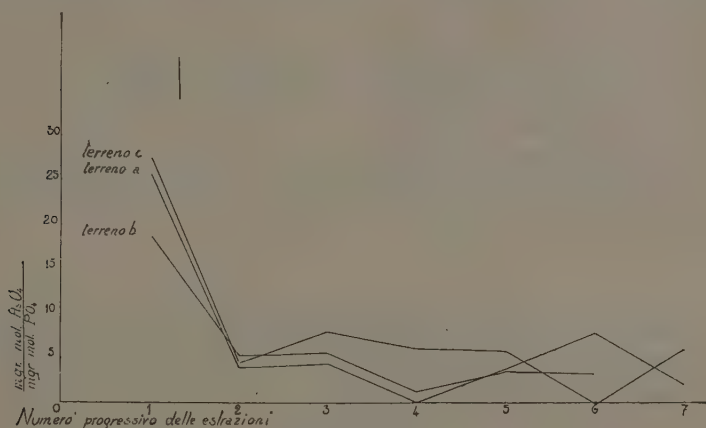


Diagramma n. 2.

dittorio, riesce chiaro ove si pensi alla possibilità che il potere assorbente del terreno non sia stato completamente saturato per mezzo del trattamento iniziale con fosfato sodico; in tal caso il terreno è in grado di manifestare il proprio potere assorbente residuo sull'anione AsO_4 , il quale viene ad essere assorbito indipendentemente dall'azione di scambio coll'anione PO_4 . Questa supposizione è convalidata dall'analogo comportamento da parte dei tre terreni sperimentati, ed il fatto che l'anione PO_4 sia spostato in misura minore nel caso in cui l'anione AsO_4 è assorbito indipendentemente dall'azione di scambio, starebbe a dimostrare come l'azione stessa abbia parte saliente nello spostamento dell'anione fosforico.

Pure interessante è l'esame del rapporto che intercorre tra la quantità dell'anione assorbito e quella dell'anione ceduto, rapporto illustrato nel diagramma n. 2.

(1) A. MENOZZI, U. PRATOLONGO e P. MARTINI, *Ricerche sulla determinazione della potassa solubile nel terreno*. (Ricerche eseguite nel Laboratorio di Chimica Agraria del R. Istituto Superiore Agrario di Milano, vol. VIII, 1927).

La prima parte della curva denota un rapporto assai largo, in dipendenza del fatto già citato. Ma a partire dal secondo trattamento esso si riduce e per tutti i trattamenti successivi il valore del rapporto $\frac{\text{AsO}_4 \text{ assorbito}}{\text{PO}_4 \text{ ceduto}}$, tenuto conto della inevitabile interferenza di processi secondari di precipitazione suscettibili di interessare sia l'uno che l'altro anione, non presenta variazioni salienti.

Nel complesso, per la netta diversità che intercorre tra il processo di spostamento dell'anione PO_4 determinato dalle soluzioni diluite di acido arsenico ed il processo puramente idrolitico quale è determinato dal dilavamento con acqua, e soprattutto per il rapporto che lega, nell'azione di spostamento, la quantità dell'anione ceduto a quella dell'anione assorbito, è da ritenersi che l'anione PO_4 delle combinazioni di assorbimento del terreno è suscettibile di essere spostato, per azione di scambio, dall'anione AsO_4 delle soluzioni di acido arsenico diluito.

Vogliamo qui notare che i risultati da noi ottenuti operando sul terreno si accordano con quelli già conseguiti dal Pratolongo ⁽¹⁾ sperimentando sull'idrossido ferrico colloidale.

Biologia. — *Azione esercitata da un circuito metallico oscillante sulla germinazione dei semi.* Nota di G. MEZZADROLI e E. VARETON, presentata ⁽²⁾ dal Socio B. LONGO.

In una Nota preliminare ⁽³⁾, abbiamo dato notizie brevi sul comportamento del potere germinativo dei semi, effettuato sotto l'azione di onde corte naturali di origine siderale, impiegando ancora il circuito oscillante, che servi a Lakhowsky ad ottenere la guarigione del cancro delle piante ⁽⁴⁾.

Il circuito oscillante ha lunghezza d'onda fondamentale circa $\lambda = 2$ metri.

Furono sottoposti così all'azione del circuito oscillante, semi di fagiuolo, di frumento, di orzo, e glomeruli di barbabietole, alla luce ambiente e all'oscurità, su terreno argilloso, ed altro ricco in humus, su sabbia lavata chimicamente, su cotone idrofilo inumidito.

(1) *Le Stazioni Sperimentali Agrarie Italiane*, vol. 48, 1915.

(2) Nella seduta del 17 febbraio 1929.

(3) G. MEZZADROLI e E. VARETON, *Influenza delle radiazioni astrali ad onda corta sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante.* Nota preliminare. (Congresso di Strasburgo, luglio 1928).

(4) GEORGES LAKHowsKY, *L'action sur les êtres vivants des circuits oscillants, captant les ondes courtes.* «Compt. Rend. Acc. des Sciences», n. 15 (11 aprile 1928), p. 1019. Nota presentata dal prof. D'ARSONVAL.

G. LAKHowsKY, *L'origine de la vie.* Ed. Nilson, Paris, 1925.

Le esperienze furono fatte nelle stesse identiche condizioni, con circuito e senza, onde avere un esatto confronto. Le esperienze da noi eseguite, si riferiscono per ora, solo alla germinazione dei semi, cioè a quel periodo in cui la pianta vive a spese delle sue riserve.

Riportiamo i risultati delle prove fatte.

INFLUENZA ESERCITATA DA UN CIRCUITO OSCILLANTE
SULLA GERMINAZIONE DEI FAGIUOLI.

Esperienza n. 1.

I semi di fagiolo (*Phaseolus Vulgaris*) in numero di 50 per germinatoio, avevano substrato di sabbia lavata chimicamente, temperatura ambiente media 20° C.

I germinatoi erano posti all'oscuro. Il circuito oscillante era formato da un filo di rame nudo dello spessore di 5 mm., avvolto a spirale del diametro di 30 cm., isolato nell'aria su supporto di ebanite.

Substrato: *sabbia*; circuito: *filo di rame*; λ = metri 2

50 fagioli seminati al giorno o	Numero di fagioli germinati						
	1° giorno	2° giorno	3° giorno	4° giorno	5° giorno	6° giorno	7° giorno
Fagioli posti sotto l'azione del circuito oscillante	—	9	17	31	40	tutti meno 2	tutti meno 2
Fagioli (prova di confronto) . . .	—	4	12	24	32	38	tutti meno 3
Percento di fagioli germinati in più nel germinatoio posto sotto l'azione del circuito	—	56 %	30 %	39 %	20 %	21 %	—

Esperienza n. 2

50 semi di fagiolo furono sottoposti alla germinazione, nelle identiche condizioni citate per l'esperienza n. 1, solo su substrato di cotone idrofilo, inumidito.

I risultati ottenuti sono analoghi.

Substrato: *cotone idrofilo inumidito*; circuito: *filo rame*; λ = metri 2

50 fagioli seminati al giorno 0	Numero di fagioli germinati						
	1° giorno	2° giorno	3° giorno	4° giorno	5° giorno	6° giorno	7° giorno
Fagioli posti sotto l'azione del circuito oscillante	—	10	16	19	28	35	44
Fagioli prova di confronto . . .	—	5	11	17	22	29	35
Percentuale di fagioli germinati in più nel germinatoio posto sotto l'azione del circuito	—	50 %	32 %	12 %	20 %	20 %	20 %

Osservazione:

Tanto nel caso dell'esperienza n. 1 che in quella n. 2, qui riportate, e in tutte le altre da noi eseguite, abbiamo potuto osservare che le piantine di fagioli continuano a crescere dopo il 6° giorno, mantenendo la distanza di sviluppo acquistata. Così le piantine di fagioli sottoposte all'azione del circuito oscillante, mostrano uno sviluppo aereo maggiore di quello della prova testimonia.

Abbiamo voluto osservare se lo spessore del filo di rame, di cui è costituito il circuito oscillante, avesse influenza sul fenomeno. Le prove eseguite in proposito, hanno dimostrato come effettivamente i circuiti di filo di rame di forte spessore (5-8 mm.) abbiano una azione più marcata sul fenomeno, che non i fili di rame a piccolo spessore (1-3 mm.).

Abbiamo voluto osservare, se la natura del metallo influisce sul fenomeno osservato, ed abbiamo fatto esperienze con circuiti uguali a quello descritto, ma costituiti da filo di ottone e da filo di nichel.

Il circuito di nichel si comporta analogamente a quanto osservato per il circuito di rame, provocando cioè una esaltazione del potere germinativo.

Il circuito costituito da filo di ottone, si mostra indifferente nelle condizioni delle nostre esperienze.

INFLUENZA ESERCITATA DA UN CIRCUITO OSCILLANTE
SULLA GERMINAZIONE DEL FRUMENTO.

I semi di frumento, in numero di 50 per germinatoio avevano substrato di sabbia, temperatura ambiente media 24° C. I germinatoi erano posti in luce diffusa. Il circuito oscillante era il solito circuito di rame.

Risultati dell'esperienza:

Esperienza n. 3.

Substrato: *sabbia umida*; circuito: *rame*; λ = metri 2.

50 semi di frumento seminati al giorno o	Numero di semi di frumento germinati						
	1° giorno	2° giorno	3° giorno	4° giorno	5° giorno	6° giorno	7° giorno
Frumento posto sotto l'azione del circuito oscillante	—	—	3	29	40	48	48
Frumento prova di confronto . . .	—	—	1	11	15	15	24
Percentuale di semi di frumento germinati in più nel germinatoio posto sotto l'azione del circuito .	—	—	67 %	63 %	63 %	62 %	50 %

Osservazione:

Esperienze analoghe eseguite su substrato di ovatta, e con circuito oscillante, di nichel, hanno dato analoghi risultati. La media dell'aumento di germinazione dei semi sottoposti all'azione del circuito con filo di nickel si mantiene attorno al 48-50 %.

INFLUENZA ESERCITATA DA UN CIRCUITO OSCILLANTE
SULLA GERMINAZIONE DEI GLOMERULI DI BARBABIETOLA.

I glomeruli di barbabietola, in numero di 50 per germinatoio, avevano substrato di cotone idrofilo tenuto umido. Le esperienze furono eseguite alla luce e all'oscuro, col circuito oscillante di rame, già illustrato.

Abbiamo osservato la germinazione dei glomeruli di diversi tipi di barbabietola:

Foraggera gialla r., ortense rossa, ortense tonda di Bassano, da distilleria bianca a colletto rosa, foraggera Mamouth, foraggera Eckendorf⁽¹⁾.

Risultati ottenuti con glomeruli di barbabietola da distilleria bianca a colletto rosa (temperatura ambiente media 25°)⁽²⁾.

(1) Ci è grato ringraziare il prof. Munerati, direttore della R. Stazione Sperimentale di Rovigo, che ci fornì il seme.

(2) Esperienze analoghe eseguite con glomeruli di barbabietola: *ortense rossa di Bassano*, foraggera Eckendorf, foraggera gialla r., hanno dato analoghi risultati.

Esperienza n. 4.

Substrato: *colone inumidito*; circuito: *filo rame*; λ = metri 2

Glomeruli di bietola da distilleria bianca a colletto rosa glomeruli 50 al giorno 0	Numero di glomeruli germinati						
	1° giorno	2° giorno	3° giorno	4° giorno	5° giorno	6° giorno	7° giorno
Glomeruli di barbabietola posti sotto l'azione del circuito oscillante . .	—	—	9	23	35	47	—
Glomeruli di barbabietola prova di confronto	—	—	4	16	26	39	—
Percentuale di glomeruli di barba- bietola germinati in più nel ger- minatoio posto sotto l'azione del circuito	—	—	56 %	30 %	25 %	20 %	—

Riassunto dei risultati ottenuti:

1. La presenza di un circuito oscillante a spira unica, di 30 cm. di diametro capace di captare onde naturali cosmiche, di lunghezza d'onda vicino a 2 metri, esercita un'azione favorevole sul potere germinativo dei semi.

2. Si può calcolare su un aumento di germinazione del 25-50 % in più di semi germinati, rispetto agli stessi semi non sottoposti al circuito oscillante.

I semi, posti sotto l'azione del circuito arrivano alla germinazione completa da 1 a 3 giorni prima di quelli delle prove di confronto.

Si può calcolare su una diminuzione del tempo di germinazione, che può venire così ridotto fino alla metà di quello richiesto per portare i semi non sottoposti al circuito oscillante, allo stesso grado di germinazione, di quelli sottoposti all'azione del circuito.

Fisiologia. — *Sulla curva idremica normale nel riposo, nella marcia e nella corsa*⁽¹⁾. Nota di U. CASSINIS e L. BRACALONI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Abbiamo voluto studiare quale fosse il comportamento del contenuto in acqua del sangue di soggetti sani tenuti in riposo per alcune ore o sottoposti ad esercizi fisici di diversa intensità quali la marcia e la corsa. Per tale ricerca si è adottato il micrometodo di Bang consistente nel pesare una piccola quantità di sangue (0.10–0.13 gr.) prima e dopo l'essiccazione a 100° C.: la differenza fra le due pesate dà la quantità d'acqua contenuta nel sangue che viene riferita a 100 parti in peso. Il dosaggio è stato eseguito su di una serie di campioni di sangue prelevati, dopo puntura del polpastrello di un dito, usando all'uopo la micropipetta. In un pesafiltro a tenuta perfetta si mette una listerella di carta da filtro (3 × 4 cm.) ripiegata in modo da presentare tre solchi ed un risvolto inferiore. Su questa listerella, portata prima a peso costante coll'essiccazione in stufa a 100° per un'ora, è fatta gocciolare la quantità di sangue prelevata. Si pesa di nuovo il pesafiltro e quindi si porta in stufa a 100° sino a ottenere il peso costante. La differenza fra le due pesate, quella del pesafiltro con carta bagnata dal sangue e dello stesso pesafiltro dopo l'essiccazione, dà la quantità d'acqua evaporata da cui si può calcolare in modo facile il contenuto percentuale⁽³⁾.

È necessario inoltre che il soggetto sia digiuno e, prima di qualsiasi prova sperimentale, sia lasciato seduto almeno per un'ora onde ottenere un reale stato di equilibrio della quantità d'acqua contenuta dal sangue. Si prelevano campioni di sangue ogni 15–25 minuti per la durata di almeno due ore e spesso di più. In altro giorno il soggetto, dopo due o tre prelevamenti fatti nello stato di riposo, era sottoposto a marcia di m. 9.600 durante la quale, ogni 2.400 m., si ripetevano i prelevamenti e alla fine si continuavano per circa un'ora tenendo il soggetto a riposo. In altro giorno gli era fatta compiere una corsa di 3.600 m. prelevando i campioni di sangue ogni 1.200 m. e di nuovo dopo la fine come si è detto per la marcia (sogg. I). Su altri soggetti si eseguivano, con modalità presso che eguali, le esperienze di riposo e quindi di marcia e di corsa di vario percorso (sogg. II, III), od

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia applicata della Scuola Centrale Militare di Educazione Fisica, Farnesina, Roma.

(2) Nella seduta del 6 gennaio 1929.

(3) L. BRACALONI, *Microtecnica per la determinazione del contenuto in acqua del sangue*. « Arch. di Farmacologia sperim. e Scienze affini ». Roma, 1928.

esperienze di sola marcia (sogg. IV e V) o di sola corsa (dal sogg. VI al sogg. XI). Durante tutto il tempo dell'esperienza i soggetti non ingerivano liquido: erano pesati prima e dopo compiuto il lavoro; urinando prima di ogni pesata corporea. Furono così, per ora, esaminati 11 soggetti (militari in ottime condizioni di salute) con un complessivo di 16 esperienze.

Da queste prime osservazioni si può dedurre che:

nel riposo e nello stato di digiuno la maggior parte dei soggetti non presenta, per un periodo di 2-3 ore, variazioni apprezzabili del contenuto idrico del sangue (idrenia normale): l'equilibrio fra acqua passata al sangue dai tessuti e data ad essi è quasi perfetto. La differenza tra le quote massima e minima determinate nel detto intervallo di tempo oscilla nei diversi soggetti tra 0.20-0.90 %, mentre la differenza tra le quote consecutive si mantiene molto al di sotto di questi valori (v. diagr. curva 1, sogg. XI).

Per una marcia di 5 oppure di 9 km. si osservò quasi sempre in tutti i soggetti diminuzione del contenuto idrico del sangue che, non molto accentuata al principio dell'esercizio, aumenta talora col progredire di questo, talora oscilla intorno al valore della prima diminuzione (v. tab. 1^a).

TABELLA I

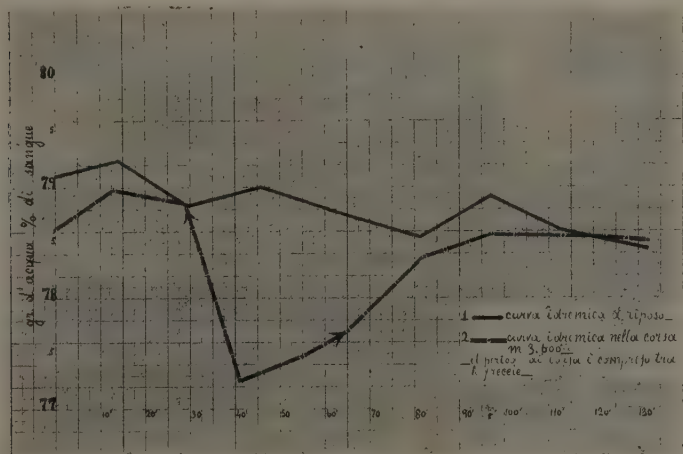
Soggetto	Quota idremica a riposo	Variazioni percentuali durante la marcia				Km. di marcia	Diminuzione del peso corporeo gr.	Quantità di urina emessa dopo la marcia cmc.	Tempo impiegato per il percorso
		1 ^a Quota	2 ^a Quota	3 ^a Quota	4 ^a Quota				
I	78.53	+ 0.12	+ 0.21	+ 0.52	+ 0.26	9,600	400	—	1 ^h 24'
II	78.07	— 0.77	— 0.79	— 1.55	—	5,400	850	50	40'
III	79.75	— 2.14	— 2.39	— 2.11	—	6,600	1375	75	47'
VI	78.50	— 0.26	— 0.22	— 0.39	—	9,000	900	—	1 ^h 8'
V	79.79	— 0.45	— 0.07	— 0.41	— 0.18	9,600	900	200	1 ^h 16'

Finita la marcia la quota ritorna verso i valori normali con oscillazioni e tempi differenti secondo i soggetti. A parità d'allenamento non v'è rapporto alcuno, nei vari soggetti, fra il lavoro compiuto e la quantità d'acqua spostata dal sangue, come non ve n'è, in genere, tra detto lavoro e l'acqua perduta dalle vie renale, cutanea e polmonare (v. peso corporeo).

Per una corsa di m. 1.200-3.600 in tutti i casi osservati la curva idremica cade invece subito bruscamente e si mantiene intorno allo stesso valore per tutta la durata della corsa (v. tab. II).

TABELLA II

Soggetto	Quota idremica a riposo	Diminuzione percentuale delle quote durante la corsa			Km. di corsa	Tempo impiegato per il percorso	Diminuzione del peso corporeo gr.	Quantità di urina emessa dopo la corsa cmc.
		1 ^a Quota	2 ^a Quota	3 ^a Quota				
I	79.97	1.07	1.01	0.88	3,600	18'	425	40
II	78.92	1.68	—	—	1,800	9'30"	150	50
III	79.87	2.15	1.86	—	3,600	17'	550	50
VI	78.85	1.32	—	—	1,200	6' 6"	—	—
VII	78.19	1.32	1.66	—	3,600	17'	630	80
VIII	78.36	1.80	1.60	—	3,600	18'	675	75
IX	78.15	0.98	1.32	—	1,200	5'	425	125
X	79.70	0.39	0.68	—	1,200	4'47"	200	—
XI	78.86	1.60	1.39	1.16	3,600	18'	550	150



Neppure per questo tipo di lavoro muscolare vi è rapporto evidente tra la diminuzione del contenuto idrico del sangue, la quantità di lavoro compiuto e la quantità d'urina emessa, mentre è forse più evidente il rapporto tra la diminuzione del peso ed il lavoro compiuto. Finita la corsa, in taluni casi la curva idremica rimane per qualche tempo bassa, in altri si rialza presto verso i valori normali (v. diagr. curva 2, sogg. XI).

Mentre nello stato di riposo, il contenuto idrico del sangue tende a mantenersi costante, per l'effetto del lavoro muscolare in genere esso diminuisce. Tale diminuzione, a parità di grado d'allenamento, sembra doversi attribuire in parte al lavoro muscolare per sè stesso, in parte a particolari proprietà individuali di costituzione.

Il lavoro muscolare influisce a seconda della sua intensità, ma soprattutto del ritmo col quale è eseguito; perciò la marcia provoca minori spostamenti d'acqua dal sangue che la corsa (cfr. sogg. I e II, tab. 1^a e 2^a).

Le differenti proprietà costituzionali, legate ai rapporti funzionali tra i vari organi e tessuti, diversi nei singoli soggetti, influiscono sulla entità dello spostamento dell'acqua dal sangue anche a parità di quantità di lavoro e di tempo impiegato per compierlo (cfr. sogg. III e VII tab. 2^a).

La diminuzione dell'acqua del sangue è quindi molto probabilmente dovuta al fatto che la perdita che avviene dalla superficie polmonare, dalla cute e dai reni non è con la stessa velocità compensata dal passaggio d'acqua dai tessuti nel sangue.

Ulteriori ricerche sono in corso per studiare più completamente così interessante fenomeno come anche per studiare il rapporto tra lavoro e curva idremica alimentare.

Patologia. — *I veleni emolitici e le alterazioni del fegato.* Nota di B. AIOSI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. A. DIONISI.

Il compito che mi sono prefisso è di studiare in raffronto, il comportamento delle fini vie biliari, delle cellule di Kupffer e delle cellule epatiche in seguito all'occlusione del dotto coledoco ed in seguito all'avvelenamento acuto e cronico con veleni emolitici diversi.

Ho creduto poi di aggiungere altri due gruppi di esperienze, cioè la legatura del coledoco in animali preventivamente o successivamente trattati con veleni emolitici per esagerare l'ostacolo all'eliminazione della bile provocato nello stesso tempo dalla legatura del coledoco e dalla maggiore formazione di bile per l'eritrocateresi.

Le ricerche sono divise in cinque gruppi di animali:

Nel primo gruppo è stata praticata la sola legatura del coledoco. Nel secondo gruppo sono riuniti quegli animali a cui fu provocata una rapida morte per avvelenamento acuto da emolisi. Nel terzo gruppo sono riuniti gli animali a cui fu provocata l'anemia cronica con lieve dose di tossici. Nel quarto gruppo si sono somministrati prima i veleni ed è stata praticata

(1) Nella seduta del 3 febbraio 1929.

dopo la legatura del coledoco. Nel quinto gruppo è stata praticata prima la legatura del coledoco e si sono somministrati dopo i veleni.

Nel 2°, 3°, 4° e 5° gruppo, le esperienze furono praticate su tre animali che si avvelenavano, il primo con Toluilendiammina, il secondo con Pirodina ed il terzo con Tellurito. Come animale di esperimento è stato scelto il cane, il fegato del quale, secondo le ricerche di Mintzloff oscilla fra i grammi 127 e 1350. In media esso costituisce circa il 3 % del peso del corpo (nei cani piccoli il 3,520 %, nei medi il 2,811 %, nei grandi l'1,82 %).

La dose dei veleni fu di gr. 0,05 per provocare l'avvelenamento acuto con la Toluilendiammina e la Pirodina e di gr. 0,02 per provocare l'avvelenamento cronico. Per il Tellurito si usarono gr. 0,005 per l'avvelenamento acuto e gr. 0,002 per l'avvelenamento cronico.

L'ittero prodotto dalla Toluilendiammina dipende, secondo Eppinger, da una ostruzione delle prime vie biliari per formazione di trombi nei capillari. Negli animali avvelenati con questo veleno sono state pure riscontrate alterazioni nelle cellule epatiche, ed Eppinger, pur tenendo in considerazione la formazione di trombi nei capillari biliari, non poté escludere la partecipazione delle cellule epatiche.

La Pirodina invece agisce sul sangue di cui cambia anche il colore, tanto che, secondo qualche autore, i metodi per la determinazione dell'emoglobina non consentono un esatto giudizio.

Il Tellurito è una sostanza ancora non molto ben nota. È stata usata specialmente dalla Scuola di R. Luzzatto. Agisce in vitro limitatamente su emulsioni cloruro-sodiche di globuli rossi privi di siero, mentre con l'aggiunta di siero il fenomeno emolitico si esalta enormemente. Il Tellurito pare che si elimini in forma di gas prevalentemente per i polmoni, ma una parte resta accumulata negli organi interni dove fu riscontrata fin dal 1893 da Beyer.

La stasi biliare sperimentale dà risultati vari a seconda degli animali usati e della durata dell'esperimento; differiscono pure questi risultati da quelli che si constatano qualche volta nell'uomo dove la stasi prolungata per calcoli produce una così notevole proliferazione di connettivo interstiziale, che tanto anatomicamente che clinicamente risulta una forma di cirrosi somigliante all'atrofica.

Con le mie esperienze ho dimostrato quanto segue:

1° *Con la sola legatura del coledoco.* L'animale è stato tenuto in vita per 42 giorni, dopo i quali fu sacrificato. Il decorso postoperatorio non presentò fatti degni di nota e l'esame degli organi sia macroscopicamente che microscopicamente non fece notare alterazioni molto importanti. Ho concluso perciò che la sola legatura del coledoco nel cane non produce danni molto apprezzabili nè sulle cellule epatiche nè sull'apparato eritrocateretico, nel periodo menzionato.

2° Con l'avvelenamento acuto.

A) Con la Toluilendiammina l'animale morì al 9° giorno, ebbe ittero intensissimo fin dalle prime iniezioni. All'autopsia il fegato aumentato di volume microscopicamente dimostrò atrofia molto accentuata dei lobuli epatici, la cui parte centrale era necrotica, e le cellule di Kupffer zaffate di pigmento biliare.

La eritrocateresi era esercitata da tutti gli elementi del reticolo (cellule di Kupffer, reticolo della milza, del midollo osseo e delle glandole emolinfatiche).

B) Con la Pirodina l'animale morì al 5° giorno; l'ittero non fu eccessivo ed il fegato microscopicamente fece apprezzare poche alterazioni nelle cellule epatiche, e le cellule di Kupffer aumentate di volume e piene di residui globuli rossi. L'eritrocateresi era esercitata specialmente dalle cellule di Kupffer e limitatamente dal resto del reticolo.

C) Col Tellurito l'animale morì al 4° giorno. L'ittero fu appena apprezzabile alle congiuntive e non si notò alcuna alterazione delle cellule epatiche, mentre le cellule di Kupffer contenevano granuli neri di Tellurio. L'eritrocateresi era poco evidente.

Si rileva da questo gruppo di esperienze che la Toluilendiammina provoca un ittero molto intenso dopo breve tempo, mentre questo ritarda ed è meno evidente nel trattamento colla Pirodina e col Tellurito, ed in rapporto a questo fatto si vede che nel trattamento con Toluilendiammina l'eritrocateresi è intensissima in tutti gli organi che esercitano questa funzione, mentre è inferiore nel trattamento con Pirodina ed ancora più scarsa col Tellurito. L'intensità dell'ittero coincide inoltre con le alterazioni delle cellule epatiche, le quali sono gravissime nel trattamento con la Toluilendiammina e meno gravi e quasi assenti negli altri avvelenamenti.

3° Con l'avvelenamento lento.

A) Con la Toluilendiammina l'animale morì al 20° giorno. Ebbe ittero modico. All'autopsia il fegato aumentato di volume microscopicamente fece vedere che le cellule epatiche erano atrofiche solo nel centro dei lobuli. Le cellule di Kupffer erano ripiene di pigmento biliare. L'eritrocateresi era evidente solo nelle cellule di Kupffer.

B) Con la Pirodina l'animale morì nella 8ª giornata. Ebbe lievi segni di itterizia e dopo l'autopsia microscopicamente nel fegato si notò alterazione delle cellule epatiche. Le cellule di Kupffer erano ricche di emosiderina ed erano le sole che esercitavano scarsamente processi eritrocateretici.

C) Col Tellurito l'animale morì nella 38ª giornata. Ebbe subittero appena evidente delle congiuntive. Dopo l'autopsia microscopicamente non si notò alcuna alterazione delle cellule epatiche. Le cellule di Kupffer contenevano granuli neri di Tellurio. L'eritrocateresi era poco evidente in tutti gli organi.

Da questo gruppo di esperienze si rileva come l'ittero sia più scarso e come relativamente siano minori le alterazioni delle cellule epatiche. L'eri-

trocateresi si rinveniva solamente nelle cellule di Kupffer e per poco partecipavano ad essa gli altri organi.

4° *Avvelenamento seguito da legatura del coledoco.*

A) Con l'avvelenamento di Toluilendiammina si praticò la legatura del coledoco dopo 18 giorni di avvelenamento; l'ittero già provocato con l'avvelenamento aumentò fortemente dopo la legatura del coledoco. All'autopsia il fegato era ingrandito e microscopicamente si notava forte riduzione del parenchima epatico per necrosi delle cellule che avevano subito processi di degenerazione grassa. Le cellule Kupffer erano ricche di pigmento biliare. L'eritrocateresi era esercitata da tutti gli organi addetti a questa funzione e specialmente dalle glandole emolinfatichè.

B) Con la Pirodina si praticò la legatura del coledoco dopo 26 giorni di avvelenamento; l'ittero fu sempre scarso. All'autopsia microscopicamente si trovarono scarsi processi di necrosi solo in qualche lobulo. Le cellule di Kupffer erano cariche di pigmento e frequentemente si trovarono distaccate dalle loro sedi nel torrente circolatorio. L'eritrocateresi era esercitata tanto dalla milza quanto dalle cellule di Kupffer, dalle glandole emolinfatichè e dal midollo osseo.

C) Col Tellurito si praticò la legatura dopo 22 giorni di avvelenamento e si mantenne dopo l'operazione ancora per 61 giorni.

Si notò, appena subittero, ed all'autopsia tanto macroscopicamente che microscopicamente non si notò alcuna alterazione. L'eritrocateresi era esercitata specialmente dalle cellule di Kupffer.

Si rileva da questo gruppo di esperienze che l'avvelenamento con dosi minori per provocare l'avvelenamento acuto determina intensa itterizia ed anche la morte dei cani se ad essi è praticata successivamente la legatura del coledoco. Questo risulta dal paragone dei risaltati di queste esperienze con i risultati della legatura semplice del coledoco e dell'avvelenamento cronico con la Toluilendiammina. Anche qui le alterazioni maggiori delle cellule epatiche sono in quei casi in cui maggiore è l'itterizia, e si può dedurre che il danno delle cellule epatiche nei cani avvelenati con la Toluilendiammina viene aggravato notevolmente dalla legatura del coledoco.

5° *Legatura del coledoco e successivo avvelenamento.*

A) Con la Toluilendiammina l'avvelenamento fu iniziato dopo 12 giorni della legatura del coledoco e fu continuato per 50 giorni ancora dopo. L'ittero fu intenso dopo le prime iniezioni ed andò scomparendo dopo, quantunque con le successive fosse iniettata una quantità sempre maggiore di veleno. All'autopsia microscopicamente si notarono focolai di atrofia sparsi in alcuni gruppi di trabecole di cellule epatiche. Le cellule di Kupffer contenevano numerosi blocchi di emosiderina.

B) Con la Pirodina l'avvelenamento fu iniziato dopo 9 giorni della legatura del coledoco e si continuò per 44 giorni ancora dopo. Si notò ittero scarso che a mano a mano andò sempre diminuendo, quantunque fosse iniettata

una quantità sempre maggiore di veleno. All'autopsia microscopicamente si notarono scarse alterazioni delle cellule epatiche. Le cellule di Kupffer erano aumentate di volume e cariche di pigmento biliare.

C) Col Tellurito l'avvelenamento fu iniziato dopo 12 giorni dalla legatura del coledoco e fu continuato per 20 giorni ancora dopo. Si notò subito che diminuì con l'inoltrarsi dell'esperienza. All'autopsia microscopicamente non si notarono apprezzabili alterazioni delle cellule epatiche. Le cellule di Kupffer erano in parte necrotiche ed in parte ricche di pigmento ematico biliare. In tutti gli animali di questo gruppo si ebbero alterazioni intense a carico di tutto l'apparato eritrocateretico.

Si può dedurre che la legatura del coledoco abbia impedito una lunga funzione delle cellule di Kupffer e perciò come funzione vicariamente sia stato eccitato il rimanente apparato eritrocateretico. Questo gruppo di esperienze è in contrasto con i risultati ottenuti sui cani con legatura del coledoco dopo l'avvelenamento. Con l'avvelenamento dopo la legatura del coledoco gli animali dimostrano una maggiore resistenza al veleno, tanto che subiscono dosi corrispondenti per quantità all'avvelenamento acuto senza rilevanti danni. Le cellule epatiche hanno subito pochi danni, ma anche l'ittero è stato poco accentuato e transitorio.

Conclusioni. — In base al paragone tra le alterazioni ottenute con le varie esperienze e con il trattamento diverso da Toluilendiammina, Pirodina e Tellurito, sembra che questi veleni emolitici abbiano:

1° Un'azione specifica sull'apparato eritrocateretico, il quale poi da parte sua sembra fornito di un meccanismo regolatore. Infatti, mentre a forti dosi si ebbe una intensa reazione eritrocateretica di tutti gli organi che esercitano questa funzione, con piccole dosi l'eritrocateresi è esercitata dalle sole cellule di Kupffer. Pare che l'organismo risponda ad un forte stimolo esterno aumentando le sue energie riposte in tutto l'apparato eritrocateretico, mentre ad uno stimolo minore risponde aumentando la funzione delle sole cellule di Kupffer.

2° L'ittero è più accentuato quando vi sono estese alterazioni delle cellule epatiche. Gradi minori di alterazioni corrispondono a minore sviluppo d'ittero.

3° Con la legatura del coledoco, nel cane i danni delle cellule epatiche sono meno accentuati che nell'avvelenamento da toluilendiammina e l'ittero è anche esso molto meno evidente.

4° Combinando la legatura del coledoco con l'avvelenamento da Toluilendiammina si hanno risultati diversi a secondo che la legatura segua l'avvelenamento o lo preceda. Se la legatura segue all'avvelenamento, essa aumenta l'ittero e persiste gravissimo danno delle cellule epatiche. Se la legatura precede l'avvelenamento con Toluilendiammina, l'ittero è intenso alle prime iniezioni e va poi scemando sempre più. Le cellule epatiche non sono molto alterate e l'ittero è passeggero.

Parrebbe perciò in conclusione che l'ittero sia proporzionale al danno delle cellule epatiche e che la sostanza colorante della bile passi nei capillari biliari per mezzo delle cellule epatiche, le quali, oltre alle loro varie funzioni, sarebbero da considerarsi come le prime vie biliari di escrezione; e che una volta distrutte queste, in una certa proporzione, sia per azione tossica del veleno sia per azione chimica della bile, le sostanze coloranti, o per via linfatica o direttamente per via sanguigna, passino nel sangue.

Mi sembra qui opportuno, per appoggiare questa deduzione, di riportare un'osservazione che Dionisi fa nelle sue lezioni di Malariologia (1927), dove si esprime con queste parole: « Non è da mettersi in dubbio che l'ittero il quale si sviluppa nell'atrofia giallo-acuta del fegato, non sia in rapporto con la stasi biliare, nè con l'emolisi e che, con verosimiglianza, esso sia in relazione con il danno delle cellule epatiche ».

Infatti nell'atrofia giallo-acuta del fegato non c'è alcun fenomeno che possa fare pensare ad un impedimento meccanico al deflusso della bile, nè esiste l'aumentata emolisi, la quale produca un possibile infarcimento o trombizzazione dei fini capillari biliari: perciò è da ritenere che la quantità normale di bile prodotta nelle cellule di Kupffer non potendosi eliminare per le vie biliari, dove non può giungere per i danni delle cellule epatiche, si riversi nel sangue.

Patologia vegetale. — *Cicatizzazione sperimentale di fusto di « Ricinus communis », determinata da « Pseudomonas fluorescens »* (FLÜGGE) MIGULA. Nota di V. RIVERA, presentata dal Corrisp. L. PETRI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 3 marzo 1929 (Anno VII)

Presidenza del sen. prof. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Geometria. — *Sul fascio canonico.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp.
G. FUBINI.

Da lungo tempo mi ero proposto il problema di riconoscere *a priori*, senza ricorrere a fatti analitici non immediati, perchè mai tutte le rette scoperte da molti geometri (ricorrendo alle più disparate proprietà geometriche) come definite dall'intorno di un punto O di una superficie *non rigata* S appartenessero tutte a uno stesso fascio (che, per la sua importanza, ho chiamato *fascio canonico*) ed erano determinate dal valore *numerico* di un parametro. La intima ragione geometrica di questo risultato non è, come credevo, piuttosto riposta, ma è così elementare che mi sembra quasi impossibile sia finora sfuggita.

Assunte coordinate proiettive non omogenee x, y, z , supporremo che in O sia $x = y = z = 0$, e che in un suo intorno sulla S valga lo sviluppo:

$$(1) \quad z = xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + \frac{1}{12}(Ax^4 + 4Bx^3y + 6Cx^2y^2 + 4Dxy^3 + Ey^4) + P,$$

ove P , è del quinto ordine almeno. Queste ipotesi, come è noto, nulla tolgono alla generalità. Le A, B, C, D, E determinano pertanto l'intorno del quarto ordine di O su S ; ma viceversa a un dato intorno corrispondono

(1) Presentata nella seduta del 3 marzo 1929.

infiniti sistemi di valori per tali costanti. Infatti vi sono infiniti sistemi coordinati x', y', z' per cui vale per lo stesso intorno uno sviluppo

$$(I)_{bis} \quad z' = x' y' + \frac{1}{3}(x'^3 + y'^3) + \\ + \frac{1}{12}(A' x'^4 + 4 B' x'^3 y' + 6 C' x'^2 y'^2 + 4 D' x' y'^3 + E' y'^4) + P',$$

analogo a (I). E tutti i corrispondenti sistemi di valori possibili per le A', B', \dots, E' corrispondono allo stesso intorno definito dalle A, B, \dots, E .

Questi cambiamenti di variabili sono tutti e soli i prodotti di trasformazioni dei seguenti tipi:

$$(I) \quad x = \varepsilon x' \quad ; \quad y = \varepsilon^2 y' \quad ; \quad z = z' \quad (\varepsilon = \sqrt[3]{1})$$

$$(II) \quad x = \frac{x' + k z'}{1 + h x' + k y' + r z'} \quad ; \quad y = \frac{y' + h z'}{1 + h x' + k y' + r z'} \quad ; \\ z = \frac{z'}{1 + h x' + k y' + r z'} \quad (h, k, r = \text{cost.})$$

$$(III) \quad x = y' \quad ; \quad y = x' \quad ; \quad z = z'.$$

Ad essi corrispondono ordinatamente le:

$$(I)_{bis} \quad A' = \varepsilon A \quad ; \quad B' = \varepsilon^2 B \quad ; \quad C' = C \quad ; \quad D' = \varepsilon D \quad ; \quad E' = \varepsilon^2 E.$$

$$(II)_{bis} \quad A' = A + 4h \quad ; \quad B' = B - 2k \quad ; \quad D' = D - 2h \quad ; \\ E' = E - 4k \quad ; \quad C' = C + 2(hk - r)$$

$$(III)_{bis} \quad A' = E \quad ; \quad B' = D \quad ; \quad C' = C \quad ; \quad D' = B \quad ; \quad E' = A.$$

Consideriamo una retta uscente da O di equazioni

$$(2) \quad \frac{x}{v(B+E) + \lambda(2B+E)} = \frac{y}{v(D+A) + \mu(2D+A)} = \frac{z}{2v}$$

la quale, almeno nel caso generale di $2B + E \neq 0, 2D + A \neq 0$, descrive, al variare dei rapporti $\lambda : \mu : v$ tutta la stella di centro O. Dati questi rapporti la retta (2) è individuata. Viceversa, se è data la retta (2), se è dato l'intorno di O del quarto ordine su S, la λ, μ, v sono individuate (almeno nel caso generale) se è dato anche il sistema coordinato x, y, z di riferimento. Che cosa avviene se si cambia tale sistema coordinato, in modo da conservare la forma (I) dello sviluppo? Se si esegue una trasformazione (I) o (II), dalle (I)_{bis}, (II)_{bis} confrontate con (2) segue che i rapporti $\lambda : \mu : v$ restano inalterati (perchè in entrambi i casi le nuove equazioni della retta (2) si ottengono sostituendo le $x', y', z', A', \dots, E'$ alle

x, y, z, A, \dots, E e lasciando inalterati i rapporti $\lambda : \mu : \nu$. Invece, nel caso di una trasformazione (III), le nuove equazioni di (2) si ottengono non solo sostituendo alle x, \dots, E le x', \dots, E' , ma anche scambiando λ, μ tra di loro. Ciò si deve alle due seguenti proposizioni evidenti per le (1) e (2). Il parametro λ si presenta nella frazione, di cui x è il numeratore; il parametro μ in quella che ha il numeratore y ; e, se è dato l'intorno del quarto ordine di O su S , non è naturalmente definita quale delle tangenti asintoliche si deve assumere, come retta $z = x = 0$, quale come retta $z = y = 0$. Dunque:

Se una collineazione porta l'intorno (del quarto ordine) di un punto O di una superficie S nell'intorno di un punto O' di una superficie S' , allora essa porta la retta (2), uscente da O , corrispondente a certi valori dei rapporti $\lambda : \mu : \nu$ nella retta analoga, costruita per l'intorno di O' e corrispondente o ai valori $\lambda : \mu : \nu$ od ai valori $\mu : \lambda : \nu$. Quindi non possiamo assegnare la trasformata di una retta (2) uscente da O ; possiamo solo dire che la coppia di rette, uscenti da O , corrispondenti ai rapporti $\lambda : \mu : \nu$ e $\mu : \lambda : \nu$ è trasportata nella coppia di rette analoghe uscenti da O' e definite (se è dato l'intorno del quart'ordine di O') dai rapporti $\lambda : \mu : \nu$ e $\mu : \lambda : \nu$.

L'ambiguità cessa solo se le due rette considerate coincidono, cioè se $\lambda = \mu$. Queste rette particolari, di cui risulta evidente la singolare posizione nella teoria delle superficie, sono individuate dal solo parametro $\lambda : \nu = \mu : \nu$ e costituiscono appunto il fascio canonico, che così appare nella sua vera luce.

La corrispondenza tra due rette r ed r' definite dai rapporti $\lambda : \mu : \nu$ e $\mu : \lambda : \nu$ di una delle coppie sopra considerate si può con facilità caratterizzare geometricamente. Al fascio di tali due rette appartiene evidentemente,

sia la retta σ definita dai rapporti $\frac{\lambda + \mu}{2} : \frac{\lambda + \mu}{2} : \nu$ (che, essendo canonica,

è l'intersezione del piano rr' col piano canonico) sia la retta σ definita dai rapporti $\lambda - \mu : \mu - \lambda : \sigma$, o ciò che è lo stesso $1 : -1 : 0$, che è la retta tangente, intersezione del piano rr' col piano tangente. La tangente coniugata è la retta definita dai rapporti $1 : 1 : 0$, cioè è la tangente canonica. Dunque due rette r, r' di una stessa coppia si corrispondono (nella stella di centro O) nella omologia armonica (perchè r, r', ρ, σ si tagliano armonicamente) che ha per asse la tangente σ coniugata della tangente canonica e per piano unito il piano canonico.

Al lettore il facile studio dei casi particolari in cui $2B + E = 0$ oppure $2D + A = 0$.

Nel caso delle rigate (in cui in (1) manca uno dei due termini di terzo grado) questo studio richiede modificazioni profonde; in tal caso, come è noto, non si può parlare di fascio canonico, almeno nel senso valido per superficie non rigate.

Astronomia. — *Il diametro orizzontale del Sole nel 1927 e 1928.* Nota ⁽¹⁾ del Socio G. ARMELLINI.

1. — È noto che l'Osservatorio del Campidoglio esegue ogni giorno a mezzodi la misura del diametro orizzontale del Sole, durante il suo passaggio al meridiano.

Lo scopo precipuo di tali osservazioni, istituite dal prof. L. Respighi nel 1876 e continuate senza alcuna interruzione e con metodo sempre uniforme, è quello di esaminare se esiste una variazione periodica del diametro solare, connessa col ciclo undecennale delle macchie.

Gran parte dei risultati delle osservazioni sono ormai pubblicati e precisamente:

a) La prima serie di misure, eseguita dai proff. L. Respighi, A. Di Legge, F. Giacomelli, e A. Prosperi, va dal 1876 al 1900 e fu pubblicata dapprima dal Di Legge e dal Prosperi ⁽²⁾ ed in seguito fu nuovamente ridotta e ripubblicata dallo scrivente ⁽³⁾.

b) La seconda serie di misure, eseguita dai medesimi osservatori, va dal 1901 al 1911; fu ridotta dal prof. Prosperi e dallo scrivente e pubblicata sommariamente dallo scrivente stesso ⁽⁴⁾.

c) La terza serie di misure va dal 1° gennaio 1912 al 31 dicembre 1922, ed è ancora da pubblicarsi; presentemente attendiamo alla sua riduzione che si presenta assai laboriosa, anche perchè in questo undecennio ebbero luogo vari cambiamenti nel personale osservante.

d) La quarta serie di misure va dal 1° gennaio 1923 (quando lo scrivente assunse la direzione della Specola Capitolina) e di essa abbiamo già pubblicato ⁽⁵⁾ i risultati degli anni 1923, 1924, 1925, 1926. Restano a pubblicare i risultati del 1927 e 1928 e a ciò provvede la presente Nota.

2. — Le osservazioni furono eseguite col metodo sempre impiegato fin dal 1876 e descritto nei lavori citati. Ad esse presero parte *simultaneamente* il prof. Giuseppe Armellini (A), la dott. Gabriella Armellini Conti (C), il dott. Nino Squillace (S) ed il sig. Pietro Mignucci (M).

Il numero delle osservazioni eseguite da ciascuno di essi è dato dalla Tabella I e i valori risultanti per il raggio solare R, ridotto alla distanza media del Sole dalla Terra, sono dati dalla Tabella II ⁽⁶⁾.

(1) Presentata nella seduta del 3 marzo 1929.

(2) Cfr., p. es., « Memorie della Soc. Astron. Italiana », 1920.

(3) Cfr. « Rend. Acc. dei Lincei », 1925, sem. II, fasc. 9.

(4) Cfr. « Rend. Acc. dei Lincei », 1928, fasc. 12.

(5) Per questi anni cfr. rispettivamente « Rend. Acc. dei Lincei », 1924, sem. I, fasc. 9; 1925, sem. II, fasc. 9; 1927, sem. I, fasc. 3.

(6) Le medie del 1927 sono state diminuite di 0"00 e quelle del 1928 aumentate di 0"001 per tener conto dell'andamento del cronometro Dent a tempo siderale usato nelle osservazioni.

TABELLA I.

Data	A	C	S	M
1927				
Gennaio	8	9	5	9
Febbraio	15	12	16	15
Marzo	11	11	11	13
Aprile	6	9	11	12
Maggio	8	11	12	13
Giugno	7	9	15	16
Luglio	10	14	16	21
Agosto	9	11	11	12
Settembre	7	9	1	7
Ottobre	5	7	—	14
Novembre	4	5	2	7
Dicembre	7	7	9	11
1928				
Gennaio	9	9	8	9
Febbraio	13	15	15	19
Marzo	—	7	7	7
Aprile	5	6	5	6
Maggio	12	15	13	15
Giugno	17	20	19	23
Luglio	—	—	15	17
Agosto	21	22	20	—
Settembre	1	—	—	9
Ottobre	3	3	—	14
Novembre	10	14	15	7
Dicembre	11	11	8	9
Totale generale 1927 . . .	97	114	109	150
» » 1928 . . .	102	122	125	155

TABELLA II.

Data	A	C	S	M
1927				
Gennaio	961".5	961".8	961".6	961".7
Febbraio	1.8	2.2	1.7	1.5
Marzo	1.1	1.6	1.5	1.5
Aprile	1.9	1.5	1.4	1.2
Maggio	2.4	1.2	2.1	1.8
Giugno	2.3	1.7	1.7	1.5
Luglio	2.0	1.4	1.6	1.6
Agosto	1.7	1.4	1.7	1.6
Settembre	1.9	2.1	1.9	1.9
Ottobre	2.4	1.2	—	1.7
Novembre	0.9	0.8	1.8	1.6
Dicembre	1.4	1.0	1.5	1.4
1928				
Gennaio	1.2	1.2	1.7	1.4
Febbraio	1.5	1.4	1.6	1.4
Marzo	1.9	0.0	1.9	1.1
Aprile	1.9	2.2	1.6	1.6
Maggio	2.0	1.0	1.5	1.6
Giugno	2.7	1.6	1.8	1.4
Luglio	—	—	1.6	1.6
Agosto	2.0	1.0	1.8	—
Settembre	1.9	—	—	1.5
Ottobre	2.3	1.1	—	1.6
Novembre	1.2	1.0	1.5	1.4
Dicembre	1.3	0.9	1.5	1.7
Medie 1927.5 . . .	961".75	961".47	961".62	961".56
» 1928.5 . . .	961".95	961".15	961".66	961".49

3. - Da questa tabella, ricordando i risultati ottenuti⁽¹⁾ per gli anni 1923.5, 1924.5, 1925.5, 1926.5, assumendo come valore del raggio R del Sole nel 1924.0 la media dei valori ottenuti da tutti gli osservatori per il 1923.5 e per il 1924.5 ed operando analogamente per gli anni successivi, abbiamo i seguenti risultati finali⁽²⁾:

1924.0	R = 16' 1".03	1927.0	R = 16' 1".54
1925.0	0".63	1928.0	1".58
1926.0	1".02		

Da qui appare, con sufficiente nettezza, un *minimo* verificatosi nel principio del 1925 e cioè - come già avevamo accennato nei lavori citati - lievemente *sfasato* rispetto al massimo delle macchie solari che sembra si sia verificato nel 1928

Astronomia. — *Sulla distanza dei pianeti e dei satelliti.* Nota del Corrisp. P. VINASSA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geodesia. — *Seconda campagna gravimetrica sul Carso.* Nota del Corrisp. E. SOLER.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Cfr. «Rend. Acc. dei Lincei», loc. cit.

(2) Per ridurre i diametri osservati ci serviamo, come già faceva il Respighi, del confronto tra i risultati delle osservazioni e le durate teoriche del passaggio del disco solare in meridiano, riportate dal «Berliner Astronomisches Jahrbuch».

Tali durate teoriche, fino a tutto il 1925, erano calcolate prendendo per R il valore di Auwers $R = 959''.63$; ma, a partire dal 1926, il «Berliner» cambiò tale valore sostituendolo con $R = 961''.50$, senza mettere in rilievo nell'introduzione (p. es., con caratteri grassetti o corsivi) questo importante cambiamento di un dato tradizionale che ci sfuggì per allora.

Ne segue che il valore di R dedotto per il 1926.5 (cfr. «Rend. Lincei», 1927, sem. I, fasc. 3) va aumentato di $1''.87$ e portato quindi da $959''.60$ a $961''.47$, fermi restando i valori precedenti. In conseguenza il valore di R per il 1926.0 (media tra i valori del 1925.5 e del 1926.5) va portato da $960''.09$ a $961''.02$, come indichiamo nel testo. Dobbiamo aggiungere che tutti i calcoli relativi alla presente Nota furono eseguiti in parte dallo scrivente ed in parte dal dott. N. Squillace assistente nel R. Osservatorio del Campidoglio.

Notiamo che, volendo essere rigorosi, occorrerebbe tener conto che nel 1927 e 1928 il personale osservante è stato aumentato per l'aggiunta del dott. N. Squillace; ma i valori ottenuti da quest'ultimo si avvicinano assai alla media generale onde la correzione personale sarebbe presso che evanescente.

Geologia. — *Una nuova « facies » di Trias Superiore nelle Alpi Marittime Italiane.* Nota del Corrisp. G. FRANCHI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle curve di Galois.* Nota II di A. COMESSATTI, presentata⁽¹⁾ dal Socio F. SEVERI.

8. Il problema delle coincidenze per le trasformazioni birazionali τ del gruppo T ammesso da una curva di Galois, si pone forse tra i primi; in quanto la conoscenza della sua risoluzione si rivela indispensabile appena si vogliono considerare un po' da vicino le curve risolventi. Al problema stesso ed alle sue più immediate applicazioni è dedicata la presente Nota.

È anzitutto chiaro che le coincidenze delle τ cadono nei punti multipli dell'involuzione J generata da T; e che un punto E siffatto, il quale sia v -plo per il gruppo Q di J a cui appartiene, è unito esattamente per v operazioni di τ . Nell'occasione si ricordi che il gruppo Q è costituito da $\frac{N}{v}$

punti v -pli, e che ad esso corrisponde sulla curva f un punto di diramazione D per il quale v ha il significato già visto, che conviene aver presente.

Suppongasì che E sia unito per la trasformazione τ_i di T; e si tracci su G un cammino λ dal punto S_i al punto E. La τ_i (che muta S_i in S_i) trasformerà λ in un cammino λ' da S_i ad E, e l'immagine di λ, λ' su f sarà un cammino l dal punto O al punto D. Poichè descrivendo l i due punti S_i, S_i vengono portati a coincidere (in E), il coppia di direttrice l dovrà produrre una sostituzione σ del gruppo Γ (n. 1) che contiene s_i ed s_i in uno stesso ciclo.

Ma se s è la sostituzione del gruppo di monodromia M relativa al coppia l , il ciclo dell'associata σ che contiene l'identità s_i è (n. 3) $(1, s, s^2, \dots, s^{v-1})$, dunque una potenza s^b di s dovrà coincidere con s_i .

Si potrà pertanto ottenere la s_i descrivendo un coppia di direttrice l che giri b volte intorno a D (lo diremo un coppia multiplo). D'altra parte il ragionamento s'inverte, dunque:

Le trasformazioni del gruppo T dotate di coincidenze son tutte e soltanto quelle associate alle sostituzioni del gruppo di monodromia M che son generabili mediante cappi (semplici o multipli) relativi ai punti di diramazione.

(1) Nella seduta del 3 febbraio 1929.

Ne deriva che, in generale, le τ dotate di punti uniti sono in numero assai limitato rispetto a quelle prive di punti uniti, che sono, per dir così, prevalenti.

Aggiungasi che la τ associata alla s di cui sopra ha anch'essa il punto unito E , e poichè il periodo di τ , come quello di s , è v , così le trasformazioni che hanno E come punto unito sono $1, \tau, \tau^2, \dots, \tau^{v-1}$ (fra cui $\tau_i = \tau^h$).

9. Da quanto precede si deduce subito che una data τ_i può aver coincidenze in gruppi Q tra di loro differenti, allora e soltanto che esistono cappi relativi a punti di diramazione *diversi* che producono la stessa s_i (associata a τ_i). Ma inoltre più coincidenze della stessa τ_i posson cadere in uno stesso gruppo Q ; e tal circostanza domanda d'essere approfondita.

Una prima ispezione mostra che il verificarsi di essa trae seco l'esistenza di due o più cappi (semplici o multipli) relativi allo stesso punto di diramazione D , ma *non equivalenti* tra di loro, che operino la stessa s_i . È però preferibile procedere altrimenti.

Sia, come prima, E unito per τ_i , ed E' sia un altro punto del gruppo Q che contiene E , pure unito per τ_i ; dicasi ω una fra le v operazioni di T che mutano E in E' , e, conservando a τ l'ultimo significato del numero precedente, si ponga $\vartheta = \omega\tau\omega^{-1}$.

La ϑ ha, come τ , periodo v , onde le operazioni di T che lasciano fisso E' sono $1, \vartheta, \vartheta^2, \dots, \vartheta^{v-1}$; stante l'ipotesi che E' sia una coincidenza di τ_i dovrà dunque essere $\tau_i = \vartheta^h$. D'altra parte la trasformata di $\tau_i = \tau^h$ mediante ω , è $\omega\tau^h\omega^{-1} = \vartheta^h$, sicchè τ_i e la sua trasformata mediante ω sono entrambe potenze di ϑ . Ora vogliamo mostrare ch'esse *sono pure potenze una dell'altra*, per guisa che avendosi $(\vartheta^k)^\mu = \vartheta^h$, cioè $\tau_i^\mu = \omega\tau_i\omega^{-1}$, ne risulterà che ω trasforma τ_i in una sua potenza, o, in altre parole, *è permutabile col gruppo ciclico generato da τ_i* .

Intanto $\vartheta^h = \tau_i$, e ϑ^h trasformata di τ_i avranno lo stesso periodo v_i ; ma il periodo di ϑ^h è $\frac{v}{\delta}$, dove $\delta = \text{m. c. d.}(v, h)$, ed analogamente il periodo di ϑ^k è $\frac{v}{\delta_1}$ con $\delta_1 = \text{m. c. d.}(v, k)$. Sarà pertanto $\delta = \delta_1, v = v_1 \delta$, ed inoltre si porrà $h = h_1 \delta, k = k_1 \delta$.

Poichè k_1 e v_1 sono primi tra loro, uno dei numeri $k_1, 2k_1, \dots, (v_1 - 1)k_1$, sia $\mu_1 k_1$, sarà congruo ad $1 \pmod{v_1}$, e di conseguenza si avrà $\mu_1 k_1 \delta \equiv \delta \pmod{v}$, cioè $\mu_1 k_1 \delta \equiv \delta \pmod{v}$, ed ancora $\mu_1 h_1 k_1 \equiv h_1 \delta \equiv h \pmod{v}$, ed infine, posto $\mu_1 h_1 = \mu$, risulterà $k\mu = h \pmod{v}$. Tanto basta per concludere che $(\vartheta^h)^\mu = \vartheta^h$ come asserito.

Viceversa se $\omega\tau_i\omega^{-1} = \tau_i^\mu$, posto che $\tau_i = \tau^h$, sarà $\vartheta^h = \tau_i^\mu$. D'altra parte τ_i^μ , in quanto trasformata di τ_i ha lo stesso periodo v_i della τ_i stessa, sicchè μ e v_1 sono primi tra di loro; ma allora se ρ è l'intero per cui $\mu\rho \equiv 1 \pmod{v_1}$ risulta $\vartheta^{h\rho} = \tau_i^{\mu\rho} = \tau_i$, onde τ_i in quanto potenza di ϑ lascia fisso il punto E' .

Tenendo presente che E' non muta sostituendo ad ω un'altra delle operazioni $\omega, \omega\tau, \omega\tau^2, \dots, \omega\tau^{v-1}$ che mutano E in E' (ciascuna delle quali, come ω , trasforma τ_i in τ_i^u) e che, indicando con u la sostituzione del gruppo di monodromia M associata ad ω , dalla $\omega\tau\omega^{-1} = \tau_i^u$ si trae (n. 3) $u^{-1}s_i u = s_i^u$, si perviene in definitiva a concludere che:

Un gruppo dell'involuzione J (composto di $\frac{N}{v}$ punti v -pli) che contenga una coincidenza d'una trasformazione τ_i del gruppo T , ne contiene tante quant'è il numero ottenuto dividendo per v quello che esprime quante sostituzioni del gruppo di monodromia M son permutabili col gruppo ciclico generato dalla s_i associata a τ_i ⁽¹⁾.

10. Applichiamo i risultati delle osservazioni di questa Nota e della precedente, al caso, per dir così, più semplice, d'una C di genere p contenente una g_n^1 con soli punti doppi, appartenenti a gruppi distinti. La f è in questo caso razionale (piano complesso z) con $d = 2(n + p - 1)$ punti di diramazione ordinari, e le sostituzioni s inerenti ai relativi cappi sono puri scambi. È noto, che, tracciando opportunamente i cappi, si possono ottenere tutti gli n scambi $(12), (13), \dots, (1n)$ ⁽²⁾, e da ciò, in forza d'una proposizione pur ben nota, segue che il gruppo di monodromia del caso è il gruppo simmetrico. Si ha pertanto $N = n!$ e l'involuzione J della curva di Galois G è una $g_{n!}^1$.

Attualmente tutti i v_i relativi ai punti di diramazione sono eguali a 2, onde (n. 3) la $g_{n!}^1$ ha soli punti doppi, distribuiti in $2(n + p - 1)$ gruppi, ciascuno dei quali ne contiene $\frac{n!}{2}$. Pertanto il genere P della curva di Galois vale

$$(4) \quad P = \frac{1}{2} n! (n + p - 3) + 1,$$

in particolare nel caso d'una g_3^1 o d'una g_1^1 d'una retta $C(p = 0)$ risp. $P = 1, P = 13$.

Passiamo ora a considerare le trasformazioni τ del gruppo T di G , che adesso è oloedricamente isomorfo al gruppo simmetrico su n elementi. Intanto dall'osservazione del n. 8 e da facili considerazioni si trae che:

Le sole trasformazioni del gruppo T , dotate di coincidenza, son quelle, a periodo 2, associate agli $\binom{n}{2}$ scambi del gruppo di monodromia.

A chiarimento dell'asserto, nei confronti col n. 8, e per le ulteriori conseguenze, si osservi che dato uno scambio (ab) ed un punto D del

(1) Il riferimento al gruppo di monodromia M della C non è strettamente necessario, ma rispecchia il nostro punto di partenza, ed è opportuno per le applicazioni.

(2) Cfr. SEVERI, *Vorlesungen über algebraische Geometrie* [Leipzig, Teubner (1921)], cap. VII, n. 80.

gruppo di diramazione, esiste sempre un coppia (di origine A) che opera quello scambio. Difatti se per un coppia (sempre relativo a D e di origine A) di direttrice l tracciata arbitrariamente si ottiene lo scambio (cd) , ed s è una sostituzione, certo esistente in M, che muta la coppia cd nella coppia ab , detto γ un ciclo (relativo ad A) operante la s , il coppia avente per direttrice la linea $-\gamma + l$ produce la sostituzione $s(cd)s^{-1}$ che è precisamente lo scambio (ab) .

Ne consegue che in ciascuno dei $2(n + p - 1)$ gruppi di J corrispondenti ai punti di diramazione, cadono punti uniti della τ_{ab} associata ad (ab) ; ed in ciascun gruppo se ne trovano tanti, quant'è (numero precedente) la metà del numero delle sostituzioni su n elementi permutabili collo scambio (ab) . Si trova subito che quel numero è $2(n-2)!$, quindi che il numero dei punti doppi della γ'_2 generata da τ_{ab} è $2(n-2)!(n + p - 1)$; e pertanto il genere della curva risolvente C_{ab} relativa al sottogruppo $[1(ab)]$ del gruppo di monodromia, è

$$(5) \quad p_1 = \frac{1}{4} \{ n! (n + p - 3) - 2(n-2)! (n + p - 1) \} + 1,$$

in particolare 0, 4 nei due casi sopra considerati ($p = 0, n = 3, 4$).

11. Oltre alle τ_{ab} , appena $p > 3$ si hanno sulla G altre trasformazioni involutorie, associate alle altre s a periodo 2, che son quelle risultanti dal prodotto di più scambi operanti su elementi distinti. Il loro numero è

$$\sum \frac{1}{i!} \binom{n}{2} \binom{n-2}{2} \dots \binom{n-2i+2}{2},$$

la somma andando estesa da $i = 2$ all'intero di $\frac{n}{2}$; esse danno luogo a γ'_2 prive di coincidenze, e quindi il genere delle relative risolventi vale

$$(6) \quad p_1 = \frac{1}{2} (P + 1) = \frac{1}{4} n! (n + p - 3) + 1.$$

Così ad esempio per $p = 0, n = 4$ si trovano tre curve risolventi di genere 7 corrispondenti ai tre sottogruppi d'ordine 2 generati in M dalle operazioni involutorie (12) (34), (13) (42), (14) (23).

Ogni altra τ del gruppo T il cui periodo μ sia maggiore di 2 è priva di coincidenze; e lo è pure ogni sua potenza, eccezione fatta per il caso che μ sia pari, e che $\tau^{\frac{\mu}{2}}$ coincida con una delle τ_{ab} . Nel primo caso, sempre verificato se μ è dispari, anche la γ'_μ (ciclica) generata da τ è priva di coincidenze, sicchè la curva risolvente C_τ che ne è l'immagine ha il genere

$$(7) \quad p_1 = \frac{P-1}{\mu} + 1 = \frac{n!}{2\mu} (n + p - 3) + 1;$$

mentre nel secondo caso la γ_μ^1 ha come punti doppi tutti quelli di τ_{ab} (distribuiti in più gruppi di γ_μ^1 ciascuno dei quali ne contiene $\frac{\mu}{2}$) per guisa che il genere di C_1 risulta

$$(8) \quad p_1 = \frac{1}{2\mu} \{ n! (n + p - 3) - 2(n-2)! (n + p - 1) \} + 1.$$

È facile anche precisare qual'è il tipo delle sostituzioni s , che danno luogo a questa circostanza; trattandosi di esprimere che il loro periodo è pari ($\mu = 2\mu_1$) e che s^{μ_1} deve ridursi ad un unico scambio.

Posto che $\gamma = (a_1, a_2, \dots, a_\lambda)$ sia un ciclo della s , la potenza γ^{μ_1} sarà l'identità o uno scambio, e questa seconda circostanza dovrà verificarsi per *uno solo* dei cicli. Nel primo caso λ , che è un divisore di μ , sarà anche divisore di μ_1 , nel secondo γ stesso dovrà ridursi ad uno scambio (perchè ogni sua potenza sposta tutti gli elementi), e ciò dovendo verificarsi anche per γ^{μ_1} , μ_1 sarà dispari. In definitiva μ dovrà essere un intero della forma $4h + 2$, e la s sarà il prodotto di uno scambio per un insieme di cicli (operanti su elementi distinti) i cui ordini hanno per minimo comune multiplo $2h + 1$.

In tali condizioni si è certi che la circostanza considerata si verifica, e quindi che il valore di p_1 fornito dalla (8) è un numero intero. Il minimo valore di n per cui il caso si presenta è il 6, e le relative s che sono del tipo

$$(12) (3 \ 4 \ 5) (6),$$

con $\mu = 6$, danno per $p = 0$ curve risolventi di genere 161.

Restano così caratterizzate, nelle nostre ipotesi generali, tutte le curve risolventi legate a sottogruppi ciclici del gruppo di monodromia M .

12. È chiaro che, nel presente argomento, i casi di maggior interesse son quelli in cui s'ha da fare con γ_n^1 o g_n^1 molto particolari, con gruppi di monodromia d'ordine relativamente basso rispetto al valore massimo $n!$. L'esemplificazione non offre difficoltà e si presenta notevolmente varia; qui ci limiteremo a presentare, in modo conforme al nostro indirizzo, la genesi d'un caso classico.

La γ_n^1 della curva C sia una g_8^1 diramata in tre punti D_1, D_2, D_3 del piano complesso \mathbb{C} , a norma delle sostituzioni

$$(9) \quad s = (16) (23) (45) (78) \quad , \quad t = (2) (4) (153) (678), \\ h = (1234567) (8),$$

relative ad opportuni cappi. Poichè $hts = 1$, la C esiste, e le coincidenze della g_8^1 cadono in tre gruppi che contengono rispettivamente, quattro punti

doppi, due punti tripli e due semplici, un punto settuplo ed uno semplice; dunque il genere p di C è zero.

L'ordine N del gruppo di monodromia M generato dalle (9) dev'essere multiplo di $n = 8$, e dei periodi 3, 7 delle t, h , quindi di 168; ma d'altra parte, come subito si verifica, le s, t, h soddisfano alle relazioni

$$s^2 = 1, \quad t^3 = 1, \quad h^7 = 1, \quad hts = 1, \quad (sh^4)^4 = 1,$$

le quali caratterizzano, in senso astratto, il gruppo semplice d'ordine 168⁽¹⁾; dunque M è di quel tipo.

L'involuzione J della curva di Galois G è dunque una g_{168}^1 generata da un gruppo T_{168} di trasformazioni birazionali di G in sè. Le coincidenze di J cadono in tre gruppi (omologhi di D_1, D_2, D_3) contenenti rispettivamente 84 punti doppi, 56 tripli, 24 settupli; dunque il genere P di G è 3. Si tratta della nota curva di Klein⁽²⁾.

Ai punti di C rispondono su G i gruppi di un'involuzione I_{21} generata da un sottogruppo T_{21} di T_{168} . A tenore del n. 6 la rappresentazione di G su C è diramata regolarmente nei tre punti semplici dei tre predetti gruppi di g_8^1 (dotati di coincidenze) cogli'indici di diramazione 3, 3, 7, ecc.

(1) Cfr. DYCK, *Gruppentheoretische Studien* [« Math. Ann. », Bd. XX (1882), pp. 1-44], p. 41; BURNSIDE, *Theorie of groups of finite order*, [« Cambridge-University Press » (1911)] n. 303, p. 422.

(2) Dopo aver costruito per una via indiretta l'esempio esposto, ho riscontrato che l'andamento delle diramazioni espresso dalle (9) - le quali qui si prendono come punto di partenza - è indicato dal KLEIN a p. 744 delle *Modulfunctionen* (vol. I). Nella classificazione dei gruppi primitivi di sostituzioni su 8 lettere, data dal BURNSIDE (loc. cit., n. 166) non è esplicitamente indicata la genesi del gruppo semplice d'ordine 168 mediante le (9).

Matematica. — *Sugli integrali dell'equazione $y' = f(x, y)$.*
Nota di G. SCORZA-DRAGONI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. L. TONELLI.

È noto ⁽²⁾ che, se $f(x, y)$ è una funzione continua e limitata, definita in un insieme aperto, ogni gruppo di condizioni, sufficiente a stabilire il teorema d'unicità per gli integrali dell'equazione

$$(1) \quad y' = f(x, y),$$

è sufficiente anche a stabilirne la dipendenza continua dei valori iniziali.

Ebbene, nelle righe seguenti mostrerò che una circostanza analoga si presenta anche per una condizione d'unicità data dal prof. Tonelli ⁽³⁾, sebbene in essa non sia fatta alcuna ipotesi sulla continuità della f .

1. Credo opportuno premettere un'osservazione.

In questa Nota io esamino un'equazione del tipo della (1), senza far nessuna ipotesi sulla continuità o meno della $f(x, y)$. In queste condizioni nulla si può dire circa l'esistenza di integrali della (1); resta però bene inteso che quando parlerò di soluzioni della $y' = f$, intenderò parlare di eventuali soluzioni della (1).

2. Andiamo a precisare le condizioni del problema.

Sia $f(x, y)$ una funzione limitata, definita nel rettangolo

$$R: a_1 \leq x \leq a_2, \\ b_1 \leq y \leq b_2;$$

(1) Nella seduta del 3 marzo 1929.

(2) C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*. Teubner, 1918, p. 678.

(3) L. TONELLI, *Sull'unicità della soluzione di un'equazione differenziale ordinaria*. «Rendiconti Accad. dei Lincei», Serie 6^a, marzo 1925.

Oltre al criterio del prof. Tonelli si conoscono parecchie condizioni d'unicità per gli integrali dell'equazione $y' = f$ che sono più ampie di quella di Lipschitz. Tali condizioni forniscono i criteri d'unicità di Osgood e di Rosenblatt.

Ora è agevole riconoscere che, mentre il criterio di Tonelli comprende quello di Osgood, il teorema di Tonelli e quello di Rosenblatt hanno, sì, un dominio comune, ma non sono l'uno caso particolare dell'altro.

In un prossimo lavoro darò un teorema che comprende il criterio di Tonelli e quello di Rosenblatt, almeno nella prima forma che gli ha dato questo autore e nella forma più affinata in cui è stato successivamente enunciato da Nagumo e da Perron.

Per una piccola bibliografia sull'argomento rimando al lavoro di Rosenblatt: *Sull'unicità della soluzione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie*, «Rendiconti Accad. dei Lincei», Serie 6^a, luglio 1928.

(x_0, y_0) un punto interno di R ; ed $y(x)$ un integrale dell'equazione

$$(2) \quad y' = f(x, y)$$

uscite dal punto (x_0, y_0) .

Supponiamo inoltre che ogni qual volta si abbia $x_0 < x \leq a_2$, $b_1 \leq y_1 < y_2 \leq b_2$ sia verificata la diseuguaglianza

$$(3) \quad f(x, y_2) - f(x, y_1) \leq \varphi_1(x) \omega(y_2 - y_1),$$

diseuguaglianza nella quale $\varphi_1(x)$ è una funzione definita in $x_0 < x \leq a_2$, integrabile (anche nel senso di Lebesgue) in ogni intervallo del tipo $x_1 \leq x \leq x_2$ ($x_0 < x_1 < x_2 \leq a_2$) e tale che sia

$$(4) \quad \int_{x_1}^{x_2} \varphi_1(x) dx < M^{(1)}, \quad (M = \text{cost}; x_1 < x_2)$$

ed $\omega(u)$ è una funzione continua e positiva, definita per ogni $u > 0$, e tale che sia

$$(5) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\eta}^{\eta_0} \frac{du}{\omega(u)} = +\infty,$$

se η_0 è un numero positivo, fissato a piacere, ed η tende a zero per valori positivi.

Ebbene, dico che in queste ipotesi:

Ad ogni $\varepsilon > 0$ si può far corrispondere un numero positivo δ tale, che, se $\bar{y}(x)$ è una soluzione della (2), definita per $x = x_0$ e verificante la diseuguaglianza

$$|y(x_0) - \bar{y}(x_0)| < \delta,$$

sia

$$|y(x) - \bar{y}(x)| < \varepsilon$$

(1) Questa condizione è più generale di quella data dal prof. Tonelli.

Egli infatti suppone che esista e sia finito il limite

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \int_{x_1}^{a_2} \varphi_1(x) dx, \quad (x_0 < x_1 < a_2),$$

ed in tal caso, potendosi fissare L in maniera che risulti

$$\left| \int_{x_1}^{a_2} \varphi_1(x) dx \right| < L,$$

sarà

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \varphi_1(x) dx \right| \leq \left| \int_{x_1}^{a_2} \varphi_1(x) dx \right| + \left| \int_{a_2}^{x_2} \varphi_1(x) dx \right| < 2L,$$

e basta porre $M = 2L$ per trovare una formula più restrittiva di quella del testo.

per ogni punto del segmento $x_0 \leq x \leq a_2$ in cui si possano definire tanto $y(x)$ quanto $\bar{y}(x)$.

Per dimostrare questo teorema mi servirò del ragionamento adoperato dal prof. Tonelli nella Nota citata, apportandovi le modificazioni richieste dal caso in esame.

Supponiamo che il teorema non sia verificato. Allora sarà possibile scegliere il numero positivo ε in modo tale, che per ogni $\delta \geq 0$ esista un integrale della (2), $\bar{y}(x)$, definito per $x = x_0$ che verifichi la

$$|y(x_0) - \bar{y}(x_0)| < \delta,$$

ma che non verifichi per ogni $x \geq x_0$ e $\leq a_2$, in cui si possono definire $y(x)$ e $\bar{y}(x)$, la

$$|y(x) - \bar{y}(x)| < \varepsilon.$$

Ciò posto, scegliamo δ in modo tale che sia

$$(6) \quad \delta < \varepsilon, \quad \int_{\delta}^{\varepsilon} \frac{du}{\omega(u)} > M; \quad (1)$$

continuiamo a chiamare $\bar{y}(x)$ un integrale della (2) che verifichi le condizioni indicate per questo particolare valore di δ ; ed indichiamo con x_1 un punto di $x_0 \leq x \leq a_2$ in cui sia

$$|y(x_1) - \bar{y}(x_1)| > \varepsilon.$$

Da $|y(x_0) - \bar{y}(x_0)| < \delta < \varepsilon$ segue intanto che è $x_1 > x_0$. In x_1 sarà poi o $y(x_1) > \bar{y}(x_1)$ o $y(x_1) < \bar{y}(x_1)$; per fissare le idee supponiamo che sia $y(x_1) > \bar{y}(x_1)$, di guisa che sarà

$$y(x_1) - \bar{y}(x_1) > \varepsilon.$$

Allora, se esistono dei punti di $x_0 \leq x \leq a_1$ per i quali sia $y(x) = \bar{y}(x)$, indichiamo con x_2 il massimo di questi punti; in caso contrario sia $x_2 = x_0$. In ogni caso sarà $x_2 < x_1$ e, in $x_2 < x \leq x_1$, $y(x) > \bar{y}(x)$. Indichiamo poi con x_3 un punto del segmento $x_2 < x < x_1$.

Posto $u(x) = y(x) - \bar{y}(x)$, in $x_2 \leq x \leq x_1$ è $u(x) > 0$ ed $u'(x) = y'(x) - \bar{y}'(x) = f(x, y(x)) - f(x, \bar{y}(x))$, cioè, per la (3),

$$u'(x) \leq \varphi_1(x) \omega(y(x) - \bar{y}(x)),$$

e quindi

$$\int_{x_3}^{x_1} \frac{u'(x) dx}{\omega(u(x))} \leq \int_{x_3}^{x_1} \varphi_1(x) dx.$$

(1) Il che è sempre possibile in virtù della (5).

Essendo $|u'(x)| \leq |f(x, y(x))| + |f(x, \bar{y}(x))|$, $|u'(x)|$ resta, per le ipotesi fatte sulla $f(x, y)$, minore di un numero fisso in tutto $x_3 \leq x \leq x_1$ e la $u(x)$ vi è assolutamente continua. Per un noto teorema di cambiamento di variabile sotto il segno di integrale abbiamo dunque

$$\int_{u(x_3)}^{u(x_1)} \frac{du}{\omega(u)} \leq \int_{x_3}^{x_1} \varphi_1(x) dx.$$

Ma è $u(x_1) = y(x_1) - \bar{y}(x_1) > \varepsilon$ ed $\omega(u) > 0$, è quindi a più forte ragione

$$\int_{u(x_3)}^{\varepsilon} \frac{du}{\omega(u)} \leq \int_{x_3}^{x_1} \varphi_1(x) dx.$$

Facciamo adesso tendere x_3 verso x_2 ; al limite è $0 = u(x_2) = 0$ oppure $0 < u(x_2) = u(x_0) < \delta$. Nel primo caso abbiamo, per la (5),

$$+\infty \leq \lim_{x_3 \rightarrow x_2} \int_{x_3}^{x_1} \varphi_1(x) dx,$$

il che contraddice la (4); nel secondo caso abbiamo

$$\int_{\delta}^{\varepsilon} \frac{du}{\omega(u)} \leq \lim_{x_3 \rightarrow x_2} \int_{x_3}^{x_1} \varphi_1(x) dx,$$

cioè, per la (6),

$$M < \lim_{x_3 \rightarrow x_2} \int_{x_3}^{x_1} \varphi_1(x) dx,$$

il che contraddice di nuovo la (4).

La giustificazione del teorema è quindi completa.

3. Fissata adesso una successione di numeri positivi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ tendenti verso lo zero, determiniamo la successione di numeri, anch'essi positivi, $\delta_1, \delta_2, \dots$ in modo tale che, se è $|y_0 - \bar{y}_0| \leq \delta_n$ e se $\bar{y}(x)$ è un integrale della (2) verificante la condizione $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$, sia $|y(x) - \bar{y}(x)| \leq \varepsilon_n$ per ogni $x \geq x_0$ e $\leq a_2$ in cui siano definiti tanto $y(x)$ quanto $\bar{y}(x)$.

Ma allora, se è $y_0 = \bar{y}_0$, sarà $|y(x) - \bar{y}(x)| \leq \varepsilon_n$ per ogni valore dell'indice n , e poichè è $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, sarà $y(x) = \bar{y}(x)$.

Quindi, nelle ipotesi poste

Dal punto (x_0, y_0) esce, al più, un solo integrale della (2).

4. Valgono evidentemente teoremi analoghi a quelli indicati e relativi agli integrali della (2) definiti in un intorno sinistro di x_0 . In essi la disuguaglianza (3) andrà sostituita con la

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) \geq \varphi_2(x) \omega(y_2 - y_1),$$

dove $\varphi_2(x)$ è una funzione definita in $a_1 \leq x < x_0$, integrabile (anche nel senso di Lebesgue) in ogni intervallo del tipo $x_2 \leq x \leq x_1$ ($a_1 \leq x_2 < x_1 < x_0$) e tale che sia

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi_2(x) dx > M, \quad (M = \text{cost}; x_1 > x_2),$$

ed $\omega(u)$ ha il solito significato.

Meccanica. — *Limitazioni locali del cemento dinamico.* Nota di G. KRALL, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ 1. - In alcune recenti Note ⁽²⁾ abbiamo indicato come, attraverso al metodo delle coordinate normali, sia possibile pervenire a dei limiti superiori ragionevoli per il cemento globale (e quindi di quello medio) e per lo spostamento di un generico punto d'un sistema elastico vibrante.

Or qui ci proponiamo, con riguardo soltanto ai sistemi schematizzabili a forme lineari; archi, travate ecc., di pervenire, sfruttando i risultati allora acquisiti, a limitazioni del cemento, se non proprio locali, almeno relative a zone circoscritte quanto basta pei bisogni della pratica.

§ 2. OSSERVAZIONE PRELIMINARE. - Consideriamo un corpo elastico riducibile ad un sistema lineare piano, sollecitato da una distribuzione equilibrata di carichi.

Per virtù di questi, il materiale sarà sottoposto ad un cemento, di cui l'entità, in una certa sezione, si misura secondo l'uso più invalso presso gli ingegneri, ricorrendo al cosiddetto *momento flettente* dei carichi per rispetto alla sezione suddetta, potendosi risalire da questo, attraverso ad una ipotesi ben nota, allo sforzo specifico in ogni fibra.

Intento di questa Nota è di pervenire a limitazioni per quel momento, se non proprio locali, almeno relative ad un valore medio in un certo intorno convenientemente piccolo.

(1) Nella seduta del 20 gennaio 1929.

(2) K. KRALL, *Limiti superiori del cemento dinamico*, questi « Rendiconti », vol. VII, serie 6^a, 1° sem., fasc. 3, 1928; ID., *Limitazioni per lo spostamento dinamico nei sistemi elastici*, questi « Rendiconti »,

Con riguardo ai nostri intenti noi chiameremo *valore medio del momento flettente* in un certo intervallo, quel momento che, applicato con versi opposti sulle due facce estreme (o terminali) dell'intervallo suddetto, induce su queste la stessa rotazione relativa ω prodotta dalla distribuzione effettiva, in quel tratto s'intende.

Questa definizione è plausibile ed è facile convincersene. Infatti, se indichiamo con J il momento d'inerzia d'una generica sezione, con ds l'elemento lineare dell'asse, sarà per cose note, ove con E si indichi il modulo d'elasticità del materiale,

$$\omega = \int \frac{Mds}{EJ}$$

l'integrazione essendo estesa al tratto che intercede tra le due facce di cui si misura la rotazione relativa.

Il momento medio M_0 , dovrà dunque, per definizione, esser tale che risulti

$$\omega = M_0 \int \frac{ds}{EJ}$$

e quindi eguale a

$$M_0 = \frac{\int \frac{Mds}{EJ}}{\int \frac{ds}{EJ}}.$$

Ne scende che, se in particolare, il che per un tratto convenientemente piccolo si può sempre ritenere, è $EJ = \text{cost.}$, si avrà

$$M_0 = \frac{\int Mds}{\int ds},$$

una relazione questa, che, manifestamente, rispecchia la comune definizione di valore medio d'una funzione in un campo assegnato.

Ciò posto, consideriamo, del nostro sistema vibrante, un tratto che intercede tra due punti P_1 e P_2 , di lunghezza, misurata sull'asse, eguale a Δs . Se le rotazioni delle sezioni normali passanti per P_1 e P_2 si indicano con ω_1 rispettivamente ω_2 , la rotazione relativa ω sarà al più eguale a $|\omega_1| + |\omega_2|$, e quindi il momento medio M_0 in quel tratto, al più eguale a

$$(1) \quad M_d = \frac{|\omega_1| + |\omega_2|}{\int_{\Delta s} \frac{ds}{EJ}}.$$

§ 3. CALCOLO DELLA ROTAZIONE RELATIVA MASSIMA. — Il nostro problema è ormai ben circoscritto, in quanto è ridotto soltanto alla ricerca di limitazioni per le ω_1 ed ω_2 .

Con questo intento cominciamo con l'osservare che, se il corpo esegue vibrazioni normali all'asse (cosidette vibrazioni trasversali) si avrà senz'altro,

$$\omega(P_i) = \left(\frac{dv(P)}{dx} \right)_{P=P_i}$$

essendo $v = v(P)$ l'elongazione del generico punto $P = P_i$ di coordinata $x = x_i$. Ma, per quanto sappiamo dalla precedente Nota, lo spostamento v può esser posto nella forma

$$v = \sum_p^{\infty} u^{(p)}(x) \Phi_p$$

la $u^{(p)} = u^{(p)}(x)$ stando ad indicare l'autofunzione o funzione caratteristica p^{esima} del sistema, la Φ_p essendo la p^{esima} coordinata normale funzione del solo tempo t .

Perciò, con ovvie precauzioni, potremo porre,

$$\omega(P) = \sum_p^{\infty} \frac{du^{(p)}(x)}{dx} \Phi_p$$

e quindi, operando su questa serie così come nella Nota richiamata, il che è lecito come facilmente si riconosce, otteniamo

$$\begin{aligned} \omega(P) &\leq \sqrt{\sum_p^{\infty} \frac{[u^{(p)}(x)]^2}{\sigma_p^2} \sum_p^{\infty} \Phi_p^2 \sigma_p^2} \leq \sqrt{2 \sum_p^{\infty} \frac{[u^{(p)}(x)]^2}{\sigma_p^2} (P_d + 2\sqrt{P_d \Pi_d} + \Pi_d)} = \\ &= \left(1 + \sqrt{\frac{\Pi_d}{P_d}} \right) \sqrt{2 \sum_p^{\infty} \frac{[u^{(p)}(x)]^2}{\sigma_p^2} \cdot P_d} \end{aligned}$$

col significato dei simboli allora precisato.

Questa formola diviene espressiva, in quanto la serie

$$\Omega = \sum_p^{\infty} \frac{[u^{(p)}(x)]^2}{\sigma_p^2}$$

rappresenta la rotazione prodotta sulla sezione passante pel punto P di ascissa x , da un momento unitario $M = 1$ agente in esso, ed è perciò calcolabile per lo più in termini finiti.

Per dimostrarlo, consideriamo la linea elastica del sistema caricato da due forze eguali e contrarie agenti in due punti P e P' di coordinate $x = \xi$ e $x = \xi + \Delta\xi$.

Se con $v = v(x, \xi)$ indichiamo la linea elastica corrispondente ad una forza unitaria applicata in ξ , ove con F si indichi l'intensità delle due forze considerate, la linea cercata $w(x) = w(x, \xi, \xi + \Delta\xi)$ sarà data da

$$w(x) = F \cdot [v(x, \xi + \Delta\xi) - v(x, \xi)]$$

ovvero anche da

$$w(x) = F\Delta\xi \cdot \frac{v(x, \xi + \Delta\xi) - v(x, \xi)}{\Delta\xi}.$$

Ora, se facciamo tendere $\Delta\xi$ a zero, e crescere F per modo che risulti $\lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} F\Delta\xi = 1$, otteniamo

$$\lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} w = \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} F\Delta\xi \frac{v(x, \xi + \Delta\xi) - v(x, \xi)}{\Delta\xi} = \frac{\partial v(x, \xi)}{\partial \xi}.$$

Nota la linea d'inflexione prodotta dal momento unitario agente in ξ , la rotazione $\Omega(x, \xi)$ prodotta nel punto di coordinata x sarà data da

$$\Omega(x, \xi) = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 v(x, \xi)}{\partial x \partial \xi}$$

e quindi, poichè la v può esser posta nella forma bilineare

$$v = \sum_{\rho}^{\infty} \frac{u^{(\rho)}(x) u^{(\rho)}(\xi)}{\sigma_{\rho}^2},$$

premessa l'uniforme convergenza, avremo

$$\Omega(x, \xi) = \sum_{\rho}^{\infty} \frac{\dot{u}^{(\rho)}(x) \dot{u}^{(\rho)}(\xi)}{\sigma_{\rho}^2}$$

da cui in particolare, per $\xi \rightarrow x$, sempre coi debiti riguardi,

$$\Omega(x, x) = \sum_{\rho}^{\infty} \frac{[\dot{u}^{(\rho)}(x)]^2}{\sigma_{\rho}^2} \quad \text{c. d. d.}$$

Ciò posto, riprendendo la (I), ove si ponga $\omega_1 = \omega(P_1)$, $\omega_2 = \omega(P_2)$, e quindi con notazione ovvia, $\Omega(x_1, x_1) = \Omega(P_1)$, $\Omega(x_2, x_2) = \Omega(P_2)$, risulta

$$M_d = \left(1 + \sqrt{\frac{\Pi_d}{P_d}} \right) \sqrt{2 P_d} \frac{\sqrt{\Omega(P_1)} + \sqrt{\Omega(P_2)}}{\int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{EJ}}.$$

Così in particolare, per una trave semplicemente appoggiata agli estremi, di lunghezza L , momento d'inerzia $J = \text{cost.}$, modulo d'elasticità E , fissando

l'attenzione su di un intervallo $\Delta s = kL$, ($k \leq 1$) posto simmetricamente in mezzeria, poichè per nozioni elementari di scienza delle costruzioni si ha

$$\Omega(P_1) = \Omega(P_2) = \frac{(1-k)^3 + (1+k)^3}{24 EJ} L$$

ci risulta senz'altro

$$M_0 \leq \epsilon \left(1 + \sqrt{\frac{\Pi_d}{P_d}} \right) \sqrt{P_d \frac{EJ}{L}}$$

essendo il fattore ϵ calcolato secondo la relazione

$$\epsilon = \sqrt{\frac{(1-k)^3 + (1+k)^3}{6k^2}}.$$

Considerando infine una istantanea applicazione di un carico uniformemente distribuito $p = \text{cost.}$ su tutta la trave, avendosi in tale circostanza $\Pi_d = 0$, $P_d = 4P_s$ con $P_s = p^2 L^3 : 240 EJ$, otteniamo

$$M_0 \leq \frac{pL^2}{\mu}$$

con

$$\mu = \sqrt{\frac{360 \cdot k^2}{(1-k)^3 + (1+k)^3}}.$$

Attribuendo a k i valori 0.00, 0.1, ..., ecc. otteniamo la tabella

$k =$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
$\mu =$	∞	1,32	2,53	3,57	4,41	5,07	5,58	5,97	6,28	6,52	6,71

E appena necessario rilevare come, purtroppo, non sia possibile passare ad una localizzazione ristretta senza che le limitazioni risultino sempre più elevate.

Concludendo noteremo ancora che, pur presentando questi risultati un miglioramento di quelli precedentemente esposti, resta ancora aperta la ricerca per quanto concerne una localizzazione più spiccata compatibilmente con limitazioni più precise a quelle sino ad ora assegnate.

Matematica. — *Sur un déplacement généralisé dans les espaces riemanniens.* Nota di A. WUNDHEILER, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Dans un beau travail sur la dynamique relativiste publié récemment ⁽²⁾, M. Gerhard Thomsen a donné des applications intéressantes d'une notion nouvelle de parallélisme dans les espaces riemanniens qu'il appelle *parallélisme de M. Fermi*.

Il est défini par certaines propriétés qui conduisent à la formule :

$$du^i = - \left\{ \begin{matrix} i \\ k l \end{matrix} \right\} u^k dx^l - g_{ks} u^k \left[\frac{d^2 x^s}{dt^2} + \left\{ \begin{matrix} s \\ p q \end{matrix} \right\} \frac{dx^p}{ds} \frac{dx^q}{ds} \right] dx^i,$$

au cas où le vecteur déplacé est orthogonal à la courbe de transport. M. Thomsen ne donne dans son travail que cette formule particulière. Le but de la Note présente est de donner la formule générale de ce déplacement.

Désignons par u^i notre vecteur attaché au point P d'une courbe C, par \bar{u}^i le vecteur obtenu par le transport ordinaire de Levi-Civita du vecteur u^i au point P' de la courbe C infiniment voisin du P, enfin par u'^i — le vecteur u^i déplacé au point P' par le procédé de Fermi-Thomsen. — Les propriétés dont nous avons parlé tout à l'heure sont les suivantes :

A) Les vecteurs u^i et u'^i ont la même longueur;

B) Le vecteur u'^i est situé dans le plan passant par la tangente à la courbe C en P' et par le vecteur \bar{u}^i ;

C) Le vecteur u'^i fait avec la tangente en P' le même angle que le vecteur u^i avec la tangente en P.

Nous allons tout d'abord généraliser un peu ces conditions en remplaçant B) et C) par les conditions suivantes :

B') v^i étant un champ des vecteurs quelconque défini dans notre espace riemannien le vecteur u'^i est situé dans le plan passant par le vecteur v^i correspondant au point P' et le vecteur \bar{u}^i ;

C') Le produit scalaire $u'^i v_i$ est égal au produit $\bar{u}^i v_i$.

Posons

$$(I) \quad u'^i = u^i + du^i = \bar{u}^i + \delta u^i = u^i + \Delta u^i + \delta u^i.$$

(1) Nella seduta del 17 febbraio 1929.

(2) G. THOMSEN, Ueber die Bewegung eines kleinen starren Probekörpers in beliebig vorgegebenen Gravitationsfeldern, « Math. Zeit. », Bd. 29, 1928 (p. 96).

Il s'agit de trouver du^i . Comme on sait bien :

$$(2) \quad \Delta u^i = - \left\{ \begin{matrix} i \\ k \ l \end{matrix} \right\} u^k dx^l.$$

Le vecteur δu^i est infiniment petit. D'après la propriété B') il est situé dans le plan des vecteurs \bar{u}^i et v^i . On peut donc poser :

$$(3) \quad \delta u^i = \lambda \bar{u}^i + \mu v^i,$$

λ et μ étant des infiniment petits.

Si l'on substitue $\bar{u}^i = u^i + \Delta u^i$, $v^i = v^i + dv^i$ dans (3), on obtient en négligeant les quantités du deuxième ordre $\lambda \Delta u^i$ et μdv^i :

$$\delta u^i = \lambda u^i + \mu v^i.$$

(1) donne alors :

$$(4) \quad du^i = \Delta u^i + \lambda u^i + \mu v^i.$$

Mettons maintenant en équations les propriétés A) et C'). On aura :

$$(5_1) \quad d(g_{ik} u^i u^k) = dg_{ik} u^i u^k + 2 g_{ik} u^i du^k = 0;$$

$$(5_2) \quad d(g_{ik} u^i v^k) = dg_{ik} u^i v^k + g_{ik} u^i dv^k + g_{ik} v^k du^i = 0.$$

Substituons dans ces équations les valeurs (4). Il viendra, en négligeant les quantités du deuxième ordre :

$$(6_1) \quad dg_{ik} \cdot u^i u^k + 2 g_{ik} u^i \Delta u^k + 2 g_{ik} u^i \lambda u^k + 2 g_{ik} u^i \mu v^k = 0;$$

$$(6_2) \quad dg_{ik} u^i v^k + g_{ik} u^i dv^k + g_{ik} v^i \Delta u^k + g_{ik} v^i \lambda u^k + g_{ik} u^i \mu v^k = 0.$$

On obtient aisément d'après (2) :

$$\begin{aligned} dg_{ik} u^i u^k + 2 g_{ik} u^i \Delta u^k &= 0, \\ dg_{ik} u^i v^k + g_{ik} u^i dv^k + g_{ik} v^i \Delta u^k &= u_l Dv^l, \end{aligned}$$

en posant :

$$Dv^i = dv^i + \left\{ \begin{matrix} i \\ k \ l \end{matrix} \right\} u^k dx^l.$$

Avec cela les équations (6) deviennent respectivement :

$$u^2 \lambda + (uv) \mu = 0, \quad (uv) \lambda + v^2 \mu = - u_l Dv^l,$$

où l'on a posé :

$$u^2 = g_{ik} u^i u^k, \quad v^2 = g_{ik} v^i v^k, \quad (uv) = g_{ik} u^i v^k.$$

Ce sont deux équations linéaires par rapport à λ et μ . On en tire :

$$\lambda = \frac{(uv)}{u^2 v^2 - (uv)^2} u_l Dv^l, \quad \mu = - \frac{u^2}{u^2 v^2 - (uv)^2} u_l Dv^l,$$

et enfin, d'après (4) :

$$(7) \quad du^i = \Delta u^i + \left[\frac{(uv) u^i}{u^2 v^2 - (uv)^2} - \frac{u^2 v^i}{u^2 v^2 - (uv)^2} \right] (u_l Dv^l).$$

C'est la formule que nous avons cherchée. Pour passer au déplacement de Fermi-Thomsen on n'a qu'à poser :

$$v^i = \frac{dx^i}{ds}$$

x^i étant les coordonnées du point P. La condition A) reste sans changement (5₁). La condition C) devient :

$$d \frac{g_{ik} u^i v^k}{(g_{ik} u^i u^k \cdot g_{lm} v^l v^m)^{1/2}},$$

où bien, en utilisant (5₁) :

$$dg_{ik} u^i v^k = 0.$$

On obtient alors la formule du déplacement désirée en posant dans (7) :

$$(uv) = u \cos \varphi, \quad v = 1.$$

Il vient :

$$du^i = \Delta u^i + \left[\frac{u^i}{u} \cos \varphi - \frac{dx^i}{ds} \right] \frac{u_l Dv^l}{\sin^2 \varphi}.$$

Au cas où le vecteur u^i est orthogonal à la courbe C on a :

$$du^i = \Delta u^i - u_k \frac{Dv^k}{ds} dx^i.$$

C'est la formule donnée par M. Thomsen.

Il serait peut-être intéressant de remarquer que la formule (7) ne rentre pas dans le cadre classique de déplacements fournis par la formule :

$$du^i = - \Gamma_{kl}^i a^k dx^l.$$

Le second membre de l'équation (7) n'est pas linéaire par rapport aux u^i , d'où on conclut que notre déplacement ne fournit pas une transformation homographique de la multiplicité des vecteurs en P en celle qui se rapporte au point P'.

Matematica. — *Sul valore principale di un integrale.* Nota di P. NALLI, presentata dal Corrisp. L. TONELLI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Parallelismo e coordinate geometriche.* Nota di P. NALLI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Derivazioni di un tensore lungo una linea.* Nota di P. NALLI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Commutazione totale e parziale relativa ai tensori derivati.* Nota di M. PASTORI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur quelques formes générales de la loi des grandes nombres.* Nota di V. GLIVENKO, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur les formes générales de la loi des grandes nombres dans les espaces fonctionnels.* Nota di V. GLIVENKO, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur la loi des grandes nombres.* Nota di A. KOLMOGOROFF, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geometria. — *Sui centri di curvatura delle geodetiche di una varietà.* Nota di G. VITALI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. FUBINI.

Nella presente Nota io dimostro il seguente:

Teorema. — Se P è un punto di una varietà V_n ad n dimensioni, nel quale il σ_2 di V_n abbia $n + v$, $v = \binom{n+1}{2}$, dimensioni, i centri di curvatura in P delle ∞^{v-1} geodetiche di V_n uscenti da P sono situati sopra una ipersfera K passante per P dello spazio lineare S_v a v dimensioni giacente nel σ_2 e perpendicolare alla V_n .

Effettivamente questi centri formano una varietà W_{n-1} ad $n-1$ dimensioni, e, naturalmente, se P' è l'antipodo di P in K , i punti di W_{n-1} sono le proiezioni ortogonali di P' sulle normali principali in P delle geodetiche di V_n uscenti da P .

Troverò anche l'invariante che dà la lunghezza di PP' ed i parametri della retta PP' .

1. Sia:

$$f = f(t; u_1, u_2, \dots, u_n)$$

l'equazione di V_n e sia g il campo di variabilità della t . Indichiamo con f_h la derivata parziale di f rispetto ad u_h e poniamo:

$$a_{h,k} = \int_g f_h f_k dt,$$

cosicchè il quadrato dell'elemento di arco di V_n sia dato da:

$$(1) \quad ds^2 = \sum_{h,k} a_{h,k} du_h du_k.$$

Indichiamo inoltre con $f_{h,k}$ il derivato covariante di f_h rispetto alla forma (1), e con

$$X_i \quad (i = 1, 2, \dots, v)$$

un sistema di v parametri normali e a due a due ortogonali di S_v .

(1) Nella seduta del 17 febbraio 1929.

Se si pone:

$$x_{h,k} = \int_i^X f_{h,k} dt,$$

si ha:

$$f_{h,k} = \sum_i^v x_{h,k} X_i.$$

Inoltre, per l'ipotesi fatta sul numero delle dimensioni del σ_2 , i v covarianti $x_{h,k}$ i quali hanno v termini ciascuno sono linearmente indipendenti, ossia è diverso da zero il determinante delle $x_{h,k}$ nelle cui colonne è costante l'indice i e nelle cui righe è costante la coppia di indici hk .

Per questa ragione si potrà determinare un sistema di v numeri λ_i , per cui si abbia, qualunque sia la coppia hk ,

$$(2) \quad a_{hk} = \sum_i^v \lambda_i x_{h,k}.$$

Allora dalle (1) e (2) si ricava

$$(3) \quad ds^2 = \sum_i^v \lambda_i \left(\sum_{hk} x_{h,k} du_h du_k \right).$$

Poichè i punti:

$$(4) \quad f + \frac{\sum_i^n x_{hk} f_{h,k} du_h du_k}{ds^2}$$

hanno per coordinate rispetto agli assi X_i le

$$x_i = \frac{\sum_i^n x_{hk} x_{h,k} du_h du_k}{ds^2}.$$

Si ha, per le (3),

$$(5) \quad I = \sum_i^v \lambda_i x_i$$

dunque i punti (4) giacciono in un iperpiano π dell' S_v , il quale ha l'equazione (5).

Se Q è un punto (4) il punto Q^1 che si trova sul raggio PQ , e per cui PQ^1 , $PQ = I$ è il centro di curvatura della geodetica di V_n uscente da P e tangente alla direzione du_1, du_2, \dots, du_n .

Ne consegue che i centri di curvatura delle geodetiche di V_n uscenti da P si trovano sulla ipersfera K di S_v in cui si trasforma l'iperpiano π per l'inversione per raggi vettori reciproci di centro P .

Così è dimostrato il teorema enunciato nella introduzione.

2. Poniamo:

$$A_{h,k;p,q} = \int_g f_{h,k} f_{p,q} dt,$$

ed indichiamo con A il determinante di ordine v , ottenuto facendo percorrere nello stesso ordine alle coppie hk e pq tutte le combinazioni con ripetizione a 2 a 2 dei numeri

$$1, 2, \dots, n$$

e mettendo in una stessa riga tutti gli elementi colla stessa coppia hk ed in una stessa colonna tutti gli elementi colla stessa coppia pq . Per l'ipotesi fatta sul numero delle dimensioni del σ_2 è $A \neq 0$. Indichiamo poi con $A^{h,k;p,q}$ il reciproco di $A_{h,k;p,q}$ in A , se $h=k$ e $p=q$, o lo stesso reciproco diviso per 2, se $h=k$ e $p \neq q$, oppure se $h \neq k$ e $p=q$, o lo stesso reciproco diviso per 4 se $h \neq k$ e $p \neq q$.

Il sistema $A^{h,k;p,q}$ è un controvariante a 4 apici di classe 1.

Poniamo:

$$\alpha^{p,q} = \sum_{hk}^n a_{h,k} A^{h,k;p,q},$$

e

$$J = \sum_1^n pq \alpha^{p,q} f_{p,q}.$$

Io dico che il punto:

$$f + J$$

che indicherò con P' è l'antipodo di P nella ipersfera K . Basta che io provi che proiettando ortogonalmente questo punto P' sulle normali principali alle geodetiche si trovano i centri di curvatura di queste geodetiche.

Ora è chiaro che se Q'' è la proiezione ortogonale di P' sulla retta PQ , essendo Q un punto (4), si ha

$$(6) \quad PQ'' = PP' \cos \widehat{QP'P'},$$

e che

$$(7) \quad \int_g I \cdot \frac{\sum_{hk}^n f_{h,k} du_h du_k}{ds^2} = PP' \cdot PQ \cos \widehat{QP'P'}.$$

Ma il primo membro di (7) vale:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{h,p,q}^n \alpha^{p,q} \cdot A_{h,k;p,q} du_h du_k \right) : ds^2 = \\ & = \left[\sum_{r,l}^n a_{r,l} \sum_{h,k}^n du_h du_k \sum_{p,q}^n (A^{r,l;p,q} \cdot A_{h,k;p,q}) \right] : ds^2 = \\ & = \left(\sum_{r,l}^n a_{r,l} du_r du_l \right) : ds^2 = ds^2 : ds^2 = 1, \end{aligned}$$

e ciò in base alle relazioni che passano fra gli elementi di due determinanti reciproci. Dunque:

$$PP' \cdot PQ \cos \widehat{QPP'} = 1$$

e tenendo conto di (6):

$$PQ'' \cdot PQ = 1$$

e ciò prova che Q'' è il centro di curvatura della geodetica tangente alla direzione $du_1, du_2, \dots du_n$.

La direzione di parametro J era già stata da me, in altra pubblicazione⁽¹⁾, segnalata come una direzione notevole. Si ha infine

$$PP'^2 = \int_J^2 dt = \sum_{h,p,q} \alpha^{b,k} \alpha^{p,q} A_{h,k;p,q} = \sum_{h,k} \alpha^{b,k} a_{h,k} = \sum_{h,p,q} a_{h,k} a_{p,q} A^{b,k;p,q}$$

Questo invariante è eguale all'invariante J_7 , da me segnalato altrove⁽²⁾, moltiplicato per $\frac{a^{n+1}}{A}$, dove a è il discriminante della forma (1).

Geometria. — *Sur les congruences de M. Demoulin.* Nota di F. FINIKOFF, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) G. VITALI, *Geometria nello spazio hilbertiano*. [«Atti del R. Istituto Veneto», 1927-28, t. LXXXVII, pp. 349-428] v. p. 426.

(2) G. VITALI, *Sopra alcuni invarianti associati ad una varietà e sopra i sistemi principali di normali delle superficie*. [«Annales de la Société Polonaise de Mathématique», t. VII, Année 1928, pp. 43-67] v. p. 51.

Meccanica. — *Intorno a due particolari equazioni dinamiche di un sistema materiale vincolato.* Nota di F. LAMBERTI, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Riferendomi, nel considerare un sistema S di punti materiali P_i ($i = 1, 2, \dots, N$), alla decomposizione del moto relativo \mathfrak{M}_r rispetto al baricentro G nei due $\mathfrak{M}_p, \mathfrak{M}_\tau$, denominati di *dilatazione* e di *turbolenza*, di cui mi è occorso parlare in una recente Nota⁽²⁾, mi propongo di studiare due equazioni dinamiche distinte le quali sussistono quando gli spostamenti virtuali impressi ai punti P_i , soddisfano, oltre che agli eventuali vincoli, a certe restrizioni, e, ammessa per ogni punto la corrispondenza ad $\mathfrak{M}_p, \mathfrak{M}_\tau$, delle componenti della accelerazione relativa e dello spostamento virtuale relativo secondo le stesse direzioni delle velocità $v_i^{(p)}, v_i^{(\tau)}$, hanno, rispetto ad $\mathfrak{M}_p, \mathfrak{M}_\tau$, forma analoga a quella delle equazioni simboliche della Dinamica. Circa le direzioni di $v_i^{(p)}$, per definizione la stessa che ha il vettore $q_i = P_i - G$, e di $v_i^{(\tau)}$, ortogonale alla precedente, esse saranno, con vantaggio, messe in evidenza scrivendo:

$$(1) \quad \begin{cases} v_i^{(p)} = \dot{q}_i, \\ v_i^{(\tau)} = \omega_i \wedge q_i, \end{cases}$$

essendo \dot{q}_i il vettore la cui grandezza è la derivata temporale di q_i , e la direzione e il verso positivo quelli di q_i ; e ω_i un vettore determinato col supporlo ortogonale a q_i .

Lo scopo dianzi precisato implica per sua natura che si ricorra all'equazione simbolica della Dinamica dei sistemi vincolati, supponendo i vincoli bilaterali e privi di attrito:

$$(2) \quad \sum_i^N (m_i a_i - \varphi_i) \times \delta P_i = 0$$

e all'equazione simbolica della Dinamica relativa rispetto al baricentro G, valevole se, inoltre, a ciascun istante i vincoli consentono ad S traslazioni virtuali d'insieme in qualsiasi direzione:

$$(3) \quad \sum_i^N (m_i a_i^{(r)} - \varphi_i^{(r)}) \times \delta_r P_i = 0.$$

(1) Nella seduta del 17 febbraio 1929.

(2) *Su una terza equazione cardinale nella Dinamica dei sistemi materiali*, «Rend. Acc. dei Lincei», vol. VIII, p. 679.

In questa si noterà la presenza, in luogo delle forze attive φ_i , delle loro componenti $\varphi_i^{(r)} = \varphi_i - m_i a_G$ che agiscono rispetto al sistema cui viene riferito il moto relativo \mathfrak{M}_r , per considerazioni analoghe a quelle per le quali nella relazione (2'), della Nota citata, da interpretare, furono sostituite alle \mathbf{F}_i le $\mathbf{F}_i^{(r)}$. Matematicamente ciò è giustificato dall'essere, rappresentando a_G l'accelerazione del baricentro G ,

$$\sum_i^N \varphi_i \times \delta_r P_i = \sum_i^N (\varphi_i^{(r)} + m_i a_G) \times \delta_r P_i = \sum_i^N \varphi_i^{(r)} \times \delta_r P_i$$

per la relazione:

$$(4) \quad \sum_i^N m_i \delta_r P_i = 0.$$

La relazione (4), da aggiungersi a quella dei vincoli, esprime in sostanza la condizione che gli spostamenti virtuali relativi impressi ai punti materiali se fossero trasportati come riferimento al sistema cui viene riferito il moto assoluto, non sposterebbero il baricentro di S . Sarebbe ozioso soffermarsi per constatare che, astraendo dalle condizioni dei vincoli, è vera la reciproca, cioè la (4) è sufficiente affinché il supposto sistema di spostamenti virtuali dei punti P_i sia un possibile sistema di spostamenti virtuali relativi.

È qui opportuno aver presente che il procedimento col quale dalla (2) è dedotta la (3) scinde, in sostanza, la prima in due, una delle quali è l'equazione:

$$(5) \quad \sum_i^N (m_i a_G - \varphi_i) \times \delta_G P_i = 0,$$

riferentesi al moto \mathfrak{M}_G di traslazione solidale col baricentro, nella quale non sono eseguite ovvie semplificazioni per conservare ad essa la forma delle equazioni simboliche, e l'altra è la (3).

Le equazioni da studiare si ottengono dalle (3) se, con ulteriori ipotesi che vedremo, si decompone $a_i^{(r)}$ e $\delta_r P_i$ secondo le direzioni di q_i e ortogonale ad esso, e considerando, come è detto in principio, le componenti ottenute rispettivamente corrispondenti ai moti $\mathfrak{M}_p, \mathfrak{M}_\tau$. Per le componenti di $a_i^{(r)}$ si potrà scrivere:

$$(6) \quad \begin{cases} a_i^{(p)} = \ddot{q}_i - \omega^2 q_i = \ddot{q}_i - \left(\frac{v_i^{(\tau)}}{\rho_i} \right)^2 q_i \\ a_i^{(\tau)} = \dot{\omega}_i \wedge q_i + 2 \omega_i \wedge \dot{q}_i \end{cases}$$

e per quelle di $\delta_r P_i$ converrà porre in evidenza le rispettive direzioni scrivendo:

$$\begin{aligned} \delta_p P_i &= \delta_p q_i, \\ \delta_\tau P_i &= \bar{\omega}_i \wedge q_i, \end{aligned}$$

ove $\delta_p \varphi_i$ è il vettore la cui grandezza è la variazione corrispondente di φ_i , e la direzione quella di φ_i ; e $\bar{\omega}_i$ è un vettore infinitesimo ortogonale a φ_i , che si suppone applicato in G. Si avrà perciò:

$$(7) \quad \delta_r P_i = \delta_p P_i + \delta_\tau P_i,$$

onde la (4) diverrà:

$$(8) \quad \sum_i^N m_i \delta_p P_i + \sum_i^N m_i \delta_\tau P_i = 0.$$

È ovvio, per una osservazione che precede, che se si ha:

$$(9) \quad \sum_i^N m_i \delta_p P_i = 0,$$

$$(10) \quad \sum_i^N m_i \delta_\tau P_i = 0,$$

ciascuno dei due sistemi di spostamenti virtuali è, sempre facendo astrazione dai vincoli, un possibile sistema di spostamenti virtuali relativi rispetto al baricentro.

La (3), con detta decomposizione e per l'ortogonalità di $\alpha_i^{(p)}$ con $\delta_\tau P_i$ e di $\alpha_i^{(\tau)}$ con $\delta_p P_i$ diventa:

$$\sum_i^N (m_i \alpha_i^{(p)} - \varphi_i^{(r)}) \times \delta_p P_i + \sum_i^N (m_i \alpha_i^{(\tau)} - \varphi_i^{(p)}) \times \delta_\tau P_i = 0.$$

Per vedere con quali condizioni si possono scrivere le relazioni che consistono nell'annullarsi identico delle sommatorie del primo membro (ognuna delle quali sarà conseguenza dell'altra) osserverò anzitutto che se, ad es., è nulla la prima, ciò dovrà essere indipendentemente dagli spostamenti virtuali $\delta_\tau P_i$ contenuti nell'altra, per i quali si può supporre che siano tutti nulli; ne risulta che gli spostamenti $\delta_p P_i$ dovranno soddisfare la (9). Analogamente si deduce che affinché sia identicamente nulla la seconda sommatoria dovranno gli spostamenti $\delta_\tau P_i$ soddisfare la (10); sicchè si conclude che le (9), (10), sono da premettersi come condizioni necessarie affinché abbiano significato le accennate relazioni identiche. D'altronde se in ognuna delle equazioni dei vincoli nel moto relativo \mathfrak{M}_r si raccolgono in due distinte sommatorie i termini che contengono gli spostamenti virtuali delle specie $\delta_p P_i$, $\delta_\tau P_i$, la suddetta necessaria indipendenza dei sistemi di spostamenti virtuali $\delta_p P_i$ che si considera dai $\delta_\tau P_i$, e viceversa, importa, per un ragionamento analogo al precedente, che siano nulle separatamente le sommatorie stesse. Ne deriva che la condizione alla quale può scriversi la relazione:

$$(11) \quad \sum_i^N (m_i \alpha_i^{(p)} - \varphi_i^{(r)}) \times \delta_p P_i = 0$$

è che in essa per i $\delta_p P_i$ s'intendano quei sistemi di spostamenti della specie indicata, non tutti nulli, che soddisfano il sistema \mathcal{S}_p di equazioni composto della (9) e delle equazioni, pure omogenee, nelle $\delta_p P_i$ che risultano dall'annullarsi delle corrispondenti sommatorie nelle equazioni dei vincoli; analogamente dicasi per l'altra relazione:

$$(12) \quad \sum_i^N (m_i \mathbf{a}_i^{(\tau)} - \varphi_i^{(\tau)}) \times \delta_\tau P_i = 0$$

a riguardo dei $\delta_\tau P_i$ da considerarsi, i quali debbono soddisfare il corrispondente sistema \mathcal{S}_τ di equazioni omogenee.

Le equazioni (11), (12) — nelle quali si può, volendo, ottenere l'uniformità negli indici distinti ρ, τ , delle direzioni delle componenti se, similmente a quanto si fece per altri vettori, s'indica con $\varphi_i^{(\rho)}, \varphi_i^{(\tau)}$, le componenti di φ_i in direzione di ϱ_i e ortogonale ad esso, essendo $\varphi_i^{(\rho)} \times \delta_\rho P_i = \varphi_i^{(\rho)} \times \delta_\rho P_i$, e $\varphi_i^{(\tau)} \times \delta_\tau P_i = \varphi_i^{(\tau)} \times \delta_\tau P_i$ — sono le relazioni da studiare. Per far ciò occorre riferirsi ancora alla Nota citata, nella quale si trovò che le entità meccaniche elementari per il sistema S, nel moto assoluto \mathcal{M} , cioè la quantità di moto, \mathbf{Q} , e i momenti scalare, H , e vettoriale, \mathbf{K} , delle quantità di moto rispetto al baricentro, sono date rispettivamente dai moti componenti $\mathcal{M}_G, \mathcal{M}_p, \mathcal{M}_\tau$. Inoltre nel moto relativo \mathcal{M}_r i due momenti di diversa specie hanno ciascuno, qualunque sia il polo, lo stesso valore, che è il suddetto, chiamato perciò *intrinseco*. Ciò astrae dalla distinzione che il sistema sia o no vincolato. Considerandosi i vincoli, alla scissione della (2) nelle (5), (11), (12), corrisponde, con ipotesi ulteriori per le (11), (12), a quelle nelle quali esse si verificano, la separazione, istante per istante, delle circostanze dalle quali rispettivamente dipendono le derivate temporali delle suddette entità elementari, come è provato deducendo dalle (5), (11), (12), le equazioni cardinali in cui le forze sono quelle attive. Per la (5) la cosa è banale oltre che nota. Per la (12), coll'aggiunta della ipotesi che G sia polo virtuale di rotazione, il procedimento non differirebbe dal solito che nel riferirsi, invece che alle quantità di moto relative, alle componenti per il moto di turbolenza. Per la (11) l'ipotesi da aggiungere è che i vincoli consentano, ai punti P_i di S, istante per istante, spostamenti virtuali definiti dall'espressione generale

$$\delta_p P_i = v \varrho_i,$$

dove v è lo stesso numero infinitesimo per tutti, ma d'altronde arbitrario. Tale circostanza può essere sinteticamente espressa dicendo che G è *polo virtuale di una dilatazione omotetica*. In merito alle condizioni richieste per applicare la (11) occorre soltanto constatare che detto sistema di spostamenti virtuali soddisfa la (9), il che è chiaro, avendosi allora:

$$\sum_i^N m_i \delta_p P_i = v \sum_i^N m_i \varrho_i = 0,$$

poichè le altre condizioni del sistema δ_p , relative ai vincoli, sono già contemplate dall'ipotesi fatta nel definire gli spostamenti $\delta_p P_i$. Se nella (11) si sostituisce per i $\delta_p P_i$ la suddetta espressione, e per $\alpha_i^{(p)}$ quella data dalla prima delle (6), e togliendo il fattore comune v , risulta:

$$\sum_i^N \left[m_i \left\{ \ddot{e}_i - \left(\frac{v_i^{(\tau)}}{\rho_i} \right)^2 e_i \right\} - \varphi_i^{(\tau)} \right] \times e_i = 0$$

da cui, essendo:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 e_i^2}{dt^2} = \frac{d}{dt} e_i \times \dot{e}_i = \dot{e}_i^2 + e_i \times \ddot{e}_i$$

si avrà, indicando con Λ_r il momento scalare rispetto a G delle forze attive relative:

$$(13) \quad \frac{d}{dt} H_r = 2 T_r + \Lambda_r,$$

la quale, per considerazioni svolte nella Nota più volte citata, può tradursi nella seguente proposizione:

La derivata temporale del momento scalare intrinseco delle quantità di moto (relative) in un sistema materiale i cui vincoli soddisfano ad ogni istante la condizione che il baricentro sia polo virtuale di dilatazione omotetica è data dall'analogo momento di tutte le forze attive (relative) agenti sul sistema, aumentato del doppio della forza viva relativa.

La relazione (13) poteva dedursi anche dalla (2'') della suddetta Nota in conseguenza della ipotesi fatta circa i vincoli, dalla quale deriva che i momenti scalari, rispetto a G, delle reazioni sui singoli punti sono tutti nulli.

Con ciò si è dimostrato che, nei casi supposti, le equazioni (5), (11) e (12), rispecchiano tre aspetti distinti nel moto assoluto del sistema vincolato S, ai quali si riferiscono le tre equazioni cardinali per sistemi vincolati e, quindi, le tre entità meccaniche elementari corrispondenti al moto del sistema. Ma è da avvertire che, malgrado la loro forma analoga a quella delle equazioni simboliche, le (11), (12), non determinano rispettivamente, in modo indipendente l'una dall'altra, i moti \mathfrak{M}_p , \mathfrak{M}_τ , del sistema vincolato, perchè, come si vede dalle (6), le accelerazioni $\alpha_i^{(p)}$, $\alpha_i^{(\tau)}$, dipendono rispettivamente da $v_i^{(\tau)}$, $v_i^{(p)}$. È per questa ragione che, se vuolsi riferire le (11), (12), ai moti \mathfrak{M}_p , \mathfrak{M}_τ , senza generare equivoci, sembra ad esse appropriata la denominazione di equazioni dinamiche *pseudo-simboliche* dei moti stessi.

Meccanica. — *Intorno al moto di due masse variabili che si attirano con la legge di Newton.* Nota di M. MANARINI, presentata dal Corrispondente P. BURGATTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Osservazioni colorimetriche eseguite durante l'eclisse totale di Sole del 29 giugno 1927.* Nota di GABRIELLA ARMELLINI CONTI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. ARMELLINI.

1. — Durante le eclissi di Sole, anche quando la totalità non sia completamente raggiunta, il cielo e gli oggetti terrestri sembrano cambiare di colore, come se la luce solare, scemando di intensità assumesse una tinta diversa dal solito.

Trovandoci ad osservare in Norvegia, e precisamente a Ringebu, l'eclisse totale di Sole del 29 giugno 1927 ⁽²⁾, pensai di studiare le variazioni di colorazione della luce solare, eseguendo, durante il fenomeno, una serie di fotografie di uno schermo policromo esposto ai raggi del Sole.

Lo schermo era composto dei colori che figurano nella seguente tabella accanto al simbolo adoperato in seguito per indicarli brevemente ed alle medie lunghezze d'onda (in unità Angstrom) delle radiazioni che corrispondono alle varie tinte (con la maggiore approssimazione possibile) nello spettro solare.

R	Rosso	6700	V	Verde	5250
A	Aranciato . . .	5900	I	Indaco	4600
G	Giallo	5500	B	Bianco-Violaceo	4500
GV	Giallo-Verdastro	5200			

L'eclisse ebbe il suo inizio a 5^h37^m T.M.E.C. ed ebbe la sua fase massima a 6^h34^m. Nel seguente specchietto figurano gli istanti T in cui furono prese le varie fotografie e le rispettive percentuali S di superficie solare coperta, secondo il calcolo da me fatto:

T	5 ^h 55 ^m	6 ^h 15 ^m	6 ^h 27 ^m	6 ^h 37 ^m	6 ^h 50 ^m	8 ^h 0 ^m
S	0.14	0.40	0.80	0.95	0.60	0.00

(1) Nella seduta del 3 marzo 1929.

(2) Lo scopo principale della spedizione era l'osservazione delle ombre volanti. Furono inoltre determinati gli istanti dei contatti, la luminosità e l'aspetto della corona e l'assenza di ombre proiettate dalla corona stessa. I risultati di tutte queste osservazioni furono pubblicati nelle «Memorie del R. Osservatorio del Campidoglio».

L'intervallo tra l'ultima fotografia e le precedenti fu dovuto all'annuolarsi del cielo, che impedì di scorgere l'ultimo contatto esterno del disco solare col disco lunare.

Le negative sviluppate furono misurate dal dott. A. Colacevich al microfotometro dell'Osservatorio Astrofisico di Arcetri, per gentile interessamento del Direttore prof. Giorgio Abetti.

Tutti sanno che il microfotometro consiste essenzialmente in un cuneo di vetro neutro che si fa scorrere avanti alla porzione di lastra da esaminare, fino a che l'annerimento così dato per trasparenza sia uguale a quello della detta porzione di lastra. L'avanzamento del cuneo può leggersi poi su apposita scala millimetrica.

La seguente tabella riporta appunto le letture in millimetri del cuneo. Ogni determinazione corrisponde alla media di tre letture; le lastre sono ordinate per porzione crescente di superficie solare coperta.

TABELLA I.

Lastra	Superficie solare coperta	R	A	G	GV	V	I	B
1	0.00	35.1	37.5	43.0	41.4	46.0	44.0	49.5
2	0.14	39.8	42.7	48.0	45.9	46.9	49.0	51.6
3	0.40	36.1	37.1	42.3	39.1	43.3	42.9	45.9
4	0.60	36.4	37.9	43.4	36.8	42.3	43.4	46.0
5	0.80	39.0	40.2	44.5	42.9	45.3	44.0	50.5
6	0.90	39.8	38.1	42.3	38.7	42.3	43.5	49.5

2. - Per togliere gli errori accidentali facciamo le medie, raggruppando le fotografie prese con meno della metà del disco solare coperto, e quelle prese essendo coperta più di metà del Sole.

Nella Tabella II, la prima orizzontale dà le medie delle letture l fatte al fotometro per le lastre del primo gruppo, la seconda orizzontale dà invece le medie l_0 delle stesse letture per le lastre del secondo gruppo; la terza orizzontale dà la differenza $l - l_0$.

Tale differenza è ridotta in grandezze stellari ($m - m_0$) sapendo che ogni millimetro del cuneo usato dal Colacevich è uguale a 0.064 grandezze stellari. Dalle differenze delle grandezze stellari si passa ai rapporti r delle intensità luminose presentate dai colori nella prima e seconda serie di misure fotometriche, per mezzo della nota formola di Pogson

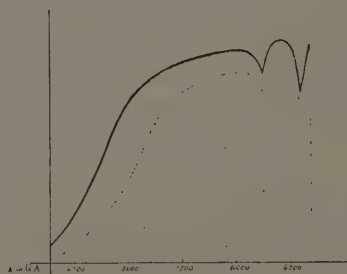
(1)

$$m - m_0 = -2.512 \lg. r$$

Tali rapporti sono scritti nella quinta orizzontale. E poichè essi dipendono non solo dalle variazioni di intensità dei singoli colori esaminati, ma anche dalla durata di posa, e poichè tale durata di posa è identica per tutti i colori di una medesima lastra, possiamo eliminare quest'altra influenza facendo i rapporti ρ relativi al rosso, che scriveremo nell'ultima orizzontale.

TABELLA II.

	R	A	G	GV	V	I	B
l	37.0	39.1	44.4	42.1	45.4	45.3	49.0
l_0	38.4	38.7	43.4	39.5	43.3	43.6	48.7
$l - l_0$. .	- 1.4	0.4	1.0	2.6	2.1	1.7	0.3
$m - m_0$. .	- 0.090	0.026	0.064	0.166	0.134	0.109	0.019
r	1.186	0.954	0.943	0.858	0.884	0.905	0.983
ρ	1.00	0.90	0.87	0.79	0.81	0.83	0.90



3. - Tracciando la curva ordinaria della distribuzione della intensità luminosa nello spettro solare e la curva delle stesse luminosità durante l'eclisse, come risultano dai valori di ρ ora ottenuti e regolando la scala in modo da far coincidere le due curve nel rosso, si osserva una divergenza massima nel verde ed un nuovo riavvicinamento nel violetto.

Ciò che prova un vero e proprio cambiamento di colore nella luce solare durante le eclissi, e precisamente una colorazione rossastra della luce stessa, come già facevano pensare vari fenomeni osservati (la colorazione grigiastra assunta dall'erba dei prati, ecc.

Astronomia. — *Sulle caratteristiche elettriche dei meteoriti (nell'ipotesi di una origine elettrica della loro luminosità) ed un valore limite per la densità degli ioni nell'alta atmosfera.* Nota di L. MARTINOZZI presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. P. BURGATTI.

In una recente Nota il prof. Burgatti ⁽²⁾ esponeva l'idea che la luminosità delle stelle cadenti potesse ritenersi di origine elettrica.

Tale idea, che si contrappone alla vecchia e mai fino ad ora contesa ipotesi di una origine termica, e della quale si valgono anche oggi per varie deduzioni Lindemann, Dobson, Sparrow ⁽³⁾, ha in suo favore una semplice e convincente interpretazione delle osservazioni spettroscopiche, come ha fatto rilevare il Ranzi ⁽⁴⁾.

La luminosità delle stelle cadenti pare si possa paragonare in tutto alla luminosità catodica che si osserva nei tubi di scarica.

Credo pertanto non superfluo esporre un semplice calcolo della carica elettrica che occorre supporre nei meteoriti, per ottenere che essi, per il bombardamento degli ioni presenti nelle zone attraversate, si rendano luminosi.

La luminosità elettrica (ossia per bombardamento ionico) di un corpo si ha quando gli atomi e le molecole di esso vengano urtati con tale energia da perturbarne il sistema elettronico in modo che un elettrone passi ad un livello più esterno. Nel ritorno allo stato normale verrà emessa l'energia cinetica assorbita sotto forma di radiazione; questo scambio di energia è retto dalla ormai classica relazione di Einstein:

$$(1) \quad eV = \frac{1}{2} mv^2 = hv.$$

nella quale il significato delle lettere è quello generalmente usato dai trattatisti.

Tutti gli studiosi sono concordi nel ritrovare nello spettro dei meteoriti le righe del ferro, ed almeno due righe (la H e la K) del calcio; alcuni inoltre asserirono di aver notato anche le righe dell'elio e dell'idrogeno.

È chiaro che gli ioni di idrogeno ed elio debbono ritenersi come proiettili, ed i complessi del ferro, ed eventualmente del calcio, come i bersagli.

(1) Nella seduta del 3 marzo 1929.

(2) Questi « Rendiconti », V, p. 614, 1927.

(3) « Proced. Roy. Soc. of London », 102, p. 411, 1922; « Astrophysical Journal », 63, p. 90, 1926; « Id. », 65, p. 117, 1927, ecc.

(4) « Pubblicazioni del Gabinetto di Meteorologia del R. Istituto Superiore Agr. di Bologna », I, p. 37, 1928.

D'altra parte all'altezza di 100 a 140 km. alla quale si manifesta la luminosità delle stelle cadenti, la composizione dell'atmosfera si ritiene per buone ragioni essere la seguente⁽¹⁾:

	N ₂	H ₂ O	O ₂	H ₂	He	Peso totale mm. Hg
140 km.	00.1 %	—	—	99.15 %	0.84 %	0.004
100 »	2.95 %	0.05 %	0.11 %	95.58 %	1.31 %	0.007
90 »	9.78 %	0.10 %	0.49 %	88.28 %	1.35 %	0.008

e quindi il maggior numero di ioni sarà fornito dall'idrogeno.

Usando le unità c. g. s. e, quando occorre, le unità e. s., si hanno i seguenti valori delle costanti:

$$e = 4.68 \cdot 10^{-10} \quad m_{H_2} = 3.2 \cdot 10^{-24} \quad \frac{e}{m_{H_2}} = 1.41 \cdot 10^{14}$$

Partendo dal lavoro dello Schwassmann⁽²⁾, nel quale le determinazioni delle lunghezze dell'onda emesse dal meteorite sono le più esatte si può calcolare servendosi della (1) i valori del potenziale del meteorite rispetto allo spazio circostante, e quindi, con una qualsiasi ipotesi sul raggio, la carica Q; oppure si potrà calcolare la velocità v d'urto, e quindi per mezzo della legge di Coulomb anche il valore della carica Q.

Condurremo il calcolo per il minimo valore osservato di λ . È da notarsi che evidentemente con ciò si rimane ancora al disotto della realtà, perchè non si possono avere osservato le righe dell'ultravioletto; ma vedremo come ci sia un'altra ragione che induce a elevare il valore delle quantità che così si trovano.

Per $\lambda = 3630 \text{ Å}$ si ha

$$h\nu = 6.55 \cdot 10^{-27} \frac{3 \cdot 10^{10}}{3.63 \cdot 10^{-5}} = 5.42 \cdot 10^{-12} \text{ c. g. s. .}$$

e considerando la molecola d'idrogeno monoionizzata come particella urtante, si ha

$$(2) \quad v = 5.64 \cdot 10^6 \text{ cm/sec. .}$$

Questa velocità d'urto è procurata dalla somma delle velocità relative meteorite-terra, meteorite-ione, ione-terra; per lo studio rigoroso delle condizioni d'urto bisognerebbe risolvere un problema complesso. È però evidente che le cose possono semplificarsi assai tenendo conto in prima e sufficiente approssimazione solo del moto meteorite-ione.

(1) W. J. HUMPHREYS, *Physic of the Air*.

(2) « Astr. Nachr. », B. 233, N. 5173, 1928.

Supponiamo il meteorite sferoidico e di un raggio di tre centimetri, valore medio dei frammenti raccolti di meteoriti, e mettiamoci nelle condizioni più favorevoli per avere il valore di Q minimo eccedente, cioè consideriamo uno ione che si trovi lungo la traiettoria del meteorite ed in modo che questo l'incontri; supporremo che pel breve tratto in cui il meteorite si osserva (circa 1^s) si muova di moto uniforme e rettilineo alla velocità media osservata dai vari autori, e cioè $5 \cdot 10^6$ cm/sec., dello stesso ordine quindi di quello richiesto dalla (2).

L'equazione del movimento sarà data da

$$(3) \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{1}{\epsilon} \frac{e}{m} \frac{Q}{r^2}$$

dove ϵ è la costante dielettrica del mezzo che riterremo, senza errore sensibile, uguale alla unità, Q è la carica del meteorite, e ed m la carica e la massa dello ione, ed r la distanza dello ione dal centro del meteorite. Ponendo

$$a^2 = Q \frac{e}{m}$$

ed integrando si ha subito

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2a^2}{r} + c}$$

il valore della costante c si trova pensando che per r assai grande la velocità ione-meteorite, deve essere la velocità ione-aria ambiente; (ciò vale a supporre lo ione fermo nell'aria ambiente, il che in realtà non è; ma tenendo conto che gli ioni possono avere tutte le direzioni possibili, essendo assai debole ed in prima approssimazione trascurabile l'azione direttrice del campo magnetico terrestre, ciò è lecito); potremo quindi porre $c = 25 \cdot 10^{12}$; cosicchè dovrà aversi

$$5.64 \cdot 10^6 = \sqrt{\frac{2a^2}{3} + 25 \cdot 10^{12}}$$

da cui si ricava

$$a^2 = 9 \cdot 10^{12}.$$

Per la carica Q minima sufficiente per originare una certa luminosità si ricava quindi il valore

$$Q = 7 \cdot 10^{-12} \text{ u. e. s. C. G. S.}$$

Tale valore è assai basso e non può fare meraviglia la sua esistenza.

Però il valore così trovato non è sufficiente a spiegare tutte le particolarità osservate: l'energia irradiata deve venire fornita a spese dell'energia elettrostatica del meteorite (infatti dai calcoli stessi del Lindemann (cfr. op. cit.) se non si suppone una temperatura esterna alquanto elevata, l'energia,

diremo così, meccanica, non è sufficiente a produrre alcuna luminosità); occorre che tale energia sia « almeno » uguale a quella che viene dal meteorite emessa sotto forma di luce. Tale energia luminosa da un calcolo di Lindemann⁽¹⁾ risulta eguale, in media, a $3 \cdot 10^{10}$ erg., quindi dovrà essere soddisfatta la relazione

$$3 \cdot 10^{10} = \frac{Q^2}{2c} = \frac{cV^2}{2}$$

da cui

$$Q = 4.2 \cdot 10^5 \text{ u. c. s. C. G. S.} \quad \text{e} \quad V = 1.4 \cdot 10^5 \text{ u. c. s. C. G. S.}$$

Tale carica elettrica deve venire neutralizzata dal bombardamento ionico. Ora se supponiamo che gli ioni bombardanti siano tutti ioni monovalenti, si ha che il numero di essi che, durante la luminosità, colpisce il meteorite è dato da

$$N_0 = \frac{4.2 \cdot 10^5}{4.7 \cdot 10^{10}} = 10^{15}.$$

Tale numero di ioni deve essere situato lungo il cammino del meteorite e precisamente entro il suo « solido d'azione » indicando con questo nome lo spazio entro il quale si trovano gli ioni captati; tale spazio è certamente maggiore del cilindro descritto dal meteorite nel suo corso, ora tale cilindro ha il volume di $r^2 v = 3.14.3^2.5 \cdot 10^6 = 1.4 \cdot 10^8 \text{ cm.}^3$, giacchè la luce in media appare per circa un secondo, e quindi il numero di ioni per cm.^3 è non superiore a

$$n = 10^7.$$

D'altra parte il raggio d'azione del meteorite è tale che il volume di cui si parla non deve neppure superare di parecchie decine di volte tale volume.

I valori richiesti per la carica Q , e quindi per il potenziale V del meteorite, sono alquanto elevati ed in verità, tenendo conto che la carica Q deve essere negativa, non agevolmente spiegabile, perchè, a prima vista, come accennò il prof. Burgatti nella Nota citata, sarebbe più ragionevole attendersi che il meteorite, per effetto fotoelettrico, risultasse caricato positivamente. Però non è da dimenticarsi che noi nulla sappiamo della distribuzione del potenziale nell'Universo e l'intuizione non ci aiuta a tanto. D'altra parte il valore di n è in ottimo accordo con il numero di ioni per cm.^3 richiesto da varî autori per lo strato riflettente di Heaviside⁽²⁾, ed è questo il punto che merita maggiore considerazione.

(1) « Nature », C. VIII, p. 195, 1926.

(2) Cfr. ad es., MESNY, *Les ondes électriques courtes*. « La presse Universitaire de France », Paris, 1927, p. 25 e sgg.

Fisica. — *Sulla teoria dell'effetto Raman.* Nota di E. AMALDI ed E. SEGRÈ, presentata ⁽¹⁾ dal Socio O. M. CORBINO.

Il Raman notò per il primo che quando si illumina un mezzo trasparente con luce di una determinata frequenza nella luce diffusa sono presenti oltre alla radiazione della stessa frequenza della luce incidente anche radiazioni di frequenza modificate.

Il meccanismo del fenomeno proposto dallo Smekal e correntemente accettato è il seguente: un quanto di luce $h\nu$ investe una molecola che si trova in uno stato che indichiamo con k ; la molecola possenga inoltre un secondo stato che indichiamo con l , tale che la differenza di energia dei due stati sia

$$h\nu_0 < h\nu$$

Il quanto incidente $h\nu$ eccita la molecola dallo stato k allo stato l cedendole l'energia $h\nu_0$ mentre l'energia rimanente

$$h(\nu - \nu_0)$$

viene diffusa come radiazione di frequenza $\nu' = \nu - \nu_0$.

Le righe osservate dal Raman corrisponderebbero secondo questo schema a bande infrarosse di frequenza ν_0 .

Oltre a tali righe che obbediscono alla legge di Stokes furono osservate dal Raman e da molti altri sperimentatori ⁽²⁾ delle righe assai meno intense di frequenza $\nu' = \nu_0 + \nu$ che furono chiamate antistokes; l'origine di tali righe fu spiegata con un processo del tutto analogo al precedente.

Questo meccanismo però farebbe pensare che le righe di Raman corrispondenti a bande infrarosse molto intense debbano essere pure molto intense. Invece le osservazioni eseguite da molti sperimentatori hanno mostrato che questo non si verifica affatto, e che, in generale non vi è alcuna relazione fra la intensità delle righe di Raman e l'intensità delle bande infrarosse corrispondenti tanto che talvolta sono state osservate delle righe di Raman in corrispondenza delle quali non esiste alcuna banda infrarossa e viceversa.

Ci è sembrato di notare che la maggior parte degli sperimentatori si meraviglia di questa circostanza.

Nel presente lavoro ci proponiamo di dimostrare che i risultati sperimentali sono in pieno accordo con la teoria sia di Schrödinger che di Dirac

(1) Nella seduta del 3 marzo 1929.

(2) Cfr. SOMMERFELD, *Atombau* ecc., *Wellenmechanischer Ergänzungsband*, p. 205.

le quali danno formalmente gli stessi risultati, sebbene solo la seconda sia rigorosa e pienamente conseguente. Per evitare gli sviluppi di calcolo della teoria di Dirac, alquanto laboriosi, ci riferiremo alla ben nota formula della dispersione ⁽¹⁾ di Schrödinger la quale contiene dei termini del tipo

$$(1) \quad M_{kl} = \frac{h^2}{4\pi c} \frac{e^2}{m} a \left(\sum_i \frac{A_{ji}^* Q_{kj}}{E_l - E_j - h\nu} - \frac{A_{jk}^+ Q_{lj}}{E_k - E_j + h\nu} \right) e^{2\pi i(\nu - \nu_{kl})t} \dots$$

che sono precisamente quelli che interessano per lo studio in questione. Dall'esame di questa formula si può riconoscere che il meccanismo dell'effetto Raman non è precisamente quello sopra esposto.

Per chiarire meglio sia il processo che dà origine alle righe di Raman, che le relazioni che passano fra quest'effetto e gli altri fenomeni di diffusione, ricordiamo che se si illumina con luce di frequenza ν un mezzo trasparente si ha l'effetto Tyndall, ossia diffusione di luce della medesima frequenza; l'intensità della luce diffusa presenta un massimo molto pronunciato se la frequenza della luce incidente coincide con una frequenza di assorbimento del mezzo diffondente; in tal caso il fenomeno prende il nome di risonanza e si può dire che l'effetto Tyndall è un effetto del secondo ordine rispetto alla risonanza. Analogamente si può riconoscere che l'effetto Raman va considerato come un effetto del secondo ordine rispetto alla fluorescenza.

Il meccanismo del fenomeno suggerito dalla (1) è il seguente: supponiamo che la molecola si trovi in uno stato k e consideriamo uno stato j tale che la differenza di energia $h\nu_{kj}$ sia minore dell'energia del quanto incidente $h\nu$. La molecola sotto l'azione del quanto incidente venga eccitata dallo stato k allo stato j ed in un secondo tempo passi dallo stato j ad uno stato l più basso. In tale processo verrà emesso un quanto di frequenza $\nu - \nu_{kj}$ il quale dà origine ad una riga di Raman. Si vede subito però che l'intensità di tale riga non dipende in alcun modo dalla probabilità con cui avviene la transizione $k \rightarrow l$, ma che dipende invece dalla probabilità con cui avviene le transizioni $k \rightarrow j$ e $j \rightarrow l$.

Tutto questo segue immediatamente dallo studio della (1). Infatti la (1) ci fornisce la componente del momento elettrico che varia con frequenza $\nu - \nu_{kl}$; ora tale momento non dipende in alcun modo dalla probabilità con cui avviene la transizione $k \rightarrow l$, ma bensì dalle quantità Q_{ji} e Q_{kj} i cui moduli al quadrato misurano rispettivamente le probabilità di transizione $j \rightarrow l$, $k \rightarrow j$ e dalle A_{ji} , A_{kj} che hanno un significato analogo.

Si riconosce infine che tale componente del momento elettrico è particolarmente grande e quindi la radiazione corrispondente molto intensa nel caso in cui la frequenza ν della luce incidente coincide con una frequenza di assorbimento ν_{kj} del mezzo diffondente; in tal caso si presenta il ben noto

(1) SOMMERFELD, loc. cit., p. 207 di cui seguiamo anche le notazioni.

fenomeno della fluorescenza e quindi, come sopra abbiamo detto, si può dire che l'effetto Raman è un effetto del secondo ordine rispetto alla fluorescenza.

Si può concludere pertanto che ad ogni riga di Raman non corrisponde necessariamente una banda di assorbimento infrarossa ma semplicemente la differenza fra due termini; se per avventura tali due termini possono combinarsi fra loro direttamente esisterà anche una riga infrarossa, se la loro combinazione è proibita dal principio di selezione si avrà ancora una frequenza di Raman corrispondente alla loro differenza, pur non comparando la corrispondente riga infrarossa.

Tale fatto è stato osservato da vari sperimentatori, ma siccome essi operavano con solidi o liquidi i cui spettri nell'infrarosso non sono perfettamente noti potevano permanere dei dubbi nell'interpretazione dei risultati ⁽¹⁾.

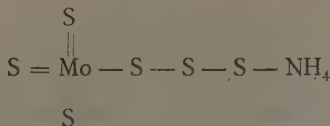
Recentemente invece il prof. Rasetti ⁽²⁾ osservando l'effetto Raman nei gas e precisamente nel CO e CO₂ ha trovato frequenze corrispondenti a differenze di termini che non si combinano direttamente; anche Wood ⁽³⁾ sperimentando sull'HCl ha osservato una riga di Raman corrispondente alla riga zero di una banda infrarossa, riga notoriamente proibita.

Chimica. — *Ricerche sui solfosali.* — VIII. *Persolfosali.* Nota di L. FERNANDES, presentata ⁽⁴⁾ dal Corrisp. L. ROLLA.

Nella letteratura sono descritte due serie di solfomolibdati i quali contengono una quantità di solfo superiore a quella del solfomolibdato normale. Questi sali derivano da due acidi:



il primo dei quali dà luogo a derivati colorati in rosso, i sali invece del secondo sono neri. Krüss ⁽⁵⁾ e Hoffmann ⁽⁶⁾ che prepararono per primi questi composti ammettono che il molibdeno presenti in essi una valenza superiore a quella del solfomolibdato normale. Nel caso dell'Esasolfomolibdato Hoffmann ammette una formula:



(1) CARRELLI, PRINGSHEIM, ROSEN, « Zschr. f. Ph. », 51, 511, 1928.

(2) « Nature », 123, febbraio 1929, p. 205.

(3) Ibidem, p. 279.

(4) Nella seduta del 17 febbraio 1929.

(5) « Ann. Chem. », 225, 1.

(6) « Z. allgem. anorg. Chem. », 12, 55 (1896).

nel quale il molibdeno risulta eptavalente. Una formula di questo tipo non è compatibile colle proprietà e con i metodi di preparazione del composto. Il sale d'ammonio si ottiene per aggiunta di polisolfuro ammonico al solfomolibdato normale e si separa sotto forma di squamette cristalline nere lucenti. Questo composto presenta una stabilità che è di gran lunga superiore a quella del sale normale, basti dire che non è distrutto neppure dall'acido cloridrico concentrato a freddo. Una così grande stabilità non è ammissibile in un composto che contenga una catena con tre atomi di solfo e un atomo di molibdeno eptavalente. Inoltre è poco probabile che il polisolfuro di ammonio possa ossidare a tale forma di combinazione il molibdeno esavalente. Considerando la possibilità dell'esistenza di una serie di composti solforati analoghi ai persali ossigenati, per i quali è nota una vasta letteratura, ho ripreso in esame questi composti ed ho poi esteso la ricerca ad altre serie di persolfosali.

Persolfomolibdati. — Oltre che col metodo di Hoffmann si possono ottenere dei sali dell'acido HMoS_6 partendo dalle acque madri del solfomolibdato ammonico, rese acide per saturazione con idrogeno solforato; lasciate a sè separano lentamente dei composti ricchi di solfo.

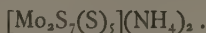
Se la soluzione è molto diluita e fortemente satura di idrogeno solforato, si separano delle squamette cristalline di color tabacco costituite dal sale NH_4MoS_6 anidro, in condizioni diverse di concentrazione e a temperatura più bassa si separa invece il sale nero monoidrato descritto da Hoffmann.

Se alla soluzione del solfomolibdato si aggiunge un sale solubile di guanidina invece del sale di ammonio cristallizza il composto di questa base in magnifici cristalli neri lucenti, meno solubili di quelli del sale di ammonio e ancora più stabili.

Per aggiunta di acido cloridrico concentrato a $40-45^\circ$ si ottiene lentamente la decomposizione di questi composti.

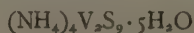
I prodotti di tale decomposizione sono MoS_3 , S , e H_2S .

Si può quindi supporre che l'eccesso di solfo in questi composti sia legato come nei polisolfuri alcalini, mentre che il molibdeno conservi la valenza sei. La minor basicità è probabilmente dovuta alla presenza di un piosolfomolibdato piuttosto che a un solfo-molibdato normale. Si tratterebbe cioè di un composto del tipo



Gli atomi disolfo sarebbero in analogia alle ultime vedute sulla costituzione dei polisolfuri, coordinati dall'aggruppamento acido.

Persolfovanadati. — Per aggiunta di polisolfuro di ammonio ad una soluzione di solfovanadato normale si separa una massa cristallina costituita da aghetti sericei sottilissimi di color giallo tabacco. Questo prodotto risulta all'analisi avere la formula



allo scopo di poter studiare la costituzione di questo composto ho eseguito la decomposizione razionale.

Un campione pesato della sostanza, veniva introdotto in un pallone dal quale era scacciata completamente l'aria mediante una corrente di azoto. Veniva poi fatto sgocciolare da un imbuto a rubinetto, dell'acido solforico semi-normale e il gas che si svolgeva era raccolto attraverso una soluzione di acqua ossigenata ammoniacale in modo da fissare tutto l'idrogeno solforato. Si faceva gorgogliare l'azoto nella soluzione per circa due giorni e poi si scaldava per pochi minuti a 40-45°. Nell'acqua ossigenata ammoniacale veniva dopo acidificazione precipitato il solfato di bario.

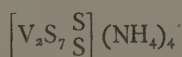
Il contenuto del pallone era filtrato, seccato a 50° e poi introdotto in un apparecchio di Soxlet ed estratto per 15-20 volte con solfuro di carbonio. Questo veniva poi distillato per 8 decimi e il restante era passato in un pesafiltri, piatto, tarato precedentemente e svaporato poi a bagno maria.

Pesando successivamente il pesafiltri si otteneva il peso del solfo estratto. La parte insolubile in solfuro di carbonio veniva pesata e poi analizzata.

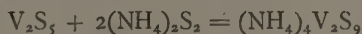
In questo modo era possibile determinare quanto solfo si trovasse nel composto legato con la base, quanto col vanadio e quanto libero. I risultati analitici danno questo rapporto:

$$S_{(NH_4)_2S} : S_{V_2S_5} : S_{libero} = 2 : 5 : 2.$$

Si tratterebbe cioè, come avevo supposto nel caso dei composti di molibdeno di piro-solfovanadati contenenti atomi di solfo libero.



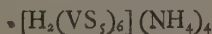
che deriverebbero dalla seguente reazione:



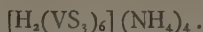
Se la soluzione non è fortemente alcalina si forma un sale leggermente acido:



Se invece saturiamo con idrogeno solforato sotto pressione la soluzione del sale $(NH_4)_4V_2S_9$ in acqua resa debolmente alcalina con qualche goccia di ammoniaca, si separa un prodotto microcristallino, marrone scuro, il quale è un derivato dell'acido tioacquico:



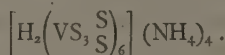
analogo al derivato dell'acido solfovanadico normale:



Anche per il persolfovanadatoacquato è stata eseguita la decomposizione col metodo descritto, e i risultati hanno portato al seguente rapporto:

$$S_{(NH_4)_2S} + S_{H_2S} : S_{V_2S_5} : S_{libero} = 3 : 15 : 12.$$

La formula di costituzione si può quindi scrivere:



PARTE SPERIMENTALE.

Persolfomolibdato di ammonio. — Si ottiene anidro o monoidrato con i metodi precedentemente descritti.

Sale anidro

Trovato %	Mo 31.28	S 62.61	NH ₃ 5.6
per NH ₄ MoS ₆ :			
Calcolato %	Mo 31.30	S 62.70	NH ₃ 5.5

Sale idrato

Trovato %	Mo 29.18	S 59.15	NH ₃ 5.21	H ₂ O 5.55
per NH ₄ MoS ₆ ·H ₂ O:				
Calcolato %	Mo 29.6	S 59.26	NH ₃ 5.24	H ₂ O 5.55

Persolfomolibdato di guanidina. — Fu ottenuto lasciando per lungo tempo a sè una soluzione di solfomolibdato di ammonio satura di idrogeno solforato e alla quale era stato aggiunto del cloruro di guanidina. Si separa sotto forma di magnifici cristalli neri lucenti, di grandissima stabilità; lasciati all'aria per oltre un anno non hanno per nulla mutato di aspetto.

È un fatto generale che i solfosali sono tanto più stabili quanto meno base contengono.

Per l'analisi il molibdeno fu dosato per decomposizione del sale, la base determinando l'azoto gasvolumetricamente e il solfo, ossidando il sale con acqua ossigenata ammoniacale.

Trovato %	Mo 26.28	N 11.51	S 52.80
per GuMoS ₆ :			
Calcolato %	Mo 26.30	N 11.5	S 52.61

Persolfovanadato di ammonio. — Ad una soluzione ammoniacale di solfovanadato di ammonio venne aggiunto polisolfuro ammonico in soluzione

satura. Dopo qualche ora si separò una massa voluminosa costituita da aghetti marroni.

Trovato % V 18.15 S 52.21 NH₃ 12.60 H₂O 16.15
per (NH₄)₄V₂S₉·5H₂O :

Calcolato % V 18.48 S 52.17 NH₃ 12.31 H₂O 16.30

In. assenza di ammoniaca si forma il sale acido.

Trovato % V 19.15 S 53.61 NH₃ 9.50 H₂O 16.81
per (NH₄)₃HV₂S₉·5H₂O :

Calcolato % V 19.07 S 53.83 NH₃ 9.56 H₂O 16.82

Persolfovanadato di guanidina. — Alcuni grammi del sale precedentemente descritto vennero sospesi in una soluzione satura di cloruro di guanidina. Dopo circa 24 ore esso si era trasformato in un composto rosso cristallino di composizione analoga.

Trovato % V 15.12 S 42.19 N 18.65 H₂O 15.90
per Gu₃HV₂S₉·6H₂O :

Calcolato % V 15.12 S 42.66 N 18.67 H₂O 16.00

Persolfovanadato di tallio. — In modo analogo al sale di guanidina e cioè per doppio scambio del sale di ammonio col nitrato talloso fu ottenuto il sale di tallio, microcristallino rosso cupo della seguente composizione:

Trovato % V 10.01 S 27.41 Tl 58.11 H₂O 5.5
per Tl₃HV₂S₉·3H₂O :

Calcolato % V 9.65 S 27.27 Tl 57.95 H₂O 5.11

Persolfovanadato di potassio. — Lasciando digerire il sale di ammonio per alcuni giorni in una soluzione satura di cloruro potassico si forma un sale cristallino assai più scuro del sale di ammonio e di composizione:

Trovato % V 15.51 S 44.16 K 18.11 H₂O 22.6
per K₃HV₂S₉·8H₂O :

Calcolato % V 15.67 S 44.24 K 17.96 H₂O 22.12

Persolfovanadotioacquato di ammonio. — Fu ottenuto per saturazione di idrogeno solforato sotto pressione di una soluzione concentrata di persolfovanadato in acqua resa alcalina con qualche goccia di ammoniaca.

Il sale che si separa dopo alcune ore di riposo è marrone, microcristallino, poco stabile e all'aria si decompone assai rapidamente.

Trovato % V 19.8 S 63.40 NH₃ 4.8 H₂O 11.61
per H₂(VS₅)₆(NH₄)₄·10H₂O :

Calcolato % V 20.1 S 63.25 NH₃ 4.7 H₂O 11.95

Persolfovanadotioacquo di guanidina. — Fu ottenuto per doppio scambio dal precedente. Presenta un aspetto assai simile a quello del sale di ammonio, è però più cristallino e assai più stabile.

Trovato % V 18.15 S 57.21 N 12.11 H₂O 10.15
per H₂(VS₅)₆Gu₄ · 10H₂O :

Calcolato % V 18.19 S 57.08 N 12.36 H₂O 10.71

Chimica. — Il sistema Fe(NO₃)₃—KNO₃—HNO₃—H₂O a 25°⁽¹⁾. Nota di G. MALQUORI, presentata⁽²⁾ dal Socio N. PARAVANO.

Facendo seguito a lavori precedenti⁽³⁾ riguardanti i sistemi: Fe(NO₃)₃—HNO₃—H₂O, Fe(NO₃)₃—KNO₃—H₂O, KNO₃—HNO₃—H₂O a 25°, espongono i risultati ottenuti studiando il sistema: Fe(NO₃)₃—KNO₃—HNO₃—H₂O alla stessa temperatura di 25°.

Le indagini preliminari mi hanno mostrato l'esistenza di un nitrato doppio ferrico-potassico che si ottiene in grossi cristalli verdi per aggiunta di nitrato ferrico alla soluzione concentrata di nitrato potassico in acido nitrico (d = 1.52) oppure disciogliendo una notevole quantità di nitrato potassico in una soluzione nitrica concentrata di nitrato ferrico nove e esaidrato.

In qualsiasi maniera sia stato ottenuto la composizione del prodotto liberato dal liquido per pressione fra placche di porcellana porosa e conservato in essiccatore su calce, risulta sempre la stessa: Fe(NO₃)₃ · 2KNO₃ · 4H₂O.

Riporto i risultati dell'analisi di campioni ottenuti nei due modi indicati.

	Trovato		Calcolato
	(I)	(II)	—
Fe(NO ₃) ₃ %	47.31	47.02	46.86
KNO ₃ %	39.87	39.15	39.18

A contatto dell'acqua il sale si scinde. A 84° fonde in un liquido rosso che per raffreddamento dà una massa verde; elevando di qualche grado la temperatura si nota una marcata scomposizione con svolgimento di acqua e acido nitrico.

Anche variando entro limiti estesi i rapporti di miscela fra i quattro componenti non si incontra a 25°, nessuna altra fase solida all'infuori di: KNO₃, Fe(NO₃)₃ · 9H₂O, Fe(NO₃)₃ · 6H₂O, Fe(NO₃)₃ · 2KNO₃ · 4H₂O.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 3 marzo 1929.

(3) «Rend. Acc. Lincei», (6), 5, pp. 576, 1000 (1927); «Id.», (4), p. 324 (1929).

Nella figura le linee in mMm , nNn , pp , indicano rispettivamente i sistemi ternari: $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3\text{—HNO}_3\text{—H}_2\text{O}$, $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3\text{—KNO}_3\text{—H}_2\text{O}$, $\text{KNO}_3\text{—HNO}_3\text{—H}_2\text{O}$.

Le soluzioni sature rispetto a due sali sono rappresentate dalle linee:

MA	per la soluzione satura di	$\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O} + \text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$;
NB	»	» » $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O} + \text{KNO}_3$;
AB	»	» » $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O} + \text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 2\text{KNO}_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$;
BC	»	» » $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 2\text{KNO}_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O} + \text{KNO}_3$.

I punti A e B individuano le soluzioni sature rispetto a tre sali; C rappresenta la solubilità di $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 2\text{KNO}_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ nella soluzione satura di nitrato potassico in acido nitrico ($d = 1.52$).

Partendo da punti tripli di ciascun ternario si è aggiunto l'altro componente fino alla comparsa di un nuovo solido nel corpo di fondo. Così il punto A che rappresenta la soluzione satura di: $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O} + \text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O} + \text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 2\text{KNO}_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$, è stato determinato sciogliendo KNO_3 nella soluzione satura a 25° di: $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O} + \text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$ fino a che non è visibile nel corpo di fondo il sale verde. Ulteriori piccole aggiunte di nitrato potassico non alterano allora la composizione della soluzione.

Per individuare il punto B che si riferisce alla soluzione satura di: $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O} + \text{KNO}_3 + \text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 2\text{KNO}_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$, si è aggiunta di acido nitrico la soluzione satura di: $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O} + \text{KNO}_3$ fino a comparsa del sale verde. Allo stesso punto si è arrivati aggiungendo, fino a saturazione, il sale $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$ alla soluzione satura di: $\text{KNO}_3 + \text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 2\text{KNO}_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$.

Data la notevole solubilità del nitrato ferrico potassico nella soluzione satura di nitrato potassico in acido nitrico ($d = 1.52$), ho dovuto determinare questo valore per ottenere l'inizio della curva di coesistenza dei due solidi: KNO_3 e $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 2\text{KNO}_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$. Questa soluzione presenta il più basso rapporto $\frac{\text{H}_2\text{O}}{\text{Fe}(\text{NO}_3)_3}$ fra tutte le possibili soluzioni, ed il suo contenuto in ferro indica il limite (compatibile con il più piccolo tenore in acqua) oltre il quale ha luogo separazione di: $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 2\text{KNO}_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$.

Non ho completato il diagramma nella zona delle concentrazioni acide più elevate di quelle indicate nella figura, perchè queste alte concentrazioni non interessano il processo di cristallizzazione frazionata dei liquidi di attacco della leucite con acido nitrico secondo il processo Blanc.

Fino ad oggi solo pochi nitrati doppi si trovano descritti con sicurezza nella letteratura. Il sale $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 2\text{KNO}_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ costituisce il primo esempio di nitrato doppio del ferro trivalente con un nitrato alcalino.

Chimica. — *Il carbonato doppio di cobalto e potassio*⁽¹⁾. Nota di F. DE CARLI presentata⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Aggiungendo del nitrato di cobalto ad una soluzione concentrata e calda di carbonato potassico si ottiene un liquido rosa dal quale cristallizza il sale doppio $\text{CoCO}_3 \cdot \text{K}_2\text{CO}_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ ⁽³⁾.

Il corrispondente sale sodico, che si trova descritto nella letteratura⁽⁴⁾, precipita molto facilmente assieme al sale basico dal quale non è possibile separarlo. Col cobalto si ha perciò l'inverso di quello che si verifica nel caso del rame⁽⁵⁾ in cui è stato possibile preparare allo stato puro solo il sale doppio con il sodio.

Il prodotto preparato per la presente ricerca aveva la composizione seguente:

	K_2O	CoO	CO_2	H_2O
Trovato %	28.90	22.45	26.42	22.30
Calc. % per $\text{CoCO}_3 \cdot \text{K}_2\text{CO}_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$.	28.64	22.78	26.72	21.86

I cristalli rosa del sale idrato perdono l'acqua quando vengono riscaldati in corrente di CO_2 , e il sale anidro che si ottiene si presenta colorato in violetto intenso.

Nelle tabelle seguenti sono riportati i risultati ottenuti effettuando la disidratazione a 100° e a 120°.

TABELLA I.

Isoterma di disidratazione a 100° — Peso sostanza gr. 1.2225.

Ore di riscaldamento	Peso sostanza	Perdita in peso	CO_2 % teorico	CO_2 % trovato
3.30	1.797	0.1428	30.23	—
9.00	0.9927	0.2298	32.98	—
12.30	0.9896	0.2329	33.11	33.15

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 3 marzo 1929.

(3) W. COOLEBROK REYNOLDS, « Journ. Chem. Soc. », 73, 262, 1898.

(4) M. APPLEBEY e K. W. LANE, « Journ. Chem. Soc. », 113, 609, 1918.

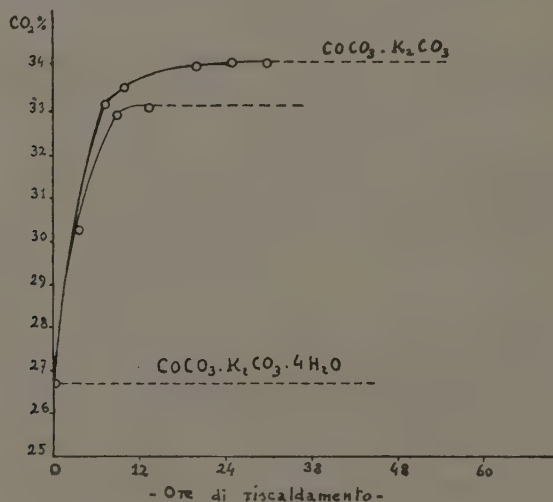
(5) « Rend. Acc. Lincei », [6], 7, 921, 1928.

TABELLA II.

Isoterma di disidratazione a 120° - Peso sostanza gr. 1.2580.

Ore di riscaldamento	Peso sostanza	Perdita in peso	CO ₂ % teorico	CO ₂ % trovato
7.45	1.0174	0.2406	33.10	—
10.45	1.0004	0.2576	33.62	—
20.00	0.9879	0.2701	34.04	—
25.00	0.9832	0.2748	34.08	—
30.00	0.9830	0.2750	34.14	34.16

Percentuale teorica di CO₂ nel sale anidro gr. 34.22.



*
* *

Da quanto precede risulta che riscaldando a 120° il sale idrato in corrente di anidride carbonica si raggiunge facilmente la completa disidratazione. A questo modo venne preparato il prodotto impiegato per le misure di tensione di dissociazione, che vennero eseguite nelle stesse condizioni già descritte per il carbonato di rame e sodio ⁽¹⁾.

(1) Loc. cit.

Qui sotto sono riportati i valori di P e di log P a quattro temperature:

T°	P mm	log P
493	63.42	1.80
531	269.10	2.43
553	389.80	2.59
591	760.00	2.88 estrap.

T°: indica temperatura assoluta.

Applicando la formula approssimata di Nernst si ricava per Q:

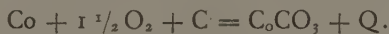
T°	Q
493	13.870
531	13.450
553	13.675
591	13.965
	<hr/> 13.740 media.

Q comprende oltre il calore di dissociazione del carbonato di cobalto anche quello di scomposizione del carbonato doppio in CoCO_3 e K_2CO_3 . Quest'ultimo valore è già stato determinato calorimetricamente⁽¹⁾ ed è risultato uguale a + 5.760 Cal.

Sottraendolo da Q si ottiene per il calore di formazione di CoCO_3 a partire da CoO solido e CO_2 gas:



Questo valore permette di calcolare la tonalità della reazione:



Per $\text{Co} + \text{O} = \text{CoO}$ si hanno due valori di calore di formazione e precisamente 63.80⁽²⁾ e 57.59 Cal.⁽³⁾

Assumendo il primo si calcolerebbe per Q il valore di 169.43 Cal., mentre con il secondo si otterrebbe 163.13 Cal.

La determinazione calorimetrica ha fornito per Q il valore di 173.31 Cal.

(1) « Rend. Acc. Lincei », (6), VII, 1033, 1928.

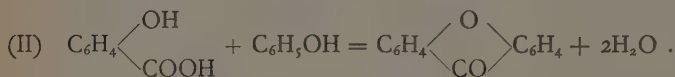
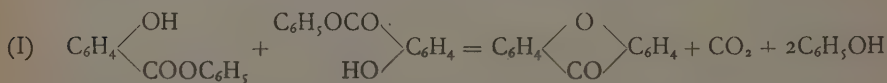
(2) DULONG, « C. R. », 7, 871, 1838; BERTHELOT, *Thermochimie* II, 297, 1897.

(3) MIXTER, « Sill. Journ. », 4, 27, 229, 1909.

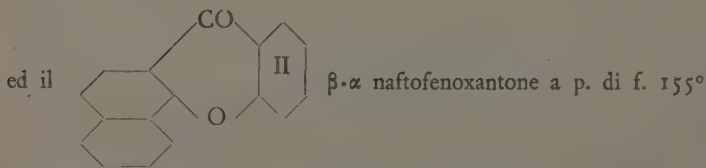
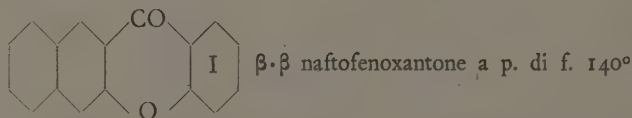
Chimica. — *Sopra i naftofenoxantoni* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ preventiva di A. PIERONI, presentata dal Socio A. ANGELI.

Gli xantoni sono sostanze di colore giallo, abbastanza diffuse in natura sia allo stato libero, sia in combinazione.

L'euxantone $\left(\text{HOC}_6\text{H}_3 \begin{array}{c} \diagup \text{CO} \diagdown \\ \diagdown \text{O} \diagup \end{array} \text{C}_6\text{H}_3\text{OH} \right)$, p. es., si trova nel giallo indiano « Piuri »; l'etere monometilico del 2-4-3 triossixantone si trova nella gentiana lutea. Alcuni sono materie coloranti, così la gentiseina colora il cotone mordenzato in giallo chiaro. I processi di sintesi che conducono alla loro formazione si possono riassumere nelle reazioni seguenti ⁽³⁾:



Con reazioni analoghe sono stati ottenuti due naftofenoxantoni isomeri e precisamente il



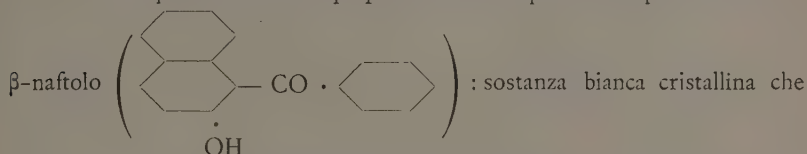
(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica organica della R. Università di Firenze.

(2) Pervenuta all'Accademia il 6 ottobre 1928.

(3) GRAEBE, « B. », 21, 502; SEIFERT, « J. f. Pr. ch. », (2), 31, 478; STROHBACH, « B. », 34, 4136; RUTISHAUER, WEBER, SCHOPF, « B. », 25, 1648, 1745, 3646; KOSTANECKI, « B. », 27, 1989.

ma invece ottenne il γ -dinaftoxantone $C_{10}H_6 \begin{smallmatrix} \diagup CO \diagdown \\ O \end{smallmatrix} C_{10}H_6$ già preparato

da Kostanecki⁽¹⁾. Dunque le reazioni generali esposte non servono alla preparazione dell' α - β -naftofenoxantone forse per la facile eliminazione del carbossile in posizione α , come risulta dalla interpretazione da me prospettata nelle reazioni (V) e (VI); epperò logicamente dovevasi tentare la sintesi dell'isomero in parola partendo, non dagli eteri dell'ossiacido, ma dall'ossichetone corrispondente. Così preparai⁽²⁾ in un primo tempo l' α -benzoil-

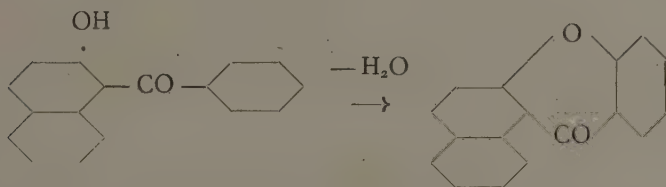


fonde a 141° , solubile negli alcali oltre che nei solventi ordinari.

All'analisi gr. 0.2222 di sostanza diedero H_2O gr. 0.0978 e CO_2 gr. 0.6684.

Calcolato per $C_{17}H_{12}O_2$	C % 82.25	H % 4.83
Trovato	C % 82.03	H % 4.87

Questo chetone, scaldato con cloruro d'alluminio per 2 ore a 150° , dà, sembra, l' α - β -naftofenoxantone



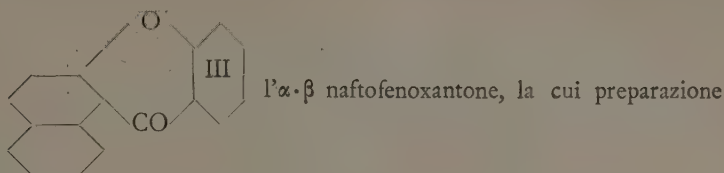
che cristallizza dall'acido acetico in aghi giallo oro fondenti a 173° , la sua soluzione solforica è di colore giallo e manifesta intensa fluorescenza verde, non è praticamente solubile negli alcali. All'analisi, gr. 0.0949 di sostanza diedero H_2O gr. 0.0375 CO_2 gr. 0.2877.

Calcolato per $C_{17}H_{10}O_2$	C % 82.92	H % 4.06
Trovato	C % 82.61	H % 4.38

(1) loc. cit. e «B.», 43, 2825.

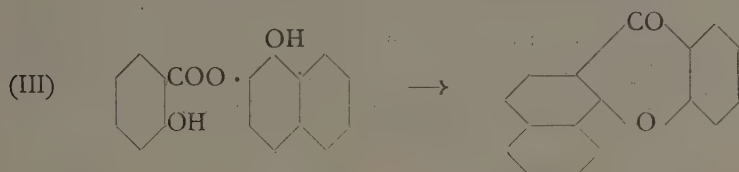
(2) Mi è grato porgere un ringraziamento al sig. Piero Franchetti, che, laureando, collaborò alla parte sperimentale di queste prime ricerche.

ma la teoria fa prevedere l'esistenza di un terzo isomero rappresentato dalla formula

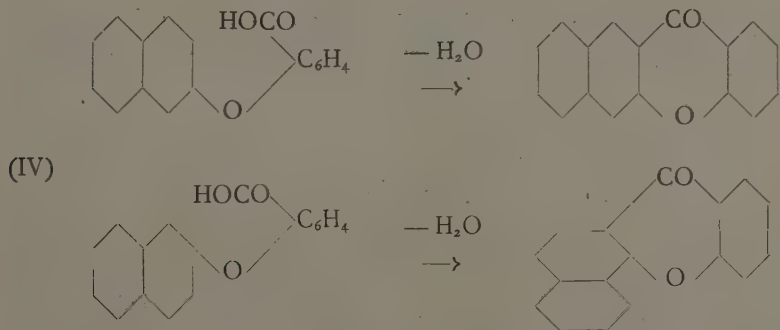


fu tentata invano dagli autori citati.

Graebe⁽¹⁾ per riscaldamento del salicilato di α -naftolo



assieme a fenoli e naftoli bivalenti ottenne il β - α -naftofenoxantone, sostanza bianca cristallina che fonde a 155° ; si scioglie ne l'acido solforico concentrato con colorazione gialla ed intensa fluorescenza verde caratteristica per i naftofenoxantoni. Lo stesso autore pensò alla possibilità di ottenere gli altri due isomeri dall'acido naftilsalicilico:



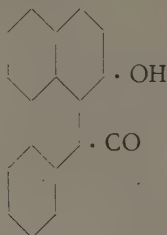
ma ne ottenne uno solo quello a p. di f. a 140° .

Le formule di costituzione di questi due xantoni isomeri vennero determinate da Kostaneski⁽²⁾; egli fece reagire gli acidi naftolcarbonici con

(1) « B. », 19, 2612.

(2) « B. », 25, 1644.

Invece dello xantone, nella reazione descritta, ci si può attendere anche la formazione dell'ossibenzantrone:

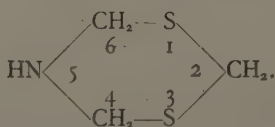


i dati su riferiti non sono sufficienti per poter decidere se si tratta dell'una o dell'altra combinazione; spero di poterlo determinare con ricerche che ho in corso.

Chimica organica. — *La ditioazina—1.3.5 (Formotialdina)* ⁽¹⁾.
Nota di T. G. LEVI, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

Le tialdine sono da riguardare come anelli eterociclici a tre eteroatomi; ad esse spetta il nome di ditioazine perchè 2 dei 3 etero atomi sono di zolfo ed il terzo è un atomo di azoto.

Il primo termine delle ditioazine è la 1.3.5 ditioazina (o formotialdina) che non è descritta nella letteratura chimica. Ad essa spetta la formula



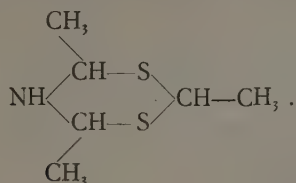
È invece nota ⁽³⁾ la metiltioformaldina o N—metil—1.3.5—ditioazina che è stata preparata da A. Wöhl da metilamina, idrogeno solforato e formaldeide. Lo stesso autore riferisce di non essere riuscito a preparare la formotialdina sia da urotropina e idrogeno solforato, sia direttamente da ammoniac, formaldeide e idrogeno solforato.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio Ricerche Chimiche e Chimico Fisiche della Società Italiana Pirelli.

(2) Nella seduta del 3 marzo 1929.

(3) A. WOHL, « Ber. », 19; 2344.

È anche conosciuta la 2.4.6—metil—1.3.5—ditioazina; più comunemente chiamata tialdina acetica, alla quale spetta la formula



Essa si prepara di solito ⁽¹⁾ da ammonaldehyde e idrogeno solforato sottoponendo per molte ore la soluzione acquosa di ammonaldehyde alla corrente di idrogeno solforato. I termini omologhi della tialdina acetica sono anch'essi conosciuti.

Io ho preso ora in esame le ditioazine condottovi dall'aver esteso alle aldeidi grasse la reazione del polisolfuro d'ammonio colle aldeidi aromatiche descritta in questi Rendiconti ⁽²⁾. In questo precedente lavoro era stato descritto un metodo di preparazione dei ditioacidi organici da polisolfuro d'ammonio e aldeidi aromatiche che costituisce in pari tempo una reazione generale delle aldeidi aromatiche.

Venne allora riferito che il modo di agire delle aldeidi grasse è meno semplice e profondamente diverso. Ho ripreso in esame questo argomento ed ho creduto opportuno studiare dapprima il comportamento delle aldeidi stesse col solfuro ammonico date le difficoltà incontrate nell'isolare il prodotto di reazione impiegando polisolfuro d'ammonio.

Dall'aldeide acetica e solfuro ammonico ho così ottenuto la 2.4.6—metil—1.3.5—ditioazina che come ho sopra detto era già nota; colla reazione solfuro ammonico—aldeide acetica questa base può esser preparata in pochi minuti diluendo una parte di aldeide acetica in altrettanta acqua e trattando questa soluzione con 2.5 parti di solfuro ammonico preparato da ammoniaca a 0.91. Il prodotto di reazione viene fatto bollire pochi minuti e quando la porzione oleosa giallastra che si separa al fondo del recipiente non aumenta più, si sbatte alcune volte in imbuto a rubinetto con acqua per lavare da NH_3 e H_2S . L'olio dopo breve tempo solidifica in massa cristallina coll'odore e i cristalli caratteristici della tialdina acetica a p. f. 43° . Col polisolfuro d'ammonio la reazione è la stessa; soltanto il prodotto di reazione è più difficilmente cristallizzabile perchè più impuro.

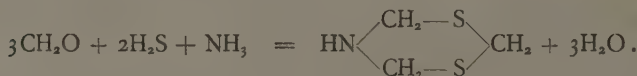
La reazione dell'aldeide formica col solfuro ammonico si presentava di gran lunga più interessante in quanto la 1.3.5—ditioazina o formotialdina, che è, come abbiamo rilevato, il primo termine della tialdine, non era nota.

(1) WÖHL, LIEBIG A., 61, 2.

(2) Questi «Rendiconti», vol. XXXII, Ser. 5^a, 2^o sem., p. 5.

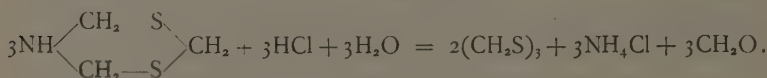
Io ho trovato che la formotialdina può esser ottenuta e con buon rendimento trattando a freddo o meglio a caldo una soluzione acquosa di formaldeide con solfuro o preferibilmente solfidrato di ammonio. Si separa subito un prodotto pecioso che dopo poche ore solidifica e che è la formotialdina greggia. La tritioformaldeide $(\text{CH}_2\text{S})_3$, che contemporaneamente si forma e che si separa col raffreddamento del liquido di reazione può essere separata assai facilmente dalla pece che rimane invece al fondo del recipiente di reazione per decantazione della porzione liquida calda.

La reazione è evidentemente la seguente:



La reazione naturalmente non ha luogo con urotropina e idrogeno solforato essendo l'urotropina un prodotto già condensato.

La formotialdina greggia è un prodotto assai impuro i cui dati analitici si allontanano di molto (vedi più avanti) da quelli calcolati per la formotialdina; è poco solubile in tutti i solventi e non può esser purificata da quelli ad elevato punto di ebollizione perchè si decompone sopra 70°C . Si purifica invece assai bene per estrazione prolungata in estrattore di Knöfler con solfuro di carbonio. Dopo 70 a 80 ore di estrazione il prodotto è puro e prolungando l'estrazione i dati analitici del prodotto rimangono gli stessi. Esso costituisce una polvere bianca-giallastra di odore che ricorda quello della tialdina acetica e della tritioformaldeide; si decompone fra 75° e 90° ed a 115° è completamente fusa. Sottoposta a riscaldamento in corrente di anidride carbonica già sotto 100° libera solfuro di carbonio e sopra 150° idrogeno solforato, ammoniac e ancora solfuro di carbonio; ammoniac e solfuro di carbonio si legano in parte a ditiocarbamato d'ammonio. Con soluzione acquosa di nitrato d'argento già a freddo e più rapidamente a caldo si separa solfuro d'argento come dalla tialdina acetica. Con acido cloridrico concentrato caldo la formotialdina si scompone in tritioformaldeide formaldeide e cloruro ammonico secondo la seguente:



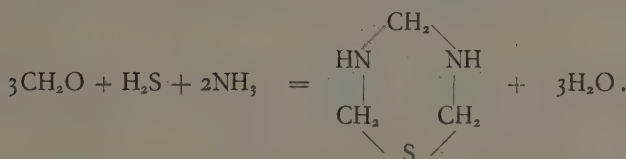
Rimane quindi così stabilito il grado di polimerizzazione della formotialdina che è da considerarsi come trimera. La formotialdina può anche essere preparata da triossimetilene disciolto in ammoniac e saturato con idrogeno solforato o da formaldeide saturata d'ammoniaca facendovi gorgogliare idrogeno solforato.

All'analisi:

0.2441	di sostanza	diedero gr.	0.2764	di CO ₂
0.2441	»	»	0.1100	» H ₂ O
0.2016	»	»	cm ³ 21.2	di N a temp. 19.6 e p = 762.7
0.1242	»	»	gr.	0.4792 di BnSo ₄

trovato	calcolato per C ₃ H ₇ NS ₂
C = 30.88	C = 29.75
H = 5.06	H = 5.78
N = 12.04	N = 11.57
S = 52.98	S = 52.90

Non è da escludere che nella reazione fra formaldeide, idrogeno solforato e ammoniacca si formi anche della 3.5—diidro—1.3.5—tiodiazina assieme alla 1.3.5—ditioazina da me isolata e che in ogni caso è il principale prodotto di reazione. La reazione di formazione di questa altra base eterociclica ad un atomo di zolfo e due di azoto potrebbe essere la seguente:



Per questa base i calcolati in carbonio, idrogeno, zolfo e azoto sarebbero:

C = 30.72 %; H = 7.69 %; S = 30.77 %; N = 26.93 %.

A confermare la supposizione che si formi anche quest'ultima base sarebbe il fatto che il prodotto greggio di reazione ha un contenuto di azoto superiore a quello del prodotto purificato per estrazione in solfuro di carbonio mentre il contenuto in zolfo è assai inferiore a quello della formotialdina. I contenuti di zolfo e azoto del prodotto greggio di reazione sono difatti per lo zolfo 38.45 % e per l'azoto 18.05 %.

Oltre alla formotialdina da me isolata ed alla N—metilformotialdina già preparata dal Wohl ho preparato la N—etilformotialdina che è una base liquida che dà un iodometilato a p. f. 98° (J trovato = 43.80 % contro 43.73 % calcolato per (CH₂)₃NC₂H₃S₂CH₃J).

La reazione delle amine aromatiche con idrogeno solforato ed aldeidi superiori alla formica dà luogo soltanto alla formazione dei noti prodotti di condensazione delle aldeidi colle basi (Basi di Schiff).

Coll'aldeide formica le amine aromatiche in presenza di idrogeno solforato reagiscono in modo completamente diverso e che non era stato prima d'ora segnalato; ho in questo caso ottenuto una nuova classe di basi eterocicliche ad un atomo di zolfo e due di azoto (tiodazine) che costituirà l'oggetto di una prossima Nota.

Mineralogia. — *Heulandite di Monastir* ⁽¹⁾. Nota di GIULIA MARTINEZ, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. BOERIS.

Nel Museo di Mineralogia di questa Università trovarsi alcuni campioni di heulandite raccolti nella regione dei basalti e delle trachiti di Monastir.

La presenza dell'heulandite in questa località, invero poco nota petrograficamente, è stata segnalata per la prima volta dal dott. Emanuele Zoccheddu ⁽³⁾; ma questo autore dice solamente che trattasi di « cristalli prismatici a base romba di colore madreperlaceo, sparsi entro una roccia trachitica ».

Anche il Lovisato ⁽⁴⁾ ed il prof. Billows ⁽⁵⁾ vi accennano; ma un esauriente studio del minerale e della roccia che lo accompagna non era ancora stato fatto. Mi è parso quindi non privo di interesse uno studio; tanto più che, a differenza di quanto succede nelle regioni basaltiche del Vicentino e di altre località, l'heulandite trovasi raramente nelle analoghe regioni della Sardegna.

La roccia è un'andesite rossastra per l'abbondante ossido di ferro segregatosi nelle alterazioni, e di aspetto porfirico per i grossi cristalli di augite che spiccano nella uniforme massa; nella quale non si distingue nessun altro minerale.

Al microscopio risulta composta di minuti cristalli di *plagioclasio* listiformi, idiomorfi, che, insieme ad alcuni cristallini di *pirosseno* rombico pure idiomorfi e granuli di *olivina* alterata, costituiscono la massa di fondo. Sparsi quà e là trovansi grossi cristalli di *plagioclasio*, di *pirosseno monoclinico* e di *anfibolo* serpentinnizzato, così che la roccia acquista anche all'esame microscopico un aspetto porfirico. Come elemento accessorio vi compare qualche lamina alterata di *orneblenda basaltica*. Oltre a questi minerali si hanno come elementi di formazione secondaria: *serpentino*, *ossido di ferro*, *muscovite*, *epidoto* e *clorite*.

La parte vetrosa manca quasi completamente; e vi si può notare solo qualche raro granulo.

I *plagioclasii*, che sono gli unici elementi feldspatici della roccia, si presentano in lamelle di geminazione polisintetica secondo la legge dell'albite,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Cagliari.

(2) Nella seduta del 17 febbraio 1929.

(3) E. ZOCCHEDDU, *Delle principali specie mineralogiche sarde*, p. 158. Cagliari, tipografia del Commercio, 1878.

(4) D. LOVISATO, *Notizie sopra una heulandite baritica di Pula*. « Rend. Acc. Lincei » 1897.

(5) E. BILLOWS, *Lessico mineralogico per l'Isola di Sardegna*, p. 104. Tip. G. Ledda, 1923.

e talvolta in grossi individui a struttura fortemente zonare e col nucleo alterato. In generale si osserva, sia per le lamelle che per i grossi individui, un bordo più acido che non la parte interna. Gli indici di rifrazione sono costantemente superiori a quelli del balsamo (Kollolit = 1.535). Su lamelle di geminazione aventi estinzioni simmetriche, i valori delle estinzioni sono di 18-20 gradi ai bordi, e di 32-33 gradi all'interno. Si tratta quindi di una composizione corrispondente all'andesina ($Ab_3 An_2$) ai bordi, e ad un termine vicino alla labradorite nel nucleo interno. Sono generalmente alterati nella parte interna con formazione di caolino e rare lamelle di muscovite. Il caolino trovasi sparso entro il nucleo alterato in minuti granuli riconoscibili per la loro bassissima doppia rifrazione.

L'*anfibolo* è molto abbondante, e costituisce insieme al plagioclasio l'elemento predominante della roccia; è quasi interamente trasformato in serpentino: questo si presenta in plaghe di color verde chiaro formate da masserelle fibroso raggruppate, variamente orientate; ha bassissima doppia rifrazione e zona d'allungamento positiva. Poichè esso non è mai accompagnato da ossidi di ferro è da ritenersi che l'anfibolo da cui ha preso origine fosse un termine poco ferriifero.

Tra i *pirosseni* si distinguono termini rombici e termini monoclini. I termini rombici, in quantità notevole, sono in cristalli di piccole dimensioni di forma prismatica allungata, sempre idiomorfi. Per il colore leggermente bruno o verdastro e per accenni di pleocroismo, si riconoscono per termini dell'*iperstene*; si ha conferma di ciò dalle alterazioni nelle quali il serpentino così originatosi è sempre accompagnato da abbondanti ossidi di ferro. La mancanza di un netto pleocroismo è dovuta alla alterazione interessante pressochè tutti i cristalli. I termini monoclini, che sono i meglio conservati, si presentano in individui cristallini maggiormente sviluppati, ma senza regolari contorni cristallini. Sono termini dell'*angite*, talvolta con lamelle di geminazione polisintetica secondo (100); il loro colore è verde bottiglia chiaro, mancano di pleocroismo; la sfaldatura è pirossenica tipica; l'angolo di estinzione χ : ng raggiunge valori di 54-56 gradi. In qualche zona alterata si riconoscono come prodotti di nuova formazione la clorite e l'epidoto.

L'*olivina*, di color verde giallognolo, è in quantità notevole ed in granuli irregolari, talvolta in cristalli idiomorfi. Si distingue dall'*iperstene* oltrechè per la forma degli individui, anche per la mancanza di netta sfaldatura, e di benchè minimo pleocroismo nelle rare parti ben conservate, per il suo carattere ottico positivo, e per le irregolari screpolature riempite di materiale di alterazione. Quasi tutti gli individui sono alterati, e presentano un bordo formato di ossido di ferro ed una parte interna serpentinizzata e disseminata di piccoli nuclei di ossido di ferro.

L'*orneblenda basaltica*, in quantità affatto accessoria ed in piccoli elementi senza forma, si riconosce oltrechè per il tipico colore bruno scuro anche per il suo pleocroismo: ng bruno scuro ed np bruno pallido; che la

fa rassomigliare alla biotite; ma dalla quale differisce per la posizione dell'estinzione. I pochi granuli esistenti hanno il bordo riassorbito dal magma, con formazione di augite e magnetite.

L'analisi chimica della roccia ha dato i seguenti risultati:

Composizione %		Quantità molecolari	Raggruppamenti molecolari	
			Sec. Loew. Lessing	Sec. Niggli
SiO ₂	47.77 %	0.7845	0.7845 = SiO ₂	0.7845 = Si
TiO ₂	0.57	0.0071	—	1860 = al
Al ₂ O ₃	19.01	0.1869	2420 = R ₂ O ₃	2450 = fm
Fe ₂ O ₃	8.88	0.0556	—	1550 = c
FeO	2.00	0.0278	3548 = RO	660 = alk
MnO	0.01	0.0012	—	—
MgO	4.23	0.1048	—	—
CaO	8.70	0.1550	—	—
Na ₂ O	3.00	0.0472	—	—
K ₂ O	1.59	0.0188	—	—
H ₂ O	3.97	0.2148	—	—
	99.72			

La mancanza di ogni traccia di carbonati risultata dall'esame microscopico poteva già far supporre l'assenza di anidride carbonica: tuttavia con una prova qualitativa ne ho esclusa la presenza tra i gaz che si sviluppano nell'arrostimento della polvere della roccia.

Il manganese e il titanio sono stati determinati colorimetricamente, e il ferro ferroso con una disgregazione a parte in acido fluoridrico e acido solforico, in ambiente di anidride carbonica, e poi titolato colorimetricamente.

La formula magmatica secondo Loewinson-Lessing è:

$$\overline{RO} = 1.46 \quad R_2O_3 = 1 \quad SiO_2 = 3.23 \quad \alpha = 1.60 \quad \beta = 76$$

$$R_2O : RO = 1 : 4.27 \quad K_2O : Na_2O = 1 : 2.50$$

Per la rappresentazione triangolare di Osann si ha:

$$S = 62.64$$

$$A = 5.24 \quad a = 4.25$$

$$C = 9.56 \quad c = 7.75$$

$$F = 22.26 \quad f = 18.00 \quad n = 7.14$$

Con la rappresentazione tetraedrica del Niggli si ha:

al = 28.26	si = 120.26
fm = 37.56	k = 0.28
c = 23.76	mg = 0.43
alk = 10.10	c/fm = 0.63

Le costanti calcolate esprimono concordemente che la roccia ha composizione chimica di un'andesite basica. La prima formula infatti sta tra quelle medie rappresentative delle rocce andesitiche e basaltiche: nel triangolo di Osann il punto cade nel campo delle rocce andesitiche. In particolare con la rappresentazione di Niggli si ottiene una formula molto prossima a quella che l'autore dà per i magmi di tipo gabbro-dioritico.

Con questa classificazione si accordano bene la composizione mineralogica, e l'aspetto macro e microscopico: secondo i quali la roccia può definirsi una *Andesite anfibolico-augitico-olivinica*, a struttura microlitica pilotassitica. La roccia studiata si avvicina per alcuni suoi caratteri, quali la composizione mineralogica e l'aspetto macroscopico alle andesiti augitico-oliviniche di Torralba, studiate da G. D'Achiardi ⁽¹⁾, salvo la mancanza in queste di una struttura tendente alla porfirica: ed ha pure composizione mineralogica e chimica analoga alle andesiti augitiche di Pala Mantedda ⁽²⁾ (Florinas), ed alle andesiti augitiche con iperstene ed olivina di Montresta ⁽³⁾ studiate da F. Millosevich, dalle quali differisce soltanto per la struttura lievemente diversa.

I cristalli monoclini di heulandite, che tappezzano piccole geodi e screpolature della roccia, hanno aspetto leggermente madreperlaceo, pur mantenendosi limpidi e trasparenti; hanno dimensioni variabili da qualche millimetro ad un centimetro e più. Sono tabulari secondo (010).

Le forme osservate sono le seguenti:

$$b\{010\} \quad , \quad c\{001\} \quad , \quad t\{201\} \quad , \quad s\{\bar{2}01\} \quad , \quad m\{110\} \quad , \quad u\{\bar{1}11\}.$$

Più comunemente si presentano le b, c, t, s, m . Anche la u vi compare qualche volta, ma non dà al goniometro che serie di immagini perchè tutta striata parallelamente allo spigolo mu . Le faccie più sviluppate sono c, t, s ; le quali si mostrano spesso arrotondate, e danno solo talvolta buone immagini al goniometro. Meno sviluppate sono le faccie m che danno delle immagini nitide.

(1) G. D'ACHIARDI, *Le andesiti augitico-oliviniche di Torralba*. « Boll. della Soc. Geol. Ital. », XV, 1896.

(2) F. MILLOSEVICH, *Studi sulle rocce vulcaniche della Sardegna*. « Mem. della R. Acc. Lincei », Roma, 1911.

(3) F. MILLOSEVICH, *Appunti di Mineralogia Sarda. Il Giacimento di Zeoliti presso Montresta*. « Rend. Acc. Lincei », Roma 1908.

Alcune misure angolari eseguite al goniometro mi hanno dato i valori seguenti:

Angoli misurati	Limiti delle misure	Numero	Medie	Valori calcolati $\beta = 88^{\circ} 34' 30''$
$c : s = 001 : \bar{2}01$	$65^{\circ} 49' - 65^{\circ} 52'$	2	$65^{\circ} 51'$	$66^{\circ} 0'$
$c : t = 001 : 201$	$63^{\circ} 65' - 63^{\circ} 57'$	2	$63^{\circ} 50'$	$63^{\circ} 40'$
$m : t = 110 : 201$	$32^{\circ} 30' - 32^{\circ} 39'$	2	$32^{\circ} 36'$	$32^{\circ} 44'$
$c : m = 001 : 110$	$88^{\circ} 25' - 88^{\circ} 30'$	2	$88^{\circ} 28'$	$88^{\circ} 41'$
$m : s' = 110 : \bar{2}01$	$33^{\circ} 4'$	—	—	$33^{\circ} 7'$
$m : m''' = 110 : \bar{1}10$	$43^{\circ} 50' - 43^{\circ} 48' - 43^{\circ} 56'$	3	$43^{\circ} 52'$	$43^{\circ} 56'$
$s : m = 010 : 110$	$68^{\circ} 13' - 68^{\circ} 10' - 68^{\circ} 10'$	3	$68^{\circ} 12'$	$68^{\circ} 2'$

Con le medie di queste misure, risolvendo il triangolo (in proiezione stereografica) (001) (010) (110) si ottiene $\beta = 88^{\circ} 22'$.

L'analisi chimica eseguita su cristalli purissimi mi ha dato i seguenti risultati:

SiO_2	57.40 %
Al_2O_3	17.10
CaO	7.80
H_2O	17.67

99.77

Gli alcali non furono ricercati, dato il risultato dell'analisi, che ne indica chiaramente la mancanza.

Il peso specifico, determinato col metodo del picnometro, è: 2.19.

Alcune lamelle di heulandite, esaminate al microscopio, hanno dato per i caratteri ottici: forte dispersione incrociata tipica con $v > p$; carattere *positivo* del minerale; il piano degli assi ottici, *normale* a (010), fa con la c (001) un angolo che oscilla intorno ai 42 gradi; gli indici di rifrazione, determinati per confronto con liquidi, su lamine di sfaldatura hanno i valori $n_p = 1.499$, $n_m = 1.500$; l'angolo degli assi ottici si mantiene abbastanza costante nei diversi cristalli variando di mezzo grado o di un grado.

I valori, misurati con l'apparecchio di Adams, sono i seguenti:

2V (angolo vero) per il rosso $17^{\circ}.30'$ (media di parecchie letture).

2V (angolo vero) per il giallo sodio 18°.30' (media di parecchie letture comprese tra i limiti 18° e 19°).

2V (angolo vero) per il violetto 21° (media di parecchie letture concordanti).

Mi è grato esprimere al prof. A. Cavinato i più vivi ringraziamenti per i consigli e gli insegnamenti di cui mi fu largo nell'esecuzione di questo lavoro.

Fisiologia. — *Di un preparato centrale plurisegmentale di Bufo Vulgaris.* Nota di G. D'ANNEO, presentata dal Corresp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Ulteriori ricerche sull'azione degli alcaloidi sui leucociti isolati dall'organismo.* Nota di C. FORTI, presentata dal Corresp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Sul valore alimentare dei legumi nei ratti albini.* Nota di A. GALAMINI, presentata dal Corresp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Embriologia. — *Microrganismi simbiotici nell'uovo di « Pieris brassicae L. ».* Nota di R. GRANDORI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio A. MENOZZI.

In una Nota preliminare da me pubblicata parecchi anni or sono in questi « Rendiconti » ⁽²⁾, descrivevo sommariamente i microrganismi simbiotici da me scoperti nelle uova di *Pieris brassicae* L., ed affermavo l'assoluta costanza della loro presenza nelle uova di questo lepidottero, accertato dallo studio di numerosi preparati di quattro stadi principali dello sviluppo embrionale: stadio di blastoderma completo, di stria germinale con ectoderma e mesoderma metamerico, di blastocinesi compiuta, di embrione prossimo a nascita.

Accennavo anche in detta Nota alla grandissima somiglianza che questi

(1) Nella seduta del 3 febbraio 1929.

(2) R. GRANDORI, *Microrganismi simbiotici in « Pieris brassicae » e « Apanteles glomeratus »*. « Rend. Accad. Lincei », vol. XXIX, serie 5^a, 1° sem., fasc. 8. Roma, 1920.

simbionti della *Pieris* presentano con quelli del *Bombyx mori*, pure da me scoperti⁽¹⁾ e poco più tardi ampiamente illustrati⁽²⁾.

Scopo della presente Nota è di illustrare le forme libere di questo simbionte quali si presentano nel vitello dell'uovo nello stadio di stria germinale con ectoderma e mesoderma presentanti una distinta metameria.

Come già rilevavo nella nota citata⁽²⁾, in questo stadio i simbionti sono divenuti più scarsi che non nel primo periodo della segmentazione dell'uovo. A parte il loro numero e la loro distribuzione, che è egualmente diffusa nel vitello e nei foglietti embrionali, qui ho voluto illustrare la forma e il processo riproduttivo del simbionte nella sua forma libera entro le sfere vitelline.

Come mostra la fig. 1 a, la forma caudata del simbionte della *Pieris* non differisce da quella corrispondente del simbionte bombicino. Esso è una cellula completa, con nucleo nettamente distinto e intensamente colorabile, e che nelle forme libere migranti è collocato in posizione sempre periferica; possiede intorno al nucleo un alone chiaro costituito da plasma pochissimo colorabile, e un territorio di denso citoplasma per lo più asimmetrico, che assorbe debolmente i colori basici di anilina, ma in parte anche i coloranti acidi (Rosso Congo, Eosina, Orange G).

Chiamo *caudate* queste forme libere e migranti per distinguerle da quelle endogranulari, le quali abitano cioè nei granuli del vitello (riscontrate e descritte nella citata Memoria sui simbionti bombicini, ma che nella *Pieris* non ho potuto ancora dimostrare), e che non posseggono un territorio citoplasmatico differenziabile coi mezzi tecnici consueti.

Alla periferia delle sfere vitelline dell'uovo di *Pieris*, che sono assai più nettamente organizzate che nell'uovo di *Bombyx mori*, come dimostrano le annesse figure, e che sono anche qui cellule complete ed attivissime, ricchissime di granuli di tuorlo assai più piccoli di quelli delle sfere vitelline del borbice del gelso, si notano qua e là forme caudate del simbionte che sono con tutta evidenza in atto di penetrare entro la cellula vitellina medesima (fig. 1 b). Tali simbionti in atto di penetrare posseggono nucleo notevolmente accresciuto e rigonfio, un territorio citoplasmatico slargato e asimmetrico al lato antinucleare, assottigliato in un collo verso il nucleo.

Penetrato che sia, e divenuto endocellulare nella sfera vitellina, il simbionte subisce una fase di accrescimento, come mostra la fig. 1 f; accrescimento che conduce la massa di citoplasma ad un aumento di volume sempre più notevole fino a 4-5 volte quello primitivo (fig. 1 c). Successivamente si hanno fasi che preludono ad una riproduzione del microrganismo per un processo di vera conitomia. Come mostra la fig. 1 d, il territorio di citoplasma presenta contorno frastagliato, insenature e lobi; il nucleo

(1) R. GRANDORI, *La simbiosi ereditaria nel « Bombyx mori »*. « Atti Reale Ist. Veneto di Scienze, Lettere ed Arti », t. LXXIX, parte II, Venezia, 1919.

(2) R. GRANDORI, *La simbiosi ereditaria del Filugello* (con 4 tav. litografiche). « Atti Reale Istit. Veneto di Scienze, Lettere ed Arti », t. LXXIX, parte II, 1919.

presenta fasi di frammentazione in parecchie masserelle cromatiche, accompagnata da vacuolizzazione del citoplasma (vacuolizzazione che non esiste mai nelle piccole forme libere caudate); ed infine, come mostra con tutta

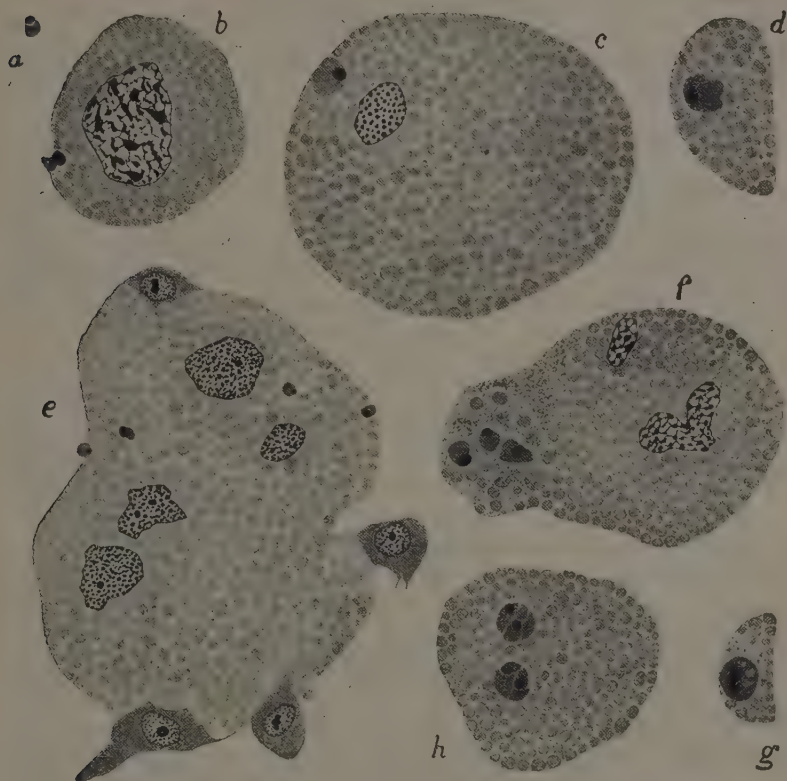


Fig. 1. — Sfere vitelline e loro simbionti, in *Pieris brassicae*. — a, simbionte libero negli spazi fra le sfere vitelline (forma caudata) — b, simbionte caudato in atto di penetrare in una sfera vitellina — c, simbionte già penetrato, in via di accrescimento — d, come il precedente, e che prelude già ad una riproduzione conitomica — e, sfera vitellina con 4 simbionti liberi; la sfera possiede 4 nuclei, e ha originato 4 cellule figlie migranti fuori di essa — f, sfera vitellina contenente 3 simbionti in via di accrescimento — g, simbionte entro una sfera, con nucleo che dà origine a parecchi nuclei figli — h, sfera vitellina che contiene due simbionti in divisione conitomica.

Tutte le figure sono disegnate ad ingrandimento di 1100 diametri.

evidenza la fig. 1 h, il territorio citoplasmatico si suddivide in parecchi piccoli territori separati, ciascuno dei quali possiede uno dei nuclei figli. Il processo mi sembra sostanzialmente identico alla riproduzione comitomica dei parassiti malarici nelle emazie umane.

La grande sfera vitellina di fig. 1 e, che contiene parecchi simbionti caudati in una sola sezione (nelle sezioni vicine se ne contano altri 3 oltre quelli ivi raffigurati) dimostra come dopo l'avvenuta conitomia i mononti figli si allontanano e divengano liberi e migranti.

Tale, per sommi capi, il modo di riproduzione delle forme caudate del simbionte, in perfetta analogia con quello già da me dettagliatamente illustrato per il simbionte del baco da seta.

I caratteri morfologici sopra descritti ed il modo di riproduzione del microrganismo mi inducono a concludere che si tratta anche in questa specie di uno sporozoo simbiotico. La sua immancabile presenza in tutte le uova di *Pieris brassicae*, la sua penetrazione e attivissima moltiplicazione nelle cellule vitelline, nonchè nei foglietti embrionali e in alcuni organi embrionali negli stadi successivi alla blastocinesi, mi inducono, come per il simbionte bombicino, a ritenere che si tratta di microrganismi la cui presenza e attività è necessaria e strettamente collegata col normale svolgimento dell'embriogenesi, e precisamente di un fattore morfogenetico necessario.

Ricerche in corso, eseguite dai miei assistenti, di cui è imminente una pubblicazione preliminare, renderanno conto dell'importante reperto di simbionti vitellini in uova di altre specie (ragni, afidi); cosicchè sarà sempre più ampiamente dimostrato che il vitello dell'uovo di parecchie specie di Artropodi non è quella sostanza morta che fino a pochi anni fa si riteneva, bensì è la sede di una meravigliosa ed intensa attività di miriadi di microrganismi necessari allo sviluppo dell'essere nuovo. L'attività della massa vitellina si esplica, oltrechè con le colonie di simbionti che la abitano (e probabilmente la modificano a vantaggio dell'embrione), anche con una proliferazione continua delle stesse cellule-sfere vitelline. Le quali, nella *Pieris brassicae* mostrano, assai più evidente che nel *Bombyx mori*, una continua proliferazione cellulare che produce sempre nuove cellule figlie, a citoplasma denso, che migrando fuori delle sfere (fig. 1 e) vanno direttamente a costruire foglietti ed organi embrionali. Nella Pieride, essendo l'embriogenesi assai rapida (5 giorni nella stagione estiva), il fenomeno è molto accentuato e assai più chiaro di quanto non sia nei bombicini. I nuclei delle sfere vitelline si moltiplicano continuamente per divisione diretta (mai è dato osservare in esse alcuna figura cariocinetica); e i nuclei figli, intorno ai quali si aduna una certa quantità di citoplasma della cellula madre, formano le *cellule migranti* che fuoriescono dalla sfera madre e affluiscono all'embrione.

I materiali che concorrono a dimostrare questo concetto dell'importanza morfogenetica del vitello e dei suoi simbionti aumentano di continuo quanto più ci addentriamo nello studio minuzioso dell'uovo e quanto più estendiamo le nostre ricerche a numerose specie. Io e i miei scolari pensiamo di poter raggiungere prove abbastanza vaste e segnalare fatti abbastanza evidenti e numerosi per concludere che le simbiosi vitelline sono una realtà estesissima e di grande valore nei fenomeni dello sviluppo embrionale.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio D'ACHIARDI commemora il defunto Socio Corrispondente L. BRUGNATELLI.

Il Presidente ringrazia il Socio D'ACHIARDI per la bella commemorazione.

Il Socio MORPURGO tiene la commemorazione del defunto Socio Straniero F. MARCHAND.

Il Presidente ringrazia il Socio MORPURGO per la interessante commemorazione.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio PIROTTA presenta in omaggio il suo trattato di « Fisiologia vegetale ».

Il Presidente sen. FANO presenta in omaggio una nuova edizione del suo volume « Un fisiologo intorno al mondo ».

Il Socio SACCO presenta in omaggio una sua Nota dal titolo « Variazioni fluviali in Piemonte ».

L'Accademico Segretario prof. PARRAVANO presenta i libri giunti in dono segnalando fra essi un volumetto di « Conferenze e discorsi scientifici » del socio E. PATERNO; varî discorsi commemorativi del socio FANTOLI; la « Storia delle Matematiche » del Corrisp. G. LORIA; un grosso volume di « Medicina Militare nella Leggenda e nella Storia » del dott. CESARINI; il secondo volume del rapporto di OLAF HOLTEDAHN sui risultati scientifici della spedizione norvegese alla Nuova Zembla nel 1921, e la parte V dei risultati della spedizione zoologica svedese in Egitto e nel Nilo di L. R. JÄGERSKIÖLD.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Corrisp. BORDONI legge anche a nome del Socio T. LEVI-CIVITA la relazione con la quale si propone la stampa della Memoria di G. BOZZA dal titolo « Sui fenomeni della caduta in massa e della sedimentazione ».

L'Assemblea approva.

Presentano Note per, l'inserzione nei « Rendiconti », i Soci ARMELLINI, CASTELNUOVO, CORBINO, FRANCHI, LEVI-CIVITA, PARRAVANO, VINASSA.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 3 marzo 1929

- ALDRICH J. M. — Five New Parasitic Flies reared from Beetles in China and India. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXIV). Washington, 1928. 8°, pp. 1-7.
- ALDRICH J. M. — Three New Species of Two-Winged Flies of the Family Bombyliidae from India. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXIV). Washington, 1928. 8°, pp. 1-3.
- AMADORI L. — I danni arrecati alle piante del R. Orto Botanico dal freddo del dicembre 1927. (Estr. dagli « Atti della Società Toscana di Scienze Naturali ». Processi Verbal, Vol. XXXVII). Pisa, 1928. 8°, pp. 1-3.
- AMADORI L. — Terzo contributo allo studio dell'azione sulle piante delle sostanze chiamate acceleratrici. (Estr. dagli « Atti della Società Toscana di Scienze Naturali ». Processi Verbal, Vol. XXXVII). Pisa, 1928. 8°.
- ANDREWS E. A. — Injuries to Vegetation by Mound-Building Auts. (Reprint, from the « American Naturalist ». Vol. LXII, pp. 63-75). S. l. 1928. 8°.
- Atti del Congresso Internazionale dei fisici 11-20 settembre 1927 (V). Voll. I, II. Bologna, 1928. 8°, pp. I-XII, 1-406, 1-650.
- BELLIO G. — Descrizione di un nuovo genere di *Diaspinae* (Hemiptera: Coccidae) dell'Estremo Oriente. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXII, pp. 159-165). Portici, 1929. 8°.
- BERRY C. W. — Tertiary Fossil Plants from the Argentine Republic. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXIII). Washington, 1928. 8°, pp. 1-5.
- BERZELIUS JAC. — Brev. Band V, 2. Uppsala, 1928. 8°, pp. 1-63.
- BRAMBILLA E. — La questione vinicola. Poggibonsi, 1928. 8°, pp. 1-16.
- CANDURA G. S. — Contributo alla conoscenza della tignola grigia delle provviste alimentari (*Ephestia kuehniella* Zeller) e del suo parassita *Nemeritis canescens* Gravenhorst. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale agraria del R. Istituto Superiore agrario in Portici ». Vol. XXI, pp. 149-214). Spoleto, 1928. 8°.
- CASARINI A. — La medicina militare nella leggenda e nella storia. Roma, 1929. 4°, pp. I-XVI, 1-688.
- CHARTS F. — The effects of Anterior and Posterior Selections on Fission Rate in Pure Lines of *Paramecium Caudatum*. (Reprint, from the « Journal of Experimental Zoology ». Vol. L). S. l. 1928. 8°, pp. 1-14.
- CLARK L. B. — Adaptation Versus Experience as an Explanation of Modification in certain Types of Behavior (Circus Movements in *Notonecta*) (Reprint, from the « Journal of Experimental Zoology ». Vol. LI, pp. 37-50). S. l. 1928. 8°.
- CLARK L. B. — Seasonal Distribution and Life History of *Notonecta undulata* in the Winnipeg Region, Canada. (Reprint, from « Ecology ». Vol. IX, pp. 383-403). S. l. 1928. 8°.
- Il Consiglio Nazionale delle Ricerche. Comitati e organizzazione. Venezia, 1929. 8°. pp. 1-91.
- DALE BEERS C. — Rhythms in Infusoria, with Special Reference to *Didinium Nasutum*. (Reprint, from the « Journal of Experimental Zoology ». Vol. LI, pp. 485-492). S. l. 1928. 8°.

- DALE BEERS C. — Some Effects of Dietary in Insufficiency in the Ciliate *Didinium Nasutum*. (Reprint. from the «Proceedings of the National Academy of Sciences». Vol. XIV, pp. 132-137). S. l. 1928. 8°.
- DALE BEERS C. — The Relation of Dietary Insufficiency to Vitality in the Ciliate *Didinium Nasutum*. (Reprint. from the «Journal of Experimental Zoology». Vol. LI, pp. 121-193). S. l. 1928. 8°.
- DUPARC L. — Contribution à la connaissance de la pétrographie et des gîtes minéraux du Maroc. (Extr. des «Annales de la Société géologique de Belgique». Tome XLIX, pp. 114-139). Genève, 1925. 8°.
- DUPARC L. et BORLOZ A. — Les gîtes filoniens des environs de Salsègne (Montagne Noire). (Extr. du «Bulletin Suisse de Minéralogie et Pétrographie». Tome VIII, p. 265-281). Genève, 1928. 8°.
- DUPARC L. et BORLOZ A. — Sur la présence du quartz libre dans certaines roches à plagioclases basiques. (Extr. du «Bulletin Suisse de Minéralogie et Pétrographie». Tome IV, pp. 24-28). Genève, 1924.
- DUPARC L. et GYSIN M. — Notices minéralogiques. (Separatabd. aus «Schweiz. Mineralog. u. Petrogr. Mitteilungen». Band. VII, pp. 32-34). Genève, 1927. 8°.
- DUPARC L. et GYSIN M. — Sur la composition et les propriétés optiques de quelques plagioclases. (Extr. du «Bulletin Suisse de Minéralogie et Petrographie». Tome VI, pp. 255-266). Genève, 1926. 8°.
- DUPARC L. et GYSIN M. — Sur la Génévite, un nouveau minéral. (Extr. du «Bulletin de la Société française de Minéralogie». Tome L, pp. 41-46). Genève, 1927. 8°.
- DUPARC L. et GYSIN M. — Sur les propriétés optiques de l'anorthite synthétique et sur les résultats comparés donnés par les différentes méthodes de détermination des plagioclases. (Extr. du «Bulletin de la Société française de Minéralogie». Tome XLVIII). Genève, 1926. 8°, pp. 1-14.
- DUPARC L. et MOLLY E. — Les gisements platinifères du Birbir (Abyssinie). (Extr. du «Bulletin Suisse de Minéralogie et Pétrographie». Tome VIII, pp. 239-257). Genève, 1928. 8°.
- DUPARC L. et MOLLY E. — Sur la présence de la Kényite sur le plateau Abyssin. (Extr. du «Compte-Rendu des séances de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève». Vol. XLV, pp. 22-25). Genève, 1928. 8°.
- DUPARC L. et PEARCE F. — La région située à l'est de la Haute Wichera et des sources de la Petchora. (Extr. des «Mémoires de l'Institut Genevois». Tome XXII). Genève, 1928. 4°, pp. 1-142.
- FANO G. — Un fisiologo intorno al mondo.
- FANTOLI G. — Inaugurazione della nuova sede della Scuola Tecnica Superiore serale «Ettore Conti». Milano, 1927. 8°, pp. 1-18.
- FANTOLI G. — L'inaugurazione dell'annata didattica 1928-29 nel R. Politecnico di Milano. (Estr. da «Il Politecnico», 1928). Milano, 1928. 4°, pp. 1-11.
- FANTOLI G. — Nella ricorrenza del 50° anno di insegnamento del prof. ing. A. F. Jorini. Milano, 1928. 4°, pp. 1-14.
- FANTOLI G. — Parole di messaggio del R. Politecnico per Umberto Nobile. (Estr. da «Il Politecnico», n. 5). Milano, 1928. 4°, pp. 1-4.
- FANTOLI G. — Per il Maresciallo Armando Diaz. (Estr. da «Il Politecnico», 1928). Milano, 1928. 4°, pp. 1-4.
- FOUSSAT A. — Regard dans la Physique. Alger, 1929. 8°, pp. 1-139.
- HOLTEDAHN O. — Report of the Scientific Results of the Norwegian Expedition to Novaya Zemlya. Vol. II, 1921. Oslo, 1928. 4°, pp. 1-183.
- HOPKINS D. L. — The Effects of certain Physical and Chemical Factors on Locomotion and others Life-Processes in *Amoeba Proteus*. (Reprint. from the «Journal of Morphology and Physiology». Vol. XLV, pp. 97-119). Philadelphia, 1928. 8°.
- JÄGERSKIÖLD L. A. — Results of the Swedish Zoological Expedition to Egypt and the White Nile. Parte V. Uppsala, 1928. 8°, pp. 1-58.

- JENNINGS H. S. — Age, Mortality, Fertility and Individual Diversities in the Rotifer *Proales Sordida* Gosse. (Reprint. from the «Journal of Experimental Zoölogy». Vol. L, pp. 345-407). S. l. 1928. 8°.
- JENNINGS H. S. and STOCKING LYNCH R. — Age, Mortality, Fertility, and Individual Diversities in the Rotifer *Proales Sordida* Gosse. (Reprint. from the «Journal of Experimental Zoölogy». Vol. LI, pp. 339-381). S. l. 8°.
- KING S. E. — Photovisual Magnitudes of Southern Stars, with revised Values for Northern Stars. (Reprint. from the «Annals of Harvard College Observatory». Vol. LXXXV, pp. 181-190). S. l. 1928. 8°.
- LOCKYER W. J. S. and MAYOR D. — A wide Absorption Band in some B Type Stars. (Reprint. from the «Monthly Notices of the Royal Astronomical Society». Vol. LXXXIX, pp. 127-129). Edinburgh, 1928. 8°.
- LORIA G. — Storia delle matematiche. Vol. I. Torino, 1929. 8°, pp. 1-487.
- Manifestation en l'honneur de monsieur Ch. J. de la Vallée Poussin, Professeur à l'Université Catholique de Louvain à l'occasion de son jubilé professoral. 13 mai 1928. Louvain, 1928. 8°, pp. 1-145.
- MARSHALL W. B. — New Fossil Pearly Fresh-Water Mussels from Deposits on the Upper Amazon of Peru. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXIV). Washington, 1928. 8°, pp. 1-7.
- MARSHALL W. B. — New Fresh-Water and Marine Bivalve Shells from Brazil and Uruguay. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXIV). Washington, 1928. 8°, pp. 1-4.
- MAST S. O. — Factors Involved in Changes in Form in *Amoeba*. (Reprint. from the «Journal of Experimental Zoölogy». Vol. LI, pp. 97-120). Philadelphia, 1928. 8°.
- MAST S. O. — Structure and Function of the Eye-sport in Unicellular and Colonial Organisms. (Abdruck aus «Archiv für Protistenkunde». Band. LX, pp. 197-220). Jena, 1927. 8°.
- METCALF M. M. — Cancer in certain Protozoa. (Reprint. from the «American Journal of Tropical Medicine». Vol. VIII, pp. 545-557). S. l. 1928. 8°.
- METCALF M. M. — Discipline in College. (Reprint. from «School and Society». Vol. XXVII, n. 684). Baltimore, 1927. 8°, pp. 1-4.
- METCALF M. M. — The Bell-Toads and their Opalinid Parasites. (Reprint. from the «American Naturalist». Vol. LXII). S. l. 1928. 8°, pp. 1-21.
- METCALF M. M. — Trends in Evolution: a Discussion of Data Bearing upon «Orthogenesis». (Reprint. from the «Journal of Morphology and Physiology». Vol. XLV). S. l. 1928. 8°, pp. 1-45.
- MOHR G. — Euclides Danicus, Amsterdam, 1672. Kobenhavn, 1928. 8°, pp. 1-VIII, 11-41.
- Le opere di Galileo Galilei. Programma per la ristampa della edizione nazionale. Firenze, 1929. 4°, pp. 1-22.
- PATERNÒ E. — Conferenze e discorsi scientifici (1877-1926). Roma, 1928. 8°, pp. 1-202.
- PIROTTA P. R. — Fisiologia vegetale. Torino, 1929. 4°, pp. 1-348.
- PRICE E. W. — Two New Nematode Worms from Rodents. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXIV). Washington, 1928. 8°, pp. 1-5.
- SACCO F. — Variazioni fluviali in Piemonte. (Estr. dagli «Atti del I Congresso del Po», 1927). Piacenza, 1928. 4°, pp. 1-6.
- TRAMBUSTI A. — Nel XXX anno di insegnamento universitario del prof. Arnaldo Trambusti (1898-1928). Genova, 1928. 8°, pp. 1-54.
- TREADWELL A. L. — A New Polychaetous Annelid of the Genus *Phyllodoce* from the West Coast of Costa Rica. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXIV). Washington, 1928. 8°, pp. 1-3.
- VISSCHER J. P. — Conjugation in the Ciliated Protozoon, *Dileptus Gigas*, with Special Reference to the Nuclear Phenomena. (Reprint. from the «Journal

- of Morphology and Physiology ». Volume XLIV, pp. 383-415). Philadelphia, 1927. 8°.
- WENGER P. et GYSIN M. — Dosage de l'acide carbonique dans les calcaires. (Extr. du «Compte-Rendu des séances de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève ». Vol. XLIV, pp. 86-88). Genève, 1927. 8°.
- WISSCHER J. P. — A Neuromotor Apparatus in the Ciliate *Dileptus Gigas*. (Reprint. from the « Journal of Morphology and Physiology ». Vol. XLIV, pp. 373-379). Philadelphia, 1927. 8°.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 17 marzo 1929 (anno VII)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Meccanica. — *Il secondo tensore triplo di Christoffel e la derivazione intrinseca.* Nota del Corrisp. U. CISOTTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia. — *La legge dei rapporti parametrici semplici e le distanze dei componenti il sistema solare.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. P. VINASSA DE REGNY.

In un mio recente lavoro ⁽²⁾ occupandomi della legge di Haüy relativa ai rapporti parametrici razionali e semplici, ho potuto rilevare che detta legge non si riferisce ai soli reticolati cristallini, ma si può applicare anche alle distanze degli elettroni dal nucleo atomico.

Nella presente Nota espongo alcuni risultati cui sono giunto studiando le distanze degli astri nel sistema solare.

Sono noti i vari tentativi per trovare una regola matematica nella disposizione della distanza dei pianeti dal sole, a cominciare da quella di Titius-Bode per terminare a quelle di Armellini ⁽³⁾, Pierucci ⁽⁴⁾ ecc. Tali regole sono alquanto criticabili per la unità di misura cui si ricorre. La

(1) Presentata nella seduta del 3 marzo 1929.

(2) *Su alcune leggi geochimiche*, « Boll. Soc. geol. it. », XLVII, 2.

(3) *Sopra le distanze dei pianeti dal Sole*, questi « Rendiconti », XXVI, 4 marzo 1917.

(4) *Distanze dei pianeti dal Sole*, « Nuovo Cimento », LXV, p. 107; *Una doppia regolarità nel sistema solare*, « Nuovo Cimento », LXVIII, p. 221.

spiegazione poi della serie di distanze che si ottiene, non dà mai dei numeri semplici; essi son tutti esponenziali. Armellini infatti, che dà forse la più semplice e limpida regola, comincia dal prendere per unità di misura la distanza Sole- Marte (ciò che sembra arbitrario) e la regola che ne risulta è che: $x_n = 1,53^n$.

Saremmo quindi al di fuori dei rapporti parametrici semplici; e gli astri sembrerebbero così sfuggire alla legge alla quale obbediscono gli atomi e i reticolati cristallini.

Ho voluto quindi tentare se vi fosse stato modo di riportare le distanze dei componenti il sistema solare a questa legge così grandiosa, a cui già si adattavano due importantissimi fatti della materia inorganica. I risultati delle mie ricerche formano oggetto della presente Nota.

*
* *

Ho preso come unità di misura la distanza del primo astro dal suo centro. Nel caso cioè dei pianeti, di Mercurio dal Sole. È risultato che la distanza dei pianeti dal Sole si può esprimere con rapporti semplici. Ed anzi se si ammette che il primo astro graviti in un'orbita 2, tutti questi rapporti sono esprimibili con numeri interi.

Poichè questa ricerca sui pianeti mi aveva condotto a buoni risultati, così ho pensato che, se si trattava di una vera e propria legge, la stessa doveva valere anche per i satelliti. Ed effettivamente si è dimostrato che usando come parametro la distanza del primo satellite dal pianeta si ripeteva il fatto dei rapporti semplici; i quali anche erano interi se, al solito, si ammetteva che il primo astro gravitasse in un'orbita 2.

I risultati numerici sono indicati nelle seguenti tabelle.

Distanze dei pianeti dal Sole.

	Unità di misura milioni di Km	Calcolato	Misura media	Differenze	
				+	—
Mercurio.	58×1	58	58	—	—
Venere	58×2	116	108	8	—
Terra.	$58 \times 2,5$	145	149	—	4
Marte.	58×4	232	228	4	—
Giove	$58 \times 13,5$	783	778	5	—
Saturno	$58 \times 24,5$	1421	1426	—	5
Urano	$58 \times 49,5$	2871	2873	—	2
Nettuno.	$58 \times 77,5$	4495	4501	—	6

Distanze dei satelliti da Marte.

	Unità di misura milioni di Km	Calcolato	Misura media	Differenze	
				+	—
Phobos	9.3×1	9.3	9.3	—	—
Deimos	9.3×2.5	23.2	23.2	—	—

Distanza dei satelliti da Giove.

V	180×1	180	180	—	—
I Io	180×2.5	450	420	30	—
II Europa	180×3.5	630	660	—	30
III Ganimede	180×6	1080	1054	26	—
IV Calisto	180×10.5	1890	1877	13	—
VI	180×65	11700	11690	10	—
VII	180×88	15840	15850	—	10
VIII	180×173.5	31230	31240	—	10
IX ?	—	—	—	—	—

Distanze dei satelliti da Saturno.

Anello (1)	114×1	114	114	—	—
Mimas	114×1.5	171	184	—	13
Encelado.	114×2	228	236	—	8
Tetide	114×2.5	285	292	—	7
Dione	114×3.5	399	375	24	—
Rhea	114×4.5	513	524	—	11
Titanio	114×10.5	1197	1213	—	14
? Temide	114×12.5	1425	1446	—	21
Iperione	114×13	1492	1470	22	—
Giapeto	114×31	3534	3534	—	—
Pebe	114×113	12882	12864	18	—

(1) Per la distanza dell'Anello ho preso la divisione di Cassini: $R_m = 1.97$.

Distanze dei satelliti da Urano.

	Unità di misura milioni di Km	Calcolato	Misura media	Differenze	
				+	—
Ariele	194×1	194	194	—	—
Umbriele	194×1.5	291	271	20	—
Titania	194×2.5	485	444	41	—
Oberon	194×3	582	593	—	11

Risulta così una serie di numeri nella quale, a prima vista, non è possibile riconoscere una legge analoga a quella che si è tentato di stabilire dagli altri che dell'argomento si sono occupati. Non è mio compito indagare al momento sulla legge che regola questi numeri e che certo deve esistere, perchè *aet o Theòs geometrei*.

Di questi giorni però l'Einstein ha partecipato di esser giunto ormai ad una formula che unifica le leggi della gravitazione e dell'elettromagnetismo. È augurabile che con tale formula si svelino anche i rapporti delle distanze degli astri.

A me però, più modestamente, interessava solo di far notare che come nell'infinitamente piccolo mondo dell'atomo e del reticolato cristallino così nel grandioso mondo dello spazio solare, impera la stessa legge della razionalità e semplicità dei rapporti parametrali. Talchè si potrà esprimere la legge di Haüy ampliata nel modo seguente:

Nel mondo inorganico le entità costituenti i sistemi sono disposte attorno ad un centro a distanze tra loro commensurabili e con rapporti semplici.

Geodesia. — *Seconda campagna gravimetrica sul Carso.*
Nota⁽¹⁾ del Corrisp. E. SOLER.

Demmo già in questi « Rendiconti » ⁽²⁾ delle notizie sulla « *Prima campagna gravimetrica*, eseguita nel 1923 sul Carso da parte dell'Istituto di Geodesia della R. Università di Padova.

Diamo adesso delle brevi notizie ed alcuni risultati sulla seconda campagna eseguita sul Carso nel 1926.

Le ragioni che ci hanno consigliato di scegliere la regione carsica per eseguire delle campagne gravimetriche sono state esposte nella Nota precedente. Solo dobbiamo aggiungere che le condizioni delle grotte carsiche in molte delle quali non sono possibili operazioni scientifiche, c'impedì di stabilire come sarebbe stata nostra intenzione delle stazioni sulla stessa verticale, e separate da uno strato roccioso di spessore superiore a quello che separava le stazioni di Trebiciano eseguite nel 1923, cioè 273 m. circa.

Ci convenne dunque battere la regione che da Trieste procede verso Fiume, scegliendo S. Canziano per le stazioni sulla stessa verticale, e stazionando poi a Bisterza ed a Fiume.

Rimandando al seguito una relazione completa delle due campagne, daremo in questa i risultati delle due stazioni di S. Canziano, fuori grotta ed in grotta.

Dobbiamo, come la volta precedente, porgere sinceri ringraziamenti al prof. L. Carnera, direttore dell'Osservatorio Astronomico di Trieste, al colonnello Italo Gariboldo, già membro della Commissione per la delimitazione dei confini con la Jugoslavia, ed al cav. E. Boegan, presidente della Società Alpina delle Giulie, pei larghi aiuti fornitici.

La campagna si svolse dal 21 luglio al 19 settembre comprese le stazioni di andata e di ritorno a Padova. Gli strumenti principali adoperati furono come nel 1923, la Mensola Bipendolare Mioni e lo Strumento Universale Bamberg di proprietà dell'Istituto di Geodesia di Padova.

Colla Mensola Bipendolare vennero usati i pendoli 177-178 Schneider che avevano dato nella campagna del 1923, come in altre campagne, ottimi risultati, ed i pendoli 3-4 Mioni, che nella detta campagna ed in altre esperienze erano stati trovati di un maggior grado di *sostituibilità*, che quelli della coppia 1-2 Mioni, pure annessi alla Mensola.

(1) Presentata nella seduta del 3 marzo 1929.

(2) Cfr. volume XXXIII, serie 5^a, fasc. 5 (Roma 1924).

Con ognuno di detti pendoli si facevano sei serie di oscillazioni, intercalate tra le misure di tempo.

Questo veniva determinato coll'Universale, adoperando il metodo di passaggi di stelle in meridiano, con inversione del cannocchiale nel mezzo delle osservazioni di ciascuna stella.

Come nel 1923, per la determinazione della durata delle oscillazioni pendolari venne adoperato il cronometro Nardin n. 566, appartenente all'Istituto di Geodesia di Padova, e ad esso, per controllo, vennero aggiunti i cronometri Nardin n. 32 e n. 20 appartenente alla Commissione Geodetica.

La determinazione della *flessione del supporto* si faceva in ogni stazione prima e dopo la serie di oscillazioni pendolari, e si adoperava il metodo di Borrass.

La costante di flessione si mantenne costantemente tra 3 e 8 unità di 10^{-7} del secondo.

Operatore per la parte gravimetrica fu l'ing. Enzo De Liguoro, allora assistente all'Istituto di Geodesia, ed il tempo venne determinato dal dott. Giovanni Boaga, allora assistente volontario presso lo stesso Istituto.

Il dott. Boaga fece pure delle determinazioni di latitudine nelle varie stazioni, adoperando il metodo delle determinazioni di distanze zenitali di stelle in meridiano.

Relativamente alle stazioni di S. Canziano sulle quali vogliamo specialmente riferire, diremo che quella fuori grotta, venne stabilita sul ciglione della cosiddetta *voragine*, grande avvallamento di figura all'incirca cilindrica, nel cui fondo si trova l'ingresso alle grotte.

La stazione corrispondeva sulla verticale delle prime caverne delle grotte ⁽¹⁾.

In una di esse, e precisamente in quella detta Michelangelo, venne stabilita la stazione in grotta.

Da una livellazione di precisione eseguita dal topografo sig. Grupelli dell'Istituto Geografico Militare, dietro cortese concessione della Direzione dello stesso, l'altezza della Mensola per la stazione fuori grotta sul livello marino risulta di m. 421,91.

Dai rilievi altimetrici della grotta contenuti nella pubblicazione del dott. Boegan, citata in nota, si ricava che il dislivello tra le due stazioni è di m. 120, in grande parte riempito da un blocco roccioso.

Nella *stazione fuori grotta*, col dato precedente di altezza H , si applicarono al valore della gravità osservata g :

(1) Per una dettagliata descrizione delle grotte cfr.: ITALO GARIBOLDI, *Rilievi topografici delle grotte di S. Canziano*. (Estratto dal periodico «L'Universo», n. II, 1923), E. BOEGAN, *Le grotte di S. Canziano*. (Pubbl. della Società Alpina delle Giulie, Trieste, 1924).

1° la *correzione in aria libera* colla nota formula:

$$g_0 - g = 10^{-7} \cdot 3086 \cdot H$$

2° la *correzione detta di Bouguer* coll'altra nota formula:

$$g'' - g = 10^{-7} \cdot 412 \cdot \delta \cdot H$$

dove per la densità δ si tenne il valore 2,7, risultante dai dati geologici sulle rocce carsiche.

Data poi la configurazione un po' accidentata del terreno intorno a S. Canziano, e la esistenza di alcune elevazioni di circa 740 m. nelle vicinanze dello stesso, si volle calcolare pure la *correzione topografica*, dopo opportuno rilievo fatto sulla carta al 1/25000 dell'Istituto Geografico Militare, in 8 settori con centro nella stazione.

Dai calcoli eseguiti colla nota formula data dal Messerschmitt⁽¹⁾:

$$A_r = 8 \times 0.005154 [(r_x - r) + \sqrt{r^2 + h^2} - \sqrt{r_x^2 + h^2}]$$

tenendo per h di km. in km. l'altezza media del prisma montuoso circondante la stazione e moltiplicando il risultato per $\delta = 2,7$, si è trovato che soltanto i primi 2 km. danno un risultato apprezzabile di circa + 0^{cm}.010.

Per la *stazione in grotta*, alla precedente correzione si è aggiunta anche come correzione topografica, quella risultante dalla formula citata applicata ad un cilindro, supposto pieno, sovrastante alla stazione, e ponendo r (raggio interno del cilindro) = 1, $r_x = 5000$ m., $h = 120$ m.

Indicando quindi con T_1, T_2 le due stazioni e con Δ_A, Δ_B, A_r le correzioni si ha:

	T_1	T_2
Δ_A	+ 0 ^{cm} ,129.0	+ 0 ^{cm} ,092.5
Δ_B	— 0 ,046.5	— 0 ,033.4
A_r	+ 0 ,010.0	+ 0 ,021.0

Questi valori sono valsi a correggere quelli della gravità determinata per le due stazioni con la formula ordinaria:

$$g' - g = -2g \cdot \frac{S' - S}{S}$$

dove S' ed S rappresentano le medie delle durate di oscillazione in ciascuna delle stazioni ed a Padova. Per questa si tenne il noto valore $g = 980^{\text{cm}}.658$.

(1) Cfr. I. B. MESSERSCHMITT, *Die Schwerebestimmung an der Erdoberfläche*. (Braunschweig, 1908).

Si ebbe così:

$$g_{T_1} = 980^{\text{cm}},568 \quad g_{T_2} = 980^{\text{cm}},604$$

L'errore della media delle durate di oscillazione per le stazioni di S. Canziano e per quelle di Padova (andata e ritorno) si è calcolata provvisoriamente colla formola:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}$$

e si ebbe, come errore medio delle differenze $S' - S$:

$$\begin{array}{ll} T_1 - \text{Padova (I, II)} & T_2 - \text{Padova (I, II)} \\ \pm 9,7 \times 10^{-7} & \pm 6,5 \times 10^{-7} \end{array}$$

Dalla:

$$M_{g-g'} = \frac{2g}{S} M_{S'-S}$$

consegue che i precedenti valori di g_{T_1} e g_{T_2} possono complessivamente ritenersi affetti dall'errore medio

$$\pm 0^{\text{cm}},003.$$

La seguente tabella riassume i risultati ottenuti ed in essa con γ_0 s'intende, al solito, il valore della *gravità normale*, ricavato dalla formola di Helmert 1901, con g il valore della gravità osservata, con g_0 il precedente corretto per la riduzione in aria libera, e con g_0'' il valore ottenuto dopo avere introdotto in g_0 la correzione di Bouguer e quella topografica.

Si ha così:

Stazione	φ	H	g	g_0	g_0''	γ_0	$g_0 - \gamma_0$	$g_0'' - \gamma_0$
S. Canziano (esterna)	45°39'54"	421 ^m .90	980 ^{cm} .568	980 ^{cm} .698	980 ^{cm} .661	980 ^{cm} .676	+ 0 ^{cm} .022	- 0 ^{cm} .015
S. Canziano (grotta)	» » »	300 .00	980 .604	9 ^o 0 .696	980 .684	980 .676	+ 0 .020	+ 0 .008

La discrepanza dei valori ottenuti in questo caso per g_0'' , discrepanza che supera di molto gli errori medi constatati porta a delle considerazioni sulle correzioni da cui quel valore deriva, che esporremo in una prossima Nota.

Biologia. — *L'organo simbiotico di « Silvanus surinamensis (L) ».* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. U. PIERANTONI.

Come esposi in una precedente comunicazione ⁽²⁾ le recenti scoperte sulla simbiosi ereditaria nei coleotteri silofagi mi hanno fatto pensare esser verosimile che anche i coleotteri mangiatori di semi siano provveduti di organi che, con le loro colture microorganiche, possano concorrere alla digestione delle grandi masse nutritive ingerite.

Dissi ancora in quella nota che tale mia previsione era stata confermata dal rinvenimento dei microorganismi nelle cellule della parete dei ciechi intestinali dell'adulto e della proninfa ed in speciali organi della larva di *Calandra oryzae*.

Procedendo in tale studio ho voluto studiare un altro frequente abitatore del grano, del mais e delle farine in genere, il *Silvanus surinamensis*, piccolo coleottero cucuide importato nelle nostre regioni dall'America. Le osservazioni mi hanno messo in possesso di fatti molto interessanti, che qui riassumo in forma del tutto preliminare.

Il *Silvanus* in parola vive bene specialmente nella farina di Mais e vi depone le uova, da cui schiudono piccole larve, che in poche settimane compiono la loro completa metamorfosi in ninfa ed immagine.

Larva. — Le larve, esaminate nella loro interna anatomia, presentano nella porzione corrispondente ai segmenti addominali quattro grossi organi di forma ovoide, due dorsali posti sopra l'intestino nel 1° e 2° segmento addominale e due ventrali posti nel 3° e 4° di tali segmenti, sotto l'intestino. Il grande volume di questi organi li rende evidentissimi durante tutto lo sviluppo larvale. Ciascun organo è isolato dagli altri organi interni, salvo dal tessuto del corpo grasso che spesso trova ad essi aderente in alcune parti della loro superficie. I quattro organi sono quindi organi cavitari del lacunoma.

La struttura identica in tutti e quattro è relativamente complessa rispetto agli organi consimili degli emitteri e degli coleotteri.

In ciascun organo si rinvenivano poche (una ventina) grosse cellule di solito non più di sei o sette se ne riscontrano in una sezione.

Ciascun organo ha un involucri epiteliale esterno (v. fig. annessa, 1) che lo involge e si insinua anche fra l'una e l'altra delle grosse cellule componenti la parte essenziale di esso. Questa parte è costituita a sua volta di

(1) Presentata nella seduta del 17 febbraio 1929.

(2) L'organo simbiotico nello sviluppo di *Calandra oryzae*. « Rend. R. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli » (3) vol. XXXV, 1927.

due sorta di cellule: alcune piatte poste anch'esse fra cellula e cellula e rilevanti specialmente per grossi nuclei che si scorgono più spesso verso la parte interna, centrale dell'organo (2). Le grosse cellule (3) costituenti la parte essenziale, meritano una particolare descrizione, perchè anch'esse complesse nella loro struttura. Come s'è detto, queste cellule assai grosse sono in numero di circa una ventina; hanno nuclei polimorfi, ma ricchi di sostanza cromatica e presentano un plasma sottile, molto trasparente che si mostra rimpinzato di numerosissimi corpi vermiformi, variamente circonvoluti, della

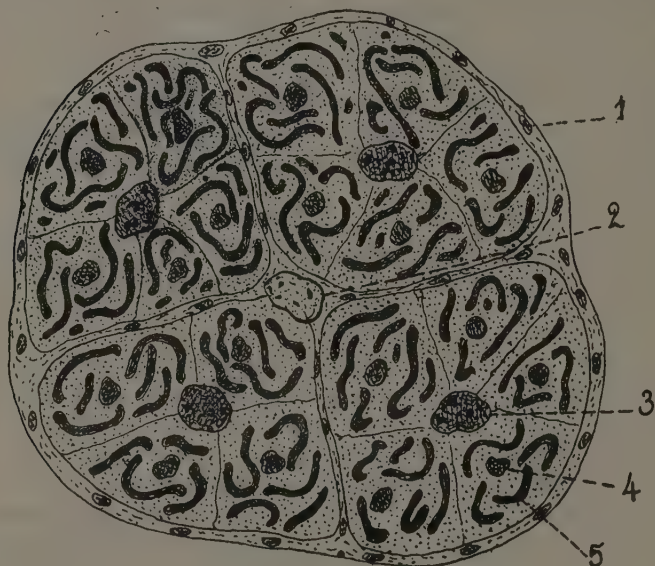


Fig. 1.

cui descrizione, trattandosi dei simbionti, e delle cui trasformazioni nelle fasi di sviluppo larvale dell'animale, ci occuperemo fra breve.

Le grosse cellule contenenti i simbionti però mostrano nel loro interno, oltre ai simbionti medesimi, varii minuscoli nuclei anch'essi di forma non definita (4) e nell'insieme del plasma di ciascuna grossa cellula può rivelarsi come tutta la massa plasmatica sia divisa in altre masse nella cui parte mediana trovasi uno di questi piccoli nuclei. Insomma ciascuna cellula simbiotica nel suo interno contiene altre cellule più piccole, nel cui plasma trovansi a loro volta i simbionti (5); questi ultimi sarebbero quindi contenuti in cellule contenute a loro volta nel plasma delle cellule simbiotiche di 1° ordine (micetociti).

Ciascun organo è perciò costituito da elementi di cinque differenti sorta: 1° Cellule dell'epitelio involgente ed insinuantesi fra i micetociti; 2° grosse

cellule appiattite contenute anch'esse fra i micetociti; 3° grossi micetociti con nuclei proteiformi; 4° piccole cellule contenute nel plasma dei micetociti; 5° simbiotici vermiformi contenuti nel plasma di queste ultime e quindi delle precedenti. Questi diversi elementi nell'annessa figura sono indicati con i numeri corrispondenti alla descrizione riassuntiva ora enuncziata.

È certo un insieme molto complesso ed il fatto che cellule possano contenere nel plasma altre cellule e queste a loro volta i simbiotici, ossia tre ordini di cellule che si contengono l'uno nell'altro, è un fatto istologicamente assai singolare, che credo non trovi riscontro in altre strutture istologiche e che dà molto da pensare in ordine a quanto io stesso ho osservato in precedenti lavori sulla natura simbiotica dei plasmi cellulari e delle cellule in genere.

I simbiotici sono notevolmente grandi, e variano un po' di forma nelle diverse fasi dello sviluppo della specie. Nelle larve, di cui mi sono occupato finora, sono molto lunghi, vermiformi e circonvoluti. Essi presentano una struttura costante, che si rivela con una specie di involucro o membrana ialina ed un contenuto cromatico, assai intensamente colorabile, fatto di granuli di varia grandezza e di sottili travate simili nel complesso a quanto si riscontra nella struttura interna di molti batteri e molto simili nel loro insieme ai corpuscoli vermiformi dell'organo luminoso di *Pyrosoma* ⁽¹⁾.

I granuli cromatici più grossi spesso prevalgono alla periferia, lungo i margini dell'insieme cromatico. Le dimensioni di questi simbiotici sono di 2 micron di spessore per una lunghezza varia, ma che può giungere fino a 15 e più micron. Non di rado la loro struttura interna si vede interrompersi lungo il decorso del corpo vermiforme, ciò che accenna a punti di divisione moltiplicativa di essi.

Ninfa. — Nella ninfa o pupa gli organi simbiotici si rinvencono nell'addome, ugualmente in numero di quattro, due anteriori, dorsali, e due posteriori, ventrali. I dorsali occupano i primi segmenti addominali, sono molto ravvicinati fra loro e sono posti sull'intestino a brevissima distanza da esso. I due organi ventrali sono ai lati ed inferiormente all'intestino, assai più discosti fra loro dei primi due.

Quanto alle dimensioni ed alla struttura di questi quattro organi ninfali, poco vi è da dire, conservandosi essi in questo stadio larvale presso a poco nelle condizioni in cui si trovano nella larva.

I corpuscoli sono un poco più corti per il fatto che il processo di divisione, di cui sopra, si mostra in questo stadio più attivo.

La loro struttura è la stessa che nel precedente stadio larvale.

Evidentemente questi organi non prendono alcuna parte alle trasformazioni che subiscono altri organi nel passaggio dallo stadio di larva a quello di ninfa.

(1) PIERANTONI U., *Gli organi luminosi ed il loro ciclo ereditario in Pyrosoma giganteum.* «Pubbl. Staz. Zool. Napoli», vol. 3, p. 191.

Immagine. — Per quanto allo stadio di immagine gli organi simbiotici siano egualmente quattro, siti nell'addome e sempre due più anteriori dorsali, e due posteriori, ventrali, però si notano ivi notevoli differenze che è utile di segnalare.

La disposizione dei quattro organi non è più regolare come negli stadi larvali e non di rado essi si trovano più o meno spostati in avanti o indietro a seconda delle anse e circonvoluzioni dell'intestino e dello spazio che queste lasciano disponibile nella cavità del lacunoma. Alcuni di questi organi appaiono inoltre lobati e talora anche divisi in più gruppi di cellule, ma mai contraggono rapporti con la parete intestinale, dalla quale si mantengono notevolmente distanti.

Il contorno degli organi è nelle sezioni meno netto e la forma ovoidale non ben definita. Ciò dipende anche dalla struttura, che si rinvia alquanto modificata. Le piccole cellule contenute nelle grosse mostrano meno netti i loro limiti. Lo strato epiteliale che avvolge le grosse cellule si mostra incompleto e spesso come lacerato.

I corpuscoli contenuti nelle cellule sono tutti assai brevi, e talora addirittura sferici perchè non più lunghi del loro spessore. Più spesso però sono lunghi due o tre volte più che spessi un po' ricurvi quasi reniformi, allungati. Attraverso le soluzioni di continuo dell'involucro epiteliale questi corpuscoli fuoriescono dall'organo e si rinvencono liberi nel lacunoma. Molti corpuscoli mostrano anche alquanto modificate le proprietà riguardanti la loro colorabilità, mostrandosi notevolmente più oscuri quando stanno per abbandonare l'organo.

Trasmmissione ereditaria. — Il fatto che gli organi simbiotici non contraggono, come avviene nei coleotteri curculionidi, mai rapporti con l'intestino, mi ha fatto pensare che in questa specie la trasmissione ereditaria dei simbionti avvenga attraverso l'uovo ovarico come negli emitteri e non per via intestinale e genitale, come negli anobidi, giusta gli studi di Buchner⁽¹⁾ e curculionidi. Infatti in alcuni esemplari femminili maturi che ho esaminato, ho potuto vedere che le grosse uova già mature che in numero di una o due si rinvencono nell'addome, mostrano nel plasma una grande quantità di corpuscoli in forma di rene allungato, simili a quelli che abbandonano gli organi simbiotici e si trovano liberi nelle cavità lacunari. In uova anche assai grandi, ma non ancora mature, i corpuscoli non si rinvencono. Ciò fa concludere che i simbionti si trasmettono alle uova poco prima che queste vengano deposte. Favorisce la loro penetrazione il fatto che in questo stadio le uova non hanno ancora un chorion ben formato e lo strato follicolare, pel grande accrescimento della superficie ovulare, è fatto da cellule molto sottili. Ricercando attentamente alla superficie di queste uova prossime ad essere deposte, si trovano di frequente in ogni parte della superficie mede-

(1) BUCHNER P., *Holz-nahrung und Symbiose*. Berlin, Springer, 1928.

sima corpuscoli in via di attraversare il follicolo e di affondarsi nella massa plasmatica dell'uovo: la via di penetrazione non è dunque dubbia.

Considerazioni e confronti. — La struttura e posizione dell'organo ricorda in questo coleottero, più che gli Anobidi ed i Curculionidi, l'organo simbiotico di *Lyctus linearis* descritto da Gambetta ⁽¹⁾, ed anche la maniera di penetrazione nelle uova si avvicina a quanto è stato accuratamente osservato in questa specie dalla stessa autrice. Ora se noi notiamo che i *Lyctus* appartengono alla famiglia dei criptofagidi, assai prossima a quella dei Cucuidi, cui appartengono i *Silvanus*, vien fatto di osservare che la presenza dell'organo simbiotico (specialmente se si pensa che i *Silvanus* sono onnivori) sia più in rapporto con i gruppi sistematici dei coleotteri, che non con la loro maniera di vita e di alimentazione. E più ancora fa pensare a ciò il fatto che mentre gli Anobini, i Curculionidi, i Cucuidi, mangiatori di semi o di farine (*Anobiium paniceum* e *striatum*, *Calandra granaria*, *Silvanus surinamensis*) ne sono provveduti, ne è invece sprovvisto, come ho potuto io stesso constatare, il *Tribolium confusum* e qualche altro tenebroinide che sono ugualmente mangiatori di semi e di farina. È ancora da notare che non si può credere ad uno stretto rapporto fra silofagia e presenza di organi simbiotici, se si pensa che Gambetta ha potuto trarre dallo stesso materiale, il legno di quercia, due specie: il *Lyctus linearis* ed il *Phymatodes testaceum*, e trovare che il primo è eminentemente simbiotico, mentre il secondo è del tutto sprovvisto di simbionti. Ma il *Phymatodes* è un cerambicide e quindi notevolmente distante dalle famiglie cui appartengono le specie provviste di organi simbiotici, di cui sopra ⁽²⁾.

Da quanto è finora noto sui coleotteri adunque è lecito di concludere che in questi animali il fenomeno della simbiosi ereditaria sia meno che in altri insetti legato al regime alimentare. Forse, quando gli studi anatomici saranno messi a base delle conoscenze sistematiche del gruppo, gli organi simbiotici avranno una notevole importanza nella distinzione delle famiglie, che ora vien fatta su dati morfologici puramente esteriori.

(1) GAMBETTA L., *Ricerche sulla simbiosi ereditaria di alcuni coleotteri silofagi*. « Ric. Morf. Biol. anim. Napoli », vol. I, p. 116.

(2) Per quanto non sia da escludere la simbiosi nella famiglia dei cerambicidi, come ha dimostrato Buchner nel precipitato lavoro, in cui dimostra che in alcune specie di questa famiglia essa appare in forma analoga a quella degli Anobidi.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DAI SOCI

Astronomia. — *Posizione fotografica del pianetino (1036).* Nota di G. BEMPORAD, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. A. BEMPORAD.

La lastra contenente la traccia del pianetino (1036) fu inviata dal Direttore dell'Osservatorio di Pino Torinese, prof. L. Volta, al Direttore dell'Osservatorio di Capodimonte, affinché fossero qui eseguite le misure per la deduzione delle coordinate di esso, per mezzo del macromicrometro di Cooke di cui l'Osservatorio è fornito.

L'incarico di eseguire tali misure fu dal Direttore affidato a me e do qui conto del risultato.

La lastra fu fotografata la notte del 24-25 aprile 1928, con posa di $2^h 1/2$, dalle ore $23 1/2$ del 24 aprile alle ore 2 del 25 aprile. Le coordinate approssimate del centro, comunicate dal prof. Volta sono:

$$\alpha = 14^h 52^m \qquad \delta = -13^\circ.6.$$

Il prof. Volta segnò sulla lastra anche otto stelle che circondano il pianetino, e le cui posizioni sono contenute in A. G. C. (U. S.) ⁽²⁾, da servire come stelle di riferimento.

Sulla lastra non è impresso alcun reticolato, cosicchè non è possibile misurarvi se non differenze di coordinate di stelle vicine, e precisamente distanze non superiori a 8 millimetri circa. Tale distanza rispetto al pianetino era superata dalle stelle 7, 8 in x , 1, 4 in y . Le corrispondenti $\Delta x \Delta y$ vennero perciò ricavate misurando altre due stelle intermedie. Questo fu fatto anche per la x della stella 5 che presenta una Δx poco inferiore al detto limite. Le corrispondenti differenze di coordinate rispetto al pianetino hanno perciò un errore medio maggiore; ma il fatto non ha grande importanza, perchè l'error medio delle puntate del pianetino è notevolmente superiore all'e. m. delle puntate alle stelle, di modo che l'error medio di una $\Delta x = \mathbf{x}$ — pianeta e l'error medio di una $\Delta x = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{x}_2 - \text{pianeta})$, differiscono poco l'un dall'altro per la piccolezza dell'e. m. di una differenza $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ in confronto dell'e. m. di una differenza \mathbf{x} — pianeta.

La mancanza del reticolato porta come conseguenza anche che la lastra non può essere orientata sul macromicrometro, e che anche la messa a

(1) Nella seduta del 17 marzo 1929.

(2) Katalog der Astr. Gesellschaft - Zweite Abteilung - Zone 10° bis 14° .

fuoco riesce più difficile e meno precisa. Gli errori di orientamento e di scala dipendono così essenzialmente dal modo con cui la lastra rimane disposta nel macromicrometro. Le misure dovettero perciò essere eseguite tutte di seguito, senza toccar la lastra, e anche così non si può avere il controllo sicuro che l'orientamento non vari nel corso delle misure.

Prima di iniziare le misure, ho fatto alcune prove per vedere se era il caso di puntare il centro o i due estremi della traccia del pianetino. Puntando i due estremi si sarebbe potuta ricavare anche la direzione del movimento; ma ho creduto meglio rinunciare a questo, data la grande incertezza riscontrata nelle puntate. La puntata del centro della traccia, fatta per mezzo della scala che è nel macromicrometro di Cooke (invece del doppio filo che è nel macromicrometro Gauthier) riesce invece molto ben sicura, benchè naturalmente sempre meno sicura della puntata ad una immagine stellare. Per quanto riguarda le immagini stellari, la fotografia in esame è ottima, i dischetti essendo ben rotondi nonostante la lunghezza della posa.

Le stelle di A. G. misurate sono le seguenti:

N.	N. di AG	α 1900.0	δ 1900.0	Gr.
1	5176	$14^h 39^m 48^s.14$	$- 12^\circ 33' 10''.4$	8.4
2	5184	$40 \ 42.05$	$- 13 \ 18 \ 45.3$	9.1
3	5189	$41 \ 42.39$	$- 13 \ 24 \ 25.5$	8.9
4	5190	$42 \ 11.57$	$- 12 \ 30 \ 57.5$	8.4
5	5171	$39 \ 17.99$	$- 13 \ 25 \ 9.6$	8.7
6	5178	$40 \ 6.31$	$- 13 \ 36 \ 57.4$	9.0
7	5197	$43 \ 21.24$	$- 12 \ 42 \ 8.6$	8.0
8	5202	$44 \ 31.06$	$- 13 \ 5 \ 35.8$	8.0

Il procedimento delle misure è stato il seguente. Portata, per mezzo delle grandi slitte, la lastra in posizione tale che stella e pianeta fossero all'incirca in posizione simmetrica rispetto al centro del campo, facevo quattro puntate per ognuno dei due oggetti, prima in x , e poi in y .

Si riportano qui le medie differenze di coordinate misurate fra ciascuna stella e il pianeta.

\times	Δx	Δy
1	$- 5.3153$	$+ 10.6413$
2	$- 1.5620$	$- 2.4571$
3	$+ 2.6917$	$- 4.0975$
4	$+ 4.7543$	$+ 11.2643$
5	$- 7.4406$	$- 4.3060$
6	$- 4.0636$	$- 7.6973$
7	$+ 9.6471$	$+ 8.0283$
8	$+ 14.4954$	$+ 1.2815$

Quanto alla precisione di queste misure, essa è stata apprezzata in base agli scarti delle singole puntate di uno stesso oggetto rispetto alla loro media. Per il pianetino abbiamo sedici serie di quattro puntate ognuna. L'error medio quadratico risulta perciò dalla formola

$$e^2 = \frac{\sum vv}{16 \times 3}.$$

Per le stelle, valendoci naturalmente anche delle stelle intermedie, abbiamo complessivamente ventisei serie di quattro puntate ognuna, e l'error medio risulta pertanto dalla formola

$$e^2 = \frac{\sum vv}{26 \times 3}.$$

Il numero complessivo di misure non è certo eccessivo per ricavarne un valore attendibile dell'error medio. Il ricavare separatamente un e. m. per x e uno per y non sarebbe opportuno, non potendosi attribuire un significato attendibile al valore ricavato per la corrispondente differenza. È tuttavia verosimile che una simile differenza sussista per il pianetino, a causa della diversa inclinazione della traccia rispetto agli assi coordinati.

Gli errori medi risultano i seguenti:

E. m. di una puntata al pianetino	$\pm 0^{\text{R}} 00402$
id. ad una stella	± 0.00255
E. m. della media di quattro puntate al pianetino	± 0.00201
id. di una stella	± 0.00127

E. m. di una Δx o di una Δy definitiva ± 0.0027 o ± 0.0024 secondo che è ricavata con o senza stella intermedia.

Poichè, come ora si dirà, una rivoluzione della vite corrispondente a circa $3'5$, e la declinazione media delle stelle misurate è eguale a $-13^{\circ}5'$, questi errori medi corrispondono ai seguenti in α, δ :

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_{\Delta\alpha} = \pm 0^{\circ} 038 & \varepsilon_{\Delta\delta} = \pm 0'' . 57 \\ \varepsilon_{\Delta\alpha} = \pm 0^{\circ} 034 & \varepsilon_{\Delta\delta} = \pm 0'' . 51 \end{array}$$

rispettivamente.

Deduzione delle coordinate equatoriali.

Le $\Delta x, \Delta y$ sono misurate rispetto ad assi determinati solo dalla posizione della lastra nel macromicrometro. L'origine degli assi rimane del tutto indeterminata. Quanto alla scala, non mi è nota la lunghezza focale dello strumento con cui è stata presa la fotografia, ma un confronto fra

le Δy e le δ mostra che una rivoluzione della vite, cioè un millimetro sulla lastra, equivale a circa $3'.5$, il che corrisponderebbe a una distanza focale di circa un metro. L'eventuale inesattezza di questo dato non ha alcuna importanza, riversandosi sull'errore di scala causato dalla imperfetta messa a fuoco della lastra nello strumento fotografico e poi nel macromicrometro.

Indicando con X, Y le coordinate di una immagine stellare rispetto agli assi diretti rigorosamente secondo il meridiano ed il parallelo, e nella ipotesi che il centro della lastra e di questi assi avesse esattamente le coordinate $\alpha = 14^h 52^m$ $\delta = -13^\circ 36'$, le X, Y sono legate alle $\Delta x, \Delta y$ dalle formole

$$(1) \quad \begin{aligned} X - \Delta x &= c\Delta y - b\Delta x + X_p \\ Y - \Delta y &= -c\Delta x - b\Delta y + Y_p \end{aligned}$$

in cui X_p, Y_p sono le coordinate del pianeta rispetto agli stessi assi. Le X, Y risultano poi dalle quantità $\Delta \alpha = \alpha - 14^h 52^m$, $\Delta \delta = \delta + 13^\circ 36'$ dalle formole

$$(2) \quad \begin{aligned} X \sin 3'.5 &= \frac{\tan \Delta \alpha}{\cos \Delta \delta} \cos \delta - 2 \sin \delta_0 \sin 2 \delta_0 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta \delta \\ Y \sin 3'.5 &= \tan \Delta \delta + \sin^2 \frac{1}{2} \Delta \delta \sin 2 \delta. \end{aligned}$$

Con δ_0 si è brevemente indicata la declinazione del centro $-13^\circ 36'$. Le formole sono esatte fino ai termini di 3° ordine inclusivamente, rispetto a $\Delta \alpha \cos \delta, \Delta \delta$.

Per mezzo delle (2) si sono calcolati i seguenti valori delle X, Y per le stelle di riferimento:

\star	X	Y
1	— 51.0790	+ 17.6575
2	— 47.1591	+ 4.6596
3	— 42.9388	+ 3.0837
4	— 41.0610	+ 18.3954
5	— 52.9931	+ 2.7569
6	— 49.5862	— 0.5759
7	— 36.1675	+ 15.2390
8	— 31.2449	+ 8.5714

Introdotti questi valori nelle (1) risultano sedici equazioni di condizione per le quattro incognite c, b, X_p, Y_p . La soluzione col metodo dei minimi quadrati dà:

$$\begin{aligned} c &= -0.012485 & b &= +0.005335 \\ X_p &= -45.6510 & Y_p &= +7.1291 \end{aligned}$$

L'error medio, per X_p, Y_p risulta $= \pm 0.0036$, il che dà per α, δ gli errori medi

$$\pm 0''.052 \quad \pm 0''.76.$$

Paragonando questi errori medi con quelli ricavati dall'accordo fra le misure, si vede che l'incertezza della posizione finale del pianeta è dovuta, *grosso modo*, per $2/3$ all'incertezza delle misure e per $1/3$ all'incertezza delle posizioni di AG.

Coi valori trovati per X_p, Y_p vengono ora calcolate le α, δ secondo le formole

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \Delta \alpha &= \frac{X_p \sin 3'.5}{\cos \delta_0 - Y_p \sin \delta_0 \sin 3'.5} \\ \operatorname{tang} \Delta \delta &= Y_p \sin 3'.5 + \sin^2 \frac{1}{2} \Delta \alpha \sin 2 \delta. \end{aligned}$$

Si ottengono così i valori delle coordinate del pianeta, riferite all'equinozio 1900,0

$$\alpha = 14^h 51^m 4^s.100 \quad \delta = -13^\circ 10' 9''.00.$$

La posizione ridotta all'equinozio 1928,0 risulta infine

$$\begin{aligned} \alpha_{1928,0} &= 14^h 52^m 36^s.126 & \pm 0''.052 \text{ e. m.} & \text{Epoca 1928 aprile 25,031} \\ \delta_{1928,0} &= -13^\circ 16' 59''.77 & \pm 0''.76 \text{ e. m.} & \text{T. m. c. E. C.} \end{aligned}$$

Matematica. — *Le ipersuperficie degli spazi a curvatura costante.* Nota di T. BOGGIO; presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Mi propongo di esporre qui alcune applicazioni delle formule generali stabilite nella mia Nota precedente, testè stampata in questi « Rendiconti »: *L'omografia di Riemann per le ipersuperficie di uno spazio curvo*, la quale Nota verrà citata brevemente con Nota V.

Dapprima esamino il caso di una superficie immersa in uno spazio curvo a tre dimensioni, poi quello di una ipersuperficie immersa in uno spazio a quattro dimensioni, con curvatura costante, e stabilisco una relazione semplicissima fra l'omografia di Ricci e l'omografia fondamentale dell'ipersuperficie considerata; da essa ne discendono subito note proprietà dovute a Souvorof e a Ricci.

(1) Nella seduta del 17 febbraio 1929.

Dopo ciò studio le ipersuperficie rappresentate da integrali di certe equazioni di Weingarten, e per ultimo considero le ipersuperficie a curvatura costante immerse in uno spazio pure a curvatura costante.

1. *Superficie di uno spazio curvo a tre dimensioni.* — Esaminiamo alcuni casi particolari notevoli delle formule esposte nella Nota V.

Supponiamo dapprima $n = 3$, cioè consideriamo una superficie W_2 immersa in uno spazio curvo qualunque V_3 a tre dimensioni. Potremo allora considerare la curvatura totale \mathfrak{f} di Gauss della W_2 in un punto, nonchè le curvature riemanniane \mathfrak{R}_2 e \mathfrak{R}_3 della W_2 e dello spazio ambiente V_3 , secondo la giacitura del piano tangente alla W_2 in quel punto. Fra questi elementi ha luogo la relazione (1):

$$(1) \quad \mathfrak{f} = \mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_3.$$

Infatti, la curvatura totale \mathfrak{f} è data da (*Espaces*, p. 155):

$$\mathfrak{f} = (dN \wedge \delta N \times N) / (dQ \wedge \delta Q \times N),$$

che equivale ovviamente alla

$$\mathfrak{f} = (dN \wedge \delta N) \times (dQ \wedge \delta Q) / (dQ \wedge \delta Q)^2,$$

cioè, sviluppando:

$$\mathfrak{f} = \frac{dN \times dQ \cdot \delta N \times \delta Q - dN \times \delta Q \cdot \delta N \times dQ}{dQ^2 \cdot \delta Q^2 - (dQ \times \delta Q)^2};$$

e poichè $dN = \sigma dQ$, $\delta N = \sigma \delta Q$, e σ è dilatazione, questa frazione è identica a quella che figura nella (11) della Nota V, perciò si ha dalla (11): $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_3 + \mathfrak{f}$, da cui segue la (1).

Se lo spazio ambiente V_3 è euclideo, si ha $\mathfrak{R}_3 = 0$, e la (1) mostra che in questo caso la curvatura di Gauss della W_2 coincide con quella di Riemann (*Espaces*, p. 158).

2. *Ipersuperficie di una V_4 a curvatura costante.* — Supponiamo ora $n = 4$, cioè consideriamo un'ipersuperficie W_3 immersa in uno spazio curvo V_4 a quattro dimensioni, e supponiamo inoltre che questo V_4 abbia una curvatura riemanniana costante \mathfrak{R}_0 .

Sussisterà allora la (14) della Nota V, alla quale si può ora dare una forma particolarmente semplice e notevole, osservando che per varietà a 3 dimensioni l'omografia di terzo ordine di Riemann può essere molto utilmente sostituita dall'omografia (di 1° ordine) μ di Ricci (Nota IV), che è anzi una dilatazione, e che è legata all'omografia di Riemann dalla formula:

$$\mathfrak{R}_w dQ \delta Q = [\mu (dQ \wedge \delta Q)] \wedge;$$

avremo così dalla (14):

$$(a) \quad [\mu(dQ \wedge \delta Q)] \wedge = \mathfrak{R}_0 \{ H(dQ, \delta Q) - H(\delta Q, dQ) \} + \\ + \{ H(\sigma dQ, \sigma \delta Q) - H(\sigma \delta Q, \sigma dQ) \},$$

ma, da formule note sulle omografie, si ha:

$$H(dQ, \delta Q) - H(\delta Q, dQ) = H(dQ, \delta Q) - KH(dQ, \delta Q) = \\ = 2[VH(dQ, \delta Q)] \wedge = (dQ \wedge \delta Q) \wedge,$$

e similmente l'ultimo termine della (a) vale:

$$(\sigma dQ \wedge \sigma \delta Q) \wedge, \quad \text{cioè} \quad [R\sigma(dQ \wedge \delta Q)] \wedge,$$

perciò sostituendo nella (a) si ha la relazione semplicissima:

$$(2) \quad \mu = \mathfrak{R}_0 + R\sigma.$$

Di qui si trae la proprietà, che per $\mathfrak{R}_0 = 0$ è stata osservata da Souvorof e da Ricci:

Le tre direzioni principali di ogni spazio curvo W_3 a tre dimensioni, immerso in uno spazio V_4 a quattro dimensioni, di curvatura riemanniana costante \mathfrak{R}_0 , coincidono colle direzioni delle linee di curvatura di W_3 (rispetto alla V_4), e le tre curvatures riemanniane principali $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$ di W_3 sono legate alle curvatures principali c_1, c_2, c_3 dalle relazioni:

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_0 + c_2 c_3, \quad \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_0 + c_3 c_1, \quad \mathfrak{R}_3 = \mathfrak{R}_0 + c_1 c_2.$$

Infatti, le direzioni delle linee di curvatura di W_3 sono quelle delle direzioni unite della dilatazione σ (*Espaces*, p. 192), e se diciamo i_1, i_2, i_3 tre vettori unitari paralleli a tali direzioni, e quindi a due a due ortogonali, si ha, ad es., $\sigma i_2 = -c_2 i_2, \sigma i_3 = -c_3 i_3$, da cui:

$$R\sigma(i_2 \wedge i_3) = (\sigma i_2) \wedge \sigma i_3 = c_2 c_3 i_2 \wedge i_3 = c_2 c_3 i_1,$$

e poichè il primo membro vale $R\sigma i_1$, si conclude $R\sigma i_1 = c_2 c_3 i_1$; dopo ciò la (2) porge: $\mu i_1 = (\mathfrak{R}_0 + c_2 c_3) i_1$, e altre due analoghe, le quali mostrano che le direzioni unite di σ sono pure tali per la dilatazione μ , cioè sono direzioni principali della W_3 in Q , ed inoltre che i coefficienti $\mathfrak{R}_0 + c_2 c_3, \dots$, sono le curvatures riemanniane principali (*Espaces*, p. 177) secondo le giaciture normali alle direzioni unite stesse; c. d. d.

3. *Integrali dell'equazione di Weingarten.* — Ritornando al caso di una varietà V_n ad n dimensioni, supponiamo che essa abbia una curvatura riemanniana costante \mathfrak{R}_0 ; allora per l'omografia di Riemann sussiste la (13) della Nota V, cioè:

$$(3) \quad \mathfrak{R}_0 dQ \delta Q = \mathfrak{R}_0 \{ H(dQ, \delta Q) - H(\delta Q, dQ) \},$$

e quindi, se u è un vettore qualunque, tangente alla V_n in Q , si ha dalla (7) della Nota V:

$$(4) \quad \delta_v d_v u - d_v \delta_v u = \mathfrak{R}_0 \{ H(dQ, \delta Q) - H(\delta Q, dQ) \} u = \\ = \mathfrak{R}_0 (u \times dQ \cdot \delta Q - u \times \delta Q \cdot dQ).$$

Ciò premesso, consideriamo l'equazione di Weingarten, colla funzione incognita U :

$$(5) \quad d_v \text{grad}_v U + \mathfrak{R}_0 U dQ = 0,$$

ove $\text{grad}_v U$ è il gradiente superficiale di U relativo alla varietà V_n , e dQ è uno spostamento infinitesimo qualunque di Q sulla V_n .

Vogliamo dimostrare anzitutto che la (5) è illimitatamente integrabile, appunto a causa della (3), che esprime che la curvatura di V_n è costante.

Infatti, prendendo il differenziale superficiale col simbolo δ_v , si ha dalla (5):

$$\delta_v d_v \text{grad}_v U + \mathfrak{R}_0 \delta U \cdot dQ + \mathfrak{R}_0 U \delta_v dQ = 0,$$

scambiando qui d con δ , poi sottraendo le due eguaglianze e ricordando la proprietà $d_v \delta Q = \delta_v dQ$ (Nota I), risulta:

$$\delta_v d_v \text{grad}_v U - d_v \delta_v \text{grad}_v U + \mathfrak{R}_0 (\delta U \cdot dQ - dU \cdot \delta Q) = 0;$$

ora questa eguaglianza è identicamente verificata, perchè coincide colla (4) ove si ponga $u = \text{grad}_v U$, e si ricordi che $\text{grad}_v U \times dQ = dU$; c. d. d.

Stabiliamo ora la notevole proprietà: Se U, V sono due integrali, distinti o no, della (5) sussiste la relazione⁽¹⁾:

$$(6) \quad \text{grad}_v U \times \text{grad}_v V + \mathfrak{R}_0 UV = \text{costante}.$$

Infatti, dalla (5), moltiplicando scalarmente per $\text{grad}_v V$, si ha:

$$\text{grad}_v V \times d_v \text{grad}_v U + \mathfrak{R}_0 U dV = 0,$$

scambiando qui U con V e poi sommando le due eguaglianze risulta:

$$d(\text{grad}_v U \times \text{grad}_v V) + d(\mathfrak{R}_0 UV) = 0,$$

da cui segue la (6).

Per $V = U$ la (6) porge:

$$(7) \quad (\text{grad}_v U)^2 + \mathfrak{R}_0 U^2 = C,$$

ove C è una costante arbitraria.

4. *Proprietà delle ipersuperficie* $U = \text{costante}$. - Esaminiamo ora alcune proprietà notevoli delle ipersuperficie della V_n aventi per equazione $U = \text{cost}$, ove U soddisfa alla (7).

(1) BIANCHI, loc. cit., p. 481.

Poichè $(\text{grad}_v U)^2$ è, in virtù della (7), funzione della sola U , è noto (*Espaces*, p. 145) che le ipersuperficie $U = \text{cost}$ sono geodeticamente parallele.

Si può inoltre mostrare facilmente che tali ipersuperficie hanno la curvatura riemanniana costante, e non minore di \mathfrak{K}_0 .

Infatti, se \mathbf{N} è il vettore unitario, normale a tali ipersuperficie in Q (e tangente alla V_n in Q), si ha: $\mathbf{N} = \text{grad}_v U / \text{mod grad}_v U$, cioè, per la (7):

$$\mathbf{N} = \text{grad}_v U / \sqrt{C - \mathfrak{K}_0 U^2},$$

e attribuendo al punto Q uno spostamento infinitesimo dQ sull'ipersuperficie, ne segue:

$$d_v \mathbf{N} = d_v \text{grad}_v U / \sqrt{C - \mathfrak{K}_0 U^2},$$

cioè, per la (5):

$$d_v \mathbf{N} = \frac{-\mathfrak{K}_0 U}{\sqrt{C - \mathfrak{K}_0 U^2}} dQ, \quad \text{da cui} \quad \sigma = \frac{-\mathfrak{K}_0 U}{\sqrt{C - \mathfrak{K}_0 U^2}};$$

perciò l'omografia σ , considerata nello spazio tangente in Q , è un numero (omotetia) e sostituendo nella (11) della Nota V si ha senz'altro:

$$(8) \quad \mathfrak{K}_w = \mathfrak{K}_0 + \frac{\mathfrak{K}_0^2 U^2}{C - \mathfrak{K}_0 U^2} = \mathfrak{K}_0 + \frac{K_0^2 U^2}{(\text{grad}_v U)^2} = \frac{\mathfrak{K}_0 C}{C - \mathfrak{K}_0 U^2},$$

ciò che dimostra la proprietà enunciata.

5. *Ipersuperficie a curvatura costante in una V_n a curvatura costante.* — Come altra applicazione delle formule precedenti cerchiamo direttamente se, in una V_n a curvatura riemanniana costante \mathfrak{K}_0 , sono sempre contenute ipersuperficie W_{n-1} a curvatura riemanniana costante \mathfrak{K}_w , diversa da zero.

Applichiamo la (12) della Nota V e avremo:

$$(9) \quad \mathfrak{K}_w - \mathfrak{K}_0 = c_1 c_2,$$

ora, se $n > 3$, esistono altre linee di curvatura della W_{n-1} passanti per Q (perchè in tutto sono almeno $n-1$) e quindi esistono delle corrispondenti curvature principali; chiamando c_3 una di queste, sussisteranno le seguenti formule, analoghe alla (9):

$$(9') \quad \mathfrak{K}_w - \mathfrak{K}_0 = c_1 c_3, \quad \mathfrak{K}_w - \mathfrak{K}_0 = c_2 c_3,$$

dalle (9), (9') risulta:

$$(10) \quad K_w - \mathfrak{K}_0 = c_1^2 = c_2^2 = c_3^2,$$

perciò, in particolare: $\mathfrak{K}_w > \mathfrak{K}_0$.

Si deduce ancora, dalla (10) e dalle analoghe, che le curvature principali della W_{n-1} in Q sono tutte eguali, e chiamando $1/r$ questo valore costante, avremo dalle (11₁) della Nota V:

$$\sigma dQ = -dQ/r, \quad \text{cioè} \quad dN = -dQ/r,$$

da cui, integrando: $N = -(Q - O)/r$, ove O è un punto arbitrario; quadrando si conclude: $(Q - O)^2 = r^2$, che rappresenta un'ipersfera di raggio r .

Da quanto precede si conclude perciò:

In una varietà a curvatura riemanniana costante \mathfrak{R}_0 , a più di tre dimensioni, non esiste alcuna ipersuperficie a curvatura riemanniana costante e minore di \mathfrak{R}_0 ; e di ipersuperficie a curvatura riemanniana costante $\mathfrak{R}_w > \mathfrak{R}_0$ esistono soltanto le ipersfere di raggio $1/\sqrt{\mathfrak{R}_w - \mathfrak{R}_0}$.

È chiaro che le ipersfere di raggio r di uno spazio V_n a curvatura riemanniana costante, hanno in ogni loro punto eguali fra loro, e alla costante $1/r$, le curvature principali.

È facile vedere che non esistono altre ipersuperficie che abbiano eguali in ogni punto tutte le curvature principali; cioè, in altre parole, se tali curvature sono fra loro eguali, devono necessariamente essere costanti e l'ipersuperficie è allora un'ipersfera.

Infatti, si ha, per ipotesi: $\sigma dQ = m dQ$, cioè:

$$(a) \quad d_v N = m dQ,$$

da cui: $\delta_v d_v N = \delta m \cdot dQ + m \delta_v dQ$; scambiando qui d con δ e poi sottraendo le due eguaglianze risulta:

$$\delta_v d_v N - d_v \delta_v N = \delta m \cdot dQ - dm \cdot \delta Q$$

e siccome la varietà V_n è supposta di curvatura riemanniana costante, dalle (7), (13) della Nota V risulta che il primo membro della relazione precedente è nullo, e allora da essa si conclude senz'altro, per l'arbitrarietà di dQ e δQ , che deve essere $dm = \delta m = 0$, cioè m deve essere costante; dopo ciò dalla (a) si trae integrando: $N = m(Q - O)$; ove O è un punto fisso arbitrario, da cui $(Q - O)^2 = 1/m^2$, che rappresenta appunto una ipersfera.

Matematica. — *Sur quelques formes générales de la loi des grands nombres.* Nota di V. GLIVENKO, presentata⁽¹⁾ dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. Soit donné une suite de quantités éventuelles indépendantes

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

dont les fonctions des probabilités totales sont respectivement

$$U_1(x_1), U_2(x_2), U_n(x_n), \dots,$$

et soit défini une suite de fonctions

$$f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots$$

que nous supposerons ici mesurable B.

Il s'agit de déterminer les conditions sous lesquelles on a, pour une certaine fonction des entières $v(n)$ et quel que soit le nombre positif ε ,

$$(1) \mathfrak{P} \{ |f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) - \mathfrak{M}[f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)]| \geq \varepsilon |v(n)| \} \rightarrow 0,$$

\mathfrak{P} désignant la probabilité et \mathfrak{M} la valeur probable⁽²⁾.

Dans une Note récente⁽³⁾ nous avons établi que si l'on convenait de définir toujours l'intégrale généralisée d'une fonction f comme la somme des intégrales des fonctions $\frac{1}{2}(f + |f|)$ et $\frac{1}{2}(f - |f|)$, on pourrait écrire:

$$\mathfrak{M}[f(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \int_{-\infty}^{+\infty} dU_1(x_1) \int_{-\infty}^{+\infty} dU_2(x_2) \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dU_n(x_n).$$

Dans la suite nous aurons besoin non pas seulement de cette valeur probable « totale » mais aussi des valeurs probables « partielles » que nous définirons comme il suit: $\mathfrak{M}_i[f] = f$ et, pour $i > 0$,

$$\mathfrak{M}_i[f(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dU_i(x_i).$$

(1) Nella seduta del 3 marzo 1929.

(2) Un problème analogue a été posé par M. A. Kolmogoroff dans les « Comptes Rendus », t. 185, 1927, pp. 917-919. Il en a donné une solution relative aux variations des f_n , tandis que le critère plus fort que nous allons établir ici se rattachera aux moments des f_n .

(3) Sur les valeurs probables de fonctions, ces « Rendiconti », vol. VIII, 1928, pp. 480-483.

Cela posé, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Proposons-nous de choisir successivement, au hasard, les valeurs des quantités $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$; alors, si l'on a

$$\frac{1}{v^2(n)} \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{M} [(f_n - \mathfrak{M}_i[f_n])^2] \rightarrow 0,$$

on a aussi, quel que soit le nombre positif ε :

$$\mathfrak{B} \{ |f_n - \mathfrak{M}[f_n]| \geq \varepsilon |v(n)| \} \rightarrow 0.$$

En effet, d'après l'inégalité de Tchebichef, on a :

$$\mathfrak{B} \{ |f_n - \mathfrak{M}[f_n]| \geq \varepsilon |v(n)| \} \leq \frac{1}{\varepsilon^2 v^2(n)} \mathfrak{M} [(f_n - \mathfrak{M}[f_n])^2].$$

Posons maintenant pour abrégér :

$$\mathfrak{M}_i[f] = \mathfrak{M}_0[\mathfrak{M}_1[\dots \mathfrak{M}_i[f]] \dots].$$

Alors on peut écrire :

$$\mathfrak{M} [(f_n - \mathfrak{M}[f_n])^2] = \mathfrak{M} \left[\left(\sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{M}_{i-1}[f_n] - \mathfrak{M}_i[f_n] \right)^2 \right],$$

ou bien :

$$\mathfrak{M} [(f_n - \mathfrak{M}[f_n])^2] = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \mathfrak{M} [(\mathfrak{M}_{i-1}[f_n] - \mathfrak{M}_i[f_n]) \cdot (\mathfrak{M}_{k-1}[f_n] - \mathfrak{M}_k[f_n])].$$

Examinons d'abord les termes de cette double somme dans lesquels $i \neq k$, et soit, pour fixer les idées, $i > k$. On aura :

$$\begin{aligned} & \mathfrak{M} [(\mathfrak{M}_{i-1}[f_n] - \mathfrak{M}_i[f_n]) \cdot (\mathfrak{M}_{k-1}[f_n] - \mathfrak{M}_k[f_n])] = \\ &= \mathfrak{M} [\mathfrak{M}_{i-1}[f_n] \cdot \mathfrak{M}_{k-1}[f_n] - \mathfrak{M} [\mathfrak{M}_{i-1}[f_n] \cdot \mathfrak{M}_k[f_n]] - \\ & \quad - \mathfrak{M} [\mathfrak{M}_i[f_n] \cdot \mathfrak{M}_{k-1}[f_n]] + \mathfrak{M} [\mathfrak{M}_i[f_n] \cdot \mathfrak{M}_k[f_n]]] = \\ &= \mathfrak{M} [\mathfrak{M}_{i-1}[\mathfrak{M}_{i-1}[f_n] \cdot \mathfrak{M}_{k-1}[f_n]]] - \mathfrak{M} [\mathfrak{M}_{i-1}[\mathfrak{M}_{i-1}[f_n] \cdot \mathfrak{M}_k[f_n]]] - \\ & \quad - \mathfrak{M} [\mathfrak{M}_i[\mathfrak{M}_i[f_n] \cdot \mathfrak{M}_{k-1}[f_n]]] + \mathfrak{M} [\mathfrak{M}_i[\mathfrak{M}_i[f_n] \cdot \mathfrak{M}_k[f_n]]] = \\ &= \mathfrak{M} [\mathfrak{M}_{i-1}[f_n] \cdot \mathfrak{M}_{i-1}[\mathfrak{M}_{k-1}[f_n]]] - \mathfrak{M} [\mathfrak{M}_{i-1}[f_n] \cdot \mathfrak{M}_{i-1}[\mathfrak{M}_k[f_n]]] - \\ & \quad - \mathfrak{M} [\mathfrak{M}_i[f_n] \cdot \mathfrak{M}_i[\mathfrak{M}_{k-1}[f_n]]] + \mathfrak{M} [\mathfrak{M}_i[f_n] \cdot \mathfrak{M}_i[\mathfrak{M}_k[f_n]]] = \\ &= \mathfrak{M} [(\mathfrak{M}_{i-1}[f_n])^2] - \mathfrak{M} [(\mathfrak{M}_{i-1}[f_n])^2] - \mathfrak{M} [(\mathfrak{M}_i[f_n])^2] + \mathfrak{M} [(\mathfrak{M}_i[f_n])^2] = 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que l'on a :

$$\mathfrak{M} [(f_n - \mathfrak{M}[f_n])^2] = \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{M} [(\mathfrak{M}_{i-1}[f_n] - \mathfrak{M}_i[f_n])^2]^{(1)}.$$

(1) Cette égalité a été utilisé aussi par M. A. Kolmogoroff qui en a donné une autre démonstration.

Examinons maintenant les termes de cette dernière somme. On aura :

$$\begin{aligned} \mathfrak{N} [\mathfrak{N}_{i-1} [f_n] - \mathfrak{N}_i [f_n]]^2 &= \mathfrak{N} [\mathfrak{N}_{i-1} [f_n] - \mathfrak{N}_i [f_n]]^2 \leq (1) \\ &\leq \mathfrak{N} [\mathfrak{N}_{i-1} [(f_n - \mathfrak{N}_i [f_n])^2]] = \mathfrak{N} [(f_n - \mathfrak{N}_i [f_n])^2]. \end{aligned}$$

Il en résulte que l'on a :

$$\mathfrak{N} [(f_n - \mathfrak{N} [f_n])^2] \leq \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{N} [(f_n - \mathfrak{N}_i [f_n])^2],$$

ce qui confirme notre assertion.

2. Remarquons que si les quantités $\mathfrak{N} [(f_n - \mathfrak{N}_i [f_n])^2]$ sont bornées dans leur ensemble, la relation (1) a lieu toutes les fois où le rapport $\frac{|\nu(n)|}{\sqrt{n}}$ tend vers l'infini avec n . En effet, l'inégalité

$$\mathfrak{N} [(f_n - \mathfrak{N}_i [f_n])^2] < L$$

entraîne l'inégalité :

$$\frac{1}{\nu^2(n)} \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{N} [(f_n - \mathfrak{N}_i [f_n])^2] < L \frac{n}{\nu^2(n)}.$$

3. Posons maintenant un problème plus général. Considérons une fonction de deux variables, $F(u, v)$, possédant les propriétés suivantes :

1) Aux points où $u = v$ la fonction $F(u, v)$ est égale à zéro et uniformément continue, c'est-à-dire que, quel que soit le nombre positif ϵ' , il lui correspond un nombre positif η' tel que, toutes les fois où l'on a

$$|u - v| < \eta',$$

on a aussi

$$|F(u, v)| \leq \epsilon';$$

2) Il existe un nombre non négatif M tel que l'on a toujours :

$$|u - v| \leq M |F(u, v)|.$$

Reprenons les quantités x et les fonction f des numéros précédents. On peut énoncer le théorème suivant :

Proposons-nous de choisir successivement, au hasard, les valeurs des quantités $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$; alors, si la fonction F possède les propriétés 1) et 2), et si l'on a

$$\frac{1}{\nu^2(n)} \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{N} [F^2(f_n, \mathfrak{N}_i [f_n])] \rightarrow 0,$$

(1) D'après l'inégalité de Schwarz.

on a aussi, quel que soit le nombre positif ε :

$$\mathfrak{B} \{ |F(f_n, \mathfrak{N}[f_n])| \geq \varepsilon |v(n)| \} \rightarrow 0.$$

En effet, en vertu de la propriété 1), on a, en posant $\varepsilon' = \varepsilon |v(n)|$ et $\eta' = \eta |v(n)|$:

$$\mathfrak{B} \{ |F(f_n, \mathfrak{N}[f_n])| \geq \varepsilon |v(n)| \} \leq \mathfrak{B} \{ |f_n - \mathfrak{N}[f_n]| \geq \eta' |v(n)| \};$$

puis, d'après l'inégalité établie ci-dessus:

$$\mathfrak{B} \{ |f_n - \mathfrak{N}[f_n]| \geq \eta' |v(n)| \} \leq \frac{1}{\eta'^2 v^2(n)} \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{N} [|f_n - \mathfrak{N}_i[f_n]|^2];$$

et enfin, en vertu de la propriété 2):

$$\frac{1}{\eta'^2 v^2(n)} \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{N} [|f_n - \mathfrak{N}_i[f_n]|^2] \leq \frac{M^2}{\eta'^2 v^2(n)} \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{N} [F^2(f_n, \mathfrak{N}_i[f_n])].$$

4. Si le rapport $\frac{|v(n)|}{\sqrt{n}}$ tend vers l'infini avec n , on peut modifier

l'énoncé du théorème qui vient d'être démontré en y remplaçant la propriété 2) de la fonction F par la propriété moins restrictive que voici:

2 bis) Il existe deux nombres non négatifs M et N tels que, toutes les fois où l'on a

$$|u - v| > N,$$

on a aussi:

$$|u - v| \leq M |F(u, v)|.$$

En effet, deux cas seulement peuvent se présenter ici: ou bien $|u - v| \leq N$, ou bien $|u - v| \leq M |F(u, v)|$. Il en résulte sans peine que l'on a toujours:

$$\frac{1}{\eta'^2 v^2(n)} \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{N} [|f_n - \mathfrak{N}_i[f_n]|^2] \leq \frac{N^2 n}{\eta'^2 v^2(n)} + \frac{M^2}{\eta'^2 v^2(n)} \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{N} [F^2(f_n, \mathfrak{N}_i[f_n])],$$

ce qui prouve le théorème modifié.

Matematica. — *Sur la loi des grands nombres.* Nota di A. KOLMOGOROFF, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. CASTELNUOVO.

On considère habituellement dans la théorie mathématique des probabilités sous le nom de la loi des grands nombres ou le théorème de Poisson, ou celui de Tchebicheff, avec leurs généralisations pour le cas des épreuves dépendantes. On peut, cependant, donner à cette loi une interprétation plus étendue et plus conforme à sa portée naturphilosophique, en réunissant sous ce nom tous les cas, où l'on peut affirmer avec la probabilité près de l'unité, qu'une quantité, dépendant de très grand nombre des causes, ne diffère que très peu d'une constante définie *a priori* ⁽²⁾. Dans une Note précédente ⁽³⁾ j'ai donné un théorème, qui, me semble-t-il, s'approche le plus de cette conception intuitive. Dans la présente Note je veux revenir sur cette matière pour énoncer une proposition un peu plus générale et pour éclaircir quelques questions qui s'y rattachent.

§ 1. Pour poser la question précisément nous considérons une suite de nombre réels ⁽⁴⁾

$$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots,$$

où la valeur de X_n dépend du résultat des n épreuves ⁽⁵⁾ consécutives

$$\mathcal{E}_1^{(n)}, \mathcal{E}_2^{(n)}, \dots, \mathcal{E}_n^{(n)}.$$

Convenons de dire, que X_n est *stable* ⁽⁶⁾, ou qu'il obéit à la loi des grands nombres, quand il existe une suite de constantes

$$d_1, d_2, \dots, d_n, \dots$$

(1) Nella seduta del 3 marzo 1929.

(2) Voir S. BERNSTEIN, *Théorie des probabilités*, p. 142 (en russe), où l'on donne une définition encore plus large.

(3) « Comptes Rendus », t. 185, p. 917.

(4) On pourrait obtenir des résultats analogues en considérant des vecteurs. M. V. Glivenko m'avait communiqué, que des considérations analogues subsistent encore pour des vecteurs dans l'espace fonctionnel de M. Hilbert.

(5) Nous ne supposons nullement, que ces épreuves soient mutuellement indépendantes.

(6) Pour cette définition de stabilité voir mon article: *Ueber die Summen zufälliger Grössen*, « Math. Annalen », Bd. 99, Heft 1-2, S. 309.

telle, que l'on a pour chaque η positif

$$(1) \quad P \{ |X_n - d_n| \geq \eta \} \rightarrow 0.$$

Dans la plupart des cas importants on peut prendre comme d_n les espérances mathématiques $E(X_n)$. Si l'on a effectivement

$$(2) \quad P_n(\eta) = P \{ |X_n - E(X_n)| \geq \eta \} \rightarrow 0$$

pour chaque η positive, nous convenons de dire, que *la stabilité de X_n est normale*. On peut démontrer, que, si $X_n - E(X_n)$ sont uniformément bornés, la relation (2) est une conséquence de (1), c'est-à-dire, que dans ce cas la stabilité ne peut être que normale.

On sait d'après Tchebitcheff, que

$$(3) \quad P_n(\eta) \leq \frac{B_n^2}{\eta^2},$$

où l'on a posé

$$B_n^2 = E[X_n - E(X_n)]^2.$$

Donc, pour la stabilité normale de X la condition

$$(4) \quad B_n \rightarrow 0 \quad (\text{Condition de Markoff})$$

est suffisante. Si $X_n - E(X_n)$ sont uniformément bornés en valeur absolue par une constante M , on a, comme on le peut démontrer sans peine,

$$(5) \quad P_n(\eta) \geq \frac{B_n^2 - \eta^2}{M^2 - \eta^2}.$$

Dans ce cas, par conséquent, la condition de Markoff est non seulement suffisante, mais encore nécessaire pour la stabilité de X_n , qui, comme cela était indiqué, ne peut être dans ce cas que normale.

§ 2. En formulant la condition de Markoff, nous ne gagnons que très peu sur la définition même de la stabilité normale (2). Mais l'intérêt de cette condition dépend du fait, que l'évaluation de B_n est dans la plupart des cas plus simple que celle de $P_n(\eta)$.

Dans le cas générale, en désignant par $E_k(X_n)$ l'espérance mathématique de X_n dans l'hypothèse des résultats des k premières épreuves $\mathcal{E}_1^{(n)} \mathcal{E}_2^{(n)} \dots \mathcal{E}_k^{(n)}$ connus, nous aurons la formule fondamentale suivante:

$$(6) \quad B_n^2 = \sum_{k=1}^n E[E_k(X_n) - E_{k-1}(X_n)]^2.$$

En effet, on a évidemment

$$E_0(X_n) = E(X_n), \quad E_n(X_n) = X_n,$$

donc, en désignant

$$Z_{nk} = E_k(X_n) - E_{k-1}(X_n),$$

on a

$$X_n - E(X_n) = Z_{n1} + Z_{n2} + \dots + Z_{nn}.$$

En désignant en général par $E_k(Y)$ l'espérance mathématique de Y , quand le résultat des épreuves $\mathcal{E}_1^{(n)} \dots \mathcal{E}_k^{(n)}$ est connu nous obtenons

$$E_{k-1}(Z_{nk}) = E_{k-1}[E_k(X_n) - E_{k-1}(X_n)] = E_{k-1}(X_n) - E_{k-1}(X_n) = 0.$$

Comme Z_{ni} pour $i < k$ est constante, quand des résultats des $k-1$ premières épreuves sont fixés, nous obtenons aussi

$$E_{k-1}(Z_{ni} Z_{nk}) = 0$$

et finalement

$$E(Z_{ni} Z_{nk}) = E[E_{k-1}(Z_{ni} Z_{nk})] = 0.$$

De cette dernière égalité il s'en suit immédiatement la formule

$$(7) \quad B_n^2 = \beta_{n1}^2 + \beta_{n2}^2 + \dots + \beta_{nn}^2,$$

$$\beta_{nk} = \sqrt{E(Z_{nk}^2)},$$

qui ne diffère de (6) que par des notations.

Arrêtons un peu notre attention sur la signification de β_{nk} . C'est la moyenne quadratique de l'inflexion de l'espérance mathématique de X_n , quand le résultat de l'événement $\mathcal{E}_k^{(n)}$ devient connu. Donc β_{nk} est la mesure très naturelle de la dépendance de X_n du résultat de l'épreuve $\mathcal{E}_k^{(n)}$ (2). Nous sommes revenus ainsi à la conception de la loi des grandes nombres du commencement de cette Note. Mais maintenant nous savons mesurer la dépendance de X_n de chaque épreuve $\mathcal{E}_k^{(n)}$ au moyen des moments β_{nk} et nous avons démontré, que la loi des grandes nombre s'applique effectivement à X_n , si la somme des carrés des β_{nk} est infiniment petite. Cela a lieu en particulier, si l'on a

$$(8) \quad \beta_{nk} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

(1) Dans ma Note citée cette formule était démontrée seulement pour le cas des épreuves mutuellement indépendantes.

(2) Cela suppose, que les événements $\mathcal{E}_k^{(n)}$ se produisent dans l'ordre de leurs indices k .

§ 3. Considérons maintenant le cas, où les épreuves $\mathcal{E}_k^{(n)}$ déterminant la valeur de X_n sont mutuellement indépendantes. Désignons par $E^{(k)}(Y)$ l'espérance mathématique de Y quand on sait les résultats des toutes les épreuves $\mathcal{E}_i^{(n)}$ sauf $\mathcal{E}_k^{(n)}$. Dans notre cas des épreuves indépendantes on a

$$(9) \quad \beta_{nk}^2 \leq \alpha_{nk}^2 = E[X_n - E^{(k)}(X_n)],$$

$$(10) \quad B_n^2 \leq A_n^2 = \alpha_{n1}^2 + \alpha_{n2}^2 + \dots + \alpha_{nn}^2.$$

Donc, pour la stabilité normale de X_n est suffisante la condition

$$(11) \quad A_n \rightarrow 0(1).$$

La démonstration de la formule (9) on peut effectuer ainsi :

$$E_k[E^k(X_n)] = E_{k-1}(X_n),$$

$$E_k[X_n - E^k(X_n)]^2 \geq \{E_k(X_n) - E_k[E^k(X_n)]\}^2 = [E_k(X_n) - E_{k-1}(X_n)]^2,$$

$$\alpha_{nk}^2 = E[X_n - E^k(X_n)]^2 \geq E[E_k(X_n) - E_{k-1}(X_n)]^2 = \beta_{nk}^2.$$

Dans le cas général des épreuves dépendantes la première de ces formules n'est pas vraie.

Soit $M^{(k)}(X_n)$ limite supérieure des valeurs possibles de X_n , pour des résultats des épreuves $\mathcal{E}_i^{(n)}$ sauf $\mathcal{E}_k^{(n)}$ déterminés, et soit $m^{(k)}(X_n)$ leur limite inférieure. Désignons par

$$\Omega_{nk} = \sup |M^{(k)}(X_n) - m^{(k)}(X_n)|.$$

Ω_{nk} est donc l'inflexion maximale de X_n quand le résultat de $\mathcal{E}_k^{(n)}$ seul est inconnu. On peut voir, que

$$(12) \quad \alpha_{nk} \leq \frac{1}{2} \Omega_{nk},$$

$$(13) \quad A_n^2 \leq \frac{1}{4} (\Omega_{n1}^2 + \Omega_{n2}^2 + \dots + \Omega_{nn}^2).$$

De là résulte la condition pour la stabilité de X_n dans le cas des épreuves indépendantes, donnée dans ma Note précédente :

$$(14) \quad \Omega_{n1}^2 + \Omega_{n2}^2 + \dots + \Omega_{nn}^2 \rightarrow 0.$$

En terminant remarquons encore, que dans le cas de Tchebicheff

$$X_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

(1) L'intérêt spécial de cette condition est, que dans la définition des moments α_{nk} n'intervient pas l'ordre des événements $\mathcal{E}_k^{(n)}$.

où x_k dépend de l'épreuve $\mathcal{G}_k^{(n)}$ et ces épreuves sont mutuellement indépendentes, on a

$$\beta_{nk}^2 = \alpha_{nk}^2 = \frac{1}{n^2} E [X_n - E(X_n)]^2 = \frac{d^2(x_n)}{n^2}$$

et l'on retrouve la condition classique pour la stabilité de X_n :

$$\frac{d^2(x_1) + d^2(x_2) + \dots + d^2(x_n)}{n^2} \rightarrow 0.$$

Matematica. — *Commutazione totale e parziale relativa ai tensori derivati.* Nota di MARIA PASTORI, presentata⁽¹⁾ dal Cor-risp. U. CISOTTI.

Siano $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$ ($r_1, r_2, \dots, r_m = 1, 2, \dots, n$) le componenti co-varianti di un tensore m^{plo} di una varietà riemanniana a n dimensioni.

Fra le componenti dei tensori derivati dal dato esistono le seguenti identità che dimostro nella presente Nota:

$$(1) \quad \sum_{r_1 r_2 \dots r_{m+1}} X_{r_1 r_2 \dots r_m} / r_{m+1} = \sum_{r_1 r_2 \dots r_{m+1}} \frac{\partial X_{r_1 r_2 \dots r_m}}{\partial x_{r_{m+1}}}$$

$$(2) \quad \sum_{r_1 r_2 \dots r_m + k} X_{r_1 \dots r_m} / r_{m+1} \dots r_{m+k} = 0 \quad (\text{per } k > 1) \quad (2)$$

dove il simbolo \sum indica la sommatoria estesa a tutte le permutazioni degli indici che vi figurano, ogni termine essendo preso col segno + o —

(1) Nella seduta del 3 marzo 1929.

(2) Per la formola (2) il caso che più importa di considerare è quello di $k=2$, deducendosi gli altri immediatamente da questo. Essa è nota per un m -vettore sotto il nome di teorema di Poincaré (cfr. ad es., J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül*, Berlin, Springer, 1924, p. 88, formola (141)). In questa Nota è dimostrata per le componenti di un tensore qualunque, ma si può anche dedurre dalla ricordata formola (141) di Schouten nel modo seguente:

Si scelgano fra le n^m componenti di un tensore qualunque le $D_{n,m}$ a indici tutti distinti e si distribuiscano in $\binom{n}{m}$ gruppi, mettendo in ciascuno di essi quelle che differiscono tra loro solo per l'ordine degli indici; indicando con $r_1 r_2 \dots r_m$ gli indici che figurano nel gruppo generico, si considerino le $\binom{n}{m}$ sommatorie $\frac{1}{m!} \sum_{r_1 \dots r_m} X_{r_1 \dots r_m}$ (la permutazione fondamentale andrà scelta in modo opportuno per ogni gruppo, per es., disponendo sempre gli indici in ordine crescente); esse costituiscono le componenti della « parte emisimmetrica » del tensore dato (cfr. SCHOUTEN, loc. cit., p. 25), componenti che si possono considerare come quelle di un m -vettore. Applicando la ricordata formola (141) alla parte emisimmetrica del tensore si ha la nostra (2).

secondo che la permutazione degli indici è di classe pari o dispari rispetto a quella indicata, presa come fondamentale.

Tutte le volte che tra gli indici relativi ad S due almeno sono uguali, le permutazioni di classe pari sono uguali a quelle di classe dispari, e la sommatoria corrispondente è nulla.

Caso particolare della (1) è la nota formola ⁽¹⁾:

$$X_{i|l} - X_{l|i} = \frac{\partial X_i}{\partial x_l} - \frac{\partial X_l}{\partial x_i}.$$

Caso particolare della (2) (per $m = 0$, $k = 2$) è la simmetria del tensore doppio, derivato secondo di una funzione ⁽²⁾.

Se, insieme con queste identità si considera la seguente:

$$(3) \quad S_{r_{m+1} \dots r_{m+k}} X_{r_1 \dots r_m / r_{m+1} \dots r_{m+k}} = \\ = - S'_{r_{m+1} \dots r_{m+k}} \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m X_{r_1 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m / r_{m+1} \dots r_{m+k-2}} \{ r_l q, r_{m+k-1} r_{m+k} \}$$

(dove S' indica la sommatoria estesa alle sole permutazioni di classe pari e con termini tutti positivi) chè per $k = 2$ è la nota formola di commutazione delle derivate seconde covarianti ⁽³⁾, si può concludere:

Le note formole di commutazione relative a due indici nella derivazione covariante conservano la loro forma anche per un numero qualunque di indici, purchè in tal caso per commutazione si intenda l'insieme delle permutazioni degli indici che si considerano, e si dia il segno $+$ o $-$ ai termini corrispondenti secondo che la permutazione è di classe pari o dispari rispetto a quella degli indici indicati, presa come fondamentale ⁽⁴⁾.

La commutazione può essere fatta, invece che su tutti gli indici dei tensori derivati, su alcuni di essi.

Se si escludono dalla commutazione alcuni degli indici del tensore primitivo, si ottengono delle formole in cui la derivazione covariante si fa sui tensori primitivi come se essi dipendessero soltanto dagli indici esclusi. (Cfr. nn. 4-5).

(1) T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, Roma, Stock, 1925, p. 168, formola (6).

(2) T. LEVI-CIVITA, loc. cit., p. 169, formola (8).

(3) T. LEVI-CIVITA, loc. cit., p. 212, formola (20). La (3) è stata da me dimostrata nella Nota, *Formole di commutazione nella derivazione dei tensori* (questi « Rendiconti », vol. VIII, serie 6^a, 2° sem., 1928, pp. 186-190) applicando la proprietà ciclica

(4) L'operazione indicata con S corrisponde all'« alternieren » (cfr. SCHOUTEN, loc. cit., p. 25). Io uso la parola commutazione introdotta da Ricci e Levi-Civita nel caso di due indici.

Se si escludono tutti gli indici del tensore primitivo, limitando così la commutazione ai soli indici di derivazione, si ritorna alla formola (3). (Cfr. n. 5).

Osservazione. — Tutte le formole di questa Nota sono conseguenza della simmetria dei simboli di Christoffel rispetto ai due indici superiori. Esse valgono quindi per qualunque varietà, anche non riemanniana, purchè a connessione simmetrica.

1. Tensori derivati di prim'ordine. — Commutazione totale.

La (1) è una conseguenza immediata della nota formola di derivazione covariante:

$$(a) \quad X_{r_1 \dots r_m} / r_{m+1} = \frac{\partial X_{r_1 \dots r_m}}{\partial x_{r_{m+1}}} - \sum_i^n X_{q r_2 \dots r_m} \left\{ \begin{matrix} r_1 r_{m+1} \\ q \end{matrix} \right\} - \dots - \\ - \sum_i^n X_{r_1 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m} \left\{ \begin{matrix} r_l r_{m+1} \\ q \end{matrix} \right\} - \dots - \sum_i^n X_{r_1 r_2 \dots q} \left\{ \begin{matrix} r_m r_{m+1} \\ q \end{matrix} \right\}$$

e della simmetria dei simboli di Christoffel rispetto ai due indici superiori. Immaginando infatti scritte, insieme con la (a), le formole analoghe relative agli altri termini del primo membro della (1), e facendo la loro somma (preso ogni termine col segno indicato) non rimarranno nei secondi membri che i termini contenenti le derivate ordinarie delle X, distribuendosi gli altri in coppie di termini opposti⁽¹⁾.

2. Tensori derivati di ordine superiore. — Commutazione totale.

Fra le componenti di un tensore derivato di second'ordine si ha, per la (1):

$$(b) \quad S_{r_1 \dots r_{m+2}} X_{r_1 \dots r_m} / r_{m+1} r_{m+2} = S_{r_1 \dots r_{m+2}} \frac{\partial X_{r_1 \dots r_m}}{\partial x_{r_{m+2}}} / r_{m+1}$$

(1) Considero il termine generico $\sum_i^n X_{r_1 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m} \left\{ \begin{matrix} r_l r_{m+1} \\ q \end{matrix} \right\}$; ad esso si accoppierà il seguente $\sum_i^n X_{r_1 \dots r_{l-1} r_{m+1} r_l \dots r_m} / r_l \left\{ \begin{matrix} r_m r_{m+1} \\ q \end{matrix} \right\}$ che, appartenendo allo sviluppo di $X_{r_1 \dots r_{l-1} r_{m+1} r_l \dots r_m} / r_l$ (in cui la permutazione degli indici è di classe dispari rispetto a quella di (a) perchè si ottiene da essa con lo scambio di due indici) andrà preso col segno opposto.

Ed è evidente in tal modo che ciascuno degli $m \frac{(m+1)!}{2}$ termini appartenenti alle permutazioni di classe pari corrisponderà a uno di quelli appartenenti alle permutazioni di classe dispari e reciprocamente.

ma è, per la (a):

$$(c) \quad \frac{\partial X_{r_1 \dots r_m / r_{m+1}}}{\partial x_{r_{m+2}}} = \frac{\partial^2 X_{r_1 \dots r_m}}{\partial x_{r_{m+1}} \partial x_{r_{m+2}}} - \sum_i^m \frac{\partial}{\partial x_{r_{m+2}}} \left(X_{q r_2 \dots r_m} \left\{ \begin{matrix} r_1 & r_{m+1} \\ q & \end{matrix} \right\} \right) - \dots - \\ - \sum_i^m \frac{\partial}{\partial x_{r_{m+2}}} \left(X_{r_1 r_2 \dots q} \left\{ \begin{matrix} r_m & r_{m+2} \\ q & \end{matrix} \right\} \right).$$

Considero le formole analoghe alla (c) relative agli altri termini del secondo membro della (b), ciascuno preso col segno indicato, e immagino di distribuire i $(m+2)!$ termini della sommatoria in $m+2$ gruppi ciascuno di $(m+1)!$ termini nel modo seguente: nel primo gruppo l'ultimo indice sia r_{m+2} , esso sarà preceduto dalle $(m+1)!$ permutazioni degli altri indici; nel secondo gruppo l'ultimo indice sia r_{m+1} , esso sarà preceduto dalle $(m+1)!$ permutazioni degli altri indici, ecc.

Se scompongo la sommatoria (b) nelle $m+2$ sommatorie parziali, ciascuna corrispondente a uno dei gruppi indicati, non resteranno a secondo membro (per le considerazioni già fatte al n. 1) che i termini contenenti le derivate seconde ordinarie delle X.

Ma la loro somma è identicamente nulla per l'invertibilità nell'ordine della derivazione ordinaria.

Lo stesso si avrà per le derivate covarianti di ordine superiore al secondo. Donde la (2).

Osservazione. — Le (1) e (2) possono riassumersi nell'unica formola:

$$S_{r_1 \dots r_{m+k}} X_{r_1 \dots r_m / r_{m+1} \dots r_{m+k}} = S_{r_1 \dots r_{m+k}} \frac{\partial^k X_{r_1 \dots r_m}}{\partial x_{r_{m+1}} \dots \partial x_{r_{m+k}}}$$

che riduce la sommatoria estesa a tutte le permutazioni degli indici delle componenti del derivato di ordine qualunque di un tensore, alla sommatoria analoga tra le derivate ordinarie delle componenti del tensore primitivo, e nella quale il secondo membro è identicamente nullo per $k > 1$ (intese naturalmente verificate per le X le condizioni sotto la quale è lecita l'invertibilità nell'ordine della derivazione ordinaria)⁽¹⁾.

3. Derivati di tensori emisimmetrici⁽²⁾.

Dalla formola (a) di derivazione covariante discende che se il tensore primitivo è emisimmetrico rispetto a due indici, tale è pure il suo derivato.

(1) Dovendo gli indici che figurano nelle (1) e (2) essere tutti distinti la (1) potrà al più essere applicata a tensori $(n-1)^{pl}$ e la (2) al più a tensori $(n-2)^{pl}$.

Per i tensori n^{pl} , come pure per gli hn^{pl} valgono relazioni del tipo (2) dove però le permutazioni vanno fatte separatamente sugli indici primitivi e su quelli di derivazione. Cfr. la mia Nota, *Notevoli identità relative ai tensori derivati*, questi « Rendiconti », vol. VIII, serie 6^a, fasc. II (2^o sem., 1928), pp. 545-548.

(2) Per i tensori simmetrici ognuna delle S è nulla.

Così pure il derivato di ordine qualunque di un tensore emisimmetrico è ancora emisimmetrico rispetto agli indici che non sono di derivazione.

Perciò nel caso che il tensore primitivo sia emisimmetrico rispetto a due indici, al simbolo S viene sostituito, nelle formole (1) e (2) il simbolo S' col significato sopra indicato.

Nel caso che il tensore primitivo sia emisimmetrico i $(m+k)!$ termini della sommatoria S si riducono a $D_{m+k,k}$, perchè ognuna delle disposizioni dei k indici di derivazione sarà preceduta dalle $m!$ permutazioni dei rimanenti indici, e a ciascuna di queste corrisponde sempre la medesima componente del tensore ⁽¹⁾.

4. Tensori derivati di prim'ordine. - Commutazione parziale.

Se, invece di considerare le permutazioni di tutti gli indici delle componenti di un tensore derivato di prim'ordine, si immagina, per es., di tenerne fisso uno, e di permutare tutti gli altri, insieme con quello di derivazione, si ha, in luogo della (1) (cfr. n. 1):

$$(4) \quad S_{r_2 r_3 \dots r_{m+1}} X_{r_1 r_2 \dots r_m / r_{m+1}} = S_{r_2 r_3 \dots r_{m+1}} \left(\frac{\partial X_{r_1 \dots r_m}}{\partial x_{r_{m+1}}} - \sum_1^n X_{q r_2 \dots r_m} \left\{ \begin{matrix} r_1 & r_{m+1} \\ & q \end{matrix} \right\} \right).$$

Più in generale, se gli indici che si tengono fissi sono p ⁽²⁾, si ha:

$$(5) \quad \dots S_{r_{p+1} \dots r_m r_{m+1}} X_{r_1 \dots r_p r_{p+1} \dots r_m / r_{m+1}} = \\ = S_{r_{p+1} \dots r_m r_{m+1}} \left(\frac{\partial X_{r_1 \dots r_m}}{\partial x_{r_{m+1}}} - \sum_1^n \sum_1^p X_{r_1 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_p r_{p+1} \dots r_m} \left\{ \begin{matrix} r_1 & r_{m+1} \\ & q \end{matrix} \right\} \right).$$

Nella derivazione covariante che figura nei secondi membri delle (4) e (5) il tensore m^{plo} viene, nel primo caso, considerato come semplice e dipendente solo dall'indice che si tiene fisso, e nel secondo caso considerato come p^{plo} e dipendente solo dagli indici che si tengono fissi.

Le (4) e (5) si possono anche scrivere nel modo seguente:

$$(4') \quad S_{r_2 r_3 \dots r_{m+1}} X_{r_1 r_2 \dots r_m / r_{m+1}} = S_{r_2 r_3 \dots r_{m+1}} X_{r_1 (r_2) \dots (r_m) / r_{m+1}}$$

$$(5') \quad S_{r_{p+1} \dots r_m r_{m+1}} X_{r_1 \dots r_p r_{p+1} \dots r_m / r_{m+1}} = S_{r_{p+1} \dots r_m r_{m+1}} X_{r_1 \dots r_p (r_{p+1}) \dots (r_m) / r_{m+1}}.$$

(1) Anche per un tensore qualunque i $(m+k)!$ termini della sommatoria si potranno riunire in $D_{m+k,k}$, ciascuno dei quali sarà la derivata di una delle componenti della parte emisimmetrica del tensore. Cfr. nota (2) a p. 474.

(2) Per semplicità di scrittura ho tenuti fissi i primi indici, ma alle stesse conclusioni si giunge naturalmente tenendo fissi alcuni degli indici, in posizione qualunque.

dove va inteso che nel fare la derivazione covariante si debbono trascurare quei termini del secondo membro della formola (a) nei quali r_l è uno qualunque degli indici tra parentesi.

5. *Tensori derivati di ordine superiore.. - Commutazione parziale.*

Fra le componenti del derivato secondo di un tensore ha luogo, per la (4') la relazione:

$$\begin{aligned} S_{r_2 \dots r_{m+1} r_{m+2}} X_{r_1 \dots r_m} / r_{m+1} r_{m+2} &= S_{r_2 \dots r_{m+1} r_{m+2}} X_{r_1} (r_2) \dots (r_m) / (r_{m+1}) r_{m+2} = \\ &= S_{r_2 \dots r_{m+1} r_{m+2}} \left(\frac{\partial^2 X_{r_1 \dots r_m}}{\partial x_{r_{m+1}} \partial x_{r_{m+2}}} - \sum_{l=1}^n \frac{\partial X_{qr_2 \dots r_m}}{\partial x_{r_{m+2}}} \left\{ \frac{r_1 r_{m+1}}{q} \right\} - \sum_{l=1}^n X_{qr_2 \dots r_m} \frac{\partial}{\partial x_{r_{m+2}}} \left\{ \frac{r_1 r_{m+1}}{q} \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{l=1}^n \frac{\partial X_{jr_2 \dots r_m}}{\partial x_{r_{m+1}}} \left\{ \frac{r_1 r_{m+2}}{j} \right\} + \sum_{l=1}^n X_{qr_2 \dots r_m} \left\{ \frac{j r_{m+1}}{q} \right\} \left\{ \frac{r_1 r_{m+2}}{j} \right\} \right) = \\ &= S_{r_2 \dots r_{m+1} r_{m+2}} \sum_{l=1}^n X_{qr_2 \dots r_m} \left(\frac{\partial}{\partial x_{r_{m+2}}} \left\{ \frac{r_1 r_{m+1}}{q} \right\} - \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{j r_{m+1}}{q} \right\} \left\{ \frac{r_1 r_{m+2}}{j} \right\} \right) \quad (1). \end{aligned}$$

Raggruppando i $(m+1)!$ termini di questa sommatoria in coppie di termini che differiscono tra loro solo per l'ordine degli ultimi due indici si ha:

$$\begin{aligned} (6) \quad S_{r_2 \dots r_{m+1} r_{m+2}} X_{r_1 r_2 \dots r_m} / r_{m+1} r_{m+2} &= \\ &= - S'_{r_2 \dots r_{m+1} r_{m+2}} \sum_{l=1}^n X_{qr_2 \dots r_m} \{ r_1 q, r_{m+1} r_{m+2} \}. \end{aligned}$$

E, nel caso in cui si tengano fissi p indici:

$$\begin{aligned} (7) \quad S_{r_{p+1} \dots r_{m+1} r_{m+2}} X_{r_1 \dots r_p r_{p+1} \dots r_m} / r_{m+1} r_{m+2} &= \\ &= - S'_{r_{p+1} \dots r_{m+1} r_{m+2}} \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^p X_{r_1 \dots r_l r_{l+1} \dots r_p r_{p+1} \dots r_m} \{ r_l q, r_{m+1} r_{m+2} \}. \end{aligned}$$

Fra le componenti del derivato k^{esimo} di un tensore si ha per la (7)

$$\begin{aligned} (8) \quad S_{r_{p+1} \dots r_{m+k}} X_{r_1 \dots r_p r_{p+1} \dots r_m} / r_{m+1} \dots r_{m+k} &= \\ &= - S'_{r_{p+1} \dots r_{m+k}} \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^p X_{r_1 \dots r_l r_{l+1} \dots r_p r_{p+1} \dots r_m} / r_{m+1} \dots r_{m+k-2} \{ r_l q, r_{m+k-1} r_{m+k} \}. \end{aligned}$$

Per $p = m$ la (7) diventa la nota formola di commutazione delle derivate seconde e la (8) diventa la (3).

(1) Nella sommatoria complessiva si elideranno i primi termini per l'invertibilità nell'ordine della derivazione ordinaria, i secondi e i quarti perchè, differendo tra loro solo per lo scambio degli indici $r_{m+1} r_{m+2}$, si scambieranno gli uni negli altri quando si passi dalle permutazioni di classe pari a quelle di classe dispari.

Matematica. — *Stelle di congruenze e parallelismo assoluto; basi geometriche di una recente teoria di Einstein.* Nota di G. MAMMANA, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *La decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in fattori simbolici.* Nota di G. MAMMANA, presentata dal Corrispondente G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Aggiunta alla Nota « Dimostrazione di un teorema d'analisi di cui è fatto uso in fisica piana ».* Nota di M. PICONE, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Serie di potenze che ammettono la circonferenza di convergenza come linea singolare.* Nota di L. ONOFRI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Analisi. — Sulla dipendenza continua degli integrali dell'equazione $y' = f(x, y)$ dai valori iniziali. Nota di G. SCORZA-DRAGONI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio S. PINCHERLE.

Se la funzione continua $f(x, y)$ soddisfa alla ben nota condizione di Lipschitz

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < K |y_1 - y_2| \quad (K = \text{cost}),$$

gli integrali dell'equazione

$$(1) \quad y' = f(x, y)$$

sono univocamente determinati dai valori iniziali e ne dipendono con continuità.

Orbene, io mi propongo di dimostrare come dalla prima proprietà segua la seconda, ogni volta che $f(x, y)$ è continua. In altri termini, io dimostrerò che

Se $f(x, y)$ è continua, ogni gruppo di condizioni sufficienti a stabilire l'unicità degli integrali della (1) verificanti determinate condizioni iniziali, è sufficiente anche a stabilirne la dipendenza continua dai valori iniziali.

1. Andiamo a precisare le condizioni del problema.

Sia $f(x, y)$ una funzione continua e limitata definita in un insieme aperto E ; di modo che, se (x_0, y_0) è un punto (interno) di E , esiste sempre almeno una funzione continua, definita nel segmento $|x - x_0| \leq \alpha$, $\alpha > 0$, che assuma il valore y_0 per $x = x_0$ e che renda identicamente soddisfatta l'equazione

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

in tutto $x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha$ ⁽²⁾.

Sia M l'estremo superiore di $|f(x, y)|$ in E ; allora

Se (x_0, y_0) è un punto di E e se a e b sono due numeri positivi tali che sia $a \cdot M \leq b$, e che sia interno ad E il rettangolo

$$R: x_0 \leq x \leq x_0 + a,$$

$$y_0 - b \leq y \leq y_0 + b,$$

(1) Nella seduta del 13 febbraio 1929.

(2) Cfr. ad es. L. BIEBERBACH, *Differentialgleichungen*, Springer, 1926, p. 43.

ogni integrale della (2), che passi per (x_0, y_0) , si può definire in tutto il segmento semiaperto $x_0 \leq x < x_0 + a$.

Supponiamo che questo non accada per un certo integrale ed indichiamo con x_1 ($x_0 < x_1 < x_0 + a$) il punto oltre il quale non può essere prolungata la definizione dell'integrale considerato.

Dalle ipotesi fatte sulla $f(x, y)$, segue che, se indichiamo con $y(x)$ l'integrale in discorso, esiste il limite

$$y_1 = \lim_{x \rightarrow x_1} y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x)) dx$$

e che è

$$|y_1 - y_0| \leq a \cdot M \leq b.$$

Ma allora il punto (x_1, y_1) appartiene ad R e, quindi, è interno ad E .

Si potrà perciò scegliere il numero positivo β in modo tale che in $x_1 \leq x \leq x_1 + \beta$ esista almeno un integrale, $\bar{y}(x)$, della (2) verificante la condizione $\bar{y}(x_1) = y_1$.

Ma allora, da

$$y_1 = \lim_{x \rightarrow x_1} y(x)$$

e da

$$\lim_{x \rightarrow x_1} y'(x) = \lim_{x \rightarrow x_1} f(x, y(x)) = f(x_1, y_1) = \bar{y}'(x_1),$$

segue che $\bar{y}(x)$ è un prolungamento di $y(x)$ oltre il punto x_1 . Ma ciò è contro l'ipotesi fatta su x_1 ; quindi, ecc.

Dopo ciò, mediante considerazioni analoghe a quelle già svolte, si dimostra che esiste, finito, il limite

$$y_2 = \lim_{x \rightarrow x_0 + a} y(x)$$

e che, posto

$$y(x_0 + a) = y_2,$$

$y(x)$ verifica la (2) in tutto $x_0 \leq x \leq x_0 + a$.

Quindi, nelle ipotesi indicate,

Ogni integrale della (2), che passi per (x_0, y_0) , si può definire in tutto il segmento chiuso $x_0 \leq x \leq x_0 + a$.

Si osservi poi che nel ragionamento svolto è implicitamente contenuto che

$$\text{In } x_0 \leq x \leq x_0 + a, \quad \text{è} \quad y_0 - b \leq y(x) \leq y_0 + b.$$

2. Supponiamo che sia interno ad E il rettangolo $x_0 \leq x \leq x_0 + a'$, $|y - y_0| \leq 2b'$ e che sia $a'M \leq b'$,

Allora se \bar{y}_0 è un numero tale che sia $|y_0 - \bar{y}_0| \leq b'$, avremo che il rettangolo $x_0 \leq x \leq x_0 + a'$, $|y - \bar{y}_0| \leq b'$ è interno ad E e che è $a'M \leq b'$; ne segue (n. 1) che ogni integrale della (2) verificante la condizione $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$ si può definire in tutto $x_0 \leq x \leq x_0 + a'$ e che è $|\bar{y}(x) - \bar{y}_0| \leq b'$, cioè $y_0 - 2b' \leq \bar{y}(x) \leq y_0 + 2b'$.

3. Supponiamo adesso che per la (2) sussista il teorema d'unicità, supponiamo, cioè, che per ogni punto di E passi un solo integrale dell'equazione $y' = f$.

In queste ipotesi,

Se $y(x)$ ed $\bar{y}(x)$ sono due integrali della (2) definiti in $x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$, e se è $y(x_0) > \bar{y}(x_0)$, è $y(x) > \bar{y}(x)$ in tutto $x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$.

Infatti, se per un $x_1 \geq x_0$ e $\leq x_0 + \alpha$ fosse $y(x_1) = \bar{y}(x_1)$ non sarebbe più vero che per ogni punto di E passa un solo integrale della (2).

Che se poi per un tal punto fosse $y(x_1) < \bar{y}(x_1)$, poichè $y(x)$ ed $\bar{y}(x)$ sono continue e poichè è $y(x_0) > \bar{y}(x_0)$, vi sarebbe un $x_2 \geq x_0$ e $\leq x_0 + \alpha$ in cui si avrebbe $y(x_2) = \bar{y}(x_2)$; il che, come si è visto, non è possibile.

4. Continuiamo a supporre che per la (2) valga il teorema di unicità, e siano, al solito, (x_0, y_0) un punto interno di E ed a', b' due numeri positivi verificanti le condizioni di cui al n. 2.

Ciò posto, fissiamo una successione decrescente di numeri positivi

$$\delta_1 > \delta_2 > \dots$$

convergente verso lo zero, con $\delta_1 < b'$.

Da quanto si è detto nel n. 2 segue immediatamente che tutti gli integrali della $y' = f$, definiti dalle condizioni iniziali

$$y(x_0) = y_0, \quad y_1(x_0) = y_0 + \delta_1, \quad y_2(x_0) = y_0 + \delta_2, \dots,$$

si possono definire in $x_0 \leq x \leq x_0 + a'$. Non solo, ma da $\delta_1 > \delta_2 > \dots > 0$ segue che è

$$y_1(x_0) > y_2(x_0) > \dots > y(x_0);$$

quindi, per quanto si è detto al n. 3, in tutto l'intervallo $x_0 \leq x \leq x_0 + a'$ è

$$y_1(x) > y_2(x) > \dots > y(x).$$

Ne segue che, nell'intervallo indicato, è definita la funzione

$$(3) \quad Y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x),$$

e che è

$$Y(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x_0) = y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = y(x_0),$$

e

$$y(x) \leq Y(x) \leq y_1(x).$$

5. Da quanto è detto al n. 3 si deduce anche che $|y(x) - y_0| \leq 2b'$, $|y_1(x) - y_0| \leq 2b'$ in tutto $x_0 \leq x \leq x_0 + a'$. Di qui e dall'ultima disuguaglianza scritta segue che la curva $y = Y(x)$ è interna ad E; si ha quindi che è definita la funzione $f(x, Y(x))$; e poichè $f(x, y)$ è continua, è evidentemente in tutto l'intervallo $x_0 \leq x \leq x_0 + a'$

$$(4) \quad f(x, Y(x)) = f\left(x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x, y_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} y'_n(x).$$

D'altra parte è $|f(x, y)| \leq M$, cioè $|y'_n(x)| = |f(x, y_n(x))| \leq M$, quindi, insieme colla (4), si ha che è

$$\int_{x_0}^x f(t, Y(t)) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x y'_n(t) dt$$

e la convergenza, com'è noto, è uniforme⁽¹⁾.

Sommando l'eguaglianza scritta con la $Y(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x_0)$ si ha che è uniformemente

$$Y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, Y(t)) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x);$$

cioè, tenuto conto della (3), che è uniformemente

$$(5) \quad Y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$$

e

$$(6) \quad Y(x) = Y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, Y(t)) dt.$$

Ma $y_1(x), y_2(x), \dots$ sono funzioni continue; di qui e dalla uniformità della convergenza espressa dalla (5), segue che $Y(x)$ è continua.

Ma allora, anche $f(x, Y(x))$ è una funzione continua. Di qui e dalla (6) segue che è

$$\frac{d}{dx} Y(x) = f(x, Y(x)),$$

Ma è $y(x_0) = Y(x_0)$, quindi, per l'unicità degli integrali della (2), è $y(x) = Y(x)$. Ne segue che è uniformemente

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x).$$

(1) Nel caso in esame, questa proposizione si può stabilire senza far ricorso a una infinità di scelte arbitrarie. Vedi L. TONELLI, *Sulla nozione di integrale*, « Annali di Matematica », s. IV, t. 1°.

Fissato ϵ , scegliamo l'indice n in modo che sia

$$y(x) < y_n(x) \leq y(x) + \epsilon;$$

e sia: \bar{y}_0 un numero verificante le relazioni

$$y_0 \leq \bar{y}_0 \leq y_0 + \delta_n,$$

ed $\bar{y}(x)$ l'integrale della (2) definito dalla condizione $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$. Dal n. 2 segue che $\bar{y}(x)$ si può definire in $x_0 \leq x \leq x_0 + a'$ e, per quanto è detto nel n. 3, è

$$y(x) \leq \bar{y}(x) \leq y_n(x) \leq y(x) + \epsilon.$$

6. In maniera perfettamente analoga, considerando gli integrali della (2), $y_{-1}(x), y_{-2}(x), \dots$, definiti dalle condizioni

$$y_{-1}(x_0) = y_0 - \delta_1, \quad y_{-2}(x_0) = y_0 - \delta_2, \dots,$$

si mostra che ad ogni $\epsilon > 0$ si può far corrispondere un indice n' in modo tale che, da

$$y_0 - \delta_{n'} \leq \bar{y}_0 \leq y_0,$$

segua, se $\bar{y}(x)$ ha il solito significato,

$$y(x) - \epsilon \leq \bar{y}(x) \leq y(x).$$

In definitiva, se indichiamo con δ il più piccolo dei numeri $\delta_n, \delta_{n'}$, abbiamo che, se è $|\bar{y}_0 - y_0| \leq \delta$, è anche $|y(x) - \bar{y}(x)| < \epsilon$ in tutto $x_0 \leq x \leq x_0 + a'$.

7. Fatte le solite ipotesi sulla $f(x, y)$, sia $y(x)$ un integrale dell'equazione $y' = f$ definito nel segmento

$$x_0 \leq x \leq x_2.$$

Dico che si può scegliere un numero positivo η in maniera tale che sia interno ad E l'insieme

$$E_1: x_0 \leq x \leq x_2,$$

$$y(x) - \eta \leq y \leq y(x) + \eta.$$

Che ciò sia possibile, è evidente nel caso che E sia privo di frontiera, nel caso, cioè, che E coincida con il piano.

Supponiamo allora che esista la frontiera di E.

In tal caso, siccome $y(x)$ è una funzione continua definita in un intervallo chiuso e limitato, la curva $y = y(x)$ descrive un insieme chiuso e limitato.

Questo insieme è interno ad E, cioè privo di punti della frontiera di E. Ma allora, siccome anche la frontiera di E è un insieme chiuso, la distanza tra questa e la curva $y = y(x)$ è maggiore di zero.

Ne segue, detta d questa distanza, che l'insieme

$$E_1 : x_0 \leq x \leq x_2,$$

$$y(x) - \eta \leq y \leq y(x) + \eta$$

è interno ad E non appena è $0 < \eta < d$.

8. Scelto η in modo che siano verificate le condizioni richieste, dividiamo l'intervallo $x_0 \leq x \leq x_2$ in n parti uguali mediante i punti

$$a_1 = x_0, a_2, \dots, a_n, \quad x_2 = a_{n+1} \quad (a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1})$$

in modo tale che l'oscillazione di $y(x)$ in

$$i_r : a_r \leq x \leq a_{r+1} \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

sia minore $\frac{\eta}{2}$, di guisa che, se x' ed x'' sono due punti di i_r , sarà

$$(7) \quad |y(x') - y(x'')| < \frac{\eta}{2},$$

ed in modo che sia

$$M(a_{r+1} - a_r) = M \frac{x_2 - x_0}{n} \leq \frac{\eta}{4}.$$

Ciò posto, consideriamo il rettangolo

$$R_r : a_r \leq x \leq a_{r+1},$$

$$y(a_r) - \frac{\eta}{2} \leq y \leq y(a_r) + \frac{\eta}{2}.$$

Dico che R_r è interno ad E .

Infatti, se (x_0, y_0) è un punto di R_r , sarà $a_r \leq x_0 \leq a_{r+1}$ e quindi, (7),

$$|y(a_r) - y(x_0)| \leq \frac{\eta}{2}.$$

Ma è, per ipotesi, $|y(a_r) - y_0| \leq \frac{\eta}{2}$, sicchè si ha

$$|y(x_0) - y_0| \leq \eta.$$

Ne segue che ogni punto di R_r appartiene ad E_1 . Ma E_1 è interno ad E ; quindi R_r è interno ad E . Ma è anche

$$a_{r+1} - a_r \leq \frac{\eta}{4M},$$

quindi R_r si trova nelle stesse condizioni del rettangolo $R : x_0 \leq x \leq x_0 + a' - 2b' \leq y \leq y_0 + 2b'$, considerato nei numeri precedenti.

Allora, fissato ad arbitrio il numero $\varepsilon_r > 0$, si può scegliere

$$\delta_r \leq \varepsilon_r \quad \text{e} \quad \leq \frac{\eta}{4}$$

in modo tale che se \bar{y}_r è un numero verificante la relazione

$$(8) \quad |y(a_r) - \bar{y}_r| \leq \delta_r,$$

ed $\bar{y}_r(x)$ l'integrale della (2) definito dall'uguaglianza $\bar{y}(a_r) = \bar{y}_r$, $\bar{y}_r(x)$ risulti definito in tutto i_r e verifichi, nell'intervallo indicato, la disuguaglianza

$$(9) \quad |y(x) - \bar{y}_r(x)| \leq \varepsilon_r.$$

9. Ciò posto, fissato a piacere il numero positivo ε , scegliamo $\delta_n \leq \varepsilon$ e > 0 in modo tale che dalla (8) segua la (9), quando vi si ponga $r = n$, $\varepsilon_n = \varepsilon$.

Dopo di questo, scegliamo $\delta_{n-1} \leq \delta_n$ e > 0 in modo tale, che da

$$|y(a_{n-1}) - \bar{y}_{n-1}| \leq \delta_{n-1},$$

segua che $\bar{y}_{n-1}(x)$ si possa definire in tutto i_{n-1} , riuscendo in questo intervallo

$$|y(x) - \bar{y}_{n-1}(x)| \leq \delta_n \leq \varepsilon.$$

In particolare, sarà

$$|y(a_n) - \bar{y}_{n-1}(a_n)| \leq \delta_n;$$

ma allora, per il modo stesso con cui è stato scelto δ_n , $\bar{y}_{n-1}(x)$ si può definire in tutto i_n , riuscendo

$$|y(x) - \bar{y}_{n-1}(x)| \leq \varepsilon, \quad (a_n \leq x \leq a_{n+1}).$$

Sarà quindi

$$|y(x) - \bar{y}_{n-1}(x)| \leq \varepsilon$$

in tutto $a_{n-1} \leq x \leq a_{n+1}$.

Così proseguendo, si vede che si può scegliere il numero positivo δ_1 in modo tale che, da

$$|y(a_1) - \bar{y}_1| \leq \delta_1,$$

segua che $\bar{y}_1(x)$ si può definire in tutto $a_1 \leq x \leq a_{n+1}$ (cioè in tutto $x_0 \leq x \leq x_2$), riuscendo, in questo segmento,

$$|y(x) - \bar{y}_1(x)| \leq \varepsilon.$$

10. Le considerazioni svolte nei numeri precedenti si possono applicare agli integrali della (2) definiti in un intorno sinistro di x_0 . In definitiva si ha che, nelle ipotesi più volte indicate per la $f(x, y)$,

Se $y(x)$ è un integrale dell'equazione $y' = f(x, y)$ definito in $x_1 \leq x \leq x_2$, si può scegliere il numero positivo δ in modo tale che, se $\bar{y}(x)$ è un altro integrale della (2), definito per $x = x_0$ ($x_1 \leq x_0 \leq x_2$), da

$$|y(x_0) - \bar{y}(x_0)| \leq \delta,$$

segua che anche $\bar{y}(x)$ si può definire in tutto $x_1 \leq x \leq x_2$.

Inoltre

Se δ è stato scelto in modo opportuno, in tutto questo intervallo sarà soddisfatta la disuguaglianza

$$|y(x) - \bar{y}(x)| \leq \varepsilon,$$

dove ε è un numero positivo prefissato ad arbitrio ⁽¹⁾.

Matematica. — *Sul valore principale di un integrale.* Nota di PIA NALLI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. L. TONELLI.

Occupandoci dello studio dell'operazione funzionale

$$k(s)\varphi(s) + \varepsilon \int_a^b \varphi(t) dt^{(3)},$$

nell'ipotesi che $k(s)$ sia dotata di derivata positiva e limitata in (a, b) , siamo stati condotti alla costruzione di una funzione $V(s; \lambda)$ internamente al rettangolo $a \leq s \leq b$, $k(a) \leq \lambda \leq k(b)$ esclusi i punti della linea $\lambda = k(s)$.

Precisamente, abbiamo posto: per $\lambda < k(s)$,

$$V(s; \lambda) = \log \frac{k(s) - \lambda}{k(s) - k(a)}$$

e per $\lambda > k(s)$

$$V(s; \lambda) = \log (\lambda - k(s)) + b(s)$$

(1) La composizione tipografica di questa Nota era già compiuta quando ho potuto rilevare che parte delle proprietà esposte in essa era già contenuta nel trattato di CARATHÉODORY e parte nella Memoria di KAMKE comparsa nell'ultimo fascicolo degli « Acta Matématica » e giunto qui a Napoli da pochi giorni.

(2) Nella seduta del 3 marzo 1929.

(3) « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo », t. L (1926).

dove

$$h(s) = \log \frac{k(b) - k(s)}{[k(s) - k(a)]^2} + k'(s) \left[\frac{s - b}{k(s) - k(b)} - \frac{s - a}{k(s) - k(a)} \right] - \\ - \int_a^b \frac{k(\tau) - k(s) - (\tau - s) k'(\tau)}{[k(\tau) - k(s)]^2} k'(\tau) d\tau.$$

Qui vogliamo far notare come anche soltanto la considerazione di un caso particolare ($k(s) = s$, $a = 0$, $b = 1$) possa condurre a risultati che non ci sembrano privi di interesse, confermando ancora una volta ciò che abbiamo asserito in altra Nota ⁽¹⁾, e cioè che lo studio dell'operazione funzionale

$$k(s) \varphi(s) + \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt$$

è di gran lunga più importante della risoluzione dell'equazione integrale di terza specie

$$k(s) \varphi(s) + \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = f(s)$$

(risoluzione che, del resto, noi abbiamo data lo scorso anno in questi « Rendiconti » nelle due Note: *Equazione integrale di terza specie ed applicazioni alle equazioni differenziali*).

Nel caso particolare che vogliamo prendere in considerazione è

$$V(s; \lambda) = \log \frac{s - \lambda}{s} \quad \text{per } \lambda < s$$

e

$$V(s; \lambda) = \log \frac{(\lambda - s)(1 - s)}{s^2} \quad \text{per } \lambda > s.$$

Ponendo

$$f(s; \lambda) = \varepsilon V(s; \lambda) \quad \text{per } \lambda < s,$$

$$f(s; \lambda) = \varepsilon V(s; \lambda) + 1 \quad \text{per } \lambda > s,$$

la funzione di λ

$$(1) \quad \int_0^1 f^2(s; \lambda) ds$$

(1) *Risoluzione dell'equazione integrale di terza specie*. « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo », t. L (1926).

ammette nell'intervallo $(0, 1)$ la derivata

$$\left(1 + \varepsilon \log \frac{1-\lambda}{\lambda}\right)^2 + \varepsilon^2 \pi^2 (1)$$

quindi la (1) è funzione assolutamente continua di λ in $(0, 1)$. Ne viene che se $p(s)$ è una funzione a quadrato sommabile in $(0, 1)$ l'integrale

$$\int_0^1 f(s; \lambda) p(s) ds$$

è pure funzione assolutamente continua di λ , e siccome per essa esiste l'integrale di Hellinger

$$\int_0^1 \frac{\left(d \int_0^1 f(s; \lambda) p(s) ds\right)^2}{d \int_0^1 f^2(s; \lambda) ds},$$

esisterà l'integrale nel senso di Lebesgue

$$\int_0^1 \frac{\left(\frac{d}{d\lambda} \int_0^1 f(s; \lambda) p(s) ds\right)^2}{\left(1 + \varepsilon \log \frac{1-\lambda}{\lambda}\right)^2 + \varepsilon^2 \pi^2} d\lambda.$$

In altri termini: l'operazione

$$\int_0^1 f(s; \lambda) p(s) ds$$

trasforma le funzioni $p(s)$ a quadrato sommabile in $(0, 1)$ nelle funzioni che si annullano per $\lambda = 0$ e sono integrali delle funzioni $q(\lambda)$ tali che il quoziente

$$\frac{q(\lambda)}{\log \lambda - \log(1-\lambda)}$$

risulti a quadrato integrabile in $(0, 1)$. Inversamente, se $q(\lambda)$ è una tale funzione, l'equazione integrale di prima specie

$$\int_0^1 f(s; \lambda) p(s) ds = \int_0^1 q(\lambda) d\lambda$$

(1) Cfr. loc. cit. nota (2) p. 271.

ammette nel campo delle funzioni a quadrato sommabile in $(0, 1)$ una soluzione $p(s)$ determinata quasi dappertutto in $(0, 1)$.

Ora essendo

$$\int_0^1 f(s; \lambda) p(s) ds = \varepsilon \int_0^1 V(s; \lambda) p(s) ds + \int_0^\lambda p(s) ds,$$

ne viene che anche l'operazione

$$\int_0^1 V(s; \lambda) p(s) ds$$

trasforma le funzioni $p(s)$ a quadrato sommabile in $(0, 1)$ in integrali tra 0 e λ di funzioni $q(\lambda)$.

Essendo poi ⁽¹⁾

$$\frac{d}{d\lambda} \int_0^1 V(s; \lambda) s^n ds = - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{n-i},$$

cioè

$$\frac{d}{d\lambda} \int_0^1 V(s; \lambda) s^n ds = - \int_0^1 \frac{s^n - \lambda^n}{s - \lambda} ds,$$

ne verrà che, sotto condizioni non molto restrittive di sviluppabilità di $p(s)$ in serie di potenze di s , si potrà scrivere

$$\frac{d}{d\lambda} \int_0^1 V(s; \lambda) p(s) ds = - \int_0^1 \frac{p(s) - p(\lambda)}{s - \lambda} ds.$$

Intanto il primo membro ha significato per una funzione qualunque $p(s)$ a quadrato sommabile in $(0, 1)$ per quasi tutti i valori di λ in $(0, 1)$.

Ciò fa pensare che lo stesso possa accadere del secondo membro. Che se poi ciò non fosse, ma si riuscisse a provare che quando i due membri hanno un significato coincidono, l'eguaglianza precedente potrebbe servire a dare un significato al secondo membro quando esso non l'ha.

L'eguaglianza inoltre potrebbe servire a definire il *valore principale* nel senso di Cauchy

$$\int_0^1 \frac{p(s)}{\lambda - s} ds = \lim_{n \rightarrow 0} \left[\int_0^{\lambda - n} \frac{p(s)}{\lambda - s} ds + \int_{\lambda + n}^1 \frac{p(s)}{\lambda - s} ds \right]$$

(1) Cfr. loc. cit. nota (2) p. 265.

anche quando il secondo membro non ha significato, ponendo quasi dappertutto in $(0, 1)$

$$\int_0^1 \frac{p(s)}{\lambda - s} ds = \frac{d}{d\lambda} \int_0^1 V(s; \lambda) p(s) ds + p(\lambda) \int_0^1 \frac{ds}{\lambda - s}$$

cioè

$$\int_0^1 \frac{p(s)}{\lambda - s} ds = \frac{d}{d\lambda} \int_0^1 V(s; \lambda) p(s) ds + p(\lambda) \log \frac{\lambda}{1 - \lambda},$$

perchè quest'eguaglianza sussisterà indubbiamente quando il primo membro ha significato, almeno sotto condizioni non molto restrittive per la $p(s)$.

Ciò fa ritenere che sia superflua l'introduzione nell'analisi del concetto di valore principale di un integrale, potendo esso sostituirsi con l'insieme di una integrazione e di una derivazione.

Per esempio, per l'equazione integrale

$$(1) \quad \varphi(\lambda) + \int_0^1 \frac{K(\lambda, s)}{\lambda - s} \varphi(s) ds = f(\lambda),$$

analogamente a quella di Fredholm, studiata da alcuni autori, si può fare l'osservazione che quando

$$(2) \quad K(\lambda, s) = \sum_i q_i(\lambda) p_i(s)$$

e le $q_i(\lambda)$ sono derivabili, si potrà scrivere, almeno in molti casi,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{K(\lambda, s)}{\lambda - s} \varphi(s) ds &= \sum_i q_i(\lambda) \int_0^1 \frac{p_i(s)}{\lambda - s} \varphi(s) ds = \log \frac{\lambda}{1 - \lambda} K(\lambda, \lambda) \varphi(\lambda) + \\ &+ \sum_i q_i(\lambda) \cdot \frac{d}{d\lambda} \int_0^1 V(s; \lambda) p_i(s) \varphi(s) ds. \end{aligned}$$

Ma quest'ultima parte si può scrivere

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \sum_i q_i(\lambda) \int_0^1 V(s; \lambda) p_i(s) \varphi(s) ds &= \sum_i q_i'(\lambda) \int_0^1 V(s; \lambda) p_i(s) \varphi(s) ds = \\ &= \frac{d}{d\lambda} \int_0^1 V(s; \lambda) K(s, \lambda) \varphi(s) ds = \int_0^1 V(s; \lambda) \frac{\partial K(s, \lambda)}{\partial \lambda} \varphi(s) ds. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (1) si vede che questa, con un'integrazione rispetto a λ , si riconduce ad una equazione di Fredholm di prima specie.

Orbene, la medesima riduzione si potrà fare indubbiamente sotto condizioni più larghe per la $K(\lambda, s)$, quando nel secondo membro della (2) figurerà una serie. Probabilmente quando $K(\lambda, s)$ è continua e lipschitziana rispetto a λ uniformemente rispetto ad s . A meno che non possa essere più conveniente lasciare la (1) sotto la forma

$$\left[1 + \log \frac{\lambda}{1 - \lambda} K(\lambda, \lambda) \right] \varphi(\lambda) + \frac{d}{d\lambda} \int_0^1 V(s; \lambda) K(s, \lambda) \varphi(s) ds - \\ - \int_0^1 V(s; \lambda) \frac{\partial K(s, \lambda)}{\partial \lambda} \varphi(s) ds = f(\lambda),$$

che potrà forse studiarsi con i metodi da me applicati all'equazione integrale di terza specie.

Geometria. — *Sur les congruences de M. Demoulin.* Nota di S. FINIKOFF, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. G. FUBINI.

La caractéristique de la quadrique de Lie relativement au déplacement le long d'une asymptotique $v = \text{const.}$ de la surface S se decompose en quatre droites: la tangente asymptotique (de la seconde famille) deux fois prise et deux génératrices (a_1) et (a_2) de la quadrique. Les droites (a) et les deux autres droites (b) qui correspondent au déplacement le long de l'asymptotique $u = \text{const.}$ engendrent quatre congruences de M. Demoulin⁽²⁾ intrinsèquement liées à la surface S . Les quatre sommets du quadrilatère gauche formé par les droites (a) et (b) sont les foyers des congruences. Les surfaces focales et la surface S composent l'enveloppe des quadriques.

§ 1. Prenons en un point $\bar{M}(\bar{x})$ ⁽³⁾ de la surface S le tétraèdre T aux sommets (\bar{x}) , (\bar{x}_u) , (\bar{x}_v) , (\bar{x}_{uv}) . En désignant les coordonnées par rapport au tétraèdre T par x' , y' , z' , t' nous avons l'équation de la quadrique de Lie⁽⁴⁾

$$(1) \quad x' t' - y' z' + \frac{\beta\gamma + \theta_{uv}}{2} t'^2 = 0.$$

(1) Nella seduta del 3 marzo 1929.

(2) DEMOULIN, *Sur la quadrique de Lie*, «Comptes Rendus», Paris, 1908, t. 147, pp. 493-496.

(3) $(x) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ - les quatre coordonnées homogènes.

(4) FUBINI-ČECH, *Geometria proiettiva differenziale*, p. 125. Nous adoptons les notations de cette ouvrage.

Les équations des droites de M. Demoulin sont

$$(a) \quad y' = at' \quad , \quad x' = az' - \frac{\beta\gamma + \theta_{uv}}{2} t'$$

$$(b) \quad z' = bt' \quad , \quad x' = bz' - \frac{\beta\gamma + \theta_{uv}}{2} t'$$

où

$$(2) \quad \begin{cases} a = -\frac{(l\beta)_v + \theta_v}{2} \pm A \quad , \quad b = -\frac{(l\gamma)_u + \theta_u}{2} \pm B \\ A^2 = -\frac{(l\beta)_v^2}{4} - \frac{(l\beta)_{vv}}{2} - \frac{1}{2} M \quad , \quad B^2 = -\frac{(l\gamma)_u^2}{4} - \frac{(l\gamma)_{uu}}{2} - \frac{1}{2} L. \end{cases}$$

Les foyers des congruences (a) sont indéterminés si

$$(3) \quad a_u + \frac{\beta\gamma + \theta_{uv}}{2} = 0.$$

Ce cas étant exclus les coordonnées mobiles des foyers sont

$$(ab) \quad ab - \frac{\beta\gamma + \theta_{uv}}{2}, a, b, 1.$$

Les développables de la congruence (a) sont définies par les équations

$$(4) \quad \left[\frac{\beta\gamma - (l\beta)_{uv}}{2} + A_u \right] du + \left[\frac{(A\beta)_v}{2} \pm \gamma B \right] dv = 0.$$

L'équation des asymptotiques de la surface focale (ab) est

$$(5) \quad \left\{ \left[\frac{\beta\gamma - (l\beta)_{uv}}{2} + A_u \right] du + \frac{(A\beta)_v}{\beta} dv \right\} \left\{ \frac{(B\gamma)_u}{\gamma} du + \left[\frac{\beta\gamma - (l\gamma)_{uv}}{\beta} + B_v \right] dv \right\} - \beta\gamma AB du dv = 0.$$

Les développables de la congruence (c) engendrée par la diagonale du quadrilatère aux sommets (ab) sont déterminées par l'équation

$$(6) \quad \left[\frac{(l\beta\gamma)_u}{\gamma} + A\beta \right] du^2 + \left[\frac{(l\gamma)_u}{2} + B_v - A_u \right] du dv - \left[\frac{(A\beta)_v}{\beta} + B\gamma \right] dv^2 = 0.$$

§ 2. Si une congruence (a) est la congruence W, l'équation (5) admet le changement du signe de A. Ce n'est possible que si

$$(I) \quad (A\beta)_v = 0 \quad , \quad (B\gamma)_u = 0$$

et dans ce cas elle est invariante quand on change le signe de B.

Donc, si une congruence de M. Demoulin est la congruence W, toutes les quatre le sont.

Nous obtenons la même condition en examinant quand les asymptotiques sur la surface S et sur une nappe de la surface focale correspondent.

Donc, si les asymptotiques correspondent sur deux nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie, elles correspondent sur toutes les cinq.

Si les développables d'une congruence (a) ou (b) correspondent au réseau conjugué de la surface S, la condition (I) est vérifiée; donc toutes les quatre congruences ont la même propriété et la surface (I) est une surface minimale-projective de M. Thomsen⁽¹⁾.

Les coefficients des formes fondamentales de la surface (I) sont déterminés par les équations⁽²⁾

$$L = -\frac{(l\gamma)_u^2}{2} - (l\gamma)_{uu} - \frac{V}{\gamma^2}, \quad M = -\frac{(l\beta)_v^2}{2} - (l\beta)_{vv} - \frac{U}{\beta^2},$$

$$[\gamma (l\gamma)_{uu} - \beta \gamma^2]_u + \frac{V'}{\gamma} - \frac{2V}{\gamma} (l\gamma)_v = 0,$$

$$[\beta (l\beta)_{vv} - \beta^2 \gamma]_v + \frac{U'}{\beta} - \frac{2U}{\beta} (l\beta)_u = 0.$$

Comme les droites de M. Demoulin forment maintenant le quadrilatère gauche du théorème de M. Bianchi sur la permutabilité des transformations asymptotiques, le couple des congruences engendrées par ses diagonales (c) est stratifiable⁽³⁾ c-a-d il existe ∞' surfaces Σ et ∞' surfaces Σ' dont les plans tangents en leurs points situés sur une diagonale du quadrilatère passent par l'autre et vice-versa.

Si nous prenons les coordonnées courantes d'un point de la surface Σ sous la forme⁽⁴⁾

$$(7) \quad a_1 b_1 + \lambda a_2 b_2 - \frac{\beta \gamma + \theta_{uv}}{2} (1 + \lambda), \quad a_1 + \lambda a_2, \quad b_1 + \lambda b_2, \quad 1 + \lambda,$$

(1) G. THOMSEN, Ueber eine liniengeometrische Behandlungsweise der projektiven Flächen-theorie und die projektive Geometrie der Systeme von Flächen zweiter Ordnung, « Abhandl. Math. Seminar », Hamburg, 1926, B. 4, p. 232.

(2) $U = \varphi(u)$, $V = \psi(v)$. $U' = \frac{dU}{du}$, $V' = \frac{dV}{dv}$.

(3) G. FUBINI, Su alcune classi di congruenze di rette e sulle trasformazioni delle superficie, « R. Annali di Mat. », 1924 (4), t. I, p. 241. Cfr. la Note d'auteur Sur les congruences stratifiables, « Comptes Rendus », Paris, 1927, t. 185, p. 376 et l'article du même titre dans « Rend. Palermo » (sous presse).

(4) a_1 et a_2 , b_1 et b_2 se différencient par les signes de A et de B.

λ est déterminé par les équations

$$(8) \quad \begin{cases} (I\lambda)_u = \frac{\beta\gamma - (I\beta)_{uv}}{2A} + 2B, \\ -(I\lambda)_v = \frac{\beta\gamma - (I\gamma)_{uv}}{2B} + 2A, \end{cases}$$

La condition d'intégrabilité du système (8) est la condition (I) d'où il suit la proposition.

L'équation (6) montre que les développables des congruences (c) correspondent si

$$\left(I \frac{\beta}{\gamma}\right)_{uv} = 0.$$

Donc pour les surfaces isothermes-asymptotiques de la classe (I) le couple (c) est stratifiable conjugué⁽¹⁾ et contient deux congruences R.

§ 3. Les foyers du rayon (a_1) étant situés dans les plans focaux du rayon (a_2) et vice-versa, il est naturel d'examiner si le couple (a) est stratifiable⁽²⁾.

La surface Σ est lieu des points

$$(9) \quad a_1(b_1 + \lambda b_2) - \frac{\beta\gamma + \theta_{uv}}{2}(I + \lambda), \quad a_1(I + \lambda), \quad b_1 + \lambda b_2, \quad I + \lambda$$

situés sur la droite (a_1); son plan tangent passe par la droite (a_2); donc λ vérifie les équations

$$(10) \quad \begin{cases} \lambda_u = \lambda^2 \left[\frac{A\beta}{2B} - \frac{1}{2}(I\beta\gamma)_u \right] + \lambda \left[\frac{A\beta}{B} + 2B \right] + \frac{A\beta}{2B} + \frac{1}{2}(I\beta\gamma)_u \\ \lambda_v = \lambda^2 \left[\frac{\beta\gamma - (I\gamma)_{uv}}{4B} - \frac{1}{2}(I\beta)_v \right] + \lambda \left[\frac{B\gamma}{A} + \frac{\beta\gamma - (I\gamma)_{uv}}{2B} \right] + \\ + \frac{\beta\gamma - (I\gamma)_{uv}}{4B} + \frac{1}{2}(I\beta)_v. \end{cases}$$

Le système (10) est complètement intégrable et il existe ∞' surface Σ si

$$(11) \quad A_u = 0.$$

Il est évident que la condition (11) étant vérifiée il existe ∞' surface Σ' avec les points situés sur les droites (a_2) et plans tangents passant par les droites (a_1), donc le couple (a) est stratifiable.

(1) G. FUBINI, loc. cit.

(2) G. FUBINI, loc. cit.

Tous les deux couples (a) et (b) sont stratifiables.

$$(II) \quad A_u = 0, \quad B_v = 0.$$

Le cas $A = 0$, $B = 0$ étant exclus, les quantités fondamentales de la surface S pour les paramètres bien choisies sont déterminées par les équations (1)

$$L = -\frac{(l\gamma)_u^2}{2} - (l\gamma)_{uu} + 1, \quad M = -\frac{(l\beta)_v^2}{2} - (l\beta)_{vv} + 1,$$

$$\beta_v = \gamma_u,$$

$$(l\beta)_{uv} - \frac{U}{\beta} = (l\gamma)_{uv} - \frac{V}{\gamma} = \beta\gamma.$$

La surface (II) est donc une surface R.

Les développables des congruences (a) correspondent et le couple (a) est stratifiable conjugué si

$$(III) \quad A_u = 0, \quad (A\beta)_v = 0.$$

Chaque congruence (a) est alors la congruence R.

Il suit de l'équation (III)

$$(B\gamma)_u = 0;$$

donc la surface (III) est de la classe (I). Elle est la surface R elle-même, déterminée par les coefficients des formes fondamentales

$$(IIIa) \quad \beta = 1, \quad \gamma = u, \quad M = C, \quad L = \frac{5}{18} u^{-2} + C' u^{-\frac{2}{3}}$$

ou

$$(IIIb) \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1, \quad M = C, \quad L = C'$$

C et C' étant des constantes.

Dans le second cas tous les trois couples (a), (b) et (c) sont stratifiables conjugués.

§ 4. Les diverses propriétés des congruences de M. Demoulin déterminent et d'autres classes des surfaces. Par exemple, si les congruences (a₁) et (b₂) sont les transformées de Laplace, la surface S vérifie la condition

$$(12) \quad \left[\frac{\beta\gamma - (l\gamma)_{uv}}{2} - B_v \right] \left[\frac{\beta\gamma - (l\beta)_{uv}}{2} + A_u \right] = AB\beta\gamma - \frac{(A\beta)_v (B\gamma)_u}{\beta\gamma}.$$

$$(1) \quad U = \varphi(u), \quad V = \phi(v).$$

Si la même propriété appartient aux congruences (a_2) et (b_1) l'équation (13) a lieu.

$$(13) \quad [\beta\gamma - (l\gamma)_{uv}] A_u = [\beta\gamma - (l\beta)_{uv}] B_v.$$

Si les développables de la congruence (G) correspondent aux asymptotiques de la surface S, nous avons les équations (1)

$$(14) \quad \begin{cases} (B\gamma)_u + A\beta\gamma = 0, \\ (A\beta)_v + B\beta\gamma = 0. \end{cases}$$

Elles correspondent à une famille des développables de chaque congruence (a) et (b).

§ 5. Les congruences de M. Demoulin dégénèrent et les quatre nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie confondent (2) si la condition

$$(IV) \quad A = 0, \quad B = 0$$

est vérifiée.

Les coefficients des formes fondamentales de la surface (IV) sont déterminés par les équations

$$L = -\frac{(l\gamma)_u^2}{2} - (l\gamma)_{uu}, \quad M = -\frac{(l\beta)_v^2}{2} - (l\beta)_{vv},$$

$$(l\beta)_{uv} + \frac{1}{\beta} = (l\gamma)_{uv} + \frac{1}{\gamma} = \beta\gamma.$$

Il est évident que la surface (II) est projectivement applicable sur les surfaces R de la classe (IV).

Les quatre foyers (ab) confondus engendrent la surface S' qui a la même quadrique pour sa quadrique de Lie (3). Les asymptotiques des surfaces S et S' correspondent.

En multipliant les quatre coordonnées homogènes (ab) par le facteur commun $\sqrt{\beta\gamma}$ nous avons pour les coefficients (indiqués par l'accent) des formes fondamentales de la surface S' des valeurs

$$\theta' = \theta, \quad \beta' = \gamma, \quad \gamma' = \beta, \quad L' = M, \quad M' = L.$$

Donc deux surfaces ne diffèrent que par le changement des paramètres u et v .

Pour les surfaces isothermes-asymptotique de la classe (IV) les deux surfaces S et S' sont projectivement identiques.

(1) Qui ne sont pas indépendantes.

(2) M. DEMOULIN, *Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques*, « Comptes Rendus », Paris, 1924, t. 179, pp. 20-23; L. GODAUX, *Sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie*, « Bulletin Acad. Belgique », 1928 (5), t. 14, pp. 158, 175, 335, 345, 455; *Sur les surfaces projectivement applicables ayant mêmes quadriques de Lie*, « Anals do Porto », 1928, t. 15, p. 157.

(3) M. DEMOULIN, loc. cit.

Meccanica. — *Intorno al moto di due masse variabili che si attirano con la legge di Newton.* Nota di M. MANARINI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. P. BURGATTI.

Dopo la giustificazione data dal prof. Levi-Civita in una Nota recente ⁽²⁾, della validità dell'equazione

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F},$$

per il moto di una massa variabile m , si presenta l'opportunità di riprendere le belle ricerche del prof. Armellini ⁽³⁾, che non sono fondate su quella equazione, per vedere quali risultati permangano e quali si mutano.

Già dall'equazioni poste dal sig. Vranceanu ⁽⁴⁾ si vede che il problema delle due masse variabili che si attirano con la legge di Newton è, nella sua generalità, assai difficile. Ma qui io ho introdotta un'ipotesi semplice e plausibile circa il variare delle masse, la quale dà modo di semplificare la ricerca e di ottenere risultati paragonabili con quelli dell'Armellini e del Pizzetti ⁽⁵⁾.

1. Siano date le due masse variabili puntiformi m_1 e m_2 poste rispettivamente nei punti O e P, e che si attirano con la legge di Newton. Vogliamo studiare il moto relativo di P, rispetto ad O.

Dette \mathbf{F} la forza newtoniana agente fra P ed O, $\mathbf{v}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{j}_2$ le velocità ed accelerazioni rispettivamente dei punti O e P, \mathbf{v} e \mathbf{j} la velocità e l'accelerazione relativa di P rispetto ad O, in base al teorema del prof. Levi-Civita si hanno le equazioni del moto

$$(1) \quad \mathbf{F} = \frac{d(m_2 \mathbf{v}_2)}{dt} = \frac{dm_2}{dt} \mathbf{v}_2 + m_2 \mathbf{j}_2,$$

$$(2) \quad -\mathbf{F} = \frac{d(m_1 \mathbf{v}_1)}{dt} = \frac{dm_1}{dt} \mathbf{v}_1 + m_1 \mathbf{j}_1,$$

(1) Nella seduta del 3 marzo 1929.

(2) *Sul moto di un corpo di massa variabile*, «Rend. R. Acc. Lincei», novembre 1928.

(3) *Il problema dei due corpi di masse variabili*, «Memorie della Società italiana dei XL», serie 3^a, t. XIX; *Sulla forma della traiettoria nel problema dei due corpi di masse crescenti, ecc.*, «Rend. R. Acc. Lincei», ottobre 1915.

(4) *Sopra l'equazione del problema di due corpi di masse variabili*, «Rend. R. Acc. Lincei», dicembre 1928.

(5) P. PIZZETTI, *Sul problema dei due corpi nel caso di masse variabili*, «Rendiconti R. Acc. Lincei», agosto 1915 e idem. ottobre 1915.

e per le relazioni

$$(3) \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_1, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1,$$

si trae subito, con facile calcolo,

$$(4) \quad \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \mathbf{F} = \frac{d(m_2 \mathbf{v})}{dt} + m_2 \mathbf{v}_1 \cdot \frac{d \log \frac{m_2}{m_1}}{dt}.$$

Qui facciamo l'ipotesi che m_2 ed m_1 , pur variando entrambe si mantengano in rapporto costante k ; ossia si abbia sempre $m_2/m_1 = k$.

Allora la (4) si riduce a

$$(5) \quad \mathbf{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{k+1} \mathbf{v} \right)$$

ove con m si è indicata la massa m_2 .

Questa esprime anzitutto che, nel caso considerato tutto avviene come se O fosse fisso ed il punto mobile P avesse la massa $m/(k+1)$, rimanendo invariata la forza d'attrazione. Si noti come nel caso classico delle due masse costanti si ha l'identico risultato.

Moltiplicando la (5) vettorialmente per $(A - O)$, tenendo presente la seconda delle (3), si ricava

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \{ (A - O) \wedge m \mathbf{v} \} = 0, \quad \text{ossia} \quad (A - O) \wedge m \mathbf{v} = 2\mathbf{c}$$

ove \mathbf{c} è un vettore costante.

La seconda delle (6) ci assicura che nel caso in esame la traiettoria è piana; quest'osservazione acquista speciale importanza, quando si pensi che la legge di variazione delle masse Sole-Terra, possa avvicinarsi a quella di sopra considerata⁽¹⁾.

La seconda delle (6) riferita alle coordinate polari dà:

$$(7) \quad r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{2c}{m},$$

ossia, nel caso considerato, la velocità angolare non è costante, bensì inversamente proporzionale alla massa del punto mobile.

Trattandosi della legge di Newton, detto \mathbf{u} il vettore unitario paral-

(1) L'ipotesi $m_2/m_1 = k$ nel caso astronomico non sembra del tutto improbabile. In sostanza viene a dire che se ad un certo momento la massa del Sole è, ad esempio, n volte maggiore di quella della Terra, esso attirerà nel tempo t una massa meteorica n volte maggiore di quella attirata dalla Terra.

lelo a $P - O$, essendo $r = \text{mod}(P - O)$, ed indicando con τ la costante d'attrazione, la (5) diviene

$$(8) \quad -\frac{k+1}{k} \frac{m^2}{r^2} a = \frac{d(mv)}{dt},$$

e moltiplicando scalarmente per a , in forza della (7) si ha

$$(9) \quad m \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{dm}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{4c^2}{mr^3} + \frac{k+1}{k} \cdot \frac{m^2}{r^2}.$$

Eseguendo la trasformazione $\tau = \int_0^t \frac{dt}{m}$, le (8) e (9) danno il sistema:

$$(10) \quad r^2 \frac{d\theta}{dt} = 2c, \quad \frac{d^2 r}{d\tau^2} = \frac{4c^2}{r^3} - \frac{m^3}{r^2} \cdot \frac{k+1}{k}$$

che è dello stesso tipo di quello considerato da altri autori, partendo da altri principî e studiato in modo particolare dall'Armellini.

La seconda delle (10) si può scrivere

$$(11) \quad \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} = -\frac{1}{r} + \frac{m^3}{4c^2} \cdot \frac{k+1}{k}.$$

L'integrale di quest'equazione si può porre, per cose note, sotto la forma

$$(12) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \cos \theta + \left(\frac{d \frac{1}{r}}{d\theta} \right)_0 \sin \theta + \frac{k+1}{k} \cdot \frac{1}{4c^2} \int_0^\theta m^3 \sin(\theta - \xi) d\xi$$

ove m^3 , funzione del tempo t , si può pensare funzione di θ , ed in essa

sostituita θ con ξ ; $\frac{1}{r_0}$ e $\left(\frac{d \frac{1}{r}}{d\theta} \right)_0$ sono i valori di $\frac{1}{r}$ e $\frac{d \frac{1}{r}}{d\theta}$ per $\theta = 0$.

Possiamo osservare con l'Armellini che la quadratura contenuta in (12) non è eseguibile non essendo nota la legge di dipendenza di m da θ .

Come nel caso dell'Armellini la (12) fa vedere che per le ipotesi fisiche possibili su m , per ogni valore finito di θ , $\frac{1}{r}$ risulta finito, e perciò il punto P non potrà cadere eventualmente su O , se non dopo aver compiuto intorno ad O un numero infinito di rivoluzioni.

2. Detto m_0 il valore iniziale di m poniamo, seguendo il Pizzetti

$$(13) \quad \varphi = \frac{k+1}{k} \cdot \frac{1}{4c^2} (m^3 - m_0^3).$$

Con ciò la (11) diviene

$$(14) \quad \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{k+1}{k} \cdot \frac{m_0^3}{4c^2} + \varphi.$$

Possiamo osservare che se la massa m fosse rimasta invariata, l'equazione differenziale della traiettoria sarebbe stata la (14) privata della funzione φ .

Perciò è la funzione φ che produce la perturbazione della traiettoria relativa del punto P. Assumendo come incognita $\frac{1}{r} = \frac{k+1}{k} \cdot \frac{1}{4c^2} m_0^3$ dalla (14), integrando si ha:

$$(15) \quad \frac{1}{r} - \frac{k+1}{k} \cdot \frac{1}{4c^2} m_0^3 = A \sin \theta + B \cos \theta + \int_0^\theta \varphi_\xi \sin(\theta - \xi) d\xi$$

dove A e B sono costanti arbitrarie e φ_ξ indica la φ , pensata funzione di θ , e sostituita in essa la θ con la ξ .

Supponiamo anche noi che l'orbita kepleriana corrispondente alla massa costante m_0 risulti *ellittica*. (Il caso parabolico od iperbolico si tratta pure facilmente).

Precisamente, quest'orbita sia

$$(16) \quad \frac{1}{r_1} = \frac{k+1}{k} \cdot \frac{m_0^3}{4c^2} \{ 1 + e_0 \cos(\theta + \gamma) \}$$

ove $0 < e_0 < 1$, $0 \leq \gamma \leq 2\pi$.

Per poter confrontare l'orbita (15) con la (16), osserviamo che e_0 e γ sono legate alle condizioni iniziali ($\theta = 0$) del nostro problema dalle relazioni:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r} \right)_{\theta=0} &= \left(\frac{1}{r_1} \right)_{\theta=0} = \frac{k+1}{k} \cdot \frac{m_0^3}{4c^2} (1 + e_0 \cos \gamma); \\ \left(\frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} \right)_{\theta=0} &= \left(\frac{d}{d\theta} \frac{1}{r_1} \right)_{\theta=0} = -\frac{k+1}{k} \cdot \frac{m_0^3}{4c^2} e_0 \sin \gamma. \end{aligned}$$

Allora, le costanti A e B della (15) hanno i valori

$$A = -\frac{k+1}{k} \cdot \frac{m_0^3}{4c^2} e_0 \sin \gamma, \quad B = \frac{k+1}{k} \cdot \frac{m_0^3}{4c^2} e_0 \cos \gamma,$$

per modo che la (15) diviene

$$(17) \quad \frac{1}{r} = \frac{k+1}{k} \cdot \frac{m_0^3}{4c^2} \{ 1 + e_0 \cos(\theta + \gamma) \} + \int_0^\theta \varphi_\xi \sin(\theta - \xi) d\xi.$$

Dal confronto di (17) con (16) si vede che

$$(18) \quad \Phi(\theta) = \int_0^\theta \varphi_\xi \sin(\theta - \xi) d\xi$$

rappresenta la perturbazione che si esercita su $\frac{1}{r}$ per le variazioni di masse da noi considerate. Per $m = m_0$ costantemente, si ha $\varphi_\xi \equiv 0$ e la (17) si muta nella (16).

Così pure, ragionando come il Pizzetti, si vede subito che per un dato valore dell'anomalia θ , se m è crescente col tempo, il raggio vettore nel moto perturbato è minore di quello che sarebbe se la massa m non fosse aumentata.

L'inverso dicasi nel caso della massa m decrescente.

Supponiamo anche noi che la massa m durante una intera rivoluzione aumenti di Δm ; la perturbazione su $\frac{1}{r}$ durante la prima rivoluzione sarà data, per le (13) e (18), da

$$\Phi(2\pi) = \frac{k+1}{k} \frac{1}{4c^2} \int_0^{2\pi} (m^3 - m_0^3) \sin(2\pi - \xi) d\xi$$

da cui, essendo $m = m_0 + \Delta m$, trascurando la parte negativa:

$$\Phi(2\pi) < \frac{2}{4c^2} \cdot \frac{k+1}{k} (\overline{\Delta m^3} + 3m_0 \overline{\Delta m^2} + 3m_0^2 \overline{\Delta m}).$$

Supposto che Δm sia piccolissimo si ha:

$$(19) \quad \Phi(2\pi) < \frac{6}{4c^2} \cdot m_0^2 \cdot \frac{k+1}{k} \cdot \Delta m.$$

Nel caso del moto non perturbato per $\theta = 2\pi$ si ha:

$$\frac{1}{r_0} = \frac{k+1}{k} \cdot \frac{m_0^3}{4c^2} (1 + e_0 \cos \gamma)$$

onde la (19) ci dà, riferendoci al raggio vettore r :

$$(20) \quad \frac{r - r_0}{r} < \frac{6}{1 + e_0 \cos \gamma} \cdot \frac{\Delta m}{m_0}.$$

Dunque: Per piccolissimi accrescimenti della massa m in una intera rivoluzione e per piccole eccentricità, la perturbazione unitaria sul raggio vettore nella rivoluzione completa non può superare 6 volte il rapporto fra l'accrescimento della massa e la massa iniziale. È questo un risultato che, con lieve differenza, nel caso del Pizzetti, era valido qualunque fosse il modo di cre-

scere della massa, mentre come si vede nel caso nostro vale solo per piccolissime variazioni di questa.

Così pure, se Δm , l'accrescimento di m corrispondente all'anomalia θ , si mantiene piccolissimo e cresce proporzionalmente a θ stesso, potremo sostituire nella φ , $m^3 - m_0^3$ con $3 m_0^2 \Delta m$ e quindi con $\lambda \theta$, con λ piccolissimo; perciò la (19), ove si ponga $\varphi_\xi = \lambda \xi$, diviene

$$(21) \quad \frac{1}{r} = \frac{k+1}{k} \cdot \frac{m_0^3}{4c^2} \{ 1 - e_0 \cos(\theta + \gamma) \} + \lambda(\theta - \sin \theta).$$

Derivando abbiamo

$$(22) \quad \frac{d \frac{1}{r}}{d\theta} = - \frac{k+1}{k} \cdot \frac{m_0^3}{4c^2} e_0 \sin(\theta + \gamma) + \lambda(1 - \cos \theta).$$

Si osservi che per $\theta = 2n\pi - \gamma$ (n intero qualsiasi), la traiettoria (16) della massa costante ha sempre il perielio, mentre per questi valori la (22) diviene

$$(23) \quad \left(\frac{d \frac{1}{r}}{d\theta} \right)_{\theta = 2n\pi - \gamma} = \lambda(1 - \cos \gamma).$$

Essendo λ assai piccolo, si vede che per γ molto prossimo a zero, la derivata di $\frac{1}{r}$ per quei valori di θ , viene pressochè ad annullarsi, mentre è di segno contrario nel loro intorno; i perieli non mutano quindi di direzione e questa è assai prossima alla direzione del perielio della (16). Se γ è molto discosto da zero e da 2π , ossia prossimo od uguale a π , la derivata di $\frac{1}{r}$ non è più zero o prossima a zero per $\theta = 2n\pi - \gamma$ e quindi la direzione del perielio della (21) si scosta dalla direzione del perielio della (16), mentre la (22) assicura che i successivi perieli della (21) mantengono direzione costante. Insomma: se la velocità iniziale è perpendicolare al raggio vettore ($\gamma = 0$) o molto prossima ad essere tale (γ assai piccolo) con la suddetta maniera di variare della massa si conserva la direzione dei perieli e con piccolo scostamento da quella del perielio dell'orbita (16) della massa costante. Negli altri casi questo scostamento è più marcato pur conservando i perieli la medesima direzione.

Se supponiamo che il coefficiente λ non sia costante ma, pur mantenendosi piccolissimo, vari da rivoluzione a rivoluzione, oppure vari con discontinuità mantenendosi costante nei successivi determinati periodi di tempo, allora la (23) varrà corrispondentemente ad ognuno di quei periodi ed alla fine di ciascun periodo si risconterà uno scostamento della direzione del perielio.

Fisiologia. — *Ricerche sull'arginasi.* — VII. *Carattere ureotelico del metabolismo azotato dei cheloni.* Nota di A. CLEMENTI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

a) OGGETTO E SCOPO DEL LAVORO. — Nel 1913 furono da me scoperti nell'Istituto di Fisiologia di Heidelberg, diretto dal prof. A. Kossel, una serie di fatti, su cui riferii nel settembre dello stesso anno al IX Congresso Internazionale di Fisiologia a Groningen e che mi condussero alla conclusione, che *l'arginasi presente nel fegato dei vertebrati a ricambio ureotelico (mammiferi, anfibi e pesci), è assente nel fegato dei vertebrati a ricambio uricotelico (rettili e uccelli)* (2). Da questi risultati sperimentali dedussi che «la presenza dell'arginasi nel fegato è da considerare come un indice biochimico del carattere ureotelico e la sua assenza come un indice biochimico del carattere uricotelico del metabolismo azotato dell'organismo». Continuai nello stesso Istituto tali ricerche per tutto il 1914; fui costretto ad interromperle per lo scoppio della guerra europea, ma le ripresi subito in Italia.

Esse vennero confermate negli anni successivi ampiamente da altri sperimentatori, sia in Germania che in America (3). Fin dal 1913-14, uno dei fatti da me stesso messi in evidenza attirò la mia attenzione, perchè poteva sembrare una eccezione alla legge da me enunciata, la presenza cioè dell'arginasi nel fegato dei cheloni, la quale contrasta col'assenza del fermento nel fegato delle altre classi di rettili e di uccelli (sauropsidi). Vagliando criticamente le pochissime notizie allora esistenti sulla composizione chimica dell'urina dei cheloni, feci rilevare come in base ai dati analitici pubblicati nel 1859 da Schiff (4), si poteva considerare presente l'urea nell'urina dei cheloni, e quindi non esitai a sostenere per il primo, che il ricambio azotato dei cheloni, contrariamente a quanto era fino allora ammesso, sia ureotelico, a differenza di quello delle altre classi di rettili, che è uricotelico. Interpretai la esistenza di questo tipo di metabolismo azotato e la presenza dell'arginasi nel fegato di questi animali come un carattere biochimico, che la classe dei cheloni (la quale nella scala zoologica è la più bassa dei rettili e quindi la più vicina agli anfibi) ha in comune con gli anfibi, piuttosto che con gli altri sauropsidi (5).

Interruppi queste ricerche a causa dello scoppio della guerra italo-austriaca; favorevoli alla tesi da me sostenuta precedentemente furono i risultati del dosaggio dell'urea nell'urina di qualche chelone pubblicati da alcuni autori durante il periodo della guerra (6). Questi dati analitici però, non essendo sistematici e, anzi, in parte contraddittori, sono insufficienti per condurre alla soluzione definitiva dello importante problema.

Ho creduto di fondamentale importanza eseguire esperimenti fisiologici esaurienti, per dimostrare in modo incontrovertibile, con un'*experimentum crucis*, che il metabolismo azotato dei cheloni è ureotelico e non uricotelico.

(1) Nella seduta del 3 febbraio 1929.

(2) CLEMENTI A., *Riassunti delle comunicazioni al IX Congresso Internazionale dei Fisiologi a Groningen, 1913*, «Archivio di Fisiologia», XII-XIII.

(3) HUNTER e JAMES, «Journal of Physiology», 59, 1924.

(4) SCHIFF, «Liebig's Annalen», III, 318. 1859.

(5) CLEMENTI, «Rend. R. Accad. dei Lincei». Vol. XXIII, anno 1914.

(6) LEWIS, «Science», 48, 1918.

Ho cercato di stabilire colle presenti ricerche, se si attuano nell'organismo dei cheloni le due condizioni sperimentali, necessarie e sufficienti, per potere affermare, che il loro metabolismo azotato è ureotelico, e propriamente ho ricercato:

1. - Se l'urea si trova presente nell'urina dei cheloni in quantità assolutamente prevalente rispetto all'acido urico, analogamente a quanto è noto per l'urina dei mammiferi, degli anfibì e dei pesci.

2. - Se l'ammoniaca somministrata per via orale ai cheloni venga trasformata in urea come nei mammiferi e non in acido urico come negli uccelli.

b) METODO DI INDAGINE. — I cheloni che ho sottoposto ad esperimento sono stati: La testuggine terrestre (*Testudo graeca*), la testuggine d'acqua dolce (*Emys Europaea*) e la testuggine di mare (*Thalassochelys*). Gli animali venivano posti in gabbie speciali, la cui parete inferiore era rappresentata da una reticella a maglie sottili capace di trattenere le fecce e di lasciare passare le urine; queste, scorrendo su un piano metallico a pareti oblique, si raccoglievano in un bicchiere di vetro, nel quale era posto il toluolo, allo scopo di evitare, per quanto fosse possibile, la fermentazione ammoniacale dell'urea. L'urea veniva dosata, applicando il metodo di Marshall (modificato da Van Slike e G. Gullen), l'ammoniaca col metodo di Folin e l'acido urico col metodo di Folin-Shaffer; quest'ultimo metodo però, data la piccola quantità di urina emessa giornalmente dai cheloni, fu modificato opportunamente e trasformato in semimicrometodo.

c) RISULTATI SPERIMENTALI. — Ho creduto opportuno anzitutto dosare la quantità di urea e di acido urico presenti nell'urina di *Bufo*, per potere paragonare i valori ottenuti dall'urina di un animale sicuramente ureotelico, con quelli, che si ottengono dall'urina dei cheloni. A tal uopo ho sottoposto all'analisi otto campioni di urina ricavata direttamente dalla vescica urinaria di otto grossi esemplari di *Bufo* e dai dati sperimentali ottenuti, risultò che, l'acido urico è presente in quantità praticamente non dosabile, mentre invece l'urea oscilla da un massimo di 630 mgr. $\frac{0}{100}$ a un minimo di 300 mgr. $\frac{0}{100}$, e quindi si trova presente in media nella quantità di circa 470 mgr. $\frac{0}{100}$.

Ho successivamente analizzato una parte dell'urina raccolta giornalmente da sei esemplari di *testudo graeca*, che si alimentavano abbondantemente con verdura; dai dati ricavati in queste analisi, risultò che, mentre l'acido urico era presente in tracce minime non dosabili praticamente, l'urea era presente in quantità oscillanti da un massimo di 550 mgr. $\frac{0}{100}$ a un minimo di 410 mgr., cioè in una quantità media di circa 510 mgr. $\frac{0}{100}$.

Nell'urina emessa da un grosso esemplare di tartaruga di mare trovai in 20 cmc. di urina 12 mgr. di urea corrispondenti a 600 mgr. $\frac{0}{100}$, mentre in 250 cmc. di urina trovai mgr. 15 di acido urico corrispondenti a 150 mgr. $\frac{0}{100}$.

L'insieme di questi risultati dimostra, che nell'urina dei cheloni la quantità di urea è assolutamente prevalente su quella dell'acido urico, e si trova in una quantità che è sensibilmente uguale a quella, che si riscontra nell'urina degli anfibì.

Ho eseguito successivamente delle esperienze nelle quali ho analizzato l'urina emessa dalla *Testudo* e dall'*Emys* alimentate abbondantemente con verdura e con pane, prima e dopo la somministrazione per via orale di carbonato di ammonio. Una *testudo graeca* (A) del peso corporeo di gr. 540 fu sottoposta ad esperimento dal 19 giugno al 7 luglio 1928. Nei primi otto giorni furono dosati l'urea e l'acido urico presenti in tutta l'urina emessa ogni 24 o 48 ore; il contenuto dell'urina in urea calcolato per mille oscillò da un minimo di mgr. 280 ‰ a un massimo di mgr. 630 ‰ (media delle analisi di cinque giorni mgr. 477 ‰) l'acido urico si riscontrò presente in quantità minime non dosabili. (Tab. I).

TABELLA I.

Prima della somministrazione di carbonato d'ammonio.

<i>Testudo graeca</i> (gr. 540)	Urina emessa e analizzata c. c.	NH ₃ preesistente mgr.	NH ₃ presente dopo l'azione dell'ureasi mgr.	Aumento dell' NH ₃ per azione dell'ureasi mgr.	UREA		ACIDO URICO
					corrispond. all' NH ₃ neoformata mgr.	‰ mgr.	
19-6-928	12	0.6	4.0	3.4	6.0	500	—
20-6-928	13	0.65	4.2	3.55	6.2	476	—
21-6-928	20	0.7	4.0	3.3	5.6	280	—
22-6-928	10	0.6	4.2	3.6	6.3	630	—
23-6-928	18	0.55	5.9	5.35	9.0	500	—
24-25-6-928	25	—	—	—	—	—	quantità non dosab.
26-27-6-928	18	—	—	—	—	—	quantità non dosab.

Nei 10 giorni successivi si somministrò per bocca giornalmente una quantità di carbonato di ammonio di circa 4 mgr. *pro die*; il contenuto dell'urina in urea per mille oscillò da un minimo di 350 mgr. ‰ ad un massimo di mgr. 880 ‰ (media di 4 giorni mgr. 679 ‰), mentre l'acido urico restò presente in quantità minime non dosabili; si può quindi affermare che in questo esperimento il contenuto dell'urina in urea, quasi si raddoppiò in seguito alla somministrazione di carbonato di ammonio, mentre quella dell'acido urico rimase invariata. (Tab. II).

TABELLA II.

Durante la somministrazione di carbonato d'ammonio.

Testudo graeca (gr. 540)	Urina emessa e analizzata c. c.	NH ₃ sommini- strata mgr.	NH ₃ preesi- stente mgr.	NH ₃ presente dopo l'azione dell'ureasi mgr.	Aumento dell'NH ₃ per azione dell'ureasi mgr.	UREA		ACIDO URICO
						corrispon- dente all'NH ₃ neo- formata mgr.	‰ mgr.	
27-6-928	10	4.0	1.80	6.8	5.0	8.8	880	—
28-6-928	12	2.0	1.60	5.8	4.2	7.4	644	—
29-6-928	10	4.0	1.4	6.2	4.8	8.4	840	—
30-6-928	13	4.0	2.76	5.4	2.6	4.6	353	—
1-2-7-928	23	8.0	—	—	—	—	—	quantità non dos.
3-4-7-928	29	8.0	—	—	—	—	—	quantità non dos.
5-6-7-928	33	8.0	—	—	—	—	—	quantità non dos.

Una seconda *testudo graeca* (B) del peso corporeo di gr. 230 fu sottoposta ad esperimento dal 15 al 26 luglio 1928. Nei primi otto giorni la quantità dell'urea presente nell'urina oscillò da mgr. 300 a mgr. 600 ‰ (media di otto giorni mgr. 462 ‰). Nei due ultimi giorni in cui si somministrò per bocca carbonato di ammonio, l'urea presente nell'urina era di mgr. 857 ‰. Anche in questa esperienza, come nella precedente in seguito alla somministrazione di carbonato per bocca la quantità per mille di urea presente nell'urina si raddoppiò.

Una grossa *Emys Europaea* (del peso corporeo di gr. 475) fu sottoposta ad esperimento dal 25 al 30 luglio 1928. Nei primi tre giorni il contenuto dell'urina in urea per mille, oscillò da un minimo di 94 mgr. ad un massimo di 185 mgr. (media 139 mgr. per mille), mentre l'acido urico si riscontrò presente nella quantità di mgr. 0.029 ‰. Nei tre giorni successivi si somministrò per bocca del carbonato di ammonio; il contenuto dell'urina in urea per mille oscillò da un minimo di 369 mgr. ‰ a un massimo di 382 mgr. ‰ (media 375 mgr. ‰) mentre la quantità dell'acido urico restò quasi immutata e corrispondente a mgr. 0.033 ‰. Anche in questa esperienza come nelle precedenti in seguito alla somministrazione

di carbonato di ammonio per bocca, il contenuto dell'urina di *Emys euro paea* in urea, presentò un aumento di più del doppio, mentre quello dell'acido urico rimase pressochè invariato.

d) CONCLUSIONI. — Dall'insieme delle esperienze risulta che:

1. — L'acido urico nell'urina di *Testudo Graeca* e di *Emys Europaea*, come in quella di *Bufo* si trova presente in quantità piccolissime (che in genere si possono considerare praticamente non dosabili).

2. — Il contenuto in urea per mille dell'urina di *Testudo* e di *Emys*, nel periodo estivo, corrisponde approssimativamente a quello dell'urina di *Bufo* nello stesso periodo dell'anno (gr. 0.5 per mille circa in media).

3. — La somministrazione di ammoniaca per via orale alla *Testudo* e all'*Emys*, provoca un fortissimo aumento nel contenuto *prodie* e per mille in urea dell'urina, che si può raddoppiare o triplicare e non in quello dell'acido urico, contrariamente a quanto avviene negli animali uricotelici (uccelli), in cui l'ammoniaca somministrata per bocca provoca un aumento fortissimo nel contenuto in acido urico dell'urina.

Questi risultati dimostrano nel modo più esauriente, che il *metabolismo azotato dei cheloni non è uricotelico, come quello degli altri rettili (ofidi, sauri), e degli uccelli, ma ureotelico, non solo perchè l'urea è presente nell'urina dei cheloni in quantità notevoli e l'acido urico solo in tracce, ma anche perchè come abbiamo visto l'ammoniaca somministrata ai cheloni si trasforma completamente in urea e non in acido urico.*

e) CONSIDERAZIONI. — L'asserzione, che si legge in tutti i trattati di fisiologia, che i sauropsidi indistintamente sono animali uricotelici va modificata in base alle esposte esperienze, nel senso che, *non tutte le classi di sauropsidi hanno ricambio uricotelico, poichè tra essi fanno eccezione i cheloni, i quali sono ureotelici.* La spiegazione di questa eccezione e da ricercare evidentemente nella posizione, che la classe dei cheloni occupa nella scala zoologica; questa infatti rappresenta morfologicamente la classe più bassa dei rettili, cioè la più vicina agli anfibi e quindi non è da meravigliare, se in essa si riscontrano alcuni dei caratteri biochimici propri degli anfibi (metabolismo azotato ureotelico, presenza dell'arginasi nel fegato): con una frase forse non rigidamente esatta, ma assai efficace si potrebbe dire, *che i cheloni, mentre morfologicamente sono rettili, biochimicamente sono in parte ancora anfibi.* La presenza dell'arginasi nel fegato dei cheloni, messa in evidenza nelle nostre ricerche fin dal 1913, poichè è concomitante al tipo ureotelico del loro metabolismo azotato, anzichè stare in contrasto cogli altri risultati sperimentali da noi stessi avuti, è la più limpida dimostrazione dell'assoluta esattezza e del perfetto rigore della legge dell'arginasi, la quale illustra uno dei più tipici fenomeni di adattamento e di correlazione enzimatica finora noti nel regno animale,

Patologia vegetale. — *Cicatrizzazioni sperimentali di fusto di « Ricinus communis », determinate da « Pseudomonas fluorescens » (FLÜGGE) MIGULA* ⁽¹⁾. Nota di V. RIVERA, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. L. PETRI.

Onde conoscere qualche parte della biologia della *Pseudomonas fluorescens*, bacterio comunissimo, come è noto, in qualunque ambiente e particolarmente frequente nel terreno e nella atmosfera circostante piante arboree ed erbacee ⁽³⁾, ho voluto tentare la inoculazione su Ricino di questo schizomicete, operando con i comuni accorgimenti batteriologici ⁽⁴⁾.

A tale scopo ho cominciato con l'inoculazione sopra due piante, ed, in ciascuna, sopra due differenti punti del fusto, di una certa quantità di coltura pura di questo *Bacterio*, deponendola sopra le due labbra di ciascuna delle ferite, praticate asetticamente sui tessuti della pianta con un ago a lancetta sterile: si disposero naturalmente anche opportuni controlli (ferita con lancetta sterile), senza alcuna deposizione di microrganismo.

In ambo le serie si ebbe cura di scegliere soggetti di età e di stato vegetativo equivalenti ed operare in zone ad attivo accrescimento (apicali).

La inoculazione fu fatta il giorno 11 maggio: il 26 dello stesso mese si constatò che, mentre i tagli praticati sopra i controlli nulla di anormale mostravano, in tutte le quattro ferite inoculate, le spaccature apparivano alquanto tumefatte e corrispondentemente ad esse il fusto si mostrava notevolmente ingrossato (v. fotografia figg. 1 e 2).

Il 23 giugno, si poteva però giudicare che non si trattava di una alterazione patologica dei tessuti infettati con la *Pseudomonas fluorescens* ⁽⁵⁾, ma piuttosto di una cicatrizzazione abbastanza voluminosa.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Patologia Vegetale del R. Istituto Superiore Agrario di Perugia.

(2) Nella seduta 17 febbraio 1929.

(3) Come è noto (V. ad es. DE ROSSI, *Microbiologia Agraria e tecnica*, Unione Tipogr. Editr., Torino, 1927) la *Pseudomonas fluorescens* (FLÜGGE) MIGULA, schizomicete asporigeno Gram-negativo, liquefacente la gelat. (p. 372), è presente e tra i più frequenti nel terreno (pp. 1031, 1032 ed altrove).

(4) Dopo la inoculazione del *Bacterio* si proteggeva la ferita con ovatta e garza sterili, così come si praticava per le ferite dei controlli non infettate.

(5) Lo sviluppo di microrganismi saprofiti su organi vivi vegetali è stato già tentato, con successo, in precedenza, da vari autori.

Sono noti ad esempio gli esperimenti del LAURENT e quelli del suo allievo LEPOUTRE, soprattutto diretti a riconoscere se specialmente alcuni schizomiceti saprofiti, o almeno non patogeni per le piante, potessero trasformarsi in parassiti di queste.

Come si può infatti rilevare dalla fotografia (figg. 3 e 4), eseguita il 30 novembre, l'ingrossamento del fusto si era successivamente venuto alquanto riducendo ed anche le zone di cicatrizzazione si erano notevolmente ridotte, nel loro aspetto esterno e, specialmente, raccorciate.

Le differenze anatomiche tra le cicatrizzazioni delle ferite sterili e di quelle infette saranno esposte in un lavoro *per extenso* di prossima pubblicazione.

Ma fin da ora può dirsi che, mentre il fusto delle piante, trapassato da parte a parte dal ferro sterile, ha ricostituito, per ciascuna delle due parti del fusto, separate dall'ago, la continuità della zona del legno, creando, in continuazione della cerchia interrotta, e per ciascuna delle due porzioni di fusto separate dal ferro, un semicerchio, fatto principalmente di fibre di sostegno e di tracheidi, struttura che è indubbiamente rispondente alle nuove necessità della resistenza meccanica del fusto, nella ferita infettata con *Pseudomonas fluorescens* si è determinata invece una proliferazione cellulare molto più importante e differente, tale che ha condotto alla saldatura delle labbra della ferita: la struttura anatomica di questa neoformazione corrisponde all'incirca a quella descritta dai vari autori⁽¹⁾, nel caso delle cicatrizzazioni dei fusti feriti ed esposti all'aria.

La pianta infettata con questo *Bacterio* ha dunque cicatrizzato tipicamente la ferita, saldando le parti separate dal ferro, mentre la ferita sterile è rimasta aperta (fig. 5).

Questo *Bacterio* dimostra quindi, per il caso in esame, una capacità molto spiccata di eccitare la produzione di tessuti di cicatrizzazione nelle zone di tessuto sottostanti ai punti feriti. Nasce allora la fondata supposizione che alcune vistose cicatrizzazioni, che sul fusto e sulle radici di molte piante legnose si formano in seguito a tagli, possano prodursi al contatto della parte ferita con l'aria e col terreno in seguito alla eccitazione prodotta da forme batteriche esistenti nel mezzo⁽²⁾, e che fra gli agenti capaci di

In particolare, e per quanto riguarda la *Pseudomonas fluorescens*, tuttavia, come il Laurent ammette, non si può parlare di una *virulentazione* successivamente sopravvenuta in un organismo saprofita, essendo questo stesso microrganismo già stato ritrovato parassita delle piante di pomodoro e, come tale, denominato *B. Caulivorus* (v. LAURENT, *Recherches expérimentales sur les Plantes*, «Rech. de Biol. experim. appliquée à l'agric.», Bruxelles, 1901-903; v. pure LÉPOUTRE, *Recherches sur la trasform. exper. de bacteries banales en rages parasitiques des plantes*, ivi).

Per il caso in studio questo stesso *Bacterio* avendo eccitato una cicatrizzazione difensiva da parte dei tessuti della pianta ed utile a questa, non può essere considerato parassita del Ricino.

(1) Vedi ad es. JEAN MASSART, *La cicatrization chez les végétaux*, «Mem. Cour. et autres Mem. pub. p. l'Acad. Roy. des Sc., des Lettr., et des Beaux-arts de Belgique», coll. in-8°, tome LVII, 1898, pp. 3-65. Vedi anche KÜSTER, *Pathologische Pflanzenanatomie*, Jena, Fischer, 1925, p. 76 e seg.

(2) È da notare che mentre le ferite esposte all'aria cicatrizzano, i parassiti vegetali ed animali determinano molto raramente, come nota il MASSART, cicatrizzazioni difen-

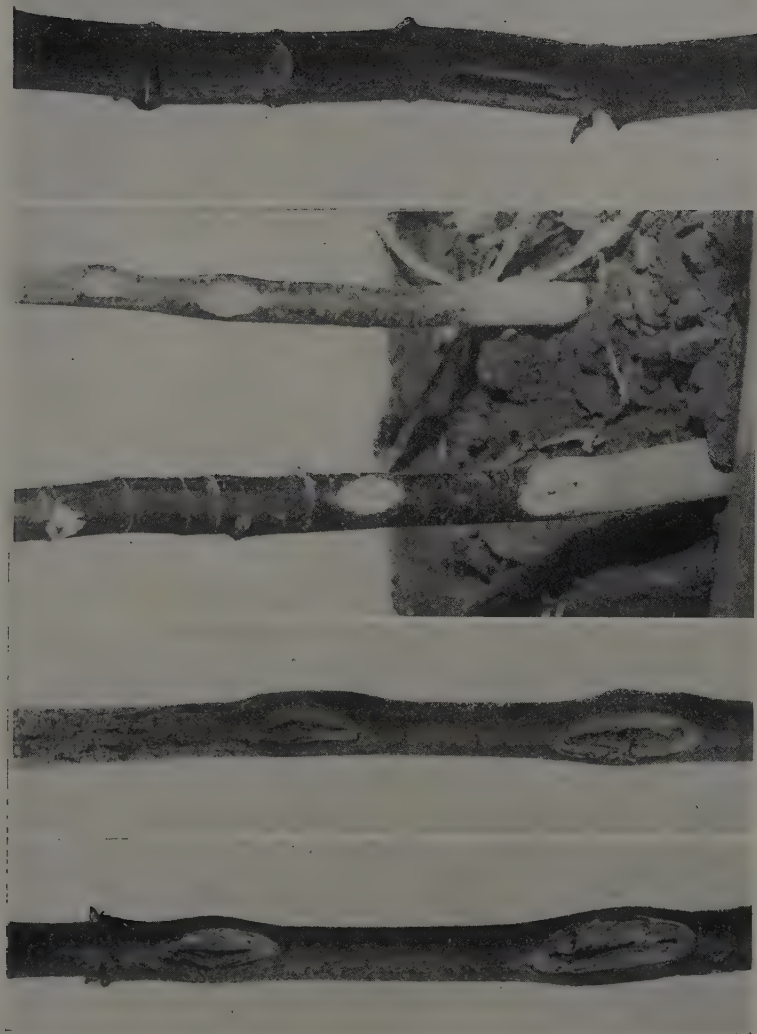
determinare questo tipo di stimolo possa esservi la *Pseudomonas fluorescens*, forma frequentissima, quasi ubiquitaria, nell'aria e nel terreno circondante qualunque vegetazione erbacea e legnosa ⁽¹⁾.

Questo schizomicete avrebbe dunque, se altre prove, più numerose, confermeranno quanto da noi è stato rilevato sul Ricino, una funzione biologica particolarmente importante in natura, quale è quella di eccitare le formazioni di cicatrici di difesa, il cui stimolo formativo verrebbe dunque anche dall'esterno.

sive, limitandosi solo talora, e nei casi di efficace difesa della pianta, la formazione di barriere di sughero o di barriere di cellule morte. Questo rilievo è tutt'altro che in discordanza con il concetto che la *cicatrizzazione difensiva* degli organi a tessuto massiccio sia eccitata dalla infezione della ferita da parte di forme batteriche presenti nel mezzo aventi normalmente vita saprofitaria.

(1) Il DUGGELI (« Centralbl. f. Bakter. ecc. », II Abt., 1904) nota che la *Pseudomonas fluorescens* si ritrova specialmente nel terreno più vicino alle radichette dei semi germinanti.

N. P.



TAV. I. — Le figg. 1 e 2 (da sinistra verso destra) mostrano quattro ferite prodotte sopra due fusti di *Ricinus* ed infettate con *Pseudomonas fluorescens* a circa 40 giorni dalla infezione. Le figg. 3 e 4 riproducono le stesse cicatrici riprodotte dalle figure precedenti, fotografate a distanza di più di cinque mesi (30 novembre). La fig. 5 rappresenta una delle ferite sterili di controllo: come si vede, le labbra della ferita in questo caso non si sono aflate saldate e nessuna proliferazione vistosa del tessuto della pianta, così come nei casi precedenti, si è venuta formando.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 7 aprile 1929 (Anno VII)

Presidenza del sen. prof. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Alcune osservazioni sui fenomeni ereditari.* Nota del Socio V. VOLTERRA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Gli scritti scientifici di F. Siacci.* Nota del Corrisp. G. LORIA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica astronomica. — *Questioni relativistiche sulle prove della rotazione terrestre.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. G. GIORGI e di A. CABRAS.

In un recente scritto, Ch. Nordmann ha richiamato nuova attenzione sulle questioni proponibili intorno alle prove tradizionali dell'asserto copernicano-galileiano. Secondo l'illustre astronomo francese, quelle prove sarebbero puramente nominali; e alla stregua della fisica moderna dovrebbe essere ugualmente legittimo considerare la Terra come rotante intorno al suo asse, ovvero il cielo stellato come effettuante una rotazione completa in ventiquattro ore intorno alla Terra.

(1) Presentata nella seduta del 7 aprile 1929.

La teoria di relatività ha dato una visuale nuova in queste discussioni, Einstein per primo, e vari altri illustratori della teoria einsteiniana, da Silberstein in poi, se ne sono preoccupati. Se ogni moto è relativo, perchè preferire gli assi di riferimento copernicani a quelli terrestri? Eddington ha messo in rilievo un'obiezione addotta dagli antirelativisti, ed è che adottando gli assi terrestri, le stelle tutte (anche le più vicine) acquisterebbero velocità molto superiore a quella della luce, in contraddizione con un asserto che è inseparabile dalla teoria di Einstein; ma ha risposto solamente che questo sarebbe un confutare la teoria di relatività con argomenti troppo facili.

Secondo il riassunto perspicuo fatto dal Nordmann, il risultato delle discussioni impostate in base alla teoria moderna condurrebbe a questi due argomenti:

a) La forza centrifuga osservata sulla superficie terrestre non è prova sufficiente della rotazione della Terra, perchè potrebbe essere prodotta da una distribuzione annulare di masse lontane.

b) L'argomento tratto dalle velocità superluminose delle stelle non ha valore, perchè la teoria einsteiniana asserirebbe solo che in qualunque posto la velocità della luce *effettivamente misurata* è superiore a quella di tutti i corpi materiali *ivi esistenti*; e questo asserto nelle stelle rimarrebbe soddisfatto localmente anche dopo la scelta degli assi tolemaici; e ne seguirebbe la libera permutabilità, in forma completamente relativista, fra le due piattaforme in questione: la scelta avrebbe solo un valore di comodità pratica.

2. - Poichè questo punto di vista è generalmente diffuso, e da alcuni è considerato come inseparabile dalla teoria di relatività, ci sia lecito discuterlo.

La questione va posta nei suoi giusti termini. Finchè si ragiona in geometria pura, vale altrettanto bene un triedro di riferimento legato con la Terra quanto uno legato col Sole e con le stelle fisse; e in effetto il triedro terrestre o tolemaico è quello che tutti adoprano comunemente nei calcoli di astronomia sferica. Geometricamente, la domanda se la Terra gira attorno al suo asse, o se il cielo gira attorno alla Terra, non ha senso.

Dalla geometria pura passando alla cinematica propriamente detta, gli assi tolemaici si rivelano meno razionali degli altri e meno atti all'investigazione fisica, perchè conducono ad attribuire ai corpi celesti una distribuzione geometrica di velocità elevatissime, proporzionali alla distanza dalla Terra, senza che nulla giustifichi questa dissimetria fra la Terra e gli altri pianeti; e fra gli argomenti che hanno impressionato Copernico e Galileo, questo non fu certo il meno importante.

Ma venendo al punto di vista strettamente fisico, alla stregua stessa della teoria di relatività, bisogna tenere stretto conto della differenza che esiste tra le piattaforme inerziali e le altre. Molti erroneamente hanno creduto

intendere che la teoria di relatività generalizzata conduca all'equivalenza di tutte le piattaforme di riferimento, anche se animate da moto vario. Ma quell'equivalenza è solamente nel senso astratto o formale ⁽¹⁾. Fisicamente, in ogni punto-istante dello spazio-tempo, la teoria einsteiniana conduce a distinguere le piattaforme Alfa o inerziali, rispetto alle quali i valori locali dei coefficienti del tensore fondamentale conducono a costruire una matrice della forma

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{vmatrix}$$

Queste piattaforme sono privilegiate localmente dal punto di vista fisico, e sono rintracciabili per mezzo del criterio sperimentale di Lange. È lecito, sempre in un intorno piccolo dello spazio-tempo, passare da una ad altra piattaforma inerziale per mezzo di un moto di traslazione uniforme accompagnato da trasformazione lorentziana: ma se alla piattaforma si imprime un moto vario, vengono in evidenza le conseguenze fisiche, e la piattaforma cessa di essere inerziale. Ed è per questo che non si possono conoscere con esperimenti intrinseci le conseguenze del moto traslatorio della Terra, ma si possono conoscere quelle del moto rotatorio, che non è un moto ad accelerazione nulla ⁽²⁾.

Gli assi copernicani sono inerziali, e in virtù della teoria di Einstein equivalgono ad assi che accompagnino la Terra e si mantengano orientati con le stelle fisse. Gli assi tolemaici ruotano, cioè hanno un moto vario, rispetto ai primi, quindi non sono fisicamente equivalenti.

3. - Ed ora, ecco le differenze nei fenomeni osservabili.

A) Le piattaforme inerziali si distinguono da quelle rotanti, non solo per la mancanza della forza centrifuga, ma ciò che più importa, per la mancanza della forza complementare di Coriolis, cioè di un campo di forze che agiscono sui corpi in funzione della loro velocità. Rispetto ad assi terrestri, questo campo di Coriolis esiste, e questo è correttamente provato dall'esperienza di Galileo sulla deviazione dei gravi cadenti, e dal pendolo di Foucault ⁽³⁾.

(1) Cfr. G. GIORGI. *I moti vari e l'etere*, «Atti della Pontificia Accademia delle Scienze», anno 88 (1925), pp. 170-181.

(2) La distinzione tra le proprietà inerziali degli assi rotanti e quella degli assi copernicani sono state messe in rilievo, percorrendo Einstein, per la prima volta da FEDERICO ENRIQUES, nei suoi *Problemi della Scienza*.

(3) Nella discussione che ha seguito alla presentazione di questa Nota, il prof. Garbasso ha fatto rilevare che l'esperienza sulla rotazione del pendolo era stata fatta, due-

Nessun campo gravitazionale fittizio, nè altra azione generabile con mezzi fisici conosciuti, produrrebbe un campo di forze simultaneamente proporzionali alla massa e funzioni della velocità, del tipo Coriolis, e non potrebbe riprodurre i fenomeni di Galileo e di Foucault, nè quelli che si possono osservare col giroscopio.

B) Le esperienze ottiche portano allo stesso risultato di quelle meccaniche. Precisamente l'esperienza eseguita da Michelson e Gale nel 1925 prova che la Terra ruota rispetto agli assi inerziali di Einstein. Quindi la velocità di rotazione è rivelata in modo intrinseco, mentre quella di traslazione non è rivelabile.

C) Anche limitandosi alla considerazione della forza centrifuga osservata sulla superficie della Terra, rispetto agli osservatori terrestri, nessuna distribuzione di masse lontane potrebbe imitarla, perchè una distribuzione annulare simmetrica darebbe sulla Terra un risultato, o nullo, o assai diverso dalla forza centrifuga che è proporzionale alla distanza dall'asse terrestre: e in ogni caso qualunque campo prodotto da masse esterne nell'intorno della Terra soddisferebbe all'equazione di Laplace, mentre il campo della forza centrifuga non vi soddisfa ⁽¹⁾.

L'argomento relativista sulla velocità della luce esige anche esso una impostazione più corretta. Non esiste un principio che vieti ai corpi materiali di possedere velocità anche superiori a quella della luce, rispetto a un triedro arbitrariamente scelto e dotato di un moto arbitrario. Ma nemmeno è sufficiente asserire che la velocità della luce, localmente su ogni singola piattaforma legata a un corpo materiale, supera quella di ogni altro corpo che realmente si muova in quell'intorno. L'enunciato corretto che si trae dalla teoria di Einstein deve a nostro avviso formularsi così: *la velocità della luce nell'intorno di ogni punto dello spazio-tempo ha sempre il valore c*

cento anni circa prima di Foucault, dagli Accademici del Cimento in Firenze. I cimeli illustrativi dell'esperienza interessante saranno mostrati all'Esposizione di Storia delle Scienze in Firenze. Questa rivendicazione non tende a diminuire il merito del grande fisico francese, che non aveva nessuna conoscenza del lavoro dei suoi predecessori, e che per primo ha compreso la significazione teorica del fenomeno, e l'ha utilizzato come prova del moto terrestre.

(1) Vero è che secondo alcuni sviluppi della teoria di Einstein, una sfera materiale cava circondante il nostro mondo visibile, e rotante con velocità molto grande intorno all'asse terrestre produrrebbe un campo combinato di forze centrifughe e forze di Coriolis equivalente a quello dovuto alla rotazione della Terra. Ma ciò significa solo che per effetto del fenomeno si avrebbe un nuovo triedro inerziale rotante rispetto a quello che varrebbe nel caso della sfera ferma; e le nostre argomentazioni si applicherebbero allora al triedro inerziale, qualunque esso sia. Ben diversa è la proprietà di carattere statico che si vorrebbe erroneamente attribuire a una distribuzione di masse ferme. L'errore risale al Mach, ed è rimarchevole che sia stato ripetuto senza controllo dagli autori successivi; esso consiste nel credere che una distribuzione di forze gravitazionali imitanti un campo centrifugo possa nascere rispetto a piattaforme inerziali, senza modificare il carattere di esse.

rispetto a ogni piattaforma inerziale relativa a quell'intorno; e quella di ogni altro corpo materiale è minore.

Il triedro tolemaico legato con la Terra non essendo inerziale, non vi è obbiezione a che le stelle rispetto ad esso abbiano velocità $>c$. Per non avere questo risultato, occorre riferirsi a una piattaforma copernicana, e ciò prova che solamente questa è inerziale.

4. — In conclusione, l'asserzione corretta è che la Terra è dotata di rotazione rispetto agli assi inerziali locali ⁽¹⁾. E fra le prove di Galileo sono realmente valide quelle di carattere generico desunte da considerazioni di simmetria nella distribuzione di velocità attraverso l'insieme degli astri; e quella specifica ricavata dai gravi cadenti da una torre. A queste si sono poi aggiunte la prova di Foucault, quelle giroscopiche, e l'esperienza di Michelson e Gale: e, in modo meno diretto, quelle desumibili dalla forza centrifuga. L'argomento tratto dal confronto fra velocità materiale e velocità di luce, viene, in applicazione alla teoria einsteiniana, a dare definitivo valore all'argomento di Galileo, primo tipo.

Fisica. — *A proposito di cellule fotoelettriche al tallio.* Nota ⁽²⁾ del Socio Q. MAJORANA.

I sigg. Rolla e Mazza, in una Nota ⁽³⁾ presentata a questa Accademia nel novembre scorso e venuta in luce nei primi giorni di quest'anno, asseriscono che quanto io, in collaborazione col prof. Todesco, esponevo in una Nota precedente ⁽⁴⁾ sulla preparazione delle cellule al tallio, costituisce una ricerca *assolutamente simile* ad altra compiuta da tempo dagli stessi Autori. A sostegno della loro asserzione, essi citano una pubblicazione contenuta negli « Atti » della Prima manifestazione nazionale ottica di Padova nel 1927 e due brevetti da essi chiesti ed ottenuti nello stesso anno.

Ora, nella prima di queste pubblicazioni, di cui presi visione subito dopo la pubblicazione della citata Nota Majorana-Todesco, si parla è vero genericamente di cellule al tallio, della loro sensibilità selettiva e del problema dell'amplificazione mediante triodi delle correnti fotoelettriche pulsanti ottenute con illuminazione periodica della cellula stessa, ma non si descrive

(1) I quali, quanto a moto rotatorio differiscono pochissimo, se pur differiscono, da qualunque altra piattaforma inerziale desunta da altri ambienti. Se fosse provato che tale differenza rotatoria non esiste, si avrebbe un sistema di *assi di Enriques*, valevoli per tutto lo spazio.

(2) Presentata nella seduta del 7 aprile 1929.

(3) Vedi questi « Rendiconti », vol. VIII, p. 347, 1928.

(4) Vedi questi « Rendiconti », vol. VIII, p. 9, 1928.

in alcun modo il processo di preparazione della sostanza fotosensibile, nè si fornisce alcun elemento in base al quale sia possibile al fisico costruire la cellula in parola.

Per quanto riguarda i brevetti, subito dopo la pubblicazione della Nota dei sigg. Rolla e Mazza, mi affrettai a richiederli in visione per esaminarli, ma essi non furono ostensibili al pubblico, per disposto di legge, altro che il 13 marzo u. s. Sicchè solo in questi giorni ho potuto averli ed esaminarli.

Il brevetto n. 261361 contiene la descrizione di certe particolari disposizioni costruttive degli elettrodi di sostegno della sostanza fotosensibile, senza che questa sia in alcun modo specificata. Per cui, a parte il fatto che talune delle notizie in tale brevetto contenute sono anticipate dalle vecchie e conosciute disposizioni adottate anche nella preparazione delle cellule al selenio ⁽¹⁾, il brevetto stesso, non parlando mai di tallio, ha scarso interesse ai fini di questa Nota.

L'altro brevetto, 261711, parla esplicitamente di una cellula al tallio costituita da solfuro talloso con l'aggiunta di altre sostanze (anidride silicica, manganese, cadmio e simili). Il brevetto stesso riguarda dunque un processo di fabbricazione delle cellule al tallio sostanzialmente diverso da quello descritto nella citata Nota Majorana-Todesco in cui tali sostanze non vengono per nulla adoperate e la sostanza fotosensibile è ottenuta soltanto, come esplicitamente e dettagliatamente dichiarato, mediante l'uso di zolfo, tallio e ossigeno.

Del resto, questi due processi non sono probabilmente i soli che conducono alla realizzazione di cellule sensibili all'ultravioletto. Senza parlare della « thalofide » dell'americano Case ⁽²⁾ che può considerarsi a buon diritto come lo scopritore delle cellule al tallio, oggi anche il Fournier ⁽³⁾ in Francia, costruisce cellule fotoelettriche la cui sensibilità appare del tutto paragonabile a quella della « thalofide ».

La questione che può avere un certo interesse, dal punto di vista scientifico è questa: nè il Case, nè il Rolla, nè il Fournier hanno indicato nelle loro pubblicazioni, il processo da seguirsi per la preparazione delle cellule in parola. Sicchè, chi avesse bisogno di cellule al tallio, mentre non ne trova oggi in commercio, non sarebbe in grado di costruirle sulla scorta delle scarse notizie fornite dai suddetti Autori. Come è detto nella Nota Majorana-Todesco, ci è parso utile, nell'interesse della pura ricerca scientifica, indicare ai fisici il modo di poter facilmente disporre del congegno più sensibile oggi esistente per la rivelazione delle radiazioni ultraviolette. E sotto questo punto di vista riteniamo di aver pienamente raggiunto lo scopo.

(1) Cfr. ad es. RUHMER, *Téléphonie sans fil*, p. 42 a sgg.

(2) T. W. CASE, *The « Thalofide Cell ». A new Photoelectric Substance*. « *Phys. Rev.* », 15, pp. 289-292, april, 1920.

(3) R. DUVOIS, *Etude des propriétés des cellules photoélectriques Fournier*, « *Journal de Physique* », t. IX, p. 310, 1928.

I sigg. Rolla e Mazza, con le asserzioni contenute nella loro Nota, vorrebbero implicitamente sollevare una questione di priorità scientifica, ma da quanto precede risulta agevolmente l'infondatezza della questione posta. La priorità della scoperta della cellula al tallio spetta infatti, come ho detto, al Case, mentre un preciso e dettagliato processo di preparazione della cellula stessa, è stato incontestabilmente per la prima volta indicato nella Nota Majorana-Todesco.

Geologia. — *Gli insegnamenti tettonici di una nuova galleria ferroviaria della costa Ligure.* Nota del Corrisp. G. ROVERETO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Le reazioni fra composti ferrosi ed ossido d'azoto⁽¹⁾.*
Nota I⁽²⁾ del Corrisp. L. CAMBI e di A. CLERICI.

1. — Le reazioni fra composti ferrosi ed ossido d'azoto richiedono un esame più vasto ed approfondito di quello finora compiuto. Le indagini moderne si limitano generalmente alla ricerca di prodotti risultanti dall'addizione di NO a composti ferrosi, trascurando tutti quei casi in cui intervengono azioni chimiche più profonde fra i due reagenti.

La tendenza a preparare sali bene isolabili, cui attribuire eleganti formule di struttura, anzichè precisare le reazioni che possono intervenire fra NO e molti composti ferrosi, ha portato diversi autori e più recentemente W. Manchot ed allievi⁽³⁾ a supporre processi ipotetici di sintesi in piena contraddizione con i fatti d'esperienza che vengono esposti in questa Nota.

Le nostre ricerche richiamano quelle antiche di W. R. Dunstan e T. S. Dymond sulla riduzione dell'NO con formazione di iponitrito, operata dall'idrato ferroso⁽⁴⁾.

Questi AA. notavano anche, in confronto ai risultati negativi cui erano pervenuti E. Divers e T. Haga⁽⁵⁾, la diversa attività dell'idrato ferroso a seconda del metodo di preparazione e dell'alcalinità presente. Fatto questo analogo ai recenti risultati di A. Krause⁽⁶⁾ che ha notato essere la stessa

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 7 aprile 1929.

(3) Vedi, L. CAMBI e L. SZEGÖ, questi « Rendiconti », IV, 1926, 2°, p. 491; L. CAMBI e A. CLERICI, idem, VI, 1927, 2°, p. 449; L. CAMBI, idem, VIII, 1928, 2°, p. 535.

(4) W. R. DUNSTAN e T. S. DYMOND, « J. Chem. Soc. », 51, 1887, p. 646.

(5) E. DIVERS e T. HAGA, « J. Chem. Soc. », 47, 1885, p. 361.

(6) A. KRAUSE, « Z. anorg. allg. Chemie », 174, 1928, p. 146.

ossidazione con ossigeno dell'idrato ferroso dipendente dalla $[H\cdot]$ alla quale è stato precipitato.

La reazione dell'idrato ferroso si differenzia cioè nettamente dalle ben note semplici addizioni dell'NO a sali ferrosi che ionizzano Fe^{++} , che generano in soluzioni complessi facilmente scindibili col vuoto o col riscaldamento secondo lo schema



Fra questi due tipi estremi esiste una serie di casi intermedi, offerti particolarmente da sali ferrosi di acidi deboli, in cui cioè l'ossidazione a sale ferrico non dà luogo in generale a ragguardevole incremento della $[H\cdot]$, dovuto all'idrolisi susseguente. Già uno di noi ha osservato che, ad esempio, l'acetato ferroso genera composti d'addizione che si scindono producendo N_2O od iponitriti e sale ferrico (1). In questo campo possono presentarsi sali ferrosi che, a seconda del pH della soluzione, si comportano come il solfato od il cloruro ferroso oppure analogamente all'idrato ferroso.

Abbiamo ripreso in esame sistematico l'argomento, indagando le trasformazioni dei sali $ON \cdot FeX_2$ in mezzo alcalino, il comportamento all'NO del carbonato e del bicarbonato ferroso; stiamo anche studiando i fosfati, borati e sali ferrosi di diversi acidi organici.

In tutti i casi esaminati abbiamo ottenuto prodotti non isolabili per la loro instabilità, che con i sali d'argento si scindono ad iponitrito, che presentano reazioni attestanti lo stato di riduzione dei gruppi NO in essi contenuti ed in forme corrispondenti all'acido iponitroso.

2. - Esponiamo in questa prima Nota le esperienze da noi compiute sulla reazione fra $ON \cdot FeSO_4$ ed idrati alcalini.

Usavamo per ogni serie di misure 100 cc. di soluzione 0.25 Mol. di solfato ferroso, che saturavamo a 0° in una grossa provetta di vetro munita di agitatore con adeguata chiusura. Escludevamo dapprima l'aria dall'apparecchio con anidride carbonica, che poi scacciavamo con NO ed introducevamo infine la soluzione ferrosa nell'atmosfera di NO. Avvenuta la saturazione, aggiungevamo lentamente 50 cc. di soluzione contenente la quantità voluta di idrato alcalino, mantenendo sempre la circolazione del gas e la temperatura di 0°.

L'NO venne preparato dal nitrito di sodio fuso seguendo F. Raschig. Era contenuto in due piccoli gasometri di vetro graduati, di cui alternativamente l'uno in debole pressione lo spingeva attraverso la soluzione di solfato, l'altro in aspirazione lo raccoglieva. Il dispositivo ci permetteva di leggere le variazioni di volume del gas reagente. Verificammo sempre la purezza dell'NO, prima e dopo l'assorbimento avvenuto da parte del solfato ferroso; dopo l'aggiunta dell'alcali l'analisi del gas veniva ripetuta.

(1) L. CAMBI, « Rend. Soc. Chimica Ital. », 1914, fasc. III.

Fu usata ogni cura per eliminare cause d'errore per giunzioni, per imperfetta tenuta degli apparecchi, per impurezze di reagenti.

L'aggiunta dell'alcali alla soluzione contenente $\text{ON} \cdot \text{FeSO}_4$ provoca la formazione del precipitato nerastro che assume rapidamente colore rossastro, mentre provoca la formazione di schiuma per sviluppo di gas, che verificammo essere N_2 ed N_2O . Il prodotto rossastro si decompone poi a 0° lentamente, sviluppando principalmente N_2O : dopo 48 ore è trasformato completamente in ossido ferrico idrato, pure mantenuto in atmosfera di NO . Analoga decomposizione, con sviluppo di N_2O , notammo ponendo il prodotto nel vuoto barometrico su mercurio a temperatura ambiente.

Per le analisi, nei diversi tempi notati nella tabella che segue, aspirammo direttamente dall'apparecchio di reazione circa 25 cc. di miscela in un palloncino in cui era stato fatto il vuoto, contenente la soluzione dei reagenti usati: H_2SO_4 2n ; NaOH 2n ; KOH 2n ; sali d'argento, ecc. Avvenuta la decomposizione, scacciavamo i gas prodotti all'ebollizione, raccogliendoli in azotometro su KOH al 50 %.

Eliminati i gas, nelle decomposizioni con acido dosavamo direttamente nella soluzione prima il ferro ferroso, poi il ferro totale; nelle scissioni alcaline e neutre discioglievamo l'ossido ferrico formatosi con acido solforico diluito e procedevamo agli stessi dosaggi del ferro.

L'analisi dei gas ottenuti veniva eseguita dibattendo prima con volume noto d'acqua, per determinare in modo approssimato il N_2O , tenendo conto della solubilità del NO , assorbendo infine questo gas con solfato ferroso. Il residuo non assorbito non reagiva col pirogallolo alcalino, non dava contrazione all'eudiometro in miscela con idrogeno o con ossigeno: venne riconosciuto per azoto.

Le soluzioni di NO nel solfato ferroso presentavano inizialmente la composizione 0.80 γ . 0.85 NO per 1 FeSO_4 . Dopo l'azione dell'alcali il rapporto fra ferro ed azoto totale si riduce ai valori riportati nella tabella; la perdita di azoto avviene, come abbiamo ricordato, con formazione di N_2 ed N_2O , in generale con predominio del secondo.

3. — Il prodotto ottenuto dalla azione dell'alcali su $\text{ON} \cdot \text{FeSO}_4$, dopo circa 1 ora dall'aggiunta dell'idrato alcalino, venne introdotto in eccesso di soluzione al 4 % circa di perclorato o di nitrato d'argento, con viva agitazione. Il precipitato nerastro ottenuto venne trattato con metodo analogo a quello usato da uno di noi (L. Cambi) nel caso dei sali di Roussin. Estraemmo dal 35 % al 45 % di $\text{Ag}_2\text{N}_2\text{O}_2$ puro, rispetto all'azoto totale contenuto nel miscuglio all'atto della decomposizione. All'analisi l'iponitrito ha dato le cifre seguenti: Ag trovato 78.22 %; Ag calcolato 78.23 %.

Il rendimento in iponitrito è assai elevato, se si riflette alle difficoltà ed alle perdite che si incontrano nella sua separazione e depurazione.

4. — I dati su riferiti indicano che il prodotto, della reazione fra nitrosilsolfato di ferro ed alcali, avente una relativa maggiore stabilità si avvi-

TABELLA I.

N°	Tempo	N Atomi come NO	N Atomi come N ₂	N Atomi come N ₂ O	N Atomi totale	Fe Atomi ferroso	Fe Atomi totale	Reazione
1	3'	0.44	0.15	0.12	0.71	0.41	1	FeSO ₄ ·NO + 2 NaOH
2	45'	0.27	0.20	0.04	0.51	0.11	1	» » »
3*	45'	0.00	0.02	0.50	0.52	0.00	1	» » »
4	45'	0.29	0.20	0.05	0.54	0.13	1	FeSO ₄ ·NO + 2 KOH
5	45'	0.26	0.16	0.04	0.46	0.15	1	FeSO ₄ ·NO + 4 NaOH
6	65'	0.27	0.19	0.05	0.50	0.11	1	FeSO ₄ ·NO + 2 KOH
7	70'	0.25	0.17	0.08	0.50	0.10	1	FeSO ₄ ·NO + 4 NaOH
8	80'	0.28	0.17	0.03	0.48	0.15	1	FeSO ₄ ·NO + 2 NaOH
9	85'	0.25	0.20	0.04	0.49	0.08	1	» » »
10	110'	0.24	0.20	0.09	0.53	0.05	1	» » »
11	130'	0.20	0.16	0.09	0.45	0.05	1	» » »
12*	150'	0.03	0.02	0.44	0.49	0.01	1	» » »
13	170'	0.16	0.15	0.09	0.41	0.06	1	» » »
14	15 ore	0.12	0.10	0.06	0.28	0.01	1	» » »

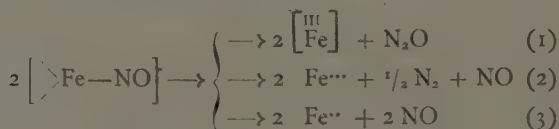
I tempi sono contati dall'istante in cui venne aggiunto l'alcali.

Le scissioni N° 3 e N° 12 vennero eseguite con NaOH 2 n; le altre con H₂SO₄ 2 n.

cina al rapporto 1 Fe / 0.5 NO; che questo si scinde in mezzo acido ad N₂, NO e soltanto in piccole frazioni ad N₂O; in mezzo alcalino o neutro si decompone invece generando soltanto N₂O.

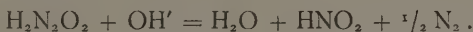
Aggiungiamo che nelle scissioni acide non abbiamo verificato formazione di ammoniaca; tracce di questa trovammo nella decomposizione alcalina e nella soluzione residua dalla libera e lenta scissione del prodotto. Nelle decomposizioni con alcali non riscontrammo infine formazione di nitrato o nitrito alcalino.

5. — Tutto quanto precede induce ad ammettere come probabili i processi rappresentati dagli schemi seguenti:



La decomposizione (1) si verifica quantitativamente in mezzo alcalino e soltanto in via secondaria in mezzo acido; in soluzione neutra in presenza di Ag⁺ la stessa reazione corrisponde alla formazione di iponitrito d'argento. Le scissioni (2) e (3) si osservano in ambiente acido, con il predominio della (2). Il sovrapporsi di questi due processi porta alla tendenza dei valori ad avvicinarsi all'eguaglianza *Atomi Fe⁺⁺ + Atomi N come N₂ = Atomi N come NO*, che si nota in molti casi. Il predominio della (2) si manifesta nel fatto che i rapporti fra atomi d'azoto come N₂ ed NO tendono all'unità, mentre il ferro ferroso si riduce a frazioni sempre minori.

Il lato nuovo di queste osservazioni risiede nella decomposizione ad N₂ ed NO dei gruppi (NO)' nei composti del ferro che consideriamo. Nella letteratura non troviamo riscontro in corrispondenti reazioni degli iponitriti noti. Dobbiamo richiamare però le scissioni dell'iponitrito d'argento e di mercurio, con gli acidi minerali a freddo, studiate da P. Ch. Ray e A. Ch. Ganguli⁽¹⁾, dalle quali questi AA. conclusero verificarsi la trasformazione dell'acido iponitroso in azoto ed acido nitrico. Inoltre, F. Raschig⁽²⁾ ha notato lo sviluppo d'azoto in alcune ossidazioni dell'acido iponitroso stesso, che ha ricondotto al processo



L'esame critico del complesso di questi dati che portano a riconoscere la molteplicità delle reazioni dell'acido iponitroso, l'influenza su di esse del mezzo in cui si compiono e degli aggruppamenti od atomi congiunti con i gruppi (NO)', ci ha indotto alla revisione sperimentale delle reazioni dell'acido iponitroso su cui riferiremo in seguito.

Avvertiamo chiudendo che reazioni analoghe a quelle descritte abbiamo osservato con i prodotti dell'azione dell'NO sul carbonato, bicarbonato e sul fosfato ferroso.

(1) P. Ch. RAY e A. Ch. GANGULI, « J. Chem. Soc. », 91, 1907, p. 1866.

(2) F. RASCHIG, 1924, *Schwefel- und Stickstoff-Studien*, p. 102 e seg.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Estensione dell'identità di Picone alla più generale equazione differenziale lineare ordinaria autoaggiunta.* Nota di G. CIMMINO, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. SCORZA.

Siano assegnate, nell'intervallo (a, b) dell'asse x , le due equazioni differenziali autoaggiunte di ordine $2n$

$$(I) \sum_{h=0}^n \frac{d^h}{dx^h} \left[\theta_h(x) \frac{d^h y}{dx^h} \right] = 0, \quad (II) \sum_{h=0}^n \frac{d^h}{dx^h} \left[\bar{\theta}_h(x) \frac{d^h u}{dx^h} \right] = 0,$$

ove, per $h = 0, 1, 2, \dots, n$, si abbia che θ_h e $\bar{\theta}_h$ siano funzioni continue in (a, b) , insieme con le derivate dei primi h ordini, e di più θ_n e $\bar{\theta}_n$ siano sempre diverse da zero in (a, b) .

Si supponga, poi, che, per una certa coppia x_1, x_2 di punti di (a, b) , esista un integrale $y(x)$ della (I), verificante le $2n$ condizioni

$$y(x_1) = y'(x_1) = \dots = y^{(n-1)}(x_1) = 0, \quad y(x_2) = y'(x_2) = \dots = y^{(n-1)}(x_2) = 0,$$

e che, fissato ad arbitrio un punto ξ in (a, b) , non interno a (x_1, x_2) , vi sia una certa n -pla $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ di integrali della (II), verificanti le condizioni

$$u_h(\xi) = u'_h(\xi) = \dots = u_h^{(n-1)}(\xi) = 0, \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

e inoltre tali che il wronskiano $W[u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)]$ non si annulli in nessun punto interno a (x_1, x_2) .

Ciò posto, con un calcolo diretto, alquanto laborioso, ma che non presenta nessuna sostanziale difficoltà, si riconosce che deve sussistere l'identità seguente:

$$\sum_{h=0}^n \theta_h \left(\frac{d^h y}{dx^h} \right)^2 - \theta_n \left(\frac{W[y(x), u_1(x), \dots, u_n(x)]}{W[u_1(x), \dots, u_n(x)]} \right)^2 = \frac{dA}{dx},$$

ove con $A(x)$ si è indicata una certa espressione razionale nei coefficienti θ_h e negli integrali $u_h(x), y(x)$, la quale, in virtù delle condizioni imposte nei punti x_1, x_2 alla $y(x)$, assume valor zero per $x = x_1$ e $x = x_2$,

(1) Nella seduta del 20 gennaio 1929.

mentre poi, in virtù dell'ipotesi che $W[u_1(x), \dots, u_n(x)]$ non si annulli nell'interno di (x_1, x_2) , risulta funzione finita e continua di x in (x_1, x_2) .

Moltiplicando, quindi, la relazione ora scritta per dx , e integrando fra x_1 e x_2 , si trae

$$\sum_{h=0}^n \int_{x_1}^{x_2} \bar{\theta}_h \left(\frac{d^h y}{dx^h} \right)^2 dx - \int_{x_1}^{x_2} \bar{\theta}_n \left(\frac{W[y(x), u_1(x), \dots, u_n(x)]}{W[u_1(x), \dots, u_n(x)]} \right)^2 dx = 0.$$

Ma, d'altra parte, moltiplicando per $y dx$ la (I) e integrando fra x_1 e x_2 , si deduce, com'è ben noto, che

$$\sum_{h=0}^n \int_{x_1}^{x_2} \theta_h \left(\frac{d^h y}{dx^h} \right)^2 dx = 0;$$

onde, sottraendo quest'ultima dalla relazione precedente, si perviene alla seguente identità

$$\sum_{h=0}^n \int_{x_1}^{x_2} (\theta_h - \bar{\theta}_h) \left(\frac{d^h y}{dx^h} \right)^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} \theta_n \left(\frac{W[y(x), u_1(x), \dots, u_n(x)]}{W[u_1(x), \dots, u_n(x)]} \right)^2 dx = 0,$$

che chiamerò, seguendo l'esempio di Bôcher ⁽¹⁾, *identità di Picone*, giacchè, pel caso di $n = 1$, essa venne stabilita dal prof. Picone ⁽²⁾.

Un più ampio sviluppo dei calcoli si troverà in una mia Memoria di prossima pubblicazione, nella quale è data, in maniera rigorosa e completa, la dimostrazione di cui qui, per amor di brevità, non ho fatto che un rapido cenno. Mi son limitato ivi a trattare il caso di $n = 2$, unicamente allo scopo di non incorrere in formole eccessivamente lunghe, ma s'intende che varrebbe un ragionamento perfettamente simile, anche ove fosse $n > 2$: ed ho voluto scrivere qui l'identità generale, per n qualsiasi, nella speranza che altri possa dare di essa una nuova dimostrazione, possibilmente più breve e semplice della mia.

L'identità di Picone, per $n > 1$, è feconda di numerosi risultati, relativi alle equazioni differenziali lineari ordinarie autoaggiunte, di ordine (pari) superiore al secondo. Da essa si possono, infatti, dedurre:

1° l'estensione dei teoremi fondamentali di Sturm sulle equazioni del secondo ordine;

2° l'esistenza degli autovalori e delle corrispondenti autosoluzioni;

3° le proprietà di minimo delle autosoluzioni;

(1) M. BÔCHER, *Leçons sur les méthodes des Sturm*, Paris, 1917, p. 55.

(2) M. PICONE, *Sui valori eccezionali di un parametro, ecc.*, Pisa, 1909, pp. 19-20.

4° le formole di maggiorazione per gl'integrali, e quindi l'applicazione ai metodi di calcolo approssimato di Rietz e delle minime potenze.

Infine, l'identità di Picone per $n > 1$ può ancora estendersi al caso delle equazioni a derivate parziali e riuscire assai utile nello studio delle equazioni autoaggiunte totalmente ellittiche a derivate parziali, di ordine (pari) superiore a due.

Di tutte queste varie applicazioni, una parte si trova nella mia Memoria già citata; un'altra parte è ancora in preparazione e costituirà la materia di alcuni miei prossimi lavori.

Matematica. — *Parallelismo e coordinate geodetiche.* Nota di PIA NALLI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In due Note, pubblicate lo scorso anno in questi « Rendiconti », ho messo in relazione lo spostamento per parallelismo di un vettore lungo una linea, in una varietà metrica, con l'esistenza di sistemi di coordinate geodetiche lungo la linea.

Ho dimostrata l'esistenza di tali sistemi di coordinate mediante spostamento per parallelismo di vettori e costruzione di varietà geodetiche.

Però la dimostrazione presuppone che le note equazioni differenziali del parallelismo lungo una linea valgano per qualunque sistema di coordinate.

Ciò può dedursi agevolmente dal fatto che, se \mathbf{R} è un vettore funzione dei punti di una linea L nella varietà metrica V_n , le n quantità

$$dR^i + \sum_{j,b} \left\{ \begin{matrix} i \\ j \ b \end{matrix} \right\} R^j dx^b = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n),$$

dove i differenziali sono presi lungo L , costituiscono in ogni punto di questa un sistema semplice controvariante. Il che può dimostrarsi passando per una varietà euclidea nella quale la V_n sia immersa, od anche utilizzando la nota legge di trasformazione dei simboli di Christoffel in relazione ad un cambiamento di coordinate.

Ma ciò non fa che complicare inutilmente quello che è molto semplice.

Nel calcolo differenziale assoluto il concetto veramente essenziale, dopo quello di tensore, è il concetto di parallelismo, dal quale qualunque altro finora noto si deduce facilmente e senza eccessivo formalismo.

(1) Nella seduta del 3 marzo 1929.

Alle equazioni differenziali del parallelismo sotto una delle tre forme equivalenti:

$$dR_i = \sum_j \left[\begin{smallmatrix} i & j \\ h \end{smallmatrix} \right] R_h dx_j,$$

$$dR_i = \sum_j \left\{ \begin{smallmatrix} i & j \\ h \end{smallmatrix} \right\} R_h dx_j,$$

$$dR^i = - \sum_j \left\{ \begin{smallmatrix} j & h \\ i \end{smallmatrix} \right\} R^j dx_h,$$

$$(i = 1, 2 \dots n)$$

si arriva nel modo più naturale sia quando per una varietà euclidea si traducano in coordinate generiche le equazioni $dR^i = 0$ del parallelismo in coordinate cartesiane, sia, come ho mostrato nelle Note citate, quando si traducano in coordinate generiche le equazioni $dR^i = 0$ alle quali, in una varietà qualunque, soddisfi un vettore lungo una linea quando il sistema di coordinate è geodetico lungo di questa.

Ma finchè non si dimostra l'esistenza, anche soltanto locale, di un tale sistema di coordinate, nulla autorizza ad asserire che un vettore **R** soddisfacente ad uno dei soprascritti sistemi per particolari coordinate, soddisfi ai medesimi quando si cambiano le coordinate.

Ora ciò è essenziale nella costruzione da me data di sistemi di coordinate geodetiche localmente lungo una linea.

Per questo daremo qui una dimostrazione diretta e molto semplice della indipendenza delle equazioni del parallelismo dalla scelta delle coordinate.

Supponiamo che un vettore **R** soddisfi lungo una linea L alle equazioni differenziali soprascritte in un sistema di coordinate x_i . Diremo, per brevità, che **R** è parallelo lungo L nel sistema di coordinate x_i .

Si dimostra allora, col noto e facile calcolo, che se **R** ed **S** sono paralleli lungo L, il prodotto scalare $\mathbf{R} \times \mathbf{S}$ è costante lungo L.

Passiamo ora ad un altro sistema di coordinate \bar{x}_i e traduciamo in questo le equazioni differenziali soprascritte. Essendo

$$\bar{R}_k = \sum_i R_i \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k},$$

differenziando lungo L e tenendo conto della prima espressione di dR_i ,

$$d\bar{R}_k = \sum_{i,j,h} \left[\begin{smallmatrix} i & j \\ h \end{smallmatrix} \right] \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k} R_h dx_j + \sum_i R_i d \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k}.$$

Ma

$$R^h = \sum_i^n \bar{R}^h \frac{\partial x_h}{\partial \bar{x}_i},$$

$$dx_j = \sum_i^n \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i} d\bar{x}_i,$$

$$R_i = \sum_l^n \bar{R}_l \frac{\partial \bar{x}_l}{\partial x_i} = \sum_l^n \bar{a}_{lp} \bar{R}^p \frac{\partial \bar{x}_l}{\partial x_i},$$

$$d \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k} = \sum_q^n \frac{\partial^2 x_i}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_q} d\bar{x}_q.$$

Sostituendo si trova

$$(1) \quad d\bar{R}_k = \sum_{pq}^n C_p^{kq} \bar{R}^p d\bar{x}_q,$$

dove

$$C_p^{kq} = \sum_{ij}^n \begin{bmatrix} i & j \\ h \end{bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_q} \frac{\partial x_h}{\partial \bar{x}_p} + \sum_i^n \bar{a}_{pi} \frac{\partial^2 x_i}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_q} \frac{\partial \bar{x}_h}{\partial x_i}.$$

Evidentemente

$$C_p^{kq} = C_p^{qk}.$$

Invece delle (1) si potrebbero scrivere le equivalenti

$$(2) \quad d\bar{R}_k = \sum_{pq}^n \Gamma_{kq}^p \bar{R}^p d\bar{x}_q$$

dove

$$\Gamma_{kq}^p = \sum_r^n a^{rp} C_r^{kq}$$

e perciò

$$\Gamma_{kq}^p = \Gamma_{qk}^p.$$

Alle (1) si potrebbe dare anche una terza forma. Mettendo al posto di \bar{R}_k la somma

$$\sum_i^n \bar{a}_{ki} \bar{R}^i$$

e risolvendo poi rispetto ai $d\bar{R}^i$, si trova

$$(3) \quad d\bar{R}^k = \sum_{pq}^n H_{pq}^k \bar{R}^p d\bar{x}_q.$$

Ma si ha

$$(4) \quad H_{pq}^k = -\Gamma_{pq}^k.$$

Infatti, se \mathbf{R} ed \mathbf{S} sono due vettori paralleli lungo L nel sistema delle x ; il prodotto scalare $\mathbf{R} \times \mathbf{S}$ è costante lungo L , cioè

$$d \sum_i \bar{R}^i \bar{S}_i = 0$$

e cioè ancora

$$\sum_i^n d\bar{R}^i \cdot \bar{S}_i + \sum_i^n \bar{R}^i \cdot d\bar{S}_i = 0.$$

Servendosi allora delle (2) e (3) per esprimere $d\bar{S}_i$ e $d\bar{R}^i$ si ottiene appunto la (4).

Ed ora siamo in condizioni di poter dimostrare che

$$(5) \quad C_p^{kq} = \begin{bmatrix} k & q \\ p \end{bmatrix}.$$

Infatti, se \mathbf{R} è un vettore che soddisfa alle (3), sarà lungo L

$$d \sum_{ij} \bar{a}_{ij} \bar{R}^i \bar{R}^j = 0$$

cioè

$$\sum_{ijq}^n \frac{\partial \bar{a}_{ij}}{\partial \bar{x}_q} \bar{R}^i \bar{R}^j d\bar{x}_q + \sum_{ij}^n \bar{a}_{ij} \bar{R}^i \cdot d\bar{R}^j + \sum_{ij}^n \bar{a}_{ij} \bar{R}^j \cdot d\bar{R}^i = 0$$

e quindi, tenendo conto delle (3), della (4) e delle formule che esprimono le Γ_{pq}^k per mezzo delle C_k^{pq} ,

$$C_j^{iq} + C_i^{jq} = \frac{\partial \bar{a}_{ij}}{\partial \bar{x}_q}$$

che dimostra appunto la (5).

Con ciò è dimostrato che le equazioni del parallelismo non dipendono dal sistema di coordinate.

Notiamo poi che dall'espressione trovata per C_p^{kq} , cioè per $\begin{bmatrix} k & q \\ p \end{bmatrix}$, moltiplicando per $\bar{a}^{pr} \frac{\partial x_m}{\partial \bar{x}^r}$ e sommando rispetto ad m e ad r si trova la nota formula

$$(6) \quad \sum_r \begin{bmatrix} k & q \\ r \end{bmatrix} \frac{\partial x_m}{\partial \bar{x}^r} = \sum_{ij} \begin{bmatrix} i & j \\ m \end{bmatrix} \left\{ \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}^q} + \frac{\partial^2 x_m}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^q} \right\}$$

della quale, come ho già detto, ci si potrebbe servire per dimostrare la indipendenza delle equazioni del parallelismo dal sistema di coordinate.

Ma il metodo da noi tenuto ci sembra preferibile, perchè la dimostrazione diretta della (6) è laboriosa e la sua utilizzazione negli sviluppi del calcolo assoluto dà a questo un carattere formalistico dal quale il parallelismo, che è un concetto e non una formula, lo libera completamente rendendolo nello stesso tempo svelto ed elegante. Senza contare che il metodo è suscettibile di generalizzazioni, delle quali intendiamo di occuparci in altri lavori.

Matematica. — *Stelle di congruenze e parallelismo assoluto: basi geometriche di una recente teoria di Einstein.* Nota di E. BORTOLLOTTI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. In questi ultimi anni la letteratura della Relatività si è arricchita, tra l'altro, di numerose ricerche tendenti a costruire una *einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität*. Tre tentativi, sostanzialmente diversi, ha condotto a questo scopo lo stesso Einstein, nel 1923 ⁽²⁾, nel 1925 ⁽³⁾, e, recentemente, nel 1928 ⁽⁴⁾. L'ultima ricerca — sulla cui giustificazione fisica, forse non ancora ben manifesta, mi rimetto a quanto afferma l'A. ⁽⁵⁾ — ha però sulle precedenti il vantaggio di una formulazione matematica più semplice. È appunto sulle basi geometriche di questa nuova teoria che ora mi intratterrò. Lo stesso Einstein si è costruito queste basi geometriche ⁽⁵⁾, ritrovando così, tra l'altro, molti risultati di precedenti ricerche, di cui egli non mostra d'essere a conoscenza. Non sarà dunque inutile, trattandosi di ricerche in effetto poco note, l'espore qui (da un punto di vista un po' più generale), insieme a risultati e ad osservazioni nuove, anche i risultati più notevoli dei lavori precedenti, che più o meno direttamente vengono a collegarsi con la nuova teoria di Einstein, e ne costituiscono la base matematica. Qui però mi limiterò ai risultati che sono in relazione, più particolarmente, con la teoria delle connessioni euclidee a parallelismo assoluto;

(1) Nella seduta del 17 marzo 1929.

(2) 1. *Zur allgemeinen Relativitätstheorie* («Sitzungsberichte Preuss. Akad. der Wiss.», 1923, pp. 32-38); 2. *Bemerkung zu meiner Arbeit «Zur allgemeinen Relativitätstheorie»* (ibid., pp. 76-77); 3. *Zur affinen Feldtheorie* (ibid., pp. 137-140).

(3) 4. *Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität* (ibid., 1925, pp. 414-419).

(4) 5. *Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus* (ibid., 1928, pp. 217-221); 6. *Neue Möglichkeit für eine einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität* (ibid., pp. 224-227).

(5) «Es ist daher denkbar, dass diese Theorie die ursprüngliche Fassung der allgemeinen Relativitätstheorie verdrängen wird» (6, p. 224).

allo studio più generale, delle connessioni affini a parallelismo assoluto ho dedicato un'altra recente Nota⁽¹⁾, alla quale rimando (salvo un breve cenno che ora farò) per quanto riguarda questo argomento, e per la bibliografia relativa.

2. Entro una varietà n -dimensionale (X_n) in cui le u^λ ($\lambda, \mu, \nu, \tau, \omega = 1, 2, \dots, n$) sono coordinate curvilinee, consideriamo n campi di vettori (indipendenti) controvarianti X^λ_i ($i, j, h, k, l = 1, 2, \dots, n$), cioè, n^2 quantità X^λ_i , tali che $\frac{1}{h} = |X^\lambda_i| \neq 0$, funzioni del punto in X_n . Tale n -pla di campi vettoriali, che possiamo anche supporre assegnata a meno di una qualsiasi trasformazione lineare (affine) a coefficienti c^i_{ij} costanti sugli n campi,

$$(1) \quad X'^\lambda_j = c^i_{ij} X^\lambda_i \quad |c^i_{ij}| \neq 0$$

determina nella X_n una connessione affine a curvatura nulla⁽²⁾, cioè, a parallelismo assoluto, di parametri

$$(2) \quad \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = X^\lambda_i \frac{\partial X^\mu_i}{\partial u^\nu},$$

ove X^μ_i sono gli elementi reciproci delle X^λ_i in $|X^\lambda_i|$, componenti di n campi di vettori covarianti univocamente determinati dai campi X^λ_i . Gli n campi X^μ_i (od $X_{\mu i}$) sono n campi di vettori paralleli, anzi equipollenti per tale connessione. Ho altrove⁽³⁾ chiamato *connessione affine di Weitzenböck-Vitali* quella connessione: in effetto la derivazione covariante che ad essa corrisponde,

$$(3) \quad \nabla_\nu \xi^\lambda = \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial u^\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \xi^\mu, \quad \nabla_\nu \eta_\lambda = \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial u^\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \eta_\lambda$$

è stata introdotta (in relazione con un' n -pla di campi di vettori) nel 1921 dal Weitzenböck (loc. cit. in 7) e poi, indipendentemente, nel 1924 dal Vitali⁽⁴⁾.

In particolare, un' n -pla X^λ_i assegnata a meno di una sostituzione ortogonale (cioè, di una rotazione) a coefficienti costanti, definisce anche un

(1) 7. Parallelismo assoluto nelle varietà a connessione affine, e nuove vedute sulla relatività, presentata il 27 gennaio 1929 all'« Accademia delle Scienze di Bologna ».

(2) Vedi lav. 7 cit.

(3) Nel lav. 8. Reti di Cebiceff e sistemi coniugati nelle V_n riemanniane (« Rend. Acc. dei Lincei » (6), V, 1927, pp. 741-747), p. 745.

(4) 9. Una derivazione covariante formata coll'ausilio di n sistemi covarianti del 1° ordine (« Atti Soc. Ligustica », II, 1924, pp. 248-253).

tensore simmetrico $a_{\lambda\mu}$, che può essere assunto a tensore fondamentale di una metrica in X_n , facendone così una $V_n^{(1)}$:

$$(4) \quad a_{\lambda\mu} = \overset{i}{X}_\lambda \overset{i}{X}_\mu, \quad a_\mu^\lambda = \overset{i}{X}^\lambda \overset{i}{X}_\mu, \quad a^{\lambda\mu} = \overset{i}{X}^\lambda \overset{i}{X}^\mu.$$

Rispetto a tale metrica, gli n campi $\overset{i}{X}^\lambda$ (o $\overset{i}{X}_\lambda$) sono *unitari e ortogonali*. Si ha manifestamente:

$$(5) \quad \overset{i}{X}^\lambda = a^{\lambda\mu} \overset{i}{X}_\mu = \overset{i}{X}^\lambda,$$

onde non serve più distinguere gli indici i, j, b, k, l, \dots superiori ed inferiori. La connessione affine di Weitzenböck-Vitali diviene allora una *connessione euclidea* (a *parallelismo assoluto*) in relazione a questa metrica ⁽²⁾. Ma il tensore $a_{\lambda\mu}$ dà esso stesso un'altra connessione euclidea, quella ordinaria (senza torsione) o (secondo Cartan) di *Levi-Civita*: che ha i parametri $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda\mu \\ \nu \end{smallmatrix} \right\}$ (simboli di Christoffel costruiti per $a_{\lambda\mu}$). La connessione euclidea di Weitzenböck-Vitali può allora rappresentarsi mediante le sue *componenti relative*

$$(6) \quad T_{\lambda\mu}^{\dots\nu} = \Gamma_{\lambda\mu}^\nu - \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda\mu \\ \nu \end{smallmatrix} \right\}$$

rispetto a quella di Levi-Civita ⁽³⁾. Se contrassegniamo con l'indice o gli elementi che a quest'ultima connessione si riferiscono, abbiamo (11):

$$(7) \quad T_{\lambda\mu}^{\dots\nu} = \nabla_\mu^\circ \overset{i}{X}_\lambda \cdot \overset{i}{X}^\nu,$$

$$(8) \quad \nabla_\nu \xi^\lambda = \nabla_\nu^\circ \xi^\lambda + T_{\mu\nu}^{\dots\lambda} \xi^\mu, \quad \nabla_\nu \eta_\lambda = \nabla_\nu^\circ \eta_\lambda - T_{\mu\nu}^{\dots\lambda} \eta_\lambda.$$

(1) Vedi 9, p. 250. Ciò è, sotto altra forma, da tempo ben noto, fin dalle ricerche del Ricci sulle ennuple di congruenze (1895). Cfr. in particolare A. CARPANESE (10). *Parallelismo e curvatura in una varietà qualunque*, « Annali di Matem. », (3), 28, 1918, pp. 147-168). Ivi l'A. definisce una metrica mediante gli n pfaffiani $\omega^i = \overset{i}{X}_\lambda du^\lambda$, ponendo $ds^2 = \sum_i (\omega^i)^2$.

(2) Vedi per la *connessione euclidea* di Weitzenböck-Vitali le mie Note: 11. *Parallelismi assoluti nelle V_n riemanniane* (« Atti Istit. Veneto », 86, 1926-27, pp. 455-465) e 12. *On metric connexions with absolute parallelism* (« Proceedings Kon. Akad. Amsterdam », 30, 1927, pp. 216-218).

(3) Il tensore $T_{\lambda\mu}^{\dots\nu}$ è stato introdotto, con le sue espressioni (7) e (9), da me (11, 12) e poi ritrovato, da altro punto di vista, da A. TONOLO: 13. *(Stelle di ennuple ortogonali di congruenze di curve in una V_n)*, « Rendiconti Istit. Lombardo » (2), 60, 1927, pp. 253-263), p. 256 ($T_{\lambda\mu\nu}$ è φ_{pq} dell'A.).

Le componenti cartesiane del tensore $T_{\lambda\mu}^{ij}$ rispetto all' n -pla \dot{X}_λ generica sono precisamente (11, p. 458) i coefficienti di rotazione dell' n -pla:

$$(9) \quad T_{\lambda\mu}^{ij} = \gamma_{ijl} \dot{X}_\lambda^l \dot{X}_\mu^i \dot{X}^j, \quad \gamma_{ijl} = T_{\lambda\mu}^{ij} \dot{X}_\lambda^l \dot{X}_\mu^i \dot{X}^j.$$

3. Veniamo ad interpretazioni geometriche degli elementi introdotti.

Chiamiamo (7) stella S_X di campi vettoriali, dedotta da un' n -pla \dot{X} , la totalità dei campi i cui vettori hanno componenti cartesiane costanti rispetto a tale n -pla. Diremo che S_X è una stella affine, o rispettivamente, una stella angolare (o semplicemente stella, perchè è il caso più interessante) secondo che l' n -pla \dot{X} è qualunque, oppure unitaria ortogonale. Dunque una stella (angolare) di campi vettoriali è costituita, a partire da un' n -pla \dot{X} , da tutte quelle che se ne ottengono con arbitrarie rotazioni (a coefficienti costanti).

Come un' n -pla di campi di vettori determina un' n -pla di congruenze di linee, così una stella di campi vettoriali determina una totalità $\infty^{\frac{n(n-1)}{2}}$ di congruenze, che diremo stella di congruenze: più precisamente, stella (angolare) di congruenze sarà una totalità di congruenze di linee, tali che ciascuna linea di una qualunque di esse è traiettoria isogonale di tutte le congruenze rimanenti: mentre si parlerà di stella affine di congruenze nel caso generale. Per $n = 2$ si ha il fascio di congruenze, nozione introdotta dal Ricci e da lui applicata sistematicamente, fino dal 1898, nella sua Teoria delle superficie⁽¹⁾; studiata anche recentemente dal Delens⁽²⁾, che usa la denominazione *réseau angulaire*. Ciò premesso: è evidente che nella connessione euclidea di Weitzenböck-Vitali determinata dall' n -pla \dot{X} le linee della stella S_X di congruenze sono le linee geodetiche (autoparallele) della connessione. Assegnando la metrica di V_n e, ad arbitrio, una stella di congruenze (o, che è lo stesso, un' n -pla di congruenze ortogonali) la connessione corrispondente risulta determinata. Il parallelismo assoluto che a questa corrisponde consiste nell'invarianza degli angoli della direzione (che varia per parallelismo) con le linee della stella di congruenze, o (basta) delle n congruenze di una (qualsiasi) delle n -ple ortogonali appartenenti alla stella⁽³⁾.

(1) 14. Lezioni sulla teoria delle superficie, Padova, Drucker, 1898, pp. 163-223. Vedi anche: 15. RICCI e LEVI-CIVITA, Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications (« Math. Annalen », 54, 1900, pp. 125-201), p. 165-168.

(2) 16. P. C. DELENS, Méthodes et problèmes des géométries différentielles euclidienne et conforme (Paris, Gauthier-Villars, 1927), p. 79. Al caso generale (n qualunque) sono dedicate due Note recenti di G. POATÒ: 17. Stelle di ennuple ortogonali in una varietà V_n a metrica qualunque (« Bollettino Un. Matem. Italiana », V, 1926, pp. 125-127) e di A. TONOLO: 13, già cit.

(3) Questa interpretazione è stata data, in relazione a un' n -pla, dal VITALI (9, p. 253).

La *curvatura* della connessione in parola è nulla: la *torsione* invece non è nulla, a meno che la V_n non sia un R_n euclideo (11, p. 459; 5, p. 220; 7). Precisamente, il tensore di torsione, è (11)

$$(10) \quad S_{\lambda\mu}^{\nu} = \frac{1}{2} (\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}) = \frac{1}{2} (T_{\lambda\mu}^{\nu} - T_{\mu\lambda}^{\nu}) = \\ = \frac{1}{2} (\gamma_{ijl} - \gamma_{lij}) \overset{i}{X}_{\lambda} \overset{l}{X}_{\mu} \overset{j}{X}_{\nu}.$$

Il *vettore di torsione* relativo alla faccetta piana definita dalle direzioni $(\overset{i}{X}), (\overset{j}{X})$ è (8, p. 746)

$$(11) \quad S^{\overset{ij}{}} = 2 S_{\lambda\mu}^{\overset{\nu}{}} \overset{i}{X}^{\lambda} \overset{j}{X}^{\mu} = \frac{\overset{d^o}{ds_i} \overset{i}{X}^{\nu}}{\overset{d^o}{ds_i}} - \frac{\overset{d^o}{ds_j} \overset{j}{X}^{\nu}}{\overset{d^o}{ds_j}},$$

ove $\frac{\overset{d^o}{ds_i}}{\overset{d^o}{ds_i}} = \overset{i}{X}^{\lambda} \nabla_{\lambda}$ è la derivazione cogrediente nella direzione $(\overset{i}{X})$.

4. L'annullarsi della curvatura è, per la connessione di Weitzenböck-Vitali, una proprietà *caratteristica*. Infatti ho dimostrato (11, p. 461; 12, p. 217) che ogni *connessione euclidea a curvatura nulla può sempre interpretarsi come connessione di Weitzenböck-Vitali, rispetto a $\infty^{\frac{n(n-1)}{2}}$ n-ple ortogonali di congruenze*: ciascuna delle quali è determinata dalle direzioni delle linee uscenti da un punto iniziale; cioè, *rispetto a una stella (angolare) di congruenze*.

Abbiamo dunque che la *geometria differenziale delle connessioni euclidee a parallelismo assoluto coincide con la teoria degli invarianti differenziali di una stella (angolare) di campi vettoriali*: cioè, di una *metrica riemanniana e di una stella di congruenze*. È appunto questa teoria, in sostanza, che viene posta da Einstein a base della sua ultima formulazione della Relatività; giacchè egli introduce, a definire la geometria d'Universo, le $n^2 = 16$ componenti $\overset{i}{X}^{\lambda}$, postulando (5, p. 218) la *Drehungsinvarianz*, cioè, prendendo in considerazione soltanto gli elementi invarianti per sostituzione ortogonale a coefficienti costanti sugli n vettori $\overset{i}{X}$.

Il Weitzenböck ha dimostrato⁽¹⁾ che gli invarianti differenziali d'ordine m dei vettori $\overset{i}{X}$ nel gruppo ortogonale (cioè: della stella (angolare) di campi vettoriali che l' n -pla $\overset{i}{X}$ definisce) sono gli invarianti algebrici dei tensori $a_{\lambda\mu}, S_{\lambda\mu}^{\nu}$ e delle derivate covarianti (con la derivazione ∇_{λ}) di $S_{\lambda\mu}^{\nu}$ fino all'ordine $m - 1$.

(1) 18. *Differentialinvarianten in der Einsteinschen Theorie des Fernparallelismus* («Sitzungsber. Preuss. Akad.», Berlin, 1928, pp. 466-474) p. 469.

5. In particolare gli invarianti del 1° ordine sono gli invarianti algebrici di $a_{\lambda\mu}$, $S_{\lambda\mu}^{\nu}$. I più semplici sono: i tensori simmetrici

$$(12) \quad b_{\lambda\mu} = T_{\tau\lambda\omega} T^{\tau\omega}_{\mu} = a_{\nu\tau} \nabla_{\lambda}^{\tau} \bar{X}^{\nu} \cdot \nabla_{\mu}^{\tau} \bar{X}^{\tau} = \gamma_{ijl} \gamma_{vjh} \bar{X}_{\lambda}^i \bar{X}_{\mu}^j,$$

$$(13) \quad g_{\lambda\mu} = S_{\nu\lambda}^{\tau} S_{\tau\mu}^{\nu},$$

il vettore

$$(14) \quad \Phi_{\mu} = S_{\mu\lambda}^{\cdot\lambda} = \frac{1}{2} T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\lambda} = \frac{1}{2} \gamma_{bjh} \bar{X}_{\mu}^j = \frac{1}{2h} \nabla_{\mu} h \quad (1)$$

e gli scalari (invarianti assoluti)

$$(15) \quad \Phi = \Phi_{\mu} \Phi^{\mu} = a_{\lambda\mu} \Phi^{\lambda} \Phi^{\mu} = \frac{1}{2} \gamma_{hib} \gamma_{kih}$$

$$(16) \quad B = T_{\lambda\mu\nu} T^{\lambda\mu\nu} = b_{\lambda\mu} a^{\lambda\mu} = \sum_{ijl} (\gamma_{ijl})^2$$

$$(17) \quad C = T_{\lambda\mu\nu} T^{\mu\lambda\nu} = \gamma_{ijl} \gamma_{ilj}$$

$$(18) \quad S = S_{\lambda\mu\nu} S^{\lambda\nu\mu} = g_{\lambda\mu} a^{\lambda\mu} = \frac{3C - B}{4}$$

$$(19) \quad T = S_{\lambda\mu\nu} S^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{4} \sum_{ij} (\text{mod } S)^{ij} = \frac{B - C}{2}.$$

Il carattere di invarianza per rotazione dell'*n-pla* (*Drehungsinvarianz*) di $b_{\lambda\mu}$ è stato notato da G. Poato (17, p. 127); quello dello scalare B, dal Ricci per $n = 2$ (14, p. 186; 15, p. 167) e nel caso generale, da A. Tonolo (13, p. 263). Gli invarianti Φ_{μ} , S, T sono stati introdotti da Einstein (5, p. 221; 6, p. 225), il quale emette l'ipotesi che l'annullarsi del vettore Φ_{μ} possa caratterizzare il « reines Gravitationsfeld », e che lo scalare S possa assumersi a *funzione universale* per dedurne, con procedimento variazionale, le « Feldgleichungen » della teoria. Il Weitzenböck ha preso in considerazione (18) anche i casi in cui, come funzione universale, si assuma T, oppure Φ , oppure l'invariante scalare del 2° ordine

$$(20) \quad \Psi = a^{\lambda\mu} \nabla_{\lambda} \Phi_{\mu},$$

il cui annullarsi per $n = 2$ esprime (cfr. Ricci, 14, p. 205) che il fascio di congruenze è *isotermo*.

(1) Ove $\nabla_{\mu} h = \frac{\partial h}{\partial u^{\mu}} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} h$ è la *derivata covariante* dello scalare (invariante) rela-

tivo (densità scalare) $h = |\bar{X}_{\lambda}| = \sqrt{a} \quad (a = |a_{\lambda\mu}|)$. Vedi 7.

6. Le precedenti espressioni, (12) a (19), dei tensori e scalari invarianti del 1° ordine mettono anche in evidenza, per alcuni di essi, dei semplici significati geometrici: Il vettore Φ_μ è la somma dei vettori di curvatura delle linee di una (qualsiasi) n -pla ortogonale della stella (nel punto che si considera). Pel caso $n = 2$, il fatto che questo vettore sia lo stesso per tutte le coppie di congruenze ortogonali che incontrano isogonalmente una data congruenza, è implicitamente contenuto in una osservazione del Ricci (14, p. 193), ed enunciato esplicitamente da C. G. Weatherburn⁽¹⁾. Per $n = 2$, si ha

$$(21) \quad \Phi_\mu = \frac{1}{2} \bar{\varphi}_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \varphi^\nu,$$

ove il vettore φ_μ , introdotto dal Ricci (14, pp. 110, 168-170; 15, p. 166⁽²⁾) è quello che egli chiama sistema dedotto dal sistema $\overset{i}{X}_\nu$, o sistema coordinato covariante del fascio definito dalla coppia di congruenze $(\overset{i}{X}_\nu)$ ($i = 1, 2$). Si ha (per $n = 2$)

$$(22) \quad \varphi_\mu = \gamma_{21j} \overset{i}{X}_{\mu}^j = T_{\tau\mu\nu} \overset{1}{X}^\tau \overset{2}{X}^\nu = \frac{\varepsilon^{\tau\nu}}{2} T_{\tau\mu\nu}$$

$$(23) \quad \bar{\varphi}_\mu = \varepsilon_{\mu\nu} \varphi^\nu = T_{\mu\nu}^{\dots} = \gamma_{212} \overset{1}{X}_\mu + \gamma_{121} \overset{2}{X}_\mu.$$

Abbiamo poi in ogni caso

$$(24) \quad \nabla_\mu^o \overset{i}{X}_\nu \cdot \Phi^u = \frac{1}{2} \gamma_{ijl} \gamma_{hln} \overset{j}{X}_\nu^l,$$

onde, per $n = 2$

$$(25) \quad \nabla_\mu^o \overset{i}{X}_\nu \cdot \Phi^u = 0.$$

Dunque: per $n = 2$ le linee del fascio di congruenze ammettono le linee di flusso del campo vettoriale Φ_μ come trasversali per parallelismo di Levi-Civita, proprietà indicata sotto forma equivalente e dimostrata per altra via dal Delens (16, p. 79).

Se si vuole che (nel caso $n = 4$) il vettore Φ_μ possa rappresentare il potenziale elettromagnetico, è opportuno che esso non venga del tutto determinato dalla geometria d'Universo, ma solo a meno di un gradiente addi-

(1) 19. *Some new theorems in geometry of a surface* («The Mathem. Gazette», XIII, 1926, pp. 1-6), p. 5.

(2) I vettori (tra loro supplementari) $\varphi, \bar{\varphi}$ sono indicati con f, g dal DELENS: 16, p. 78).

tivo. Per questo basta (7) supporre che i vettori \dot{X}^λ siano determinati soltanto a meno di un fattore ρ , funzione del punto in V_n : e quindi anche che la metrica di V_n sia assegnata a meno d'una trasformazione conforme. Ciò supponendo, una parte della nuova teoria di Einstein andrebbe modificata: si potrebbero utilizzare alcuni risultati della geometria di Weyl, ma certo diminuirebbe la semplicità dell'attuale formulazione. Il « reines Gravitationsfeld » sarebbe allora caratterizzato (cfr. Einstein, 6, p. 225) da

$$(26) \quad \text{rot}^0 (\Phi_\mu) = \nabla_\nu^\circ \Phi_\mu - \nabla_\mu^\circ \Phi_\nu = \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial u^\nu} - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial u^\mu} = 0.$$

Il significato del tensore $b_{\lambda\mu}$ appare manifesto se si osserva che, essendo ξ un vettore arbitrario, è

$$(27) \quad b_{\lambda\mu} \xi^\lambda \xi^\mu = \sum_i \left(\text{mod } \frac{d^0 \dot{X}^i}{ds} \right)^2$$

ove $\frac{d^0}{ds} = \xi^\lambda \nabla_\lambda^\circ$. Dunque: la forma $b_{\lambda\mu} \xi^\lambda \xi^\mu$ è la somma dei quadrati delle

curvature associate alle n direzioni dell' n -pla \dot{X} (qualunque della stella S_X) nella direzione (ξ) . E l'invariante B è la somma dei valori che la forma precedente assume prendendo la direzione (ξ) secondo le n direzioni dell' n -pla.

Condizione necessaria perchè esista una congruenza di trasversali per parallelismo di Levi-Civita delle linee di una stella di congruenze, è che il tensore $b_{\lambda\mu}$ abbia rango $< n$. Ecco un caso particolare in cui questa condizione certamente non è soddisfatta: il caso degli spazi (riemanniani) di gruppo secondo Cartan⁽¹⁾. Un tale spazio è caratterizzato dall'ammettere due connessioni euclidee a parallelismo assoluto (di 1^a e di 2^a specie), e corrispondentemente, due classi di traslazioni (di 1^a e di 2^a specie) tali che per una traslazione di 1^a [di 2^a] specie ogni vettore si sposta per parallelismo di 2^a [di 1^a] specie (Cartan). Tra le molte altre notevolissime proprietà di questi spazi, accennerò alle seguenti: 1^a le geodetiche (autoparallele) delle due connessioni a parallelismo assoluto coincidono con le geodetiche della connessione di Levi-Civita (cioè di $a_{\lambda\mu}$), e quindi: le linee geodetiche (di $a_{\lambda\mu}$) formano una stella di congruenze⁽²⁾: in particolare, possono distribuirsi in $\infty^{\frac{n(n-1)}{2}}$ n -ple ortogonali; 2^a il tensore $S_{\lambda\mu\nu}$ è emisimmetrico, e quindi coincide con $T_{\lambda\mu\nu}$; $S = C = -B = -T$, e $\Phi_\mu = 0$; 3^a i tensori $a_{\lambda\mu}$, $g_{\lambda\mu}$, $b_{\lambda\mu}$ differiscono tra loro soltanto per fattori costanti: $g_{\lambda\mu} = -b_{\lambda\mu} =$

(1) Vedi il mio lav. 7, anche per la bibliografia.

(2) La proprietà, assai espressiva e caratteristica, pel caso $n = 2$ (caso che dà soltanto le superficie sviluppabili) è stata indicata dal RICCI (14, pp. 192-193).

$= R^{\circ\cdots\tau}_{\tau\lambda\mu} = R^{\circ}_{\lambda\mu} = ca_{\lambda\mu}$, ove $\frac{c}{n} = a^{\lambda\mu} R^{\circ}_{\lambda\mu}$ è la curvatura riemanniana media, *costante*; in particolare, se $n > 2$, $b_{\lambda\mu}$ ha rango n , se si esclude il caso banale $c = 0$, in cui lo spazio è euclideo; 4^a si ha $\nabla^{\circ}_{\omega} R^{\circ\cdots\tau}_{\lambda\mu\nu} = 0$, $\nabla^{\circ}_{\omega} S^{\nu}_{\lambda\mu} = 0$: quindi il trasporto per parallelismo di Levi-Civita conserva la curvatura riemanniana, e la torsione. Tali proprietà mostrano come questi spazi, con le loro connessioni a parallelismo assoluto, debbano giuocare un ruolo notevole nella nuova teoria einsteiniana: si presenta l'interessante questione della loro interpretazione fisica, che per ora mi limito a segnalare.

Matematica. — *La decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in fattori simbolici di primo ordine.* Nota di G. MAMMANA, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. SCORZA.

In una Memoria pubblicata nella « Mathematische Zeitschrift » ⁽²⁾, studio le equazioni del secondo ordine, omogenee e di tipo normale, seguendo un metodo nuovo che permette, fra l'altro, ricavarne in modo semplicissimo e breve le classiche proprietà (teoremi di oscillazione sugli autovalori ecc.), e in ipotesi più generali. I notevoli risultati, in quello studio raggiunti, conseguono dall'aver ivi dimostrata la possibilità di decomporre il primo membro della più generale equazione del secondo ordine,

$$l[u] \equiv u'' + pu' + qu = 0$$

nel prodotto simbolico di due fattori (simbolici) del primo ordine e di tipo normale; di determinare, in altri termini, due funzioni α e β (complesse in generale) per cui si abbia identicamente,

$$l[u] \equiv \left(\frac{d}{dx} + \alpha \right) \left(\frac{d}{dx} + \beta \right) u \quad (3),$$

e cioè soddisfacenti (in tutto l'intervallo (a, b) dove son definite p e q) al sistema

$$\alpha + \beta = p \quad ; \quad \alpha \cdot \beta + \beta' = q.$$

(1) Nella seduta del 17 marzo 1929.

(2) *Sopra un nuovo metodo di studio delle equazioni differenziali lineari*, « Mathematische Zeitschrift Sonderabdruck » aus B. 25, H. 4, 1926.

(3) Pel preciso significato dei simboli e dei vocaboli qui adoperati si rimanda alla Memoria citata.

È spontaneo porsi la domanda: — Questo metodo, che si è dimostrato tanto efficace nella trattazione delle equazioni del secondo ordine, si potrà, poi, con successo, applicare anche nello studio delle equazioni di ordine superiore al secondo? — Esso si presenta come il più naturale e la sua applicazione non richiede che cognizioni elementari. Bisognerà pertanto cominciare con lo stabilire se sia o no possibile, assegnata l'equazione

$$(1) \quad L[u] \equiv u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} u' + p_n u = 0$$

determinare n funzioni continue, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, definite in tutto l'intervallo (a, b) dei coefficienti p_i , tali da aversi identicamente:

$$(2) \quad L[u] \equiv \left(\frac{d}{dx} + \alpha_1 \right) \left(\frac{d}{dx} + \alpha_2 \right) + \dots \left(\frac{d}{dx} + \alpha_n \right) u.$$

In questo lavoro che vuol essere una Nota preventiva a una Memoria che verrà pubblicata altrove, esporrò, per sommi capi, precisamente i principi di una teoria che può dirsi della decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee di tipo normale, in fattori simbolici del primo ordine di tipo normale; la quale porta a concludere, che:

È sempre possibile, ed in infiniti modi, dare al primo membro di una qualsivoglia equazione come la (1), la forma di prodotto indicato nella (2).

Questo risultato mette in evidenza, il carattere generalmente oscillatorio delle soluzioni della (1), e consente di fare uno studio circa l'andamento delle soluzioni stesse in tutto l'intervallo (a, b) .

Accennerò anche ad alcune fra le più immediate conseguenze dell'affermata possibilità di decomposizione di $L[u]$, e farò una breve applicazione del procedimento di studio sopra menzionato alle equazioni del terzo e del quarto ordine autoaggiunte.

I. — Supponiamo i coefficienti p_i funzioni di x , continue in (a, b) , e occorrendo a derivate continue. Le funzioni $u_1; u_2; \dots u_n$; rappresentino un sistema fondamentale di integrali della (1); e poniamo:

$$W \equiv \begin{vmatrix} u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \\ u_1^{(n-2)} & u_2^{(n-2)} & \dots & u_n^{(n-2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1' & u_2' & \dots & u_n' \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{vmatrix}$$

Disegneremo con i simboli $\Delta_1; \Delta_2; \dots \Delta_n$; gli aggiunti degli elementi della prima riga di W . — Sussiste il

$$\text{TEOREMA: Il wronskiano } \Delta \equiv \begin{vmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \dots & \Delta_n \\ \Delta'_1 & \Delta'_2 & \dots & \Delta'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_1^{(n-1)} & \dots & \dots & \Delta_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \text{ è uguale al deter-}$$

minante aggiunto di W ; esso pertanto non è mai nullo in (a, b) . Segue:

Le funzioni Δ_i costituiscono un sistema di n integrali indipendenti, per una equazione (che diremo complementare associata alla (1)) lineare omogenea di ordine n e di tipo normale ⁽¹⁾.

I coefficienti che entrano nella formazione del primo membro di questa equazione, che indicheremo simbolicamente:

$$(2) \quad H_n[\chi] = 0$$

sono funzioni razionali intere delle $\frac{p}{i}$ e delle loro derivate. Pel calcolo di $H_n[\chi]$ ci si può servire della seguente formula ricorrente, di verifica immediata:

$$H_i = H'_{i-1} + \frac{p}{i} H_i + (-1) \frac{p}{i} H_0$$

(per $i = 2, 3 \dots$) ove si ponga: $H_0 = \chi$, $H_1 = \chi'$.

La (2) quando $\frac{p}{i} \equiv 0$, si riduce alla equazione aggiunta della (1). La equazione complementare associata alla (2), ammetterà come sistema integrale fondamentale gli aggiunti α_{in} ($i = 1, 2 \dots n$) dell'ultima riga di Δ . Ma si ha (a causa delle relazioni che legano gli aggiunti del determinante aggiunto ad un dato determinante, e gli elementi di questo dato):

$$\alpha_{in} = W u_i (i = 1, 2 \dots n): \text{consegue,}$$

L'associata dell'associata alla (1), ammette come integrali indipendenti quelli della (1) stessa moltiplicati per il loro wronskiano. In particolare quindi se W è costante e però $\frac{p}{i} \equiv 0$ (ipotesi questa nella quale noi ci potremo sempre porre) l'associata dell'associata alla (1) coincide alla (1) stessa.

Da questa relazione, diciamo così, di reciprocità fra la (1) e l'associata (2), si trae questa prima conseguenza, importante per il seguito. Se una di esse ha un integrale non nullo in tutto (a, b) , l'altra ammette $n - 1$ integrali a wronskiano mai nullo in tutto (a, b) ; e quindi se la (1) è auto-aggiunta, e però coincidente con la sua associata, si potrà concludere:

Se un integrale di (1) è sempre diverso da zero in (a, b) esistono $n - 1$ integrali della stessa (1) a wronskiano non nullo in tutto (a, b) e inversamente.

(1) Si noti che in generale n funzioni continue insieme alle loro derivate fino a quelle di ordine n incluse, costituiscono sistema fondamentale di integrali di una equazione di ordine n omogenea e di tipo normale, allora e solo quando il loro wronskiano non sia mai nullo.

I tre lemma seguenti sono di fondamentale importanza nella nostra trattazione. Qui ci limiteremo solo a darne gli enunciati con qualche chiarimento illustrativo.

LEMMA I. — *Condizione necessaria e sufficiente affinché il primo membro della (1), sia decomponibile nel prodotto simbolico di due fattori simbolici di tipo normale di ordine $m < n$ l'uno, seguito dall'altro di ordine $n - m$, si è che esistano m integrali della stessa (1) a wronskiano mai nullo in tutto (a, b) ; ciò che è quanto dire, esistano m integrali costituenti sistema fondamentale di una equazione di ordine m e di tipo normale ⁽¹⁾.*

Se $u_1; u_2; \dots u_m$; sono m soluzioni di (1), a wronskiano W_m diverso da zero in tutto (a, b) , e

$$\frac{1}{W_m} \begin{vmatrix} u^{(m)} & u_1^{(m)} & \dots & u_m^{(m)} \\ u^{(m-1)} & u_1^{(m-1)} & \dots & u_m^{(m-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u & u_1 & \dots & u_m \end{vmatrix} \equiv \sum_{i=0}^m q_i u^{(m-i)} = 0 \quad (q_0 \equiv 1),$$

l'equazioni di cui esse costituiscono sistema di integrali fondamentale: Posto:

$$\sum_{i=0}^m q_i u^{(m-i)} \equiv \left(\frac{d^m}{dx^m} + q_1 \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \dots + q_{m-1} \frac{d}{dx} + q_m \right) u,$$

si può affermare, essere sempre possibile, la determinazione di $n - m$ funzioni continue $g_1, g_2 \dots g_{n-m}$ (in modo unico) tali da aversi identicamente:

$$L[u] \equiv \left(\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} + g_1 \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} + \dots + g_{n-m-1} \frac{d}{dx} + g_{n-m} \right) \left(\frac{d^m}{dx^m} + q_1 \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \dots + q_{m-1} \frac{d}{dx} + q_m \right) u.$$

Le g_i , notiamo, sono funzioni razionali e intere delle p_i e q_i , e delle derivate delle q_i . Si ritrova come conseguenza, sotto forma precisa il

TEOREMA: L'integrazione di una equazione di ordine n , di tipo normale, quando di essa si conoscano m integrali indipendenti a wronskiano mai nullo in tutto (a, b) , si riconduce a l'integrazione di una equazione di ordine $n - m$, e a delle quadrature ⁽²⁾.

(1) Notiamo espressamente che in tutta la nostra trattazione ci preoccupiamo a che i fattori di decomposizione siano di tipo normale (col coefficiente della più alta derivata, cioè, sempre diverso da zero e che perciò potremo pensare uguale a uno). Una decomposizione in fattori di tipo non normale è sempre possibile, come si può agevolmente provare.

(2) Nell'enunciare questo teorema generalmente (V. JORDAN, *Cour d'analyse*) vien taciuta la condizione *necessaria* che il wronskiano degli m integrali noti sia *sempre* diverso da zero.

Date n funzioni u_1, u_2, \dots, u_n , continue e a derivate continue fino a quelle di ordine $(n-1)$ incluse, diremo catena completa di wronskiani relativa alle funzioni u_i la seguente successione di determinanti:

$$W_0 = 1; W_1 = u_1; W_2 = |u_1, u_2|; W_3 = |u_1, u_2, u_3|; \dots W_{n-1} = \\ = |u_1, u_2, \dots, u_{n-1}|; W_n = |u_1, u_2, \dots, u_n|,$$

dove il simbolo $|u_1, u_2, \dots, u_i|$ sta a designare il wronskiano di u_1, u_2, \dots, u_i .

Orbene: in ogni intervallo (α, β) , contenuto in (a, b) , in cui ogni termine della catena completa di wronskiani relativa a un sistema fondamentale di integrali u_1, u_2, \dots, u_n della (1), sia diverso da zero; vale la seguente notevole identità:

$$(3) \quad L[u] = \sum p_i u^{(n-i)} = \left(\frac{d}{dx} - \text{Dlg} \frac{W_n}{W_{n-1}} \right) \left(\frac{d}{dx} - \text{Dlg} \frac{W_{n-1}}{W_{n-2}} \right) \dots \\ \dots \left(\frac{d}{dx} - \text{Dlg} \frac{W_2}{W_1} \right) \left(\frac{d}{dx} - \text{Dlg} \frac{W_1}{W_0} \right) u.$$

E poichè si dimostra che ogni termine della catena relativa a un qualsivoglia sistema fondamentale della (1), ha in (a, b) un numero finito di zeri, possiamo concludere che: comunque si prenda un sistema u_i fondamentale della (1), vale l'identità (3), ad esso relativa, dappertutto in (a, b) salvo in un numero finito di punti. Conseguo il:

LEMMA II. — *Condizione sufficiente perchè il primo membro di (1) sia decomponibile nel prodotto di n fattori simbolici del primo ordine di tipo normale, si è che esista, per la (1), un sistema fondamentale, la cui relativa catena completa di wronskiani sia formata da elementi mai nulli in (a, b) o come diremo brevemente mai nulla in (a, b) . — Questa condizione è anche necessaria.*

LEMMA III. — Se n funzioni reali $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ simultaneamente definite in (a, b) non sono mai ivi contemporaneamente nulle, e una di esse, ad esempio, φ_1 ha, in (a, b) , un numero finito (o anche infinito ma numerabile) di zeri, è possibile costruire infinite combinazioni lineari, a coefficienti costanti reali, delle $\varphi_2; \varphi_3; \dots, \varphi_n$; le quali combinazioni non sono mai nulle insieme a φ_1 .

Sono immediate conseguenze di questo lemma i due seguenti teoremi:

TEOREMA I. — *Per la più generale equazione lineare omogenea di ordine n e di tipo normale, esistono infinite coppie di integrali che non si annullano mai simultaneamente.* Ne segue, posto che u e v rappresentino una di tali coppie di integrali della (1), che la soluzione $\omega = u + iv$, non è mai nulla in tutto (a, b) .

Il lemma III applicato a un sistema fondamentale di integrali della (2) conduce al:

TEOREMA II. — *Esistono infiniti gruppi di $n-1$ integrali di una equazione come la (1), tutti reali ad eccezione di uno solo che è complesso e della*

forma $u + iv$ (u e v essendo pure soluzioni della (1)) a wronskiano mai nullo in tutto (a, b) .

Deduciamo da questi due teoremi e dal lemma I:

Possiamo sempre rappresentare ogni equazione del tipo (1) mediante una qualunque delle seguenti forme:

$$L[u] = \left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \alpha_1 \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \dots + \alpha_{n-2} \frac{d}{dx} + \alpha_{n-1} \right) \left(\frac{d}{dx} + \alpha_0 \right) u = 0.$$

$$L[u] = \left(\frac{d}{dx} + \beta_0 \right) \left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \beta_1 \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \dots + \beta_{n-2} \frac{d}{dx} + \beta_{n-1} \right) u = 0.$$

Le funzioni α_i e le p_i sono legate fra loro da n relazioni razionali e intere nelle p_i e α_i stesse, e nelle derivate delle α_i , e così pure le β_i con le p_i . Qui metteremo in rilievo solo la prima delle relazioni relative alle α_i e la prima di quelle relative alle β_i . Si ha:

$$\alpha_0 + \alpha_1 = p_1 \quad ; \quad \beta_0 + \beta_1 = p_1.$$

Una conseguenza notevole delle considerazioni esposte a proposito di questo terzo lemma, e di quelle fatte relativamente alla equazione associata, è espressa dal:

TEOREMA III. — È sempre possibile, e in infiniti modi, la determinazione di n integrali indipendenti della (1), u_1, u_2, \dots, u_n , reali e tali che la enneupla di soluzioni indipendenti della stessa (1) $\omega \equiv u_1 + iu_n, u_2, u_3, \dots, u_n$, di cui solo la prima è complessa, ammetta catena completa di wronskiani mai nulli in (a, b) .

Dal lemma II e da questo teorema deduciamo il:

TEOREMA FONDAMENTALE. — La più generale espressione differenziale lineare omogenea del tipo $L[u] = \sum_{i=0}^n p_i u^{(i)} (p_0 \neq 0)$ può sempre decomporci, e in infiniti modi, nel prodotto (simbolico) di n fattori (simbolici) del primo ordine e di tipo normale.

Alla più generale equazione del tipo (1) possiamo quindi dare sempre la forma notevole:

$$(4) \quad L[u] = \left(\frac{d}{dx} + \eta_1 \right) \left(\frac{d}{dx} + \eta_2 \right) \dots \left(\frac{d}{dx} + \eta_n \right) u = 0$$

dove le η_i sono funzioni continue in tutto (a, b) e in generale complesse. Esse sono espresse dalle formule seguenti:

$$\eta_{n-i} = -D \lg \frac{W_{i+1}}{W_i} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

le $W_i (i = 0, 1, \dots, n)$ costituendo i wronskiani della catena completa relativa agli integrali $\omega, u_2, u_3, \dots, u_n$.

Sviluppando il prodotto indicato nella (4), e identificando i coefficienti delle varie derivate di u , ai corrispondenti della (1), si otterranno n relazioni che legano le η_i alle p_i , relazioni che ricordano quelle che legano i coefficienti di una equazione algebrica alle radici della medesima. Si ha precisamente p uguale alla somma delle η_i, p alla somma dei prodotti a due a due aumentata di altri termini contenenti le derivate prime delle η_i, p alla somma dei prodotti a tre a tre più altri termini contenenti derivate prime e seconde delle stesse η_i , ecc. Ne segue, se le p_i sono costanti si potrà soddisfare a questo sistema di relazioni prendendo le η_i costanti, e uguali alle radici della equazione caratteristica della (1).

Matematica. — Aggiunta alla Nota: « Dimostrazione di un teorema d'analisi di cui è fatto uso in fisica piana ». Nota di M. PICONE, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Mi permetto di ritornare sull'argomento della mia Nota richiamata nel titolo della presente presumendo, anche nei riguardi delle possibili applicazioni ai problemi di fisica piana, non del tutto inutile dare rilievo alla seguente generalizzazione di cui è immediatamente suscettibile il teorema I di quella Nota:

I'. Siano: C_1, C_2, \dots, C_p , curve regolari semplici e chiuse del piano (x, y) , l'una esterna all'altra, $D \equiv D_c(C_1, C_2, \dots, C_p)$ il dominio illimitato luogo dei punti non interni a ciascuna di quelle curve, n la normale alla frontiera FD di detto dominio, volta verso l'interno di questo, $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ costanti; se $u(x, y) \equiv u(P)$ è una funzione armonica e di classe C' in D , verificante le condizioni

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{C_k} \frac{du}{dn} = \gamma_k \quad (k = 1, 2, \dots, p) \quad (2)$$

$$(2) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial y} = \beta,$$

(1) Nella seduta del 17 marzo 1929.

(2) Nella Nota citata sono incorso nei seguenti errori di trascrizione:

A pag. 651, riga 12 dall'alto trovasi $\int \frac{du}{dn} ds = \gamma$ in luogo di $\frac{1}{2\pi} \int \frac{du}{dn} ds = \gamma$.

A pag. 656, righe 1 e 13 dall'alto, trovasi residuo in luogo di secondo indice.

comunque si fissino i p punti Q_1, Q_2, \dots, Q_p interni, rispettivamente, alle curve C_1, C_2, \dots, C_p , esiste una funzione $w(z)$ della variabile complessa $z = x + iy$, olomorfa in D e regolare all'infinito che ha per parte reale la funzione armonica

$$(3) \quad U(P) = u(P) - \alpha x - \beta y - \sum_{b=1}^p \gamma_b \log \overline{Q_b} P.$$

La dimostrazione di questo teorema si deduce immediatamente da quelli della Nota citata, tenendo presente la seguente generalizzazione del teorema II della stessa Nota:

II'. Se la funzione $U(P)$ è armonica e di classe C' nel dominio $D \equiv D_c(C_1, C_2, \dots, C_p)$, è convergente all'infinito e verifica le condizioni

$$(4) \quad \int_{C_k} \frac{dU}{dn} ds = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p),$$

esiste una funzione $w(z)$ della variabile complessa $z = x + iy$ olomorfa in D e regolare all'infinito che ha per parte reale la U .

Per ogni curva regolare semplice e chiusa C , interna a D , si ha invero

$$\int_C (-U_y dx + U_x dy) = \sum \int_{C_k} \frac{dU}{dn} ds = 0,$$

ove la sommatoria si intende estesa a tutte e sole le eventuali curve C_k interne a C . Ciò basta⁽¹⁾ per potere asserire che esiste in D la funzione V coniugata alla U , armonica e di classe C' , per la quale riesce $V_x = -U_y$, $V_y = U_x$. Avendosi, in D , $|U_x| \overline{Q_1 P}^2 < K$, $|U_y| \overline{Q_1 P}^2 < K$, con K costante, si avrà pure ivi $|V_x| \overline{Q_1 P}^2 < K$, $|V_y| \overline{Q_1 P}^2 < K$, e da ciò segue la convergenza di V all'infinito. La funzione $w = U + iV$ è pertanto olomorfa in D e (convergente e quindi) regolare all'infinito.

Il teorema I' sarà dunque dimostrato se si verifica che la funzione $U(P)$ definita dalla (3) soddisfa le ipotesi del teorema II'. Effettivamente, per questa funzione $U(P)$, armonica in D , si ha in virtù delle (1),

$$\int_{C_k} \frac{dU}{dn} ds = 2\pi \gamma_k - \sum_{b=1}^p \gamma_b \int_{C_k} \frac{d \log \overline{Q_b} P}{dn} ds = 0,$$

poichè

$$\int_{C_k} \frac{d \log \overline{Q_b} P}{dn} ds \begin{cases} = 0, & \text{se } b \neq k, \\ = 2\pi, & \text{se } b = k. \end{cases}$$

(1) Cfr. le mie *Lezioni d'Analisi infinitesimale* («Circolo matematico di Catania», Catania, R. Università, 1923), vol. I, nn. 122 e 124.

Riescono dunque intanto verificate le (4). Ne segue che la $U(P)$ ha nullo il suo secondo indice all'infinito, e poichè in virtù delle (2), le sue derivate parziali del primo ordine sono entrambe infinitesime all'infinito, essa riesce ivi convergente, secondo quanto stabilisce il teorema III della mia Nota precedente.

Un'osservazione occorre fare sui procedimenti di dimostrazione seguiti in questa e nella Nota precedente. Essi non invocano la classica teoria delle funzioni di variabile complessa, ed i teoremi su cui poggiano, relativi alle funzioni armoniche in due variabili, dimostrati indipendentemente da quella teoria, sono perciò suscettibili, con lievi ritocchi nelle dimostrazioni e negli enunciati, di essere estesi alle funzioni armoniche in quante si vogliano variabili. Quelle dimostrazioni hanno dunque di per sè un certo interesse.

Il giudizio, dato da Signorini e da me, di non immediatezza della rigorosa dimostrazione dei teoremi I e I' si riferisce appunto alla condizione di pervenirvi rimanendo nel campo reale. Se, invece, ci si vuol valere della teoria delle funzioni di variabile complessa ecco come, in accordo con quanto asserisce il prof. Mouskhelichvili nel luogo citato nella mia Nota precedente, si può immediatamente dedurre il teorema I' dal teorema IV'.

La funzione $U(x, y)$ definita dalla (3) è dotata (teorema IV') di funzione coniugata $V(x, y)$ armonica in \mathbf{D} . La U e la V hanno le derivate parziali del primo ordine entrambe infinitesime all'infinito e pertanto la funzione

$$w(z) = U(x, y) + iV(x, y),$$

olomorfa in \mathbf{D} , ha derivata prima infinitesima all'infinito. Ne segue la regolarità della $w(z)$ all'infinito, poichè se lo sviluppo di Laurent della $w(z)$, relativo al punto ∞ , fosse provvisto anche di termini con potenza di z ad esponente positivo, la derivata di $w(z)$ — il cui sviluppo di Laurent relativo al punto ∞ si ottiene dal precedente derivandolo termine a termine — non potrebbe risultare infinitesima all'infinito.

Matematica. — *Formule duali di Newton.* Nota di L. TOSCANO, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. GIORGI.

1. Le formule di Newton, nel principio di dualità per le funzioni simmetriche caratteristiche ⁽²⁾, ammettono le quali

$$S_i + S_{i-1} V_1 + S_{i-2} V_2 + \dots + S_1 V_{i-1} = i V_i \quad (i = 1, 2, \dots),$$

dove $S_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$ ($k = 1, 2, \dots$) e V_k rappresenta la funzione aleph di Wronski di grado k nelle x_1, x_2, \dots, x_n .

Di queste formule conosco una dimostrazione ⁽³⁾ alquanto complicata, col calcolo simbolico sui prodotti di funzioni simmetriche caratteristiche, ma strettamente algebrica; una dimostrazione ⁽⁴⁾ fondata sul calcolo delle derivate ⁽⁵⁾ e incompleta in quanto l'indice i può assumere soltanto i valori $1, 2, \dots, n-1$; e infine una dimostrazione ⁽⁶⁾ algebrica pure per $i = 1, 2, \dots, n$.

Seguendo quest'ultima dimostrazione del Trudi, mi propongo qui di stabilire le formule duali di Newton per i generico.

2. Siano x_1, x_2, \dots, x_n le n radici dell'equazione

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

È noto che le funzioni simmetriche semplici S_k e le funzioni aleph di Wronski V_k soddisfano le relazioni

$$S_{n+k} + a_1 S_{n+k-1} + a_2 S_{n+k-2} + \dots + a_{n-1} S_{k+1} + a_n S_k = 0$$

$$V_{n+k} + a_1 V_{n+k-1} + a_2 V_{n+k-2} + \dots + a_{n-1} V_{k+1} + a_n V_k = 0.$$

Diamo dapprima a k il valore 0 e ad n i successivi valori $1, 2, \dots, n$; lasciamo poi fisso n e diamo a k i valori $1, 2, \dots, k$.

Si ottengono così due sistemi di equazioni nelle S e nelle V ; e risolvendo rispetto a S_{n+k} si ha

(1) Nella seduta del 7 aprile 1929.

(2) Cfr. G. GIAMBELLI, *Alcune proprietà delle funzioni simmetriche caratteristiche* («Atti Acc. Scienze di Torino», vol. 38, 1903).

(3) Cfr. A. ZAPPALÀ, *Il principio di dualità nelle funzioni simmetriche caratteristiche per le formule di Newton* («Riv. Mat. e Fis.», vol. 1°, fasc. 1°).

(4) L. CROCCHI, *Una relazione fra le funzioni simmetriche semplici e le funzioni simmetriche complete* («Giornale di Matem.», vol. 18; 1880, pp. 377-380).

(5) Cfr. in proposito: F. FAÀ DE BRUNO, *Théorie des formes binaires*, Turin, 1876.

(6) Cfr. N. TRUDI, *Ricerche intorno alla partizione dei numeri ed alle funzioni isobariche* («Atti Acc. Scienze di Napoli», vol. VIII, 1880).

$$S_{n+k} = (-1)^{n+k} \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 3a_3 & a_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ na_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ (n+1)a_{n+1} & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n+k)a_{n+k} & a_{n+k-1} & a_{n+k-2} & \dots & a_2 & a_1 \end{vmatrix},$$

a rispetto a V_{n+k} :

$$V_{n+k} = (-1)^{n+k} \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ a_{n+1} & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+k} & a_{n+k-1} & a_{n+k-2} & \dots & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+k} D_{n+k},$$

dove al posto di a_r bisogna sostituire lo zero per $r > n$.

Consideriamo ora il determinante più generale

$$\Delta_{n+k} = \begin{vmatrix} h_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ h_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ h_{n+1} & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n+k} & a_{n+k-1} & a_{n+k-2} & \dots & a_2 & a_1 \end{vmatrix},$$

intendendo che h_r sia generico.

Il complemento algebrico di h_i è

$$(-1)^{i+1} D_{n+k-i}$$

e quindi uguale a

$$(-1)^{n+k+1} V_{n+k-i}.$$

Quindi

$$\Delta_{n+k} = (-1)^{n+k+1} (h_1 V_{n+k-1} + h_2 V_{n+k-2} + \dots + h_{n+k} V_0).$$

Supposto ora

$$h_1 = a_1, \quad h_2 = 2a_2, \dots, h_n = na_n, \quad h_{n+1} = \\ = (n+1)a_{n+1}, \dots, h_{n+k} = (n+k)a_{n+k}$$

si ha

$$S_{n+k} = -(a_1 V_{n+k-1} + 2a_2 V_{n+k-2} + \dots + (n+k)V_k).$$

D'altra parte

$$(n+k)V_{n+k} + (n+k)a_1 V_{n+k-1} + \dots + (n+k)a_n V_k = 0$$

e sommando con la precedente

$$S_{n+k} = ka_n V_k + (k+1)a_{n-1} V_{k+1} + \dots + \\ + (n+k-1)a_1 V_{n+k-1} + (n+k)V_{n+k}.$$

Lasciando ora fisso k , facciamo variare n da 1 a n ; lasciamo poi fisso n e facciamo variare k .

Si ottiene un sistema di $n+k$ equazioni nelle V_r e risolvendo rispetto a V_{n+k} si ha

$$V_{n+k} = (-1)^{n+k-1} \frac{(n+k-1)!}{(n+k)!} \sum_{r=1}^{r=n+k} (-1)^{n+k-1} S_r V_{n+k-r},$$

ovvero

$$S_{n+k} + S_{n+k-1} V_1 + \dots + S_1 V_{n+k-1} = (n+k)V_{n+k},$$

come si era annunciato.

Osservazione. Il Crocchi, dopo avere dedotto le formule duali di Newton, osserva che « S_r si può esprimere allo stesso modo e a meno del segno tanto con i coefficienti a_1, a_2, \dots, a_n quanto con le funzioni Aleph. Ogni funzione simmetrica multipla di x_1, x_2, \dots, x_n che sia una funzione pari delle S si esprimerà nello stesso modo tanto per i coefficienti a quanto per le funzioni aleph; mentre quella funzione simmetrica che sia una funzione dispari delle S , si esprimerà in valore assoluto soltanto ugualmente tanto per le a quanto per le funzioni aleph; e viceversa ».

Così il Crocchi intravede senza trattarlo un certo principio di dualità.

Matematica. — *Le equazioni lineari funzionali nel campo complesso.*
Nota di L. FANTAPPIÈ, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Una nuova serie nello spettro del ferro prodotto con scariche fortemente condensate.* Nota di M. KAHANOVICZ, presentata dal Corrisp. G. GIORGI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sul calcolo della turbolenza nei bassi strati atmosferici.* Nota di M. LOMBARDINI, presentata dal Socio F. ENRIQUES.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Su un teorema relativo alle equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine.* Nota di A. MAMBRIANI, presentata dal Corrisp. L. TONELLI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sull'esistenza degli integrali delle equazioni differenziali ordinarie.* Nota di E. PINI, presentata dal Corrisp. L. TONELLI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur l'unicité du prolongement des fonctions harmoniques.* Nota di D. POMPEIU, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Su un'equazione differenziale particolare.* Nota di G. SCORZA-DRAGONI, presentata dal Corrisp. L. TONELLI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Classificazione delle superficie dello spazio hilbertiano il cui spazio 2-tangente è a quattro dimensioni.* Nota di A. TONOLO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Teoria delle funzioni. — *Serie di potenze che ammettono la circonferenza di convergenza come linea singolare.* Nota di L. ONOFRI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio S. PINCHERLE.

1. Data una serie di potenze:

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

avente raggio finito di convergenza, consideriamo tutte le infinite serie:

$$(1') \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_{s(n)} x^n$$

nelle quali i coefficienti $a_{s(n)}$ sono, salvo l'ordine con cui si presentano, i medesimi che hanno servito a comporre la (1).

Le serie (1') che noi considereremo sono, in altre parole, quelle che si ottengono dalla (1) permutando fra loro i coefficienti a_n e cioè eseguendo tutte le possibili sostituzioni s sugli infiniti elementi:

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

In questa Nota vogliamo dimostrare come (assoggettando la (1) ad opportune condizioni) si possano costruire delle serie del tipo di (1') per le quali la circonferenza di convergenza sia una linea singolare.

La questione che abbiamo così posta, pur possedendo in certo senso carattere di novità, presenta evidenti analogie con ricerche compiute, in casi più speciali, da Fatou, da Hurwitz e da Polyà: ricerche che ci assicurano come, cambiando il segno ad una infinità di coefficienti della (1), convenientemente scelti, si possa ottenere una serie non continuabile al di fuori del cerchio di convergenza.

2. Sia:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{\lambda_n}$$

una serie di potenze in cui gli esponenti λ_n siano interi, positivi e tali che:

$$\lambda_{n+1} > \lambda_n.$$

Se il raggio ρ di convergenza di questa serie è maggiore di 1 e se:

$$b_{r_0}, b_{r_1}, \dots, b_{r_n}, \dots$$

(1) Nella seduta del 17° marzo 1929.

è una successione estratta dalla:

$$b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$$

in modo che:

$$r_{n+1} > r_n,$$

la nuova serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{r_n} x^{\lambda_n}$$

ha il raggio di convergenza $\rho' \equiv \rho$.

Infatti, per quanto si è supposto, deve aversi:

$$r_n > n, \quad \lambda_{r_n} > \lambda_n,$$

e quindi (tenendo presente che, da un certo punto in poi, $|b_n| < 1$):

$$\frac{\lambda_n}{\sqrt[n]{|b_{r_n}|}} < \frac{\lambda_{r_n}}{\sqrt[n]{|b_{r_n}|}}.$$

3. Ciò premesso, dimostriamo il seguente teorema:

Se la serie:

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ha il raggio di convergenza eguale ad 1 ed è tale che la successione dei coefficienti a_n abbia fra i suoi punti limiti lo zero, è sempre possibile di determinare delle sostituzioni s sui coefficienti medesimi in modo che le serie trasformate:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{s(n)} x^n$$

ammettano la circonferenza di convergenza (ancora di raggio 1) quale linea singolare.

Supponiamo dapprima che la successione:

$$(\alpha) \quad \sqrt[n]{|a_n|} \quad (n = 0, 1, \dots),$$

per la quale è:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1,$$

abbia più di un punto limite.

Preso un numero $\varepsilon < 1$ tale che esista qualche punto limite di (α) inferiore ad ε , dividiamo la successione (α) in due successioni (α') ed (α'')

col seguente criterio: nella (α') mettiamo tutti i numeri di (α) che sono inferiori od eguali ad ε , nella (α'') mettiamo i numeri di (α) rimanenti.

Posto:

$$(\alpha') \quad \sqrt[\lambda_0]{|b_0|}, \sqrt[\lambda_1]{|b_1|}, \dots, \sqrt[\lambda_n]{|b_n|}, \dots,$$

$$(\alpha'') \quad \sqrt[\mu_0]{|c_0|}, \sqrt[\mu_1]{|c_1|}, \dots, \sqrt[\mu_n]{|c_n|}, \dots,$$

decomponiamo, in corrispondenza di questa suddivisione, la serie (2) nelle due seguenti serie parziali:

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{\lambda_n},$$

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\mu_n}.$$

Per quanto si è detto superiormente, la serie (3) ha il raggio di convergenza non inferiore ad $\frac{1}{\varepsilon}$ e la serie (4) ha ancora per raggio l'unità.

Consideriamo ora la serie (4). Dalla successione degli esponenti:

$$(\beta) \quad \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n, \dots$$

che in essa figurano, possiamo sempre estrarre una successione:

$$\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n, \dots$$

in modo che si abbia ad un tempo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[\nu_n]{|c_n|} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\nu_n - \nu_{n-1}) = \infty.$$

In virtù di questa scelta, la nuova serie:

$$(5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\nu_n}$$

ha la circonferenza di convergenza di raggio 1 e, per una nota proposizione di Fabry, ammette tale circonferenza come linea singolare.

Indichiamo poi con:

$$t_0, t_1, \dots, t_n, \dots$$

quegli infiniti numeri di (β) che non sono intervenuti nella costruzione della precedente serie (5).

Poichè i coefficienti b_n della serie (3) tendono a zero, noi possiamo prelevare da essi una successione:

$$(Y) \quad b_{r_0}, b_{r_1}, \dots, b_{r_n}, \dots$$

tale che la serie:

$$(6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_{r_n} x^{t_n}$$

abbia il raggio di convergenza maggiore di uno.

Infine, con i coefficienti b_{s_n} della (3) che non appartengono a (Y), formiamo la serie:

$$(7) \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_{s_n} x^{\lambda_n}$$

che, per la proposizione del n. 2, ha il raggio di convergenza non inferiore ad $\frac{1}{\epsilon}$.

Da tutto ciò segue che la funzione analitica definita dalla somma delle serie (5), (6), (7), e cioè la:

$$(8) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{v_n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{r_n} x^{t_n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{s_n} x^{\lambda_n}$$

ammette la circonferenza di raggio 1 come linea singolare e che, ordinando il 2° membro della (8) per le potenze crescenti di x , si ottiene una serie nella quale compariscono tutti e soli i coefficienti della (2) ma in ordine diverso.

Il teorema in questione è dunque dimostrato nel caso in cui la (α) abbia più di un punto limite.

4. Ammettiamo ora che per la successione (α) si abbia:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

Poichè i coefficienti:

$$(\delta) \quad a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$$

della (2) hanno per punto limite lo zero, possiamo decomporre la (8) in tre successioni:

$$(\delta') \quad a_{r_0}, a_{r_1}, \dots, a_{r_n}, \dots,$$

$$(\delta'') \quad a_{s_0}, a_{s_1}, \dots, a_{s_n}, \dots,$$

$$(\delta''') \quad a_{t_0}, a_{t_1}, \dots, a_{t_n}, \dots,$$

senza elementi comuni ed in modo che le (δ') e (δ'') tendano a zero.

Poi, servendoci di elementi appartenenti a (δ'') , costruiamo una nuova successione:

$$a_{\sigma_0}, a_{\sigma_1}, \dots, a_{\sigma_n}, \dots$$

in maniera che:

$$\lim \sqrt[n]{|a_{\sigma_n}|} < 1.$$

Ciò è sempre possibile inquantochè i numeri a_{σ_n} tendono a zero.

Infine, eseguiamo sulla serie data (2) la sostituzione:

$$p = (a_{r_0}, a_{\sigma_0}) \cdot (a_{r_1}, a_{\sigma_1}) \cdot \dots \cdot (a_{r_n}, a_{\sigma_n}) \cdot \dots$$

che scambia a_{r_n} con a_{σ_n} e che lascia al proprio posto almeno tutti gli elementi di (δ''') .

La serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{p(n)} x^n$$

così ottenuta è tale che la successione:

$$\sqrt[n]{|a_{p(n)}|} \quad (n = 0, 1, \dots),$$

contenendo tutti i numeri del tipo:

$$\sqrt[r_n]{|a_{\sigma_n}|}, \quad \sqrt[t_n]{|a_{r_n}|},$$

ha qualche punto limite inferiore ad 1 ed ha per limite massimo l'unità.

Si è pertanto ricondotti al caso esaminato al n. 3.

Meccanica. — *Tubazioni ricurve ed ali.* Nota di L. DA RIOS, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Saggio di confronto fra le grandezze fotografiche di varie zone del Catalogo astrografico.* Nota di L. GENOVESE, presentata dal Corrisp. A. BEMPORAD.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geodesia. — *Determinazione radiotelegrafica di longitudine e attrazione nel vertice di 1° ordine M.te Colma di Mombarone.* Nota di U. BARBIERI, presentata dal Corrisp. E. SOLER.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geodesia. — *Semplici e rapidi provvedimenti di correzione topografica.* Nota di A. BELLUIGI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geofisica. — *Relazione tra i parametri dell'Ellissoide terrestre e i valori della gravità.* Nota di C. MINEO, presentata dal Socio F. ANGELITTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *La carica dei centri di emissione posta in evidenza dalla polarità degli elettroidi.* Nota di L. OCCHIALINI, presentata dal Socio A. GARBASSO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Fenomeni di resistenza negativa di un diodo sottoposto a un campo magnetico.* Nota di I. RANZI, presentata dal Socio Q. MAJORANA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulla emissione elettronica in un tubo a vuoto.* Nota di L. TIERI e V. RICCA, presentata dal Socio A. LO SURDO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica-matematica. — *Intorno alla nuova teoria di Einstein.* Nota di A. PALATINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica-chimica. — *Teoria del paramagnetismo per joni soggetti ad azione molecolare forte.* Nota di R. BRUNETTI, presentata dal Socio A. GARBASSO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Elettrotecnica. — *Sull'impedenza di un trasduttore quadripolare.* Nota di M. FEDERICI, presentata dal Corrisp. G. GIORGI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Spinelli del tipo $\text{Me}_2^{\text{II}} \text{Me}_4^{\text{IV}} \text{O}_4$* ⁽¹⁾. Nota di G. NATTA e L. PASSERINI, presentata⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

Al tipo di struttura reticolare caratteristico degli spinelli 8 f, 16 c, 32 b (gruppo spaz. Oi—7) appartiene, come è noto da lungo tempo, una numerosa serie di composti del tipo $\text{Me}_2^{\text{II}} \text{Me}_4^{\text{III}} \text{O}_4$, tra ossidi di metalli bivalenti e di metalli trivalenti.

In base ai vecchi dati della cristallografia ed alle recenti ricerche röntgenografiche⁽³⁾ possiamo ammettere genericamente che tutti i metalli bivalenti, di diametro ionico compreso tra quello dello zinco (1.50 Å) e quello del cadmio (2.08 Å), siano capaci di fornire, con quelli trivalenti, aventi diametri ionici compresi tra quello dell'alluminio (1.14 Å) e quello del ferro (1.34 Å), dei composti tra i loro ossidi del tipo degli spinelli, mentre non si conosce nessun spinello di metalli bivalenti a diametro ionico maggiore del cadmio, quali gli alcalino-terrosi, nè di quelli a diametro minore dello zinco, quale il berillio.

L'intuizione di questa regola ci ha guidato in alcune nostre precedenti ricerche e ci ha permesso di preparare e descrivere numerosi spinelli non ancora noti⁽⁴⁾. Altri ne sta studiando uno di noi, che ha anche riesami-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Nella seduta del 17 marzo 1929.

(3) P. GROTH, «*Chemische Krystallographie*», II, 729 (Leipzig 1908); W. A. BRAGG, «*Nature*», 95, 561 (1915); «*Phil. Mag.*», 30, 305 (1915); S. NISHIKAWA, «*Proc. Math. Phys. Soc.*», Tokio, 8, 199 (1915); J. A. HEDVALL, «*Arkiv. Kemi Mineral. Geol.*», 8, n. 11; «*Zeit. anorg. Chem.*», 120, 327 (1922); G. NATTA e M. STRADA, «*Rendiconti R. Accademia dei Lincei*», VII, 6°, 1° (1928), 1024; G. NATTA e L. PASSERINI, «*Gazz. Chim. Ital.*», 59 (1929) in corso di stampa; L. PASSERINI, «*Rendiconti R. Accademia dei Lincei*», in corso di stampa (1929); S. HOLGERSSON, «*Lunds Universitets Årsskrift*», N. F. Avd. 2, 23, 9; «*Kungl. Fysiografiska Sällskapetets Handlingar.*», N. F. 38, 9, 1 (1927); «*Chem. Zentr.*», 100, I, 372 (1929).

(4) G. NATTA e M. STRADA, loc. cit.; G. NATTA e L. PASSERINI, loc. cit.

nato, pure coi metodi röntgenografici, tutta la serie degli spinelli già noti ⁽¹⁾. In base al ricco materiale sperimentale così raccolto sarà possibile, in una prossima Nota, delineare nettamente i limiti di esistenza degli ordinari spinelli in funzione delle grandezze degli ioni.

Al di fuori degli ossidi salini del tipo $\text{Me}^{\text{II}} \text{Me}_2^{\text{III}} \text{O}_4$, abbiamo ora voluto esaminare se per dei composti di analoga formula bruta, ma contenenti degli ioni a valenza diversa, e per quali di essi, si possa presentare una struttura reticolare del tipo di quella degli spinelli.

Che questo importante tipo di struttura non sia limitato ai soli composti di ossidi di metalli bivalenti e trivalenti già lo ha osservato Wyckoff ⁽²⁾ dimostrando che il molibdato di argento Ag_2MoO_4 possiede un tipo di struttura che si può ricavare da quella dello spinello tipico quando nel reticolo si ponga l'argento nella posizione che occupa il metallo trivalente e il molibdeno in quella del bivalente.

Questo caso particolare conferma, come già è stato rilevato per composti di altri tipi, che la posizione degli atomi, nel reticolo dei solidi è soprattutto funzione delle grandezze geometriche degli atomi, mentre scarsa influenza sembrano presentare il comportamento chimico e il numero delle valenze chimiche ordinarie.

Generalizzando questo concetto si potrebbe ammettere che tutti i composti del tipo $\text{A B}_2 \text{C}_4$, dove A e B siano cationi e C anione possano possedere una struttura degli spinelli, purchè i diametri di A, B e C stiano tra di loro secondo rapporti compresi entro certi limiti definiti e determinabili.

Alla formula bruta $\text{A B}_2 \text{O}_4$ appartengono oltre alle serie $\text{Me}^{\text{II}} \text{Me}_2^{\text{III}} \text{O}_4$ e $\text{M}_2^{\text{I}} \text{Me}^{\text{VI}} \text{O}_4$, già accennate, anche quella $\text{Me}_2^{\text{II}} \text{M}^{\text{IV}} \text{O}_4$, che comprende alcuni stannati, titanati, silicati ecc. È appunto quest'ultima serie che prendiamo ora in particolare esame.

Supponendo che il tipo di struttura degli spinelli possa presentarsi anche per questa serie di composti, purchè i diametri dei cationi, indipendentemente dalla loro valenza, siano compresi entro gli stessi limiti osservati per gli spinelli tipici, si deduce che nessun ortosilicato, dato il piccolissimo diametro ionico del silicio tetravalente, potrebbe possedere tale tipo di struttura.

Il diametro dell'ione stagno tetravalente (1.48) è quasi eguale a quello dello zinco e risulta quindi, in base alle precedenti considerazioni, che degli ortostannati di metalli bivalenti, che, quali il cobalto ed il magnesio non abbiano troppo alto diametro ionico, dovrebbero possedere un reticolo cristallino tipo spinello.

(1) L. PASSERINI, loc. cit.

(2) R. W. C. WYCKOFF, « Journ. Amer. Chem. Soc. », 44, 1994 (1922).

L'esame röntgenografico degli stannati di cobalto e di magnesio, qui sotto descritti, ha confermato questa supposizione.

ORTOSTANNATO COBALTOSO. — L'ortostannato cobaltoso era già stato preparato da Hedvall in piccoli cristallini monorifrangenti operando su miscele degli ossidi puri ad alta temperatura ed in presenza di fondenti⁽¹⁾.

Noi abbiamo ottenuto lo stesso composto trattando con la quantità calcolata di idrato sodico una soluzione contenente una molecola di cloruro stannico ogni due molecole di cloruro cobaltoso, filtrando, lavando il precipitato e calcinandolo a circa 900°. Lo stannato cobaltoso, così preparato,

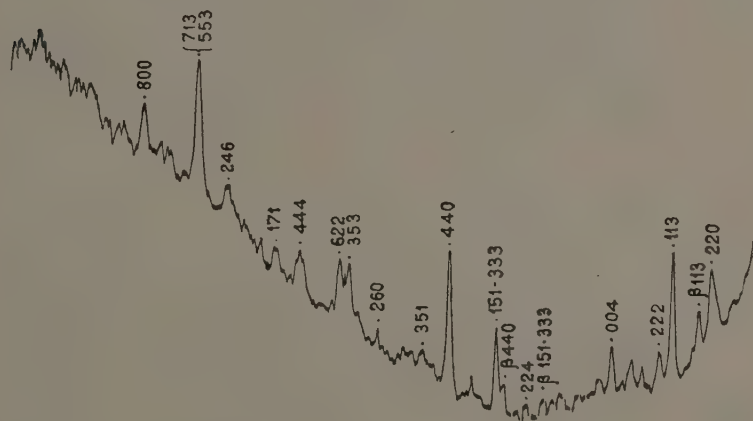


Fig. 1.

si presenta come una sostanza di un colore verde cupo tendente all'azzurro e contiene tutto il cobalto allo stato bivalente, non svolgendo, nella dissoluzione in acido cloridrico concentrato, neanche tracce di cloro.

Corrisponde come composizione alla formula $2\text{CoO} \cdot \text{SnO}_2$ e l'analisi röntgenografica ci ha permesso di stabilire che non contiene in miscela i due ossidi liberi in quantità rilevabili, non presentando i fotogrammi delle polveri nessuna delle linee di tali ossidi.

Ha un peso specifico a 20° di 6.108, determinato in picnometro a vuoto.

Il fotogramma, ottenuto colla radiazione di un anticatodo di ferro, presenta delle linee che si ordinano nel sistema cubico per un lato della cella elementare di $8.605 \text{ \AA} + 0.005$ (valore limite, per θ tendenti a 180°, dei valori medi sperimentali).

(1) J. A. HEDVALL, « Arkiv. för Kemi. Min. Och. Geol. », 5, n. 18, 7 (1914); « Zeitschr. f. anorg. Chem. », 92, 369 (1915).

La densità calcolata, supponendo che la cella elementare, avente un volume di $637.16 \cdot 10^{-24}$ cc., contenga 8 molecole, risulta 6.307 in accordo con quella determinata sperimentalmente.

Il fotogramma fu microfotometrato con un microfotometro di Kipp e Zonen e la microfotometria è riprodotta in fig. 1.

Il calcolo teorico dell'intensità delle linee, in base al fattore di struttura, è stato svolto supponendo che gli atomi di cobalto, stagno e ossigeno occupino nel reticolo le seguenti posizioni, che corrispondono ad un valore di $1/8$ per il parametro u :

Co^{++} $(3/8 \ 3/8 \ 5/8)$, $(1/8 \ 1/8 \ 5/8)$, $(3/8 \ 1/8 \ 7/8)$, $(1/8 \ 3/8 \ 7/8)$
 $(7/8 \ 7/8 \ 5/8)$, $(5/8 \ 5/8 \ 5/8)$, $(7/8 \ 5/8 \ 7/8)$, $(5/8 \ 7/8 \ 7/8)$
 $(3/8 \ 7/8 \ 1/8)$, $(1/8 \ 5/8 \ 1/8)$, $(3/8 \ 5/8 \ 3/8)$, $(1/8 \ 7/8 \ 3/8)$
 $(7/8 \ 3/8 \ 1/8)$, $(5/8 \ 1/8 \ 1/8)$, $(7/8 \ 1/8 \ 3/8)$, $(5/8 \ 3/8 \ 3/8)$

Sn^{++++} $(0 \ 0 \ 0)$, $(1/2 \ 1/2 \ 0)$, $(0 \ 1/2 \ 1/2)$, $(1/2 \ 0 \ 1/2)$
 $(1/4 \ 1/4 \ 1/4)$, $(3/4 \ 3/4 \ 1/4)$, $(1/4 \ 3/4 \ 3/4)$, $(3/4 \ 1/4 \ 3/4)$

O^{--} $(3/8 \ 3/8 \ 1/8)$, $(1/8 \ 1/8 \ 1/8)$, $(3/8 \ 1/8 \ 3/8)$, $(1/8 \ 3/8 \ 3/8)$
 $(7/8 \ 7/8 \ 1/8)$, $(5/8 \ 5/8 \ 1/8)$, $(7/8 \ 5/8 \ 3/8)$, $(5/8 \ 7/8 \ 3/8)$
 $(3/8 \ 7/8 \ 5/8)$, $(1/8 \ 5/8 \ 5/8)$, $(3/8 \ 5/8 \ 7/8)$, $(1/8 \ 7/8 \ 7/8)$
 $(7/8 \ 3/8 \ 5/8)$, $(5/8 \ 1/8 \ 5/8)$, $(7/8 \ 1/8 \ 7/8)$, $(5/8 \ 3/8 \ 7/8)$
 $(1/8 \ 1/8 \ 7/8)$, $(3/8 \ 3/8 \ 7/8)$, $(3/8 \ 1/8 \ 5/8)$, $(1/8 \ 3/8 \ 5/8)$
 $(5/8 \ 5/8 \ 7/8)$, $(7/8 \ 7/8 \ 7/8)$, $(7/8 \ 5/8 \ 5/8)$, $(5/8 \ 7/8 \ 5/8)$
 $(1/8 \ 5/8 \ 3/8)$, $(3/8 \ 7/8 \ 3/8)$, $(3/8 \ 5/8 \ 1/8)$, $(1/8 \ 7/8 \ 1/8)$
 $(5/8 \ 1/8 \ 3/8)$, $(7/8 \ 3/8 \ 3/8)$, $(7/8 \ 1/8 \ 1/8)$, $(5/8 \ 3/8 \ 1/8)$

L'accordo tra le intensità osservate e quelle calcolate è ottimo. Nella tabella I, dove sono raccolti i valori sperimentali del $\sin \theta/2$, di d , quelli calcolati per u e gli indici delle faccie, sono pure indicate nelle due ultime colonne, le intensità osservate e quelle calcolate per $u = 1/8$.

Il tipo di struttura reticolare così confermato per l'ortostannato cobaltoso, appartiene al tipo degli spinelli, con la differenza che le posizioni che in questi occupano gli atomi del metallo trivalente sono occupate negli stannati dal metallo bivalente e quelle del bivalente dal tetravalente. Le posizioni degli atomi di ossigeno restano invariate, a parte qualche possibile ma lieve variazione nel valore del parametro u .

TABELLA I.

hkl	λ	sen $\theta/2$	d	α	Intensità	
					osservate	calcolate
202	α	0.3271	2.957	8.36	md	575
113	β	0.3468	2.530	8.38	d	—
113	α	0.3809	2.540	8.42	f	1080
222	α	0.3970	2.436	8.43	d	313
004	α	0.4555	2.121	8.484	m	431
151	β	0.5373	1.635	8.50	dd	—
333						
224	α	0.5558	1.740	8.51	md	664
440	β	0.5817	1.506	8.52	dd	—
151	α	0.5891	1.642	8.53	f	687
333						229
440	α	0.6400	1.511	8.54	ff	1734
351	α	0.6691	1.445	8.54	dd	55
260	α	0.7156	1.351	8.545	d	516
353	α	0.7407	1.305	8.56	m	546
622	α	0.7477	1.293	8.57	m	491
444	α	0.7803	1.238	8.58	md	143
171	α	0.8038	1.202	8.59	dd	46
246	α	0.8424	1.148	8.595	md	870
713	α	0.8638	1.120	8.60	ff	932
553						311
800	α	0.8987	1.076	8.608	mf	613

ORTOSTANNATO DI MAGNESIO. — L'ortostannato di magnesio Mg_2SnO_4 , composto che non appare descritto nella letteratura, è stato da noi preparato con metodo analogo a quello che abbiamo impiegato per la preparazione dell'ortostannato cobaltoso. Si presenta come una sostanza bianca, avente una densità, determinata sperimentalmente in picnometro a vuoto, di 4.738 a 20°.

L'esame coi raggi X, ci ha permesso di stabilire la struttura reticolare di questo composto e il suo isomorfismo con l'ortostannato cobaltoso.

Nella tabella n. 2 sono raccolti i risultati del calcolo del fotogramma, ottenuto col metodo delle polveri usando un anticatodo di ferro, e nelle due ultime colonne sono paragonate le intensità osservate con quelle calcolate per il tipo di struttura reticolare, che abbiamo visto possedere dal corrispondente sale di cobalto. L'accordo tra le intensità appare buono per valori di n vicini ad $1/8$.

TABELLA II.

hkl	λ	sen $\theta/2$	d	α	Intensità	
					osservate	calcolate
202	α	0.3721	2.957	8.36	md	575
113	β	0.3468	2.530	8.38	d	—
113	α	0.3809	2.540	8.42	m	1047
004	α	0.4570	2.116	8.464	d	19
224	α	0.5577	1.732	8.49	md	664
151	α	0.5906	1.637	8.503	mf	668
333						223
440	α	0.6414	1.508	8.53	f	1525
351	α	0.6706	1.442	8.533	d	601
260	α	0.7157	1.351	8.54	d	516
353	α	0.7431	1.302	8.54	d	529
622	α	0.7489	1.291	8.56	d	491
171	α	0.8059	1.199	8.565	d	249
246	α	0.8443	1.145	8.57	md	870
713	α	0.8663	1.116	8.577	f	904
553						452
800	α	0.9010	1.073	8.584	mf	579

Per il lato della cella elementare cubica risulta, come valore medio corretto $a = 8.580 \pm 0.007$. Tale cella contiene 8 molecole Mg_2SnO_4 , e possiede un volume di $631.63 \cdot 10^{-21}$ cc. La densità calcolata risulta 4.864 in accordo con quella sperimentale.

RIASSUNTO. — I. Sono stati esaminati coi raggi X e col metodo delle polveri l'ortostannato di magnesio (Mg_2SrO_4), e quello cobaltoso (Co_2SnO_4), preparati calcinando a 900° i prodotti ottenuti per precipitazione con idrati

alcalini da soluzioni contenenti una molecola di cloruro stannico ogni due molecole rispettivamente di cloruro di magnesio e di quello cobaltoso.

II. L'ortostannato cobaltoso cristallizza nel sistema cubico, possiede una cella elementare, contenente 8 molecole di lato $a = 8.605 \text{ \AA} \pm 0.005$ e di volume $637.16 \cdot 10^{-24} \text{ cc.}$, una densità röntgenografica di 6.307 di poco superiore a quella sperimentale 6.108.

III. L'ortostannato di magnesio risulta isomorfo con quello cobaltoso, possiede una cella di lato $a = 8.580 \text{ \AA} \pm 0.007$ e di volume $631.63 \cdot 10^{-24} \text{ cc.}$, una densità röntgenografica di 4.864 (sperimentale 4.738).

IV. Dal calcolo del fattore di struttura risulta che la struttura reticolare dei due ortostannati esaminati appartiene al tipo 8f, 16c, 32b (gruppo spaz. O_i-7) e corrisponde a quella degli spinelli.

Per il parametro u che definisce la posizione dell'ossigeno si è trovato un valore vicino ad $1/8$.

Chimica. — *Ricerche sui polialogenuri.* — I. *Sull'acido clorodiodico:* $\text{HJCl}_4 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ ⁽¹⁾. Nota di V. CAGLIOTI, presentata ⁽²⁾ dal Socio F. ZAMBONINI.

Ai polialogenuri sono dedicati, nei trattati classici di Chimica inorganica, interi capitoli, che trattano sia di composti che contengono nella stessa molecola diversi atomi dei vari alogeni, sia di composti in cui diversi atomi di uno stesso alogeno sono legati ad un solo atomo di metallo alcalino, o alcalino terroso. In essi non si conosce quale sia veramente l'anione, che indubbiamente è complesso, e, d'altra parte, i legami di valenza sono poco noti e poco studiati.

Per alcuni di questi polialogenuri, e precisamente per quelli in cui è contenuto lo jodio, a me pare che se ne possa interpretare soddisfacentemente la costituzione, ove si ammettano per lo jodio le proprietà metalliche che, ricerche iniziate da lungo tempo ed intensificatesi più specialmente nell'ultimo ventennio, ci permettono di attribuirgli e che sono prevedibili, per il posto che questo elemento occupa nel sistema periodico.

Alla fine del 2° grande periodo, troviamo, infatti, gli elementi Sn — Sb — Te — J: dei tre primi, sono note da tempo le spiccate proprietà metalliche; per il tellurio inoltre, il Leblanc ⁽³⁾ dimostrò, da tempo, che può avere proprietà elettrochimiche di metallo e di metalloide.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Napoli.

(2) Nella seduta del 17 febbraio 1929.

(3) «Z. f. El.», 46, 813 (1905).

Lo jodio poi, per quanto abbia carattere più notoriamente metalloidico, presenta proprietà metalliche, e tale caratteristica è stata dimostrata recentemente per lo jodio puro dal Rabinowitsch⁽¹⁾ che ha determinato il coefficiente termico negativo della conducibilità elettrica in mezzo liquido. Del resto sono noti, da tempo, composti semplici o complessi, in cui lo jodio ha funzione prevalentemente metallica. Basta ricordare⁽²⁾ il jodato di jodio J_4O_9 che s'interpreta come risultante dalla reazione dell'acido jodico con l'idrossido di jodio $J(OH)_3$ e al quale perciò si assegna la formula di struttura $J(OJ_3)_3$ ⁽³⁾ i solfati di jodio $J_2(SO_4)_3$ ⁽⁴⁾, $(JO_2)_2SO_4 \cdot \frac{1}{2} H_2O$ ⁽⁵⁾, il perclorato $J(ClO_4)_3 \cdot 2H_2O$ ⁽⁶⁾, l'acetato $J(C_2H_3O_2)_3$ ⁽⁷⁾, lo jodato $JO(JO_3)$ ⁽⁸⁾, il fosfato JPO_4 ⁽²⁾, il tricloroacetato $J(CCl_3 \cdot CO_2)_3$, il dicloro e monocloraacetato e il metilsolfonato $J(CH_3 \cdot SO)_3$ ⁽⁹⁾.

Di questi sali, molti sono stabili analogamente a quelli derivanti dal triidrossido $J(OH)_3$, dei quali ultimi il meglio studiato è l'idrossido di difeniliodonio $(C_6H_5)_2OHI$, noto nella letteratura per il suo singolare comportamento che lo riavvicina molto ai composti del tallio e che gli ha valso il nome di « tallio sintetico » datogli da V. Mayer. Ancora meglio risultano le analogie fra jodio e tellurio negli etero polisali che per il primo sono del tipo $[J(MoO_4)_6] Me_5$ e $[J(WO_4)_6] Me_5$ e per il tellurio del tipo $[Te(MoO_4)_6] Me_6$ e $[Te(WO_4)_6] Me_6$.

I composti però che hanno richiamato maggiormente l'attenzione degli studiosi sono il monocloruro ed il tricloruro di jodio JCl e JCl_3 .

Ricerche di Bruner e Galecki⁽¹⁰⁾ sulla conducibilità elettrica e la mobilità dello jone jodio nell'elettrolisi del composto JCl , dimostrano che lo jone jodio si dirige al catodo, dove si separa. E che esistono due specie di joni J^+ e J^{+++} , è stato dimostrato da Finkelstein⁽¹¹⁾ in un bel lavoro apparso durante il corso delle presenti ricerche: questo autore anzi ha concluso che nella serie delle tensioni il catione jodio deve trovare posto accanto ai cationi dei metalli nobili, come risulta dal valore del potenziale elettrochimico.

Ora, la somiglianza di comportamento dello jodio con i metalli nobili e specialmente con l'oro e anche con l'antimonio non è limitata sol-

(1) « Zeitschrift f. physik. Chem. », 119, 79 (1926).

(2) HOFMANN, *Lehrbuch der anorganischen Chemie*, 1922.

(3) FICHTER und ROHNER, « B. » 42 (1909), 4092.

(4) FICHTER und KAPPELER, « Z. anorg. Chem. » (1917), 91, 134.

(5) CHRÉTIEN, « C. R. » 123 (1896), 814.

(6) FICHTER und KAPPELER (loc. cit.).

(7) SCHUTZENBERGER, « C. R. », 52 (1861), 135; 54 (1862), 1026; BEGER, « Che. Ztg. », 33 (1906), 1232; FOUQUE, « Che. Ztg. », 38' (1914), 860.

(8) MILLON, « A. Che. », 12 (1844), 336.

(9) FICHTER und STERN, « Helv. Chim. acta » voll. XI-VI, p. 1256 (1928).

(10) « Z. f. El. », 18 (1912), 368.

(11) « Z. phys. Chem. », 124 (1926), 285.

tanto alla formula chimica, ma si estende anche alla numerosa serie di composti che il tricloruro di jodio forma con cloruri metallici.

Così tutti i polialogenuri preparati dal Filhol ⁽¹⁾ e da Wells e Weeler ⁽²⁾, di formula generale $XCl \cdot JCl_3$ (in cui $X = K - NH_4 - Li - Cs - Rb$) e gli altri preparati da Weinland e Schlegelmlich ⁽³⁾ del tipo $X''I_2Cl_8 \cdot 8H_2O$ (in cui $X = Co, Ni, Mn, Zn, Be, Mg, Ca, Sr$) possono riguardarsi derivanti da un solo acido clorojodico $HJCl_4 \cdot xH_2O$ che sarebbe analogo all'acido cloroaurico $HAuCl_4 \cdot 4H_2O$.

E questa ipotesi può essere giustificata dal fatto che i sali del tipo $XJCl_4$ sono tutti monoclini prismatici e presentano relazioni morfotropiche con i corrispondenti cloroaurati e cloroantimoniati, anch'essi del sistema monoclini e dalla identità di formula dei sali $X''J_2Cl_8 \cdot 8H_2O$ con gli altri $X''Au_2Cl_8 \cdot 8H_2O$ ⁽⁴⁾.

Non restava dunque che dimostrare l'esistenza dell'acido clorojodico almeno in soluzione e studiare le relazioni tra questo acido e i sali corrispondenti. Dopo numerosi tentativi, sono riuscito a preparare questo composto, versando gr. 40 di jodio in polvere finissima in 35 cc. di acido cloridrico concentrato (D. 1, 19); ho fatto quindi passare una corrente di cloro fino ad ottenere la soluzione completa dello jodio, il che accade dopo circa un'ora. Si ottiene una soluzione pesante, di colore rosso arancio, molto intenso, che, immersa nel ghiaccio, cristallizza quasi completamente. I cristallini, che hanno forte tensione di vapore sono stati asciugati rapidamente fra carta da filtro ed analizzati. Cloro e jodio sono stati determinati una prima volta insieme per precipitazione con nitrato d'argento; il precipitato di $AgCl$ e AgJ è stato pesato in crogiuolo di Gooch.

Calcolato per $HJCl_4 \cdot 4H_2O$

Gr. 1.4608	hanno dato	gr. 3.4602	di alogenuro d'argento	3.4536
» 0.7304	»	» 1.7278	»	1.7268
» 0.2360	»	» 0.5563	»	0.5580
» 0.1858	»	» 0.4406	»	0.4393

Il cloro poi è stato poi dosato a parte, avendo eliminato lo iodio col metodo di Gooch.

Gg. 0.7304 sono stati versati in un forte eccesso di ammoniaca, in un grande pallone e quindi scaldati per mezz'ora circa all'ebollizione; si è aggiunto acido solforico fino a reazione nettamente acida e 1 gr. circa di nitrito potassico; si è quindi fatto bollire a lungo, fino a scomparsa dello

(1) « Journ. Pharm. », 25 (1839), 431 e 506.

(2) « Z. an. Chem. », 2 (1892), 255.

(3) « Z. an. Chem. », 30 (1902), 134.

(4) Le proprietà cristallografiche dei sali $X''J_2Cl_8 \cdot 8H_2O$ non sono note.

jodio e dei vapori nitrosi; si è infine dosato il cloro col metodo di Volhard: ho ottenuto gr. 0.3064 di Cl corrispondenti a 41.95 % di cloro.

Gr. 0.1716 sono stati versati in 30 cc. di KOH al 5 % circa: è stato quindi aggiunto acido solforico fino a reazione nettamente acida e 4 gr. circa di nitrito potassico; quindi molta acqua: ho fatto bollire fino a $\frac{1}{3}$ del volume e ho dosato il cloro: gr. 0.0714 = a 41.60 %.

Su altri due campioni di 0.1716 e 0.3245 ho trovato il 41.80 % e 41.71 %.

Ho dosato lo jodio col metodo di Fresenius, avendo cioè versato il campione in un eccesso di NaOH e quindi aggiunto acido solforico e nitrito potassico fino a reazione nettamente acida e titolando quindi con $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3 \frac{\text{N}}{10}$ lo jodio raccolto in solfuro di carbonio. Le determinazioni mi hanno dato: 36.60 % - 36.71 % - 36.91 % - 36.94 % - 37.04 % - 37.24 %.

Ho determinato l'acqua una volta sola per perdita di peso su un campione di gr. 0.7431 che ho prelevato in pesa filtri, in cui avevo posto in precedenza gr. 1.4449 di lana d'argento, avendo quindi fortemente agitato. La perdita di peso è stata del 23.04 %, più alta perciò del valore calcolato per $\text{HJCl}_4 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$; ma, dopo l'agitazione, ho sentito nettamente l'odore di acido cloridrico che non ancora aveva reagito con la lana d'argento.

Nella tabella che segue sono riportati i valori trovati e quelli calcolati per il composto. $\text{HJCl}_4 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$.

Calcolato per $\text{HJCl}_4 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$	Trovato
H = 0.29 %	—
Cl = 41.50 %	41.95 - 41.60 - 41.80 - 41.71
J = 37.13 %	36.60 - 36.71 - 36.91 - 36.94
	37.04 - 37.24
$\text{H}_2\text{O} = 21.08 \%$	23.04.

I cristallini dell'acido clorojodico si presentano al microscopio di colore giallo arancio sotto forma tabulare secondo una coppia di facce parallele. Su queste facce più estese, si ha una fine striatura, parallelamente alla quale, si ha l'estinzione. In luce convergente si osserva un'asse all'orlo del campo. Non è stato possibile eseguire delle osservazioni complete dei caratteri ottici. La forte tensione di vapore del composto e l'odore estremamente irritante dei suoi vapori impediscono ogni ulteriore osservazione al microscopio.

La soluzione dell'acido clorojodico ha forte reazione acida.

Avrei voluto determinare la basicità di quest'acido, ma non vi sono riuscito nè col metodo degli indicatori, nè col metodo elettrometrico; il composto agisce da ossidante energico e distrugge completamente tutti gli

indicatori dei quali ho cercato di servirmi (metilrosso, bleu timolo, metilarancio, tornasole e fenolfaleina), che non presentano più il viraggio ordinario; nè migliori risultati si ottengono, provando di titolare un alcali con l'acido. Ho pure tentato il metodo elettrometrico, ma senza successo; l'elevata concentrazione in alogeni determina sull'elettrodo di platino immerso nella soluzione degli effetti nocivi che rendono assolutamente incerte le determinazioni che si possono eventualmente eseguire, senza dire che l'idrogeno distrugge il complesso, formando con gli alogeni il corrispondente idracido.

In ogni modo, che idrogeno, jodio e cloro s'uniscano tra loro secondo i rapporti 1 : 1 : 4 risulta dalle seguenti esperienze:

Versando una soluzione concentrata di cloruro di potassio, di cesio, di piridina, di magnesio, di zinco nella soluzione di acido clorojodico cristallizzano i sali corrispondenti, che, analizzati, rispondono rispettivamente alla formula KJCl_4 , CsJCl_4 , $\text{MgJ}_2\text{Cl}_8 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$, $\text{ZnJ}_2\text{Cl}_8 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$, come avevano trovato Wells e Wheeler e Weinland; sono abbastanza stabili, e, al microscopio, presentano gli stessi caratteri descritti da Penfield.

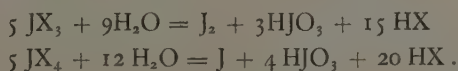
Versando un eccesso d'acido cloridrico in una soluzione acquosa di piridina, si ottiene un bel precipitato giallo citrino, in aspetto di aghi lunghi setacei.

Raccolto, asciugato su lastra porosa in essiccatore a P_2O_5 , l'ho analizzato ed ho ottenuto:

	Calcolato per $\text{C}_5\text{H}_5\text{NH} \cdot \text{JCl}_4$
J	35.76 - 35.99 36.39
Cl	40.24 - 40.19 40.66

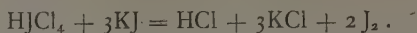
Il composto è meno solubile in acqua dei corrispondenti sali dei metalli alcalini. Anche i cloruri degli alcaloidi danno composti cristallini e stabili con l'acido clorojodico e saranno oggetto di uno studio più profondo. Tra le reazioni dell'acido cloroiodico, mi sembra particolarmente interessante quella con joduro di potassio, perchè mostra delle proprietà che allontanano questo complesso dai composti semplici dello jodio trivalente e tetraivalente.

Fichter e Kappeler (loc. cit.) hanno trovato che i composti dello jodio tri e tetraivalente reagiscono con l'acqua, mettendo in libertà una parte dello jodio in essi contenuto secondo gli schemi seguenti:



Questo non si verifica per l'acido cloro jodico, perchè aggiungendo salda di amido alla sua soluzione, non si ha la colorazione azzurra caratteristica, il che conferma che lo jodio è mascherato come jone complesso.

Se si aggiunge alla soluzione dello joduro di potassio, si ha invece svolgimento di jodio secondo lo schema:



Ho potuto confermare questo mediante le due seguenti prove:

Gr. 0.2360 di $\text{HJCl}_4 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ sono stati addizionati di joduro potassico. Per titolare lo jodio svolto, sono occorsi 27.72 cc. di $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$, $\frac{\text{N}}{10}$.

La quantità di iodio messo in libertà è 0.3518; ammettendo, secondo la reazione precedente, che la quantità svolta sia quattro volte quella contenuta nel composto, lo jodio del composto è 37.27 % (calc. 37.13 %).

Altre due prove su 0.2360 e su 0.1716 danno per lo jodio rispettivamente 37.14 % - 37.01 %.

Una ulteriore aggiunta di acido non accresce la quantità di jodio messa in libertà.

Per confermare la reazione di cui sopra, ho voluto dopo titolazione dello jodio, determinare l'acidità della soluzione con $\text{NaOH} \frac{\text{N}}{10}$, indicatore il metilarancio: gr. 0.1716 hanno richiesto 4.93 cc. di $\text{NaOH} \frac{\text{N}}{10}$ per la neutralizzazione, corrispondenti cioè a 10.46 % di HCl , mentre la quantità calcolata per $\text{HJCl}_4 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ è del 10.67 %.

Che tutti i polialogenuri di cui sopra siano poi da riportarsi a questo unico tipo di acido da cui derivano, può dimostrarsi mediante il confronto degli spettri di assorbimento dell'acido e dei sali a catione incolore. Le soluzioni dell'acido e di ciascun sale, a concentrazione equimolecolare, hanno tutte un'unica banda di assorbimento, che si estende in quasi tutto il violetto, oltre la zona direttamente visibile, tanto che non mi è stato possibile determinare l'andamento della curva e il massimo di essa mediante lo spettrofotometro, ma solo per confronti spettrofotografici. Questi, peraltro, non sono ancora completi per mancanza di una buona sorgente luminosa per l'ultravioletto.

Ho già iniziato le ricerche per stabilire le eventuali relazioni di isomorfismo con i corrispondenti composti dell'oro.

Nelle prossime Note, darò comunicazione dei risultati ottenuti dallo studio più completo delle proprietà chimiche e fisiche dell'acido clorojodico, e derivati, e dallo studio di quei polialogenuri in cui più atomi di uno stesso alogeno sono legati allo stesso atomo di metallo alcalino. Ringrazio il dott. F. Salvi per l'intelligente aiuto datomi nell'esecuzione delle esperienze.

CONCLUSIONE. - È stato dimostrato che i polialogenuri: $\text{KCl} \cdot \text{JCl}_3$, $\text{RbCl} \cdot \text{JCl}_3$, $\text{CsCl} \cdot \text{JCl}_3$, $\text{MgCl}_2 \cdot 2\text{JCl}_3 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$ e i corrispondenti composti del rame, dello zinco, del magnesio e del cadmio si possono far derivare dall'acido $\text{HJCl}_4 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ che è stato preparato e isolato per la prima volta allo stato solido.

Chimica. — *I sistemi:* $\text{Al}(\text{NO}_3)_3$ — $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3$ — H_2O e KNO_3 — $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3$ — H_2O a 0° e 40° ⁽¹⁾. Nota di G. MALQUORI, presentata ⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Facendo seguito alle precedenti ricerche ⁽³⁾ sul sistema KNO_3 — $\text{Al}(\text{NO}_3)_3$ — $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3$ — HNO_3 — H_2O espongo i risultati ottenuti studiando a 0° e a 40° le soluzioni sature nei sistemi: KNO_3 — $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3$ — H_2O e $\text{Al}(\text{NO}_3)_3$ — $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3$ — H_2O .

Le misure di solubilità sono state eseguite con i metodi ordinari e i risultati sono riportati nelle seguenti Tabelle I e II e nelle figg. 1 e 2.

TABELLA I.

Sistema $\text{Al}(\text{NO}_3)_3$ — $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3$ — H_2O a 0° .

$\text{Al}(\text{NO}_3)_3$ %	$\text{Fe}(\text{NO}_3)_3$ %	H_2O %	Fasi solide
37.81	—	62.12	$\text{Al}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$
30.25	7.31	62.44	»
17.22	17.57	65.21	»
12.33	23.66	64.01	»
11.02	25.09	63.89	$\text{Al}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O} + \text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$
2.10	34.25	63.95	$\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$
—	40.15	59.85	»
a 40°			
46.25	—	53.75	$\text{Al}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$
39.83	5.22	54.95	»
31.22	15.13	53.65	»
23.30	23.06	53.64	»
17.12	32.69	50.19	$\text{Al}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O} + \text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$
12.16	37.66	50.16	$\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$
8.39	39.79	51.82	»
—	51.18	48.82	»

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 7 aprile 1929.

(3) «Rend. Acc. Lincei» (6), 5, 801, 1000 (1927); «Gazz.», 57, 663 (1927).

TABELLA II.

Sistema $\text{KNO}_3 - \text{Fe}(\text{NO}_3)_3 - \text{H}_2\text{O}$ a 0° .

$\text{Fe}(\text{NO}_3)_3$ %	KNO_3 %	H_2O %	Fasi solide
—	11.70	88.30	KNO_3
21.82	2.26	75.92	»
23.87	2.36	73.77	»
38.55	3.92	57.53	$\text{KNO}_3 + \text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$
38.68	0.94	60.38	$\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$
40.15	—	59.85	»

a 40°

—	39.00	61.00	KNO_3
40.17	7.75	52.08	»
45.10	16.81	38.09	»
45.15	17.04	37.81	»
45.65	17.99	36.36	»
45.83	21.03	38.14	»
44.01	25.31	30.68	»
50.45	16.88	32.67	$\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$
51.18	—	48.82	»

Dai risultati sopra esposti si vede che a 0° e a 40° non si formano nè composti di addizione nè cristalli misti fra nitrato ferrico noveidrato e rispettivamente nitrato potassico e nitrato di alluminio noveidrato.

Nella fig. 2 si osserva inoltre che a 40° non è possibile ottenere la soluzione satura di $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O} + \text{KNO}_3$, e compaiono solo i due tratti di isoterma MP e n·P' lungo i quali si ha come corpo di fondo rispettivamente $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$ e KNO_3 . Ciò significa che nel sistema $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O} - \text{KNO}_3$ i due solidi coesistono a temperatura inferiore a 40° .

Se si ammette di poter estrapolare le isoterme del sistema ternario: $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 - \text{KNO}_3 - \text{H}_2\text{O}$ si può arrivare a prevedere qualitativamente il tipo di diagramma del sistema $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O} - \text{KNO}_3$ e stabilire anche

con una certa approssimazione tratti della curva liquido-solido per questo ultimo.

A questo conduce la costruzione grafica indicata nella fig. 2.

Ciascuna isoterma ⁽¹⁾ è rappresentata in una sezione del prisma che ha per base il triangolo delle concentrazioni e per altezza l'asse delle temperature. Il sistema $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 - \text{KNO}_3$ giace evidentemente sul piano verticale che passa per MN e MO.

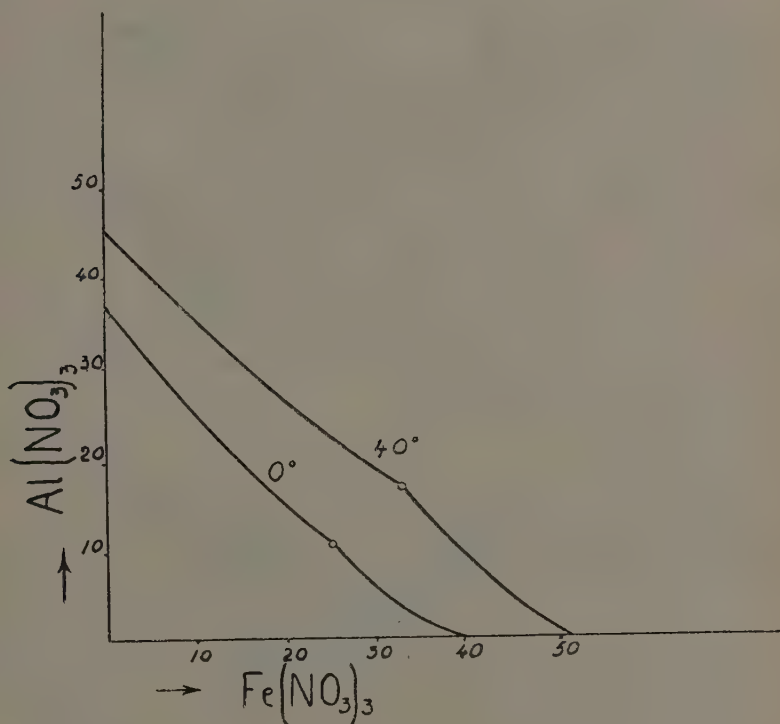


Fig. 1.

Da O (48°8) parte la curva di fusione di $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$ la quale tocca prima P che rappresenta a 40° la soluzione satura di nitrato ferrico noveidrato più ricca in nitrato potassico, e discende poi fino ad E, dove coesistono $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$ e KNO_3 . E, si ricava per estrapolazione grafica, determinando, come è indicato nella figura, l'incontro della retta AB che unisce i due punti tripli delle isoterme a 0° e a 25°, con il piano OMN.

(1) Nel diagramma è riportata anche l'isoterma a 25°.

O'P' invece è la curva di fusione del nitrato potassico in presenza di nitrato ferrico. Essa parte dal punto di fusione del nitrato potassico (336°), passa per P' che rappresenta a 40° la soluzione satura di nitrato potassico a contenuto più alto in nitrato ferrico, e prosegue verso le temperature

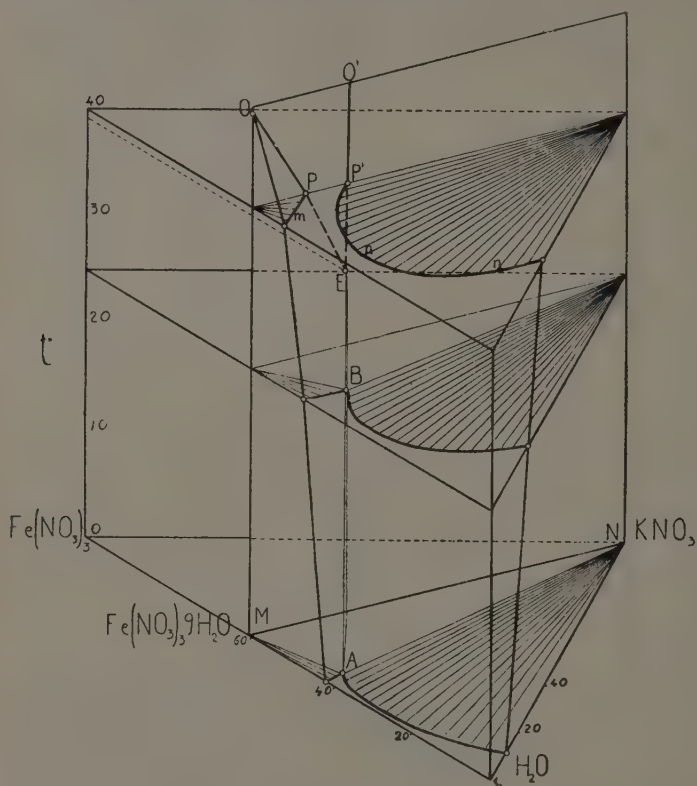


Fig. 2.

più basse fino ad incontrare in E la curva di fusione di $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$. La temperatura di E corrisponde a $38^\circ.8$.

Naturalmente l'attendibilità di simili deduzioni grafiche è tanto maggiore quanto più grande è il numero delle isoterme che si hanno a disposizione e quanto più le temperature che interessano i rami del sistema binario sono vicine a quelle alle quali si riferiscono le isoterme ternarie considerate. Queste condizioni si verificano appunto nel nostro caso.

Chimica. — *La lunghezza delle righe nello spettro di una scintilla in rapporto alla concentrazione dell'elemento*⁽¹⁾. Nota di A. OCCHIALINI presentata⁽²⁾ dal Socio A. GARBASSO.

Ho descritto su questi «Rendiconti» un metodo per misurare esattamente la lunghezza delle righe emesse da un elettrodo sotto l'azione di una scintilla, e ho posto tale lunghezza in relazione con la resistenza del circuito. Mi propongo ora di cercare se la lunghezza di una riga, e la posizione della curva che si ottiene col variare della resistenza, cambiano con la concentrazione dell'elemento sull'elettrodo, e possono servire per determinarla.

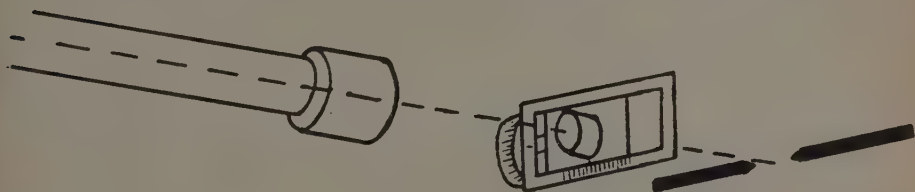


Fig. 1.

Per non rimandare all'altro mio lavoro, ricorderò che ho compiuto la misura delle righe spettrali disponendo la scintilla orizzontalmente e proiettandola attraverso alla fenditura verticale dello spettroscopio mediante una lente portata da un micrometro (fig. 1). Se l'elemento è contenuto in uno solo degli elettrodi, la sua presenza si spinge fino ad una certa distanza dall'elettrodo attivo; sicchè spostando la lente, mentre si osserva nello spettroscopio, si arriva a delimitare con esattezza la regione in cui la riga è visibile, e la lunghezza di questa regione è ciò che intendo per lunghezza della riga.

Ricordo anche che per queste misure ho utilizzato diversi tipi di scintilla, e precisamente: quella ordinaria del rocchetto con una piccola capacità in derivazione, quella data da un trasformatore a 6000 V con una capacità di risonanza sul secondario, e quella tra un carbone incandescente e un elettrodo freddo, che ho chiamato scintilla a basso voltaggio, perchè si realizza con soli 1000 V. Quest'ultima scarica comporta l'impiego di grandi capacità.

Le presenti ricerche sono state incominciate sulle leghe di nichel, quali si trovano nelle monete, e in alcuni materiali comuni. La fig. 2 ripro-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Siena.

(2) Nella seduta del 7 aprile 1929.

duce le curve ottenute con queste leghe che stabiliscono la relazione tra la lunghezza della riga 5477 del Ni, e la resistenza del circuito. La scarica è quella di un rocchetto ordinario con una capacità di 80 cm circa. In essa si vedono la curva di Ni puro, quelle delle diverse monete e quella del pakfong. Evidentemente i valori ottenuti con le monete di nuovo conio danno

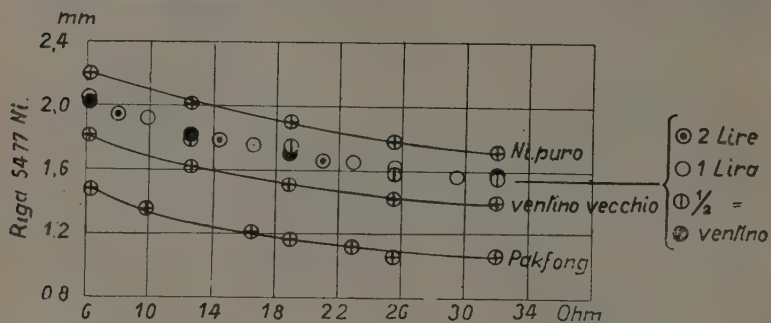


Fig. 2.

punti posti sopra una stessa curva del Ni puro, mentre la curva del ventino di vecchio conio risulta sensibilmente più bassa, e accusa un titolo minore.

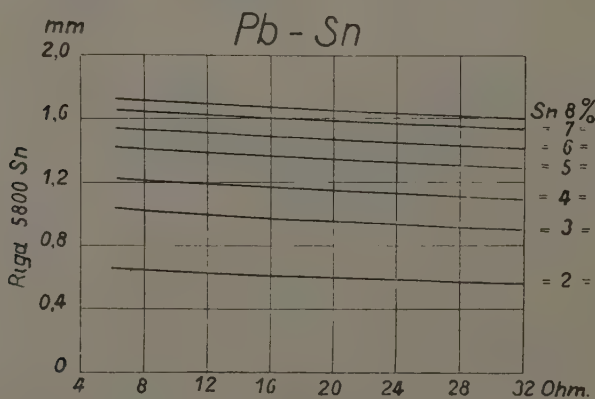


Fig. 3.

Questo risultato dimostra l'applicabilità del metodo a riconoscere l'uguaglianza o la diversità del titolo in diverse leghe, e quindi al controllo delle leghe adoperate nelle costruzioni meccaniche.

Ma per giudicare della sensibilità e della portata del metodo, occorre operare su leghe di titolo noto; e però ho composto delle leghe di piombo

e stagno variabili in decimi tra 0 e 1%, in unità tra 1 e 10% e in decine 10 e 100%.

Il tipo delle curve che si ottengono prendendo in considerazione la riga 5800 dallo stagno, è rappresentato nella fig. 3. Nelle condizioni sperimentali in cui esse sono state dedotte, e cioè con una scintilla di rocchetto lunga 12 mm. e con una capacità di 80 cm., il campo utile è limitato tra il 2 e l'8% di stagno, perchè al disotto la lunghezza diventa troppo pic-

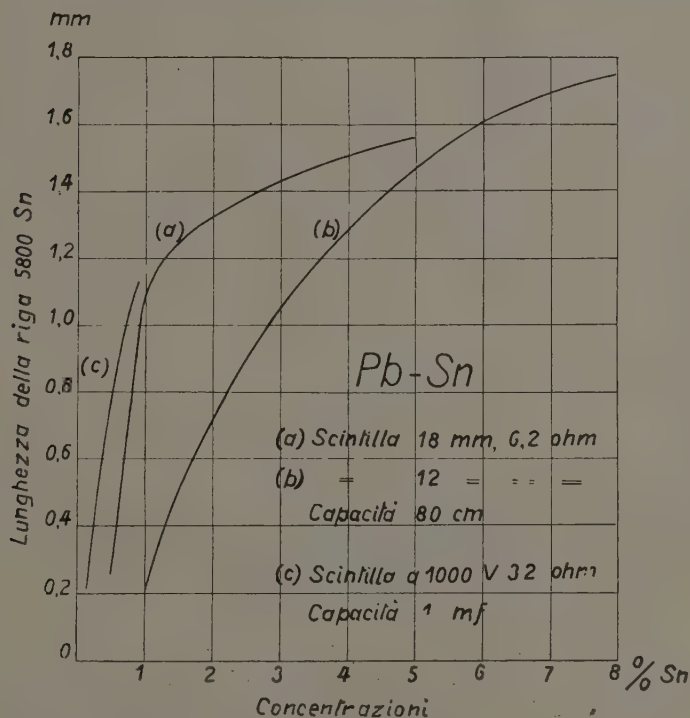


Fig. 4.

cola per poterla misurare con precisione, al disopra le curve diventano troppo fitte per poterle distinguere.

Questo fatto si vede meglio costruendo i grafici della lunghezza sulla percentuale a resistenza costante, che sono riportati nella fig. 4. In tal caso le curve si assomigliano a quelle di magnetizzazione, e cioè incominciano con un tratto a forte pendenza per poi ripiegarsi e finire in un tratto a pendenza debole.

Ma il tratto ripido, che è quello utilizzabile per dedurre il titolo dalla lunghezza della riga, abbraccia diversi campi di concentrazione col cambiare

delle condizioni della scarica. Così, mentre nelle condizioni specificate sopra esso abbraccia l'intervallo dall'1 all'8 % (curva *b*), allungando la scintilla fino a 18 mm. si porta tra 0,5 e 8 % (curva *a*), e adoperando la scintilla a 1000 V con 1 mf di capacità si riduce tra 0,2 e 1 % (curva *c*).

Le scintille lunghe, che si possono realizzare mediante l'alta tensione riunita al riscaldamento di un elettrodo, si sono mostrate adatte per analizzare le leghe con forti percentuali di stagno e di piombo, le quali, con scintille corte, danno righe che occupano tutto l'intervallo di scarica. La fig. 4, costruita con le osservazioni di una riga del piombo, dimostra la possibilità di determinare questo elemento in concentrazioni variabili dal 10 al 100 %.

Riepilogando, mi pare di poter concludere che la lunghezza delle righe in una scintilla sia una grandezza da poter usare per l'analisi quantitativa delle leghe. Un simile metodo presenta sugli altri metodi ottici il vantaggio dell'adattabilità e quello della rapidità. Per l'adattabilità, si può osservare che il materiale poco fusibile e le piccole concentrazioni si esaminano bene con scintille corte e grandi capacità, mentre i materiali molto fusibili e le grandi concentrazioni, che hanno la tendenza a riempire di vapori l'intervallo di scarica, diventano suscettibili di analisi con l'impiego di scintille lunghe e di piccole capacità.

Inoltre, la scelta tra le righe lunghe e corte di un elemento aumenta la possibilità di trovare in ogni caso le condizioni più convenienti per le misure.

Per convincersi della rapidità del metodo, basta riflettere che, al contrario di altri, esso lavora sul visibile, esige solo l'osservazione oculare, e si riduce ad una misura facile e non soggetta ad apprezzamenti personali. Per una curva a concentrazione costante, eseguita col variare della resistenza bastano 5 punti; e compiendo almeno tre determinazioni per ogni punto, la curva intera è tracciata in non più di mezz'ora.

Per la precisione, il tracciamento di un'intera curva è preferibile alla determinazione di un unico punto, perchè così i diversi valori si controllano a vicenda, e gli errori accidentali tendono a neutralizzarsi.

Come prova del metodo per riconoscere il titolo di una lega si è preso a caso una delle leghe di stagno e piombo e si è determinata la lunghezza della riga 5800 Sn con la scintilla del rocchetto lunga 18 mm. Si sono ottenuti così i valori:

Resistenze	6,2	18,9	32 ohm.
Lunghezze	1,56	1,45	1,39 mm.

Sul registro delle esperienze si è trovata, nelle condizioni suddette, la seguente serie di valori corrispondenti alle stesse resistenze eseguita un mese prima sulla lega al 5 % di Sn

Lunghezze	1,57	1,44	1,39
-----------	------	------	------

Ed è superfluo dire che la lega scelta a caso era quella con stagno al 5 %.

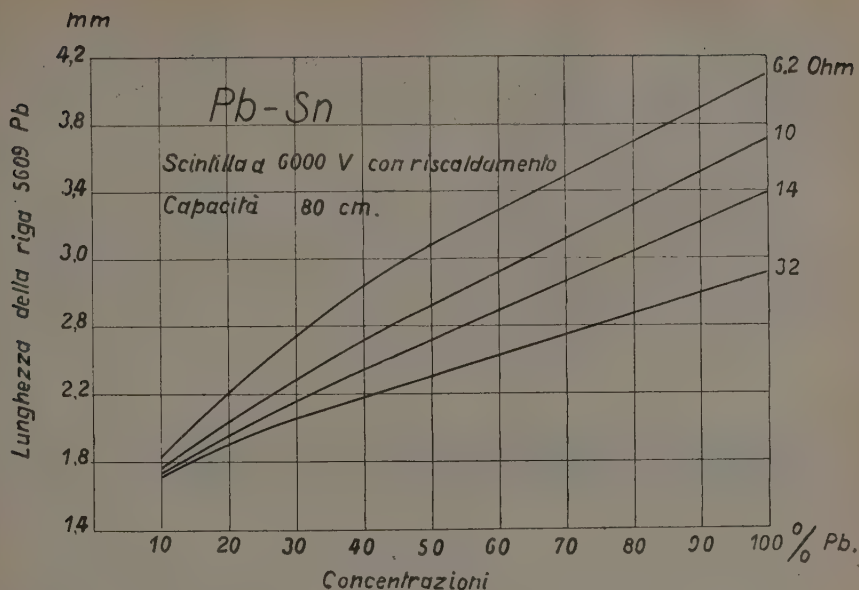


Fig. 5.

Chimica. — *Isoterme di viscosità di miscele binarie.* Nota di F. DE CARLI, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Una nuova classe di basi eterocicliche.* Nota di G. T. LEVI, presentata dal Socio G. BRUNI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Pentasolfuri dietilici.* Nota di R. G. LEVI, presentata dal Socio G. BRUNI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *I sistemi $\text{Al}(\text{NO}_3)_3 - \text{H}_2\text{O}$ e $\text{KNO}_3 - \text{Fe}(\text{NO}_3)_3 - \text{H}_2\text{O}$ a 0° e 40°.* Nota di G. MALQUORI, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica fisica. — *Sulla importanza della forma cristallina nella formazione di soluzioni solide.* Nota di A. FERRARI, A. CELERI e F. GIORGI, presentata dal Socio G. BRUNI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Natrolite di Viagrande (Etna).* Nota di S. DI FRANCO, presentata dal Socio F. MILLOSEVICH.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Alcoolemia negli esercizi fisici.* Nota di U. CASSINIS e L. BRACALONI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Ulteriori ricerche sull'azione di alcuni alcaloidi sui leucociti isolati dall'organismo.* Nota di C. FORTI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Ulteriori ricerche sul valore alimentare della patata nei ratti albi.* Nota di A. GALAMINI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *L'azione del pH sui muscoli striati.* Nota di S. GOLDBERGER, presentata dal Corrisp. A. HERLITZKA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Patologia. — *In uno speciale metodo di colorazione plasmodi della malaria.* Nota di S. PASTORE, presentata dal Corrisp. A. DIONISI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente, on. GARBASSO, apre la seduta inviando le felicitazioni della Classe a tutti i Soci che sono stati recentemente chiamati a far parte dell'Accademia d'Italia. In particolare si congratula con l'Accademico-segretario prof. PARRAVANO, ed esprime l'augurio che la presenza dei Lincei nell'Accademia sia sicura garanzia che i due grandi istituti procederanno in pieno accordo per il progresso della scienza e il vantaggio della nazione.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Corrisp. LOMBARDI presenta in omaggio a nome dell'autore, i « Principii scientifici della Elettrotecnica » e il « Corso di Elettrotecnica » del Socio G. GRASSI.

Il Corrisp. GUIDI fa omaggio di una sua breve nota dal titolo « Dighe ad arco sperimentali ».

L'Accademico-segretario prof. PARRAVANO presenta i libri giunti in dono all'Accademia, segnalando i « Complementi di geometria proiettiva » del Socio BERTINI; « Leçons sur les équations linéaires aux différences finies » del Socio Straniero Nörlund; « Le cancer maladie des cicatrices » e « La vie, la maladie et la mort, phénomènes colloïdaux » di A. LUMIÈRE; « Mathematical and Physical papers » di Sir. J. LARMOR.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente on. prof. GARBASSO coglie l'occasione di una comunicazione del Corrisp. GIORGI per annunciare all'Assemblea che nelle carte dell'Accademia di Cimento è stato ritrovato un disegno del VIVIANI dal quale risulta inoppugnabilmente che la celebre esperienza del FOUCAULT per provare la rotazione della terra era stata ideata circa due secoli prima da mente italiana.

Il Socio ARMELLINI fa voti che il prezioso disegno venga al più presto pubblicato per rivendicare all'Italia la priorità della grande esperienza del Foucault.

Il Socio on. GINORI-CONTI ricorda all'Assemblea che nel corrente mese sarà inaugurata a Firenze la Esposizione di storia della Scienza. Il prezioso disegno rinvenuto tra le carte del Cimento figurerà degnamente in una delle sale dell'Esposizione. Annuncia anche che all'esposizione farà seguito, a cura del Comitato ordinatore, una pubblicazione che conterrà l'inventario dei cimeli, documenti, manoscritti, strumenti, oggetti esposti e darà notizie

della città, del museo o dell'ente al quale appartengono, così che tale pubblicazione sarà come una grande rassegna di quanto il genio italiano ha saputo produrre nei secoli scorsi nel campo della scienza.

PRESENTAZIONE DI NOTE

Il Presidente on. GARBASSO comunica all'Assemblea che i signori CORBETTA e LICCIARDI hanno inviato due Note da inserire negli Atti Accademici. Non essendo state presentate da alcun Socio, le due Note verranno sottoposte, secondo la consuetudine, al giudizio di una Commissione.

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci BAGLIONI, DIONISI, ENRIQUES, GARBASSO, GIORGI, LEVI-CIVITA, MILLOSEVICII, PARRAVANO, VOLTERRA.

PRESENTAZIONE DI PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente on. GARBASSO presenta inoltre un plico suggellato del prof. Gino Gallo, inviato dal Socio R. NASINI, perchè venga conservato negli archivi Accademici.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 7 aprile 1929

- Les Annales des laboratoires A. Lumière de physiologie expérimentale et de pharmacodynamie. Années 1924-1927. Lyon, 1924-1927. 4°, pp. 1-63, 1-64, 1-59, 1-71.
- BELLIO G. — Ridescrizione del gen. *Tsukushiaspis* (Hemiptera: Coccidae) dell'Estremo Oriente (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXI, pp. 303-309). Spoleto, 1928. 8°.
- BERTINI E. — Complementi di geometria proiettiva. Bologna, 1928. 8°, pp. I-VIII, 1-361.
- BOSELLI F. B. — Studi sugli Psyllidi (Homoptera: Psyllidae o Chermidae). (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXI, pp. 218-264). Portici. 1929. 8°.
- BRUNO G. — Ricerche sulla istogenesi del miocardio e sulla origine dei sinusoidi, dei capillari e del tessuto connettivo del cuore nell'embrione umano. (Estr. dall'« Archivio Italiano di Anatomia e di Embriologia ». Vol. XXV. pp. 320-403), Firenze, 1928. 8°.
- CAPPARONI P. — Il « De Quattuor humoribus corporis humani », di Alfano I, Arcivescovo di Salerno (Sec. XI). Trascrizione del Codice Vallicelliano F. 86 (n. X). Roma, 1928. 8°, pp. 1-27.
- CAPPARONI P. — Prospero Alpino (1553-1616). La sua residenza al Cairo, i suoi studi sulle piante dell'Egitto, sulla medicina e sulle malattie locali (Estr. dal « Bollettino dell'Istituto Italiano dell'Arte Sanitaria ». Anno XXVIII). Roma, 1929. 8°. pp. 1-7.
- CAPPARONI P. — Un ritratto di Marcello Malpighi fino ad ora sconosciuto. (Estr. dal « Bollettino dell'Istituto Storico Italiano dell'Arte Sanitaria ». Anno XXVII). Roma, 1928. 8°, pp. 1-23.
- CASTELLANOS A. — Instrucciones para formar herbarios. (Extr. de la « Revista del Centro Estudiantes de Agronomía y Veterinaria ». 1928). Buenos Aires, 1928. 4°, pp. 1-23.
- Comité National français de Géodésie et Géophysique: assemblée générale du 2 juillet 1928. Compte Rendu. Paris, 1928. 8°, pp. 1-58.
- CONTE V. — Contributo alla conoscenza della Grillotalpa (*Gryllotalpa*, *gryllotalpa* L.). (Estr. del « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto Superiore agrario di Portici ». Vol. XXI, pp. 273-301). Spoleto, 1929. 8°.
- CRESLEBIN H. — Nueva hipótesis sobre el destino de las placas grabadas de la Patagonia prehistórica (Extr. « Physis ». t. IX. pp. 223-233). Buenos Aires, 1928. 8°.
- DOELLO JURADO M. — Noticia preliminar sobre los moluscos fósiles de agua dulce. (Extr. del « Boletín de la Academia Nacional de Ciencias en Córdoba ». tomo XXX, pp. 407-416). Buenos Aires, 1927. 8°.
- DOGLIOTTI G. C. — Ricerche sperimentali sulla natura del tessuto adiposo mediante la colorazione vitale con colori acidi. (Sonderabd. aus « Zeitschrift für Zellforschung und mikroskopische Anatomie ». Band VIII, pp. 222-248). Berlin, 1928. 8°.
- FAVARO G. A. e TAFFARA L. — L'attività del sole nell'anno 1928. (R. Osservatorio Astrofisico di Catania). Catania, 1929. 8°, pp. 1-15.
- FISHER W. J. — The Fireballs of 1927

- August 10 and October 16 (Reprint. from «Popular Astronomy». v. XXXVII. 1929). s. I. 1929. 8°, pp. 1-8.
- GERASIMOVIČ B. R. — The absolute Magnitudes of Long Period Variable Stars. (Reprint. from the «Proceedings of the National Academy of Sciences». Volume XIV, pp. 963-968). Cambridge, 1928. 8°.
- GRASSI G. — Corso di elettrotecnica. Volumi I, II. Torino, 1923, 1927. 8°, pagine I-VIII, 1-448, 1-569.
- GRASSI G. — Principi scientifici della elettrotecnica. Torino, 1926. 8°, pp. I-VIII, 1-338.
- GRESLEBIN H. — Las llamadas «botijas» o «tinajas» de la provincia de San Luis (República Argentina). (Extr. «Physis». t. IX, pp. 46-71). Buenos Aires, 1928, 8°.
- GRESLEBIN H. — Nueva hipótesis sobre el destino de las placas grabadas de la Patagonia prehistórica (Extr. «Physis». t. IX, pp. 223-233). Buenos Aires, 1928, 8°.
- GUIDI C. — Dighe ad arco sperimentali. (Estr. dalla «Rivista Italiana di edilizia e lavori pubblici della Federazione Fascista». 1929). Roma, 1929. 4°, pagine 1-6.
- KOLMOGOROFF A. — Ueber das Gesetz des iterierten Logarithmus. (Sonderabdr. aus «Mathematische Annalen». Band, 101. Heft I, pp. 126-135). Berlin, 1929. 8°.
- KRAGLIEVICH L. — Contribución al conocimiento de los grandes cánidos extinguidos de Sud América. Buenos Aires, 1928. 8°, pp. 1-45.
- KRAGLIEVICH L. — «Myloodon Darwin» Owen es la especie genotipo de «Myloodon» Ow. (Extr. «Physis». t. IX, pp. 169-185). Buenos Aires, 1928, 8°.
- KRAGLIEVICH L. — Nota preliminar sobre nuevos géneros y especies de roedores de la Fauna argentina. (Estr. «Physis». t. VIII). Buenos Aires, 1927. 8°, pagine 1-8.
- LAMOR J. — Mathematical and Physical Papers. Vol. I, II. Cambridge, 1929. 8°, pp. I-XII, 1-679, I-XXXII, 1-831.
- LEVI C. — Recherches sur le développement de la grande manimaire chez l'homme et d'autres mammifères. (Extr. des «Comptes Rendus de l'Association des Anatomistes». XXIII Réunion). Prague, 1928, 8°, pp. 1-11.
- LEVI G. e BUCCIANTE L. — Sulla natura delle colorazioni vitali studiata sulle cellule coltivate in vitro. (Abdr. aus «Archiv für experimentelle Zellforschung. Baud. VII, pp. 355-386). Jena, 1928. 8°.
- LUMIÈRE A. — La vie, la maladie, et la mort. Phénomènes colloïdaux. Paris, 1928. 8°, pp. 1-XXIII, 1-520.
- LUMIÈRE A. — Le Cancer: maladie des cicatrices. Paris, 1929. 8°, pp. 1-IX, 1-287.
- LUMIÈRE A. — Nomenclature des principaux travaux scientifiques publiés par A. L. Lyon, 1928. 8°, pp. 1-46.
- MOCHI A. — A proposito di una nuova classificazione preistorica proposta dal prof. Rellini. (Estr. dall' «Archivio per l'Antropologia e l'Etnologia». Vol. LIX). Firenze, 1929. 8°.
- NORLUND N. E. — Leçons sur les équations linéaires aux différences finies. Paris, 1929. 8°, pp. I-II, 1-152.
- OLIVO O. M. — Précoce détermination de l'ébauche du cœur dans l'embryon de poulet et sa différenciation histologique et physiologique «in vitro». (Extr. des «Comptes Rendus de l'Association des Anatomistes». 1928). Prague, 1928. 8°. pp. 1-18.
- PLATANIA G. — Contributo allo studio del clima dei campi Flegrei. (Estr. dagli «Atti del XIX Congresso Nazionale di idrologia climatologica». 1928). Napoli, 1928. 4°, pp. 1-16.
- PLATANIA G. — Il barometro e la navigazione. (Estr. dalla Rivista «Fra armi e macchine a bordo». fasc. XII, 1928). Roma, 1928. 8°, pp. 1-16.
- PLATANIA G. — Un dodicennio di osservazioni eseguite in Catania e in Napoli sulle meteore ottiche. (Estr. dal «Bollettino della Società dei Naturalisti in Napoli». Vol. XL, pp. 73-82). Napoli, 1928. 8°.
- PRIESNER H. — Eine neue Mesothrips-Art

- aus Annam. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXI, pp. 215-217). Spoleto, 1929. 8°.
- RANZI S. — Contributo al problema della ciclopia. La ciclopia nei Cefalopodi e qualche notizia sui ciclopi dei vertebrati. (Estr. dagli « Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei ». Anno LXXXII, pp. 74-84). Roma, 1929. 4°.
- RANZI S. — Suscettibilità differenziale nello sviluppo dei Cefalopodi (Analisi sperimentale dell' embriogenesi). (Estr. dalle « Pubblicazioni della Stazione Zoologica di Napoli ». Vol. IX, pp. 31-159). Napoli 1928. 8°.
- RUSSO A. — Studi sulla pesca nel Golfo di Catania. (Estr. dal « Bollettino di pesca, di piscicoltura e di idrobiologia ». Anno IV, fasc. V). Roma, 1928. 8°.
- SARRA R. — L'Antonomo del mandorlo (*Anthonomus ornatus* Reiche) in provincia di Matera. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXI, pp. 265-274). Spoleto, 1929. 8°.
- SHAPLEY H. — Studies of the Galactic Center. III The absolute Magnetudes of Long Period Variables. (Reprint. from the « Proceedings of the National Academy of Sciences ». Vol. XIV. pp. 958-962). Cambridge, 1928. 8°.
- SILVESTRI F. — Subsidio para o estudo dos Tortricidas dos Carnothos (Borgo dos Montados) e seus parasitas. Traduzido, prefaciado e anotado, no que diz respeito a Portugal por José Martins de Mira Galvão. Porto, 1927. 8°, pp. 1-52.
- VENTURINI G. — Da Icaro a Montgolfier. Parte I, II. Roma, 1928. 8°, pp. 1-xxv, 1-560, 1-126.
- YEPES J. — Los « Edentata » argentinos. Sistemática y distribución. (Extr. de la « Revista de la Universidad de Buenos Aires ». tomo I. 1928). Buenos Aires, 1928. 4°, pp. 1-VIII, 1-54.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 21 aprile 1929 (anno VII)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Alcune osservazioni sui fenomeni ereditarii.*
Nota ⁽¹⁾ del Socio V. VOLTERRA.

I.

1. In una recente Memoria pubblicata nel « Journal de Mathématiques » ⁽²⁾ sono ritornato sopra mie precedenti ricerche ed ho esaminato i fenomeni ereditarii dal punto di vista energetico.

Mi permetto ora di aggiungere alcune osservazioni generali sui detti fenomeni portando qualche nuovo contributo al loro studio.

2. Supponiamo che lo stato attuale d'un parametro p dipenda dalla storia di un parametro q e la dipendenza sia lineare. La funzione $q(t)$ (t denotando il tempo) individuerà la *storia di q* ossia la *storia primitiva*, mentre la funzione $p(t)$ individuerà la *storia di p* ossia la *storia ereditaria*.

Ammetteremo p e q funzioni finite e continue e se vorremo considerare la *eredità completa* scriveremo nel caso del ciclo chiuso

$$(I) \quad p(t) = aq(t) + \int_{-\infty}^t q(\tau) F(t - \tau) d\tau \quad (3).$$

1) Presentata nella seduta del 7 aprile 1929.

2) « Journ. de Math. », tome VII, fasc. III, 1928.

(3) VOLTERRA, *Sur les fonctions de lignes*, Chap. VII, Paris, 1913.

Il coefficiente di eredità $F(t)$ sarà una funzione finita e continua e, se q è limitata, lo supporremo, per $t = \infty$, infinitesimo di ordine superiore ad un numero maggiore dell'unità.

a sarà una funzione compresa fra due numeri positivi che potremo supporre sempre ridotta eguale all'unità.

3. Se lo stato del parametro q anteriore ad un certo istante t_0 non influisce sul valore di ρ scriveremo la (1)

$$(A) \quad \rho(t) = q(t) + \int_{t_0}^t q(\tau) F(t - \tau) d\tau.$$

Questa equazione integrale può risolversi e avremo

$$(B) \quad q(t) = \rho(t) + \int_{t_0}^t \rho(\tau) G(t - \tau) d\tau$$

ove G è il nucleo coniugato di F , cioè

$$(2) \quad G = -F + \overset{*}{F}^2 - \overset{*}{F}^3 + \dots \quad (1).$$

In questo caso la eredità si dice *posteriore all'istante t_0* e, come la storia primitiva posteriore a t_0 individua quella ereditaria, così, reciprocamente, questa ultima individua la storia primitiva pure posteriore a t_0 .

L'equazione (A) corrisponderà all'eredità diretta e la (B) a quella inversa.

La eredità sarà *ritardatrice* o *acceleratrice* secondochè il nucleo F è negativo o positivo.

Abbiamo subito i teoremi:

TEOREMA I. Se l'eredità diretta è ritardatrice quella inversa è acceleratrice.

Infatti dalla (2) segue che, se F è negativa, G è positiva.

TEOREMA II. Se l'eredità diretta è acceleratrice quella inversa non potrà essere anch'essa acceleratrice.

Infatti dalla (2) segue:

$$\begin{aligned} \overset{*}{G}\overset{*}{F} &= -\overset{*}{F}^2 + \overset{*}{F}^3 - \overset{*}{F}^4 + \dots \\ &= (F - \overset{*}{F}^2 + \overset{*}{F}^3 - \overset{*}{F}^4 + \dots) - F \\ &= -G - F \end{aligned}$$

e per conseguenza

$$G + F + \overset{*}{G}\overset{*}{F} = 0$$

relazione incompatibile coll'ipotesi che G ed F siano ambedue positive.

(1) VOLTERRA et PÉRÈS, *Composition et fonctions permutables*, Chap. II, Paris, 1924.

Supponiamo (3) $M > F > m$, essendo m ed M costanti positive. Avremo

$$-M \cosh M + m \sinh m < G = -(F + \overset{*}{F}^3 + \overset{*}{F}^5 + \dots) + \\ + (\overset{*}{F}^2 + \overset{*}{F}^4 + \overset{*}{F}^6 + \dots) < -m \cosh m + M \sinh M,$$

quindi se

$$(4) \quad \frac{m}{M} > \frac{\sinh M}{\cosh m}$$

G sarà negativo. Dunque:

TEOREMA III. *Se saranno soddisfatte le relazioni (3) e (4), l'eredità diretta sarà acceleratrice e quella inversa sarà ritardatrice.*

4. Se il coefficiente di eredità $F(t)$ si annulla per $t \equiv T_0$, T_0 si dirà la durata dell'eredità diretta.

Avremo allora che la equazione (1) diverrà

$$(C) \quad \rho(t) = q(t) + \int_{t-T_0}^t q(\tau) F(t-\tau) d\tau = q(t) + \int_0^{T_0} q(t-\tau) F(\tau) d\tau$$

In questo caso la storia ereditaria non individua la storia primitiva, supponendo che non si tratti di eredità posteriore ad un certo istante.

Infatti prendiamo nella equazione precedente $q(t) = e^{\alpha t}$ con α costante positiva o negativa.

Avremo

$$\rho(t) = e^{\alpha t} \left(1 + \int_0^{T_0} F(\tau) e^{-\alpha \tau} d\tau \right).$$

Se $F(\tau)$ è negativo si potrà sempre scegliere α in modo che

$$1 + \int_0^{T_0} F(\tau) e^{-\alpha \tau} d\tau = 0$$

onde si avrà $\rho(t) = 0$ il che dimostra che la (C), nella quale si considera $q(t)$ come incognita, ha infinite soluzioni della forma

$$q(t) + C e^{\alpha t},$$

ove C è una costante arbitraria.

Nel caso in cui la durata dell'eredità è ∞ , cioè la eredità è completa il sig. Kostitzin aveva fatta analoga osservazione⁽¹⁾ (cfr. § 5).

Ma nella citata Memoria del « Journal de Mathématiques »⁽²⁾ ho enun-

(1) *Sur les solutions singulières des équations intégrales du cycle fermé.* (« Recueil mathématique de Moscou », 33, 1926, p. 41). Cfr. anche « Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences » 1927, 1^{er} semestre, p. 1403.

(2) Châp. I, § II, n. 1.

ciato il teorema che stabilisce la determinazione dell'eredità primitiva (nel caso della eredità limitata) nel modo seguente:

Nel caso della eredità diretta di durata limitata, nota la storia primitiva in un intervallo di tempo eguale alla durata dell'eredità e nota la storia ereditaria successiva potrà determinarsi pure durante lo stesso tempo, la storia primitiva.

5. Se la eredità diretta ha una durata limitata non viene come conseguenza che quella inversa abbia pure una durata limitata. Può inoltre il coefficiente d'eredità $F(t)$ tendere a zero per t crescente indefinitamente, senza che il nucleo coniugato $G(t)$ tenda analogamente a zero. Così, per esempio, se

$$F = -e^{-t}$$

sarà

$$G = 1.$$

Per rapporto alla decrescenza dei nuclei daremo qui alcuni teoremi.

Supponiamo nella (A), F negativo ed eguale a $-f$ e poniamo g in luogo di G . In virtù della (2) sarà

$$(2') \quad g = f + f^2 + f^3 + \dots$$

TEOREMA IV. Se

$$(5) \quad f(t) = e^{-\varphi(0)t} \varphi(t),$$

ove $\varphi(t)$ è una funzione positiva decrescente, $g(t)$ sarà pure una funzione positiva decrescente.

Infatti la (2') può scriversi

$$g(t) = f(t) + \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

da cui segue

$$\begin{aligned} g'(t) &= f'(t) + \int_0^t f(\tau) g'(t-\tau) d\tau + g(0) f(t) \\ &= [f'(t) + g(0) f(t)] + \int_0^t g'(\tau) f(t-\tau) d\tau, \end{aligned}$$

a cagione della proprietà delle funzioni permutabili appartenenti al ciclo chiuso. Quindi

$$[f'(t) + g(0) f(t)] = g'(t) - \int_0^t g'(\tau) f(t-\tau) d\tau,$$

o anche

$$[f'(t) + f(0)f(t)] = g'(t) - \int_0^t g'(\tau) f(t-\tau) d\tau,$$

giacchè $f(0) = g(0)$.

Risolviendo questa equazione integrale rispetto a $g'(t)$ otterremo

$$(6) \quad g'(t) = [f'(t) + f(0)f(t)] + \int_0^t g(t-\tau) [f'(\tau) + f(0)f(\tau)] d\tau.$$

Dalla (5) segue $f(0) = \varphi(0)$, e

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt} [f(t) e^{f(0)t}] = e^{f(0)t} [f'(t) + f(0)f(t)].$$

Siccome $\varphi(t)$ è decrescente e quindi $\varphi'(t) < 0$, sarà

$$f'(t) + f(0)f(t) < 0,$$

onde, per la (6), $g'(t) < 0$; il che dimostra il teorema.

Lemma. Se

$$f(t) = e^{mt} f_1(t)$$

e g_1 è il nucleo coniugato di f_1 sarà

$$g(t) = e^{mt} g_1(t).$$

Infatti

$$f_1^{*2} = e^{mt} f_1^{*2}, \quad f_1^{*3} = e^{mt} f_1^{*3}, \dots$$

TEOREMA V. Se $|\varphi(t)| < \lambda$,

$$f(t) = e^{-(\lambda+\varepsilon)t} \varphi(t)$$

λ ed ε essendo due costanti positive, avremo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0.$$

Infatti, per il lemma precedente sarà

$$g(t) = e^{-(\lambda+\varepsilon)t} \gamma(t),$$

ove γ è il nucleo coniugato di $-\varphi$. Ora per i principii delle equazioni integrali

$$|\gamma(t)| < \lambda e^{\lambda t},$$

quindi

$$|g(t)| < \lambda e^{-\varepsilon t},$$

il che dimostra il teorema.

Se $f(t)$ è positivo resta implicitamente inteso che anche φ sarà positivo. Ma il teorema precedente è valido indipendentemente dal segno di $f(t)$.
Combinando i due teoremi IV e V si avrà la proposizione:

TEOREMA VI. Se

$$(7) \quad f(t) = e^{-(\varphi(0)+\varepsilon)t} \varphi(t)$$

ove φ è una funzione positiva decrescente ed ε è una costante positiva, la funzione coniugata $g(t)$ sarà una funzione positiva decrescente che tenderà a zero per $t = \infty$.

I teoremi precedenti provano la esistenza di coefficienti di eredità diretta ed inversa che sono due nuclei coniugati ambedue decrescenti in valore assoluto e tendenti a zero.

6. Se supponiamo

$$(8) \quad f(t) = e^{-(\lambda+\varepsilon)t} \varphi(t) \quad , \quad g(t) = e^{-(\lambda+\varepsilon)t} \gamma(t)$$

con $|\varphi(t)| < \lambda > 0$, $\varepsilon > 0$ e costante (V. Teor. V), avremo

$$|f(t)| < \lambda e^{-(\lambda+\varepsilon)t} \quad |g(t)| < \lambda e^{-\varepsilon t}$$

quindi

$$(9) \quad \int_{-\infty}^t |f(t-\tau)| d\tau < \frac{\lambda}{\lambda+\varepsilon} < 1 \quad , \quad \int_{-\infty}^t |g(t-\tau)| d\tau < \frac{\lambda}{\varepsilon}.$$

L'equazione integrale

$$(A') \quad \rho(t) = q(t) - \int_{t_0}^t q(\tau) f(t-\tau) d\tau, \quad (t > t_0)$$

si inverte mediante la formula

$$(B') \quad q(t) = \rho(t) + \int_{t_0}^t \rho(\tau) g(t-\tau) d\tau, \quad (t > t_0)$$

e, in questo caso, se il parametro q è limitato, cioè

$$|q| < M,$$

sarà pure limitato il parametro ρ , e avremo

$$|\rho| < 2M;$$

e se

$$|\rho| < N,$$

dovrà essere

$$|q| < N \left(1 + \frac{\lambda}{\varepsilon} \right).$$

Supponendo ρ e q limitate le due formule inverse (A') e (B') ove f e g sono date dalle (8) valgono anche per $t_0 = -\infty$; vale a dire, se $\rho(t)$ è limitata, l'equazione integrale

$$(A'') \quad \rho(t) = q(t) - \int_{-\infty}^t q(\tau) f(t - \tau) d\tau,$$

viene risolta dalla funzione

$$(B'') \quad q(t) = \rho(t) + \int_{-\infty}^t \rho(\tau) g(t - \tau) d\tau,$$

la quale è limitata. Ciò si prova coll'ordinario procedimento⁽¹⁾.

Dimostriamo ora che, se poniamo la condizione che la soluzione della (A'') debba essere limitata, questa è unica.

Infatti, supponiamo che debba essere

$$|q| < M,$$

e che sia $\rho = 0$.

Dalla (A'') segue

$$q(t) = \int_{-\infty}^t q(\tau) f(t - \tau) d\tau,$$

quindi, in virtù della (9),

$$|q(t)| < M \int_{-\infty}^t |f(t - \tau)| d\tau < M \frac{\lambda}{\lambda + \varepsilon},$$

e perciò

$$|q(t)| < M \left(\frac{\lambda}{\lambda + \varepsilon} \right)^n,$$

n essendo un intero positivo qualunque. Dunque $|q(t)|$ deve essere inferiore a qualunque numero positivo e, per conseguenza, nel caso di $\rho = 0$, non vi è altra soluzione limitata che $q = 0$.

Le soluzioni della (A'') della forma

$$q(t) = e^{\alpha t}$$

debbono corrispondere a $\alpha < 0$, quindi divengono ∞ per $t = -\infty$ e non sono per conseguenza limitate (cfr. § 3).

(1) È il procedimento esposto in VOLTERRA, *Leçons sur les équations intégrales*, Paris, 1913, Chap. II, § II, III Principe d'inversion che si può estendere al caso del limite inferiore ∞ dato l'ordine di infinitesimo dei nuclei per l'argomento ∞ .

II.

7. Nella Memoria precedentemente citata ho studiato la questione energetica nel caso della eredità lineare per un sistema dinamico con un sol grado di libertà ammettendo la durata della eredità limitata. Cerchiamo ora di togliere questa condizione e supporre la eredità posteriore ad un certo istante iniziale.

Evidentemente se la eredità è limitata e consideriamo il fenomeno dopo decorso un periodo di tempo superiore alla durata dell'eredità, sarà lecito trascurare il fatto che l'eredità è posteriore all'istante iniziale. Quindi le formule che troveremo comprenderanno quelle già ottenute.

8. Prendiamo l'istante iniziale come origine dei tempi. Allora l'equazione dinamica da cui partiremo sarà ⁽¹⁾

$$(D) \quad q''(t) + bq(t) = \int_0^t f(t-\tau) q(\tau) d\tau + Q,$$

o anche

$$(D') \quad q''(t) + bq(t) = \int_0^t f(\tau) q(t-\tau) d\tau + Q$$

con

$$f(t) > 0, \quad f'(t) < 0.$$

Inoltre dovremo supporre ⁽²⁾

$$m(t) = b - \int_0^t f(\tau) d\tau > 0$$

comunque sia $t > 0$.

La (D) potrà scriversi

$$q''(t) + m(t)q(t) + \int_0^t f(\tau)[q(t) - q(t-\tau)] d\tau = Q,$$

e, moltiplicando ambo i membri per $q'(t)$,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} q'^2 + \frac{1}{2} m(t) q^2(t) + \frac{1}{2} \int_0^t f(\tau) [q(t) - q(t-\tau)]^2 d\tau \right\} \\ &= \frac{1}{2} m'(t) q^2(t) + \frac{1}{2} f(t) [q(t) - q(0)]^2 - \int_0^t f(\tau) [q(t) - q(t-\tau)] q'(t-\tau) d\tau + Qq' \\ &= -\frac{1}{2} f(t) q^2(t) + \frac{1}{2} f(t) [q(t) - q(0)]^2 - \frac{1}{2} \int_0^t f(\tau) \frac{d}{d\tau} [q(t) - q(t-\tau)]^2 d\tau + Qq'. \end{aligned}$$

(1) Vedi la mia Memoria precedentemente citata Chap. I, § 1, n. 2.

(2) Cfr. Chap. I, § 1, n. 4 della Memoria sopra citata.

Ma, per mezzo di una integrazione per parti, si trova

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f(t) [q(t) - q(0)]^2 - \frac{1}{2} \int_0^t f(\tau) \frac{d}{d\tau} [q(t) - q(t - \tau)]^2 d\tau = \\ = \frac{1}{2} \int_0^t f'(\tau) [q(t) - q(t - \tau)]^2 d\tau. \end{aligned}$$

Avremo dunque

$$\begin{aligned} (E) \quad \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} q'^2 + \frac{1}{2} m(t) q^2(t) + \frac{1}{2} \int_0^t f(\tau) [q(t) - q(t - \tau)]^2 d\tau \right\} \\ + \frac{1}{2} f(t) q^2(t) - \frac{1}{2} \int_0^t f'(\tau) [q(t) - q(t - \tau)]^2 d\tau = Qq'. \end{aligned}$$

I termini

$$\frac{1}{2} f(t) q^2(t) \quad , \quad - \frac{1}{2} \int_0^t f'(\tau) [q(t) - q(t - \tau)]^2 d\tau$$

sono sempre positivi, dunque: il lavoro eseguito dalle forze esterne durante un intervallo qualunque di tempo, supera sempre la variazione subita nello stesso intervallo di tempo dal funzionale positivo

$$\frac{1}{2} q'^2 + \frac{1}{2} m(t) q^2(t) + \frac{1}{2} \int_0^t f(\tau) [q(t) - q(t - \tau)]^2 d\tau.$$

9. Se il moto è spontaneo (ossia $Q = 0$), il precedente funzionale va continuamente diminuendo.

Di qui segue che il moto spontaneo è limitato e, quando gli spostamenti sono nulli, l'equilibrio è stabile.

Dalla (D) segue, supposto $Q = 0$,

$$q'(t) - q'(0) + b \int_0^t q(\tau) d\tau - \int_0^t d\tau \int_0^\tau f(\tau - \xi) q(\xi) d\xi = 0,$$

o anche

$$q'(t) - q'(0) + \int_0^t q(\tau) \left[b - \int_0^{\tau} f(\xi) d\xi \right] d\tau = 0$$

dunque

$$\frac{q'(t) - q'(0)}{t} + \frac{1}{t} \int_0^t q(\tau) m(t - \tau) d\tau = 0.$$

Ne viene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t q(\tau) m(t - \tau) d\tau = 0$$

e, per conseguenza, $q(t)$ oscillerà indefinitamente attorno al valore zero, o tenderà in media assintoticamente verso zero.

10. Nel caso in cui

$$(10) \quad f(t) = 0 \quad \text{per} \quad t \geq T_0$$

preso $t > T_0$ si ricade nelle formole ottenute nel caso della eredità di durata limitata a T_0 ⁽¹⁾. La differenza essenziale che passa, fra il caso (10) e il caso nel quale $f(t)$ non si annulla per $t \geq T_0$, consiste in questo: che nel primo caso è possibile ritornare dopo un certo tempo allo stato iniziale, anche dal punto di vista ereditario, mentre ciò non è possibile nell'altro caso.

11. È facile ottenere un'altra formula del tipo (E) nel modo seguente: Supposto $b = 1$, poniamo

$$\rho(t) = q(t) - \int_0^t f(t - \tau) q(\tau) d\tau,$$

da cui segue

$$q(t) = \rho(t) + \int_0^t g(t - \tau) \rho(\tau) d\tau,$$

onde la (D) si scriverà

$$q''(t) + \rho(t) = Q(t).$$

Moltiplicando ambo i membri per q' avremo

$$q' q'' + q' \rho = Q q'$$

ossia

$$(11) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} q'^2 + q \rho \right) = \rho' q + Q q'.$$

Ora

$$\begin{aligned} P &= -\rho q + \frac{1}{2} \rho^2 + \frac{1}{2} \int_0^t g(t - \tau) \rho^2(\tau) d\tau = \\ &= -\frac{1}{2} \rho^2 - \rho(q - \rho) + \frac{1}{2} \int_0^t g(t - \tau) \rho^2(\tau) d\tau \\ &= -\frac{1}{2} \rho^2(t) - \rho(t) \int_0^t g(t - \tau) \rho(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t g(t - \tau) \rho^2(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

(1) Cfr. la mia Memoria sopra citata Chap. II.

quindi

$$(12) \left\{ \begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= -\rho'(t) \left(\rho(t) + \int_0^t g(t-\tau) \rho(\tau) d\tau \right) \\ &= -\rho(t) \int_0^t g'(t-\tau) \rho(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t g'(t-\tau) \rho^2(\tau) d\tau - \frac{1}{2} g(0) \rho^2(t) \\ &= -\rho'(t) q(t) + \frac{1}{2} \int_0^t g'(t-\tau) [\rho(t) - \rho(\tau)]^2 d\tau - \frac{1}{2} g(t) \rho^2(t). \end{aligned} \right.$$

Sommando membro a membro le equazioni (11) e (12) si trova

$$(F) \quad \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} q'^2 + \frac{1}{2} \rho^2(t) + \frac{1}{2} \int_0^t g(t-\tau) \rho^2(\tau) d\tau \right\} = \\ = \frac{1}{2} \int_0^t g'(t-\tau) [\rho(t) - \rho(\tau)]^2 d\tau - \frac{1}{2} g(t) \rho^2(t) + Qq'.$$

Se, $g' < 0$ e $g > 0$, i termini

$$-\frac{1}{2} \int_0^t g'(t-\tau) [\rho(t) - \rho(\tau)]^2 d\tau, \quad \frac{1}{2} g(t) \rho^2(t)$$

sono ambedue positivi e quindi, il lavoro eseguito dalle forze esterne, in un intervallo di tempo, supera la variazione subita dal funzionale positivo

$$\frac{1}{2} q'^2(t) + \frac{1}{2} \rho^2(t) + \frac{1}{2} \int_0^t g(t-\tau) \rho^2(\tau) d\tau$$

nello stesso intervallo di tempo.

La formula (F), che può anche scriversi

$$(F') \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} q'^2 + \frac{1}{2} \rho^2(t) + \frac{1}{2} \int_0^t g(t-\tau) \rho^2(\tau) d\tau \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^t g'(t-\tau) [\rho(t) - \rho(\tau)]^2 d\tau + \frac{1}{2} g(t) \rho^2(t) = Qq', \end{aligned} \right.$$

è quella che volevamo ottenere. Se la credibilità inversa avesse una durata limitata T_0 , cioè se fosse $g(t) = 0$ per $t \geq T_0$. l'ultimo termine del primo membro della (F') si annullerebbe qualora fosse $t > T_0$ e questa formula diverrebbe:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} q'^2(t) + \frac{1}{2} \rho^2(t) + \frac{1}{2} \int_0^{T_0} g(\tau) \rho^2(t-\tau) d\tau \right\} = \\ = -\frac{1}{2} \int_0^{T_0} g'(\tau) [\rho(t) - \rho(t-\tau)]^2 d\tau = Qq'.$$

Matematica. — *Gli « Scritti scientifici » di Francesco Siacci.*
Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. G. LORIA.

La biblioteca della nostra Accademia si arricchisce oggi di alcuni importanti volumi, sui quali mi sia lecito di richiamare l'attenzione dei Soci, alcuni dei quali furono colleghi o discepoli di Francesco Siacci e molti lo ricordano come uno degli Uomini che maggiormente contribuirono al lustro della nostra Corporazione.

La mirabile attività scientifica di Francesco Siacci si svolse in due campi distinti. Eminente ufficiale d'artiglieria, egli diede a quell'Arma preziosi ammaestramenti di Balistica, mediante pubblicazioni di così indiscusso valore che non tardarono a farne considerare l'autore come un'autorità in materia, non solo in Italia ma anche presso paesi renitenti a riconoscere i meriti dei nostri connazionali; d'altra parte, per lunghi anni professore nelle Università di Torino e di Napoli, egli addestrò nella scienza dei moti e delle forze una plejade di alunni (« e di questi cotai, son io medesimo ») che ammirarono in lui la vastità e profondità del sapere e la chiarezza ed eleganza della esposizione. Ma queste due facce dell'opera scientifica dello Siacci non possono considerarsi separatamente: chè negli scritti di carattere militare affiora bene spesso l'analista provetto, che maneggia con mirabile disinvoltura i più sottili artifici creati da Lagrange, Eulero e Jacobi; mentre nei lavori teorici è sempre visibile la preoccupazione di dare ai risultati la forma più perpicua, sì da renderli applicabili anche ai calcoli numerici.

Potevasi credere che le teorie balistiche perfezionate dallo Siacci avessero fatto il loro tempo, dopo la dura esperienza fattane nel corso della recente conflagrazione mondiale; invece, con dolce meraviglia si riconobbe che esse conservavano intatto il loro cospicuo valore. Quale constatazione impressionante di questo fatto meraviglioso sta la proposta avanzata dalla R. Accademia militare di Torino, per bocca del suo Comandante, di riunire in un tutto e dare nuovamente alle stampe gli *Scritti scientifici* del nostro compianto Collega. Tale geniale iniziativa conseguì subito la più simpatica accoglienza da parte del Capo del Governo Nazionale, il quale, nella sua triplice qualità di Ministro della Guerra, della Marina e dell'Aviazione diede le disposizioni necessarie per l'attuazione dell'importante disegno, assicurando in tal modo a sè stesso la perenne riconoscenza degli studiosi, esprimendo la quale nella presente occasione io sono sicuro di avere concordi tutti i Lincei. Il Ministro della Pubblica Istruzione, del tempo, invitato a parte-

(1) Presentata nella seduta del 7 aprile 1929.

cipare ad un'impresa intesa ad onorare un illustre membro della grande Famiglia universitaria e a favorire la coltura nazionale, si affrettò ad aderirvi, conferendo a chi scrive l'alto onore di rappresentarlo in seno alla Commissione delegata a dirigere la progettata pubblicazione.

I volumi oggi offerti in omaggio all'Accademia mostrano che il compito ad essi affidato è ormai felicemente esaurito. Tutti i lavori a carattere scientifico di Francesco Siacci, tutti senza alcuna eccezione, sono ivi riprodotti con diplomatica fedeltà, cosicchè nulla è attualmente più agevole del misurare l'ampiezza del campo da lui trionfalmente percorso e l'orma che Egli vi ha impresso e il seguire l'evoluzione cronologica del suo pensiero.

In Lui riesce malagevole fare una schietta distinzione fra l'ufficiale preoccupato di somministrare ai propri dipendenti mezzi di calcolo di facile applicazione, dall'investigatore, intento ad allargare i confini del nostro sapere. Perciò a stretto rigore una distinzione fra le pubblicazioni relative alla Balistica e quelle di scienza pura riesce malagevole e malsicura. Tuttavia, onde addivenire a un'equa ripartizione del lavoro assegnato fra i membri della Commissione editrice, si riunirono in un volume (ripartito in due parti) gli *Scritti* di carattere militare — esclusi i trattati, le tavole di tiro o simili — e la revisione di essi venne affidata al Tenente Generale Ettore Cavalli, presidente di detta Commissione ed eminente cultore di scienze militari. In altro volume furono adunate le memorie esclusivamente teoriche, per cura di chi scrive: il quale non crede di tacere che, mentre alcuni dei lavori che ivi si leggono appaiono ormai superati dalla scienza nel suo incessante moto in avanti, altri presentansi ancora gravidi di utili ammaestramenti; si possono ad esempio citare a prova di questa osservazione le memorie sopra la misura delle altezze mediante il barometro o alla previsione del tempo, da cui si potrà trarre profitto ora che la navigazione aerea è divenuta veicolo di uso comune e ha fornito nuove armi a lotte fratricide.

Riunire in un « corpus » i lavori di un grande non è soltanto un omaggio alla sua memoria simile all'elevazione di una statua; ma è mezzo ad ogni altro superiore per assicurare alle sue idee un nuovo periodo di giovinezza feconda. Se, come è presumibile, la pubblicazione degli *Scritti scientifici* di Francesco Siacci offrirà una nuova conferma a questa osservazione generale, saranno largamente compensate le provvidenze finanziarie deliberate dal Governo Nazionale e le non lievi fatiche della Commissione editrice.

Astronomia. — *Ricerche sugli errori sistematici del Draper Catalogue.*
Nota del Corrisp. A. BEMPORAD e L. GENOVESE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia fisica. — *Sull'interpretazione del comportamento di Algol e sulla variabilità della velocità della luce.* Nota del Corrisp. M. LA ROSA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DAI SOCI

Matematica. — *Classificazione delle superficie dello spazio hilbertiano il cui spazio 2-tangente è a quattro dimensioni.* Nota I di A. TONOLO, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

I. *Preliminari.* — Lo scopo della presente ricerca è quello di esporre un criterio per classificare le superficie dello spazio hilbertiano che in ogni loro punto hanno lo spazio 2-tangente — che denoterò con σ_2 — di quattro dimensioni. A questo intento ho introdotto quattro sistemi covarianti simmetrici a due indici di classe 1 (sistemi di Ricci), che ho indicato con $a_{r,s}$, $x_{r,s}$, $y_{r,s}$, $c_{r,s}$, definiti come segue⁽²⁾: Sia

$$(1) \quad f = f(t, u_1, u_2)$$

l'equazione di una superficie V_2 dello spazio hilbertiano il cui σ_2 sia a quattro dimensioni. Chiamiamo g l'aggregato di variabilità della variabile t . Diciamo $f_{r,s}$ le derivate seconde covarianti della f rispetto alle variabili u_1, u_2 fatte con referenza alla forma, il cui discriminante denotiamo con a ,

$$(2) \quad \varphi = \sum_{r,s}^2 a_{r,s} du_r du_s$$

che dà il quadrato dell'elemento lineare di V_2 , essendo:

$$(3) \quad a_{r,s} = \int_g f_r f_s dt, \quad f_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}.$$

Indichiamo con τ e ν rispettivamente il piano tangente e il piano normale in σ_2 in un punto f di V_2 ; nel piano ν assumiamo due rette passanti per f ortogonali fra loro di parametri normali X, Y . Si ha:

$$(4) \quad f_{r,s} = x_{r,s} X + y_{r,s} Y,$$

(1) Nella seduta del 7 aprile 1929.

(2) Adopero le ultime notazioni del Vitali. Cfr. G. VITALI, *Lezioni di Geometria dello spazio hilbertiano*, in corso di stampa [Bologna, N. Zanichelli].

avendo posto

$$(5) \quad x_{r,s} = \int_{\mathcal{E}} X f_{r,s} dt, \quad y_{r,s} = \int Y f_{r,s} dt.$$

Poichè il σ_2 di V_2 è a quattro dimensioni, esisterà fra le derivate covarianti $f_{r,s}$ una ed una sola relazione, che noi scriviamo così:

$$(6) \quad \sum_1^2 c^{r,s} f_{r,s} = 0.$$

Sostituendo nella (6) al posto delle $f_{r,s}$ le (4), avremo:

$$(7) \quad \sum_1^2 c^{r,s} x_{r,s} = 0, \quad \sum_1^2 c^{r,s} y_{r,s} = 0.$$

Sono queste due relazioni tra le $c^{r,s}$ certamente distinte, perchè le $x_{r,s}$, $y_{r,s}$ non possono essere proporzionali fra loro ⁽¹⁾. Dal sistema (7) si traggono le $c^{r,s}$ a meno d'un fattore. Affinchè queste funzioni formino un sistema contravariante a due indici di classe 1, porremo:

$$c^{1,1} = \frac{1}{a\sqrt{a}} \begin{vmatrix} x_{2,2} & x_{1,2} \\ y_{2,2} & y_{1,2} \end{vmatrix}, \quad c^{1,2} = c^{2,1} = \frac{1}{2a\sqrt{a}} \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{2,2} \\ y_{1,1} & y_{2,2} \end{vmatrix}, \quad c^{2,2} = \frac{1}{a\sqrt{a}} \begin{vmatrix} x_{1,2} & x_{1,1} \\ y_{1,2} & y_{1,1} \end{vmatrix}.$$

Facciamo ora le seguenti posizioni:

$$(8) \quad c_{1,1} = ac^{2,2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{vmatrix} x_{1,2} & x_{1,1} \\ y_{1,2} & y_{1,1} \end{vmatrix}, \quad c_{1,2} = c_{2,1} = -ac^{1,2} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \begin{vmatrix} x_{2,2} & x_{1,2} \\ y_{2,2} & y_{1,2} \end{vmatrix},$$

$$c_{2,2} = ac^{1,1} = \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{vmatrix} x_{2,2} & x_{1,2} \\ y_{2,2} & y_{1,2} \end{vmatrix}.$$

Queste funzioni $c_{r,s}$ costituiscono un sistema covariante simmetrico a due indici di classe 1. Le formule (3), (5), (8) definiscono i quattro sistemi $a_{r,s}$, $x_{r,s}$, $y_{r,s}$, $c_{r,s}$ di cui si è fatto parola in precedenza. Con essi ho formato la matrice

$$(9) \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{2,2} \\ x_{1,1} & x_{1,2} & x_{2,2} \\ y_{1,1} & y_{1,2} & y_{2,2} \\ c_{1,1} & c_{1,2} & c_{2,2} \end{vmatrix},$$

(1) Infatti, se lo fossero, avendosi allora $y_{r,s} = \rho x_{r,s}$, le equazioni (4) darebbero

$$f_{r,s} = x_{r,s}(X + \rho Y),$$

e perciò le direzioni individuate da $f_{1,1}$, $f_{1,2}$, $f_{2,2}$ coinciderebbero con l'unica direzione $X + \rho Y$; il σ_2 di V_2 non sarebbe pertanto di quattro dimensioni.

dalla quale ho ricavato i quattro minori del terzo ordine

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{2,2} \\ x_{1,1} & x_{1,2} & x_{2,2} \\ y_{1,1} & y_{1,2} & y_{2,2} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{2,2} \\ y_{1,1} & y_{1,2} & y_{2,2} \\ c_{1,1} & c_{1,2} & c_{2,2} \end{vmatrix}, \\ \\ \Delta_x = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{2,2} \\ x_{1,1} & x_{1,2} & x_{2,2} \\ c_{1,1} & c_{1,2} & c_{2,2} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{2,2} \\ y_{1,1} & y_{1,2} & y_{2,2} \\ c_{1,1} & c_{1,2} & c_{2,2} \end{vmatrix}. \end{array} \right.$$

Nella presente classificazione, le superficie qui considerate vengono divise in tre classi, a seconda che:

Classe *A*) $D \neq 0, \Delta \neq 0$;

Classe *B*) $D \neq 0, \Delta = 0$;

Classe *C*) $D = 0, \Delta \neq 0$.

Ho dimostrato che non esistono superficie nelle quali si ha $D = 0, \Delta = 0$. Ho poi suddiviso le superficie della classe *A*) in tre categorie, a seconda che:

Categoria a_1) $\Delta_x \neq 0, \Delta_y \neq 0$;

Categoria a_2) $\Delta_x \neq 0, \Delta_y = 0 (\Delta_x = 0, \Delta_y \neq 0)$;

Categoria a_3) $\Delta_x = 0, \Delta_y = 0$.

Nelle superficie della classe *B*) si ha per necessaria conseguenza che uno ed uno solo dei minori Δ_x, Δ_y deve essere nullo. Nelle superficie della classe *C*) i due suddetti minori non possono essere nulli entrambi, cosicchè le superficie di questa classe si dividono in due categorie, a seconda che:

Categoria c_1) $\Delta_x \neq 0, \Delta_y \neq 0$;

Categoria c_2) $\Delta_x \neq 0, \Delta_y = 0 (\Delta_x = 0, \Delta_y \neq 0)$.

Ho fatto vedere che alla classe *A*) appartengono le superficie minime, anzi la categoria a_3) è formata soltanto di queste superficie; appartengono alla classe *B*) le superficie rigate (s'intende col σ_2 a quattro dimensioni), e alla classe *C*) le superficie di traslazione, purchè le due curve generatrici (non rette), γ siano situate in due spazi lineari tali, che ogni direzione dell'uno sia perpendicolare ad ogni direzione dell'altro.

Per le superficie delle classi *A*) e *B*), esiste nel piano normale una ellisse, già considerata in un'altra mia ricerca, tale che ad ogni tipo di tali superficie γ , corrisponde in essa una proprietà geometrica caratteristica. Per le superficie della classe *C*), questa ellisse si riduce ad un segmento di retta, la quale non è parallela o lo è ad un asse coordinato, a seconda che la superficie appartiene alla categoria c_1), oppure alla categoria c_2).

2. *Dimostrazione di alcuni lemmi.* — A fondamento delle mie ricerche stanno alcuni lemmi che ora andiamo a dimostrare:

Poniamo intanto:

$$(11) \quad \begin{cases} a^{1,1} = \frac{a_{2,2}}{a} & , & a^{1,2} = a^{2,1} = -\frac{a_{1,2}}{a} & , & a^{2,2} = \frac{a_{1,1}}{a} ; \\ x^{1,1} = \frac{x_{2,2}}{a} & , & x^{1,2} = x^{2,1} = -\frac{x_{1,2}}{a} & , & x^{2,2} = \frac{x_{1,1}}{a} ; \\ y^{1,1} = \frac{y_{2,2}}{a} & , & y^{1,2} = y^{2,1} = -\frac{y_{1,2}}{a} & , & y^{2,2} = \frac{y_{1,1}}{a} . \end{cases}$$

I tre sistemi $a^{r,s}$, $x^{r,s}$, $y^{r,s}$ formano tre sistemi simmetrici contravarianti a due indici di classe 1 (sistemi di Ricci). Indicando con $h_{1,1}$, $h_{1,2}$ = $= h_{2,1}$, $h_{2,2}$; $k_{1,1}$, $k_{1,2}$ = $= k_{2,1}$, $k_{2,2}$ due gruppi di quantità distinti o coincidenti, noi porremo:

$$(h, k) = h_{1,1} k_{2,2} - 2 h_{1,2} k_{1,2} + h_{2,2} k_{1,1} ,$$

d'onde, in particolare,

$$(h, h) = 2 (h_{1,1} h_{2,2} - h_{1,2}^2) .$$

Avvertiamo che la coppia di normali del piano v di parametri normali X, Y già considerata nei « preliminari » è scelta *principale*, secondo il recente criterio del Vitali, tale cioè che si ha per essa

$$(12) \quad (x, y) = 0 .$$

Ciò premesso, abbiamo il seguente

LEMMA I: *Nelle superficie V_2 non può aversi*

$$(x, x) = (y, y) = 0 .$$

Surrogiamo infatti le (4) nelle espressioni

$$(13) \quad \sum_{r,s}^2 x^{r,s} f_{r,s} \quad , \quad \sum_{r,s}^2 y^{r,s} f_{r,s} .$$

Si trova, per la (12),

$$(14) \quad \sum_{r,s}^2 x^{r,s} f_{r,s} = \frac{(x, x)}{a} X \quad , \quad \sum_{r,s}^2 y^{r,s} f_{r,s} = \frac{(y, y)}{a} Y .$$

Se hanno luogo le identità $(x, x) = (y, y) = 0$, le (13) risulterebbero nulle, e poichè non c'è proporzionalità fra le $x^{r,s}$, $y^{r,s}$, le $f_{r,s}$ sarebbero vincolate da due distinte relazioni lineari. E per le superficie prese qui in esame, questo non può accadere.

LEMMA II: *Nelle superficie V_2 non può aversi*

$$(a, x) = (x, x) = 0 \quad [(a, y) = (y, y) = 0] .$$

Infatti, se $x_{1,2} = 0$, sarà $x_{1,1}$, oppure $x_{2,2}$ nullo: sia $x_{1,1} \neq 0$, $x_{2,2} = 0$. La $(a, x) = 0$, dà allora $a_{2,2} x_{1,1} = 0$, perciò $a_{2,2} = 0$, il che non può accadere. Se $x_{1,2} \neq 0$, poniamo $\frac{x_{1,1}}{x_{1,2}} = \frac{x_{1,2}}{x_{2,2}} = t$, e dividiamo l'identità $(a, x) = 0$ per $x_{1,2}$. Si ricava

$$a_{2,2} t^2 - 2 a_{1,2} t + a_{1,1} = 0;$$

relazione che non può sussistere per nessun valore reale di t , perchè $a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2$ è positivo.

LEMMA III: *Hanno luogo le identità:*

$$(15) \Delta = -\frac{(x, x)(y, y)}{2\sqrt{a}}, \quad \Delta_x = -\frac{(x, x)(a, y)}{2\sqrt{a}}, \quad \Delta_y = -\frac{(y, y)(a, x)}{2\sqrt{a}}.$$

Dimostriamo la prima. Eseguiamo il prodotto delle due matrici

$$M = \begin{vmatrix} x_{1,1} & -2x_{1,2} & x_{2,2} \\ y_{1,1} & -2y_{1,2} & y_{2,2} \end{vmatrix}, \quad N = \begin{vmatrix} x_{2,2} & x_{1,2} & x_{1,1} \\ y_{2,2} & y_{1,2} & y_{1,1} \end{vmatrix}.$$

Si trae, eseguendo il prodotto per righe, e in forza della (12),

$$(16) \quad M \cdot N = (x, x)(y, y).$$

D'altra parte, è pure

$$(17) \quad MN = -2 \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ y_{1,1} & y_{1,2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{2,2} & x_{1,2} \\ y_{2,2} & y_{1,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{2,2} \\ y_{1,1} & y_{2,2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{2,2} & x_{1,1} \\ y_{2,2} & y_{1,1} \end{vmatrix} - \\ - 2 \begin{vmatrix} x_{1,2} & x_{2,2} \\ y_{1,2} & y_{2,2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{1,2} & x_{1,1} \\ y_{1,2} & y_{1,1} \end{vmatrix}.$$

Ma per le posizioni (8), il secondo membro della (17) vale

$$2a(c, c),$$

od anche

$$-2\sqrt{a} \Delta.$$

Dal confronto della (16) con la

$$MN = -2\sqrt{a} \Delta,$$

segue l'identità che si voleva provare.

Analoghe dimostrazioni per le altre due identità.

Calcolo funzionale. — *Le equazioni funzionali lineari nel campo complesso.* Nota di L. FANTAPPIÈ, presentata ⁽¹⁾ dal Socio V. VOLTERRA.

1. In Note precedenti ⁽²⁾ abbiamo mostrato l'importanza che ha il cosiddetto *nucleo associato* $\Gamma(\lambda; \zeta, \alpha)$ di una funzione $k(\zeta, \alpha)$, definito dalla serie

$$(1) \quad \Gamma(\lambda; \zeta, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \tilde{k}^n(\zeta, \alpha)$$

per la costruzione della matrice (infinita) $f(A)$, funzione di un'altra matrice (infinita) A . Se infatti è $k(\zeta, \alpha)$ la funzione di due variabili *coordinata* alla matrice A , la funzione $b(\zeta, \alpha)$, *coordinata* alla matrice $f(A)$ (funzione di composizione di k), è data semplicemente dal prodotto funzionale simmetrico

$$(2) \quad b(\zeta, \alpha) = f(\tilde{k}) = f(\tilde{\lambda}) \Gamma(\tilde{\lambda}; \zeta, \alpha).$$

Possiamo dunque considerare come completamente risoluto il problema della costruzione di tutte le matrici (infinite) $f(A)$, qualunque sia la funzione f , quando si sia costruito il nucleo associato Γ della funzione k .

2. Vediamo ora come il nucleo associato sia anche lo strumento fondamentale per la risoluzione della più generale equazione funzionale lineare (nel campo analitico). Una tale equazione ha la forma generale

$$(3) \quad F[y(t); \zeta] = f(\zeta)$$

in cui F è un funzionale analico lineare, $f(\zeta)$ una funzione nota, $y(t)$ la funzione incognita. Il problema della risoluzione di questa equazione, cioè della determinazione di $y(t)$, coincide dunque col problema della *inversione di un funzionale lineare misto* F . È da notare l'estrema generalità dell'equazione funzionale (3), che contiene come casi particolari tutte le equazioni funzionali lineari finora considerate. Particolarizzando il tipo del funzionale F si ottengono infatti le equazioni integrali di Fredholm e di Volterra, le equazioni differenziali lineari, le equazioni lineari alle differenze finite e quelle più generali considerate da Leau e Flamant, nonché l'equazione omogenea di Schröder (in cui $f(\zeta) = 0$), che si riconnette strettamente col problema della iterazione delle funzioni.

(1) Nella seduta del 7 aprile 1929.

(2) Gli operatori funzionali e il calcolo delle matrici infinite nella teoria dei quanti, vol. VIII, s. 6°, 2° sem., 1928 e vol. IX, s. 6°, 1° sem., 1929.

Anzitutto possiamo scrivere l'equazione (3) nella forma seguente

$$(4) \quad y(\zeta) = f(\zeta) + y(\zeta) - F[y(t); \zeta]$$

e poichè l'espressione

$$y(\zeta) - F[y(t); \zeta] = G[y(t); \zeta]$$

è ancora un funzionale analitico *lineare* della y come F , indicando con $k(\zeta, t)$ l'*indicatrice simmetrica* di G , avremo

$$G[y(t); \zeta] = k(\zeta, t) y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C k(\zeta, t) \frac{y\left(\frac{1}{t}\right)}{t} dt$$

ove

$$k(\zeta, \alpha) = G\left[\frac{1}{1 - t\alpha}; \zeta\right]$$

e C è una *curva separatrice* di $\frac{y\left(\frac{1}{t}\right)}{t}$ e $k(\zeta, t)$ (v. le Note citate).

Con ciò, introducendo un parametro λ , avremo l'equazione

$$(5) \quad y(\zeta) = f(\zeta) + \lambda k(\zeta, t) y(t)$$

che, per $\lambda = 1$, coincide con la (4) e quindi con la (3). Ogni equazione funzionale lineare si può dunque sempre porre, in modo *unico*, sotto la forma (5), che diremo la *forma canonica* dell'equazione.

In essa, oltre il *termine noto* $f(\zeta)$, è da notare la funzione di due variabili $k(\zeta, t)$, che si dice il *nucleo* dell'equazione stessa (tutte le funzioni che si considerano si suppongono, naturalmente, *analitiche*).

3. Per risolvere la più generale equazione funzionale lineare, ridotta alla forma canonica (5), seguiremo un metodo perfettamente analogo a quello di Fredholm, sostituendo al *prodotto di composizione* di 2^a specie di due funzioni $k(x, y)$, $h(x, y)$, definito nel campo reale dal prof. Volterra ⁽¹⁾, il *prodotto di composizione simmetrica* di due funzioni (analitiche) $k(\zeta, \alpha)$, $h(\zeta, \alpha)$, considerato nelle Note citate.

Oltre al *nucleo associato* $\Gamma(\lambda; \zeta, \alpha)$, definito come quella funzione, se esiste, che nell'intorno di $\lambda = 0$ ammette lo sviluppo (1), definiremo il *nucleo risolvete* $\rho(\lambda; \zeta, \alpha)$, dello stesso nucleo $k(\zeta, \alpha)$, mediante l'espressione

$$(6) \quad \rho(\lambda; \zeta, \alpha) = \frac{1}{\lambda} \left\{ \Gamma(\lambda; \zeta, \alpha) - \frac{1}{1 - \zeta\alpha} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \bar{k}^n(\zeta, \alpha)$$

$$(6') \quad \Gamma(\lambda; \zeta, \alpha) = \frac{1}{1 - \zeta\alpha} + \lambda \rho(\lambda; \zeta, \alpha).$$

(1) V. VOLTERRA et J. PÉRÈS, *Leçons sur la composition*, Coll. Borel, Gauthier-Villars, Paris, 1924.

L'esistenza del nucleo associato porta di conseguenza quella del nucleo risolvante e viceversa; in questa ipotesi dall'espressione per serie (6) del nucleo risolvante si hanno le relazioni fondamentali

$$(7) \quad \rho(\lambda; \zeta, \alpha) = k(\zeta, \alpha) + \lambda \rho(\lambda; \zeta, i) k(i, \alpha)$$

$$(8) \quad \rho(\lambda; \zeta, \alpha) = k(\zeta, \alpha) + \lambda k(\zeta, i) \rho(\lambda, i, \alpha).$$

Da queste segue immediatamente, supposti eseguibili i prodotti simmetrici, la risoluzione dell'equazione generale (5) nella forma

$$(9) \quad y(\zeta) = f(\zeta) + \lambda \rho(\lambda; \zeta, i) f(i)$$

o, usando il nucleo associato,

$$(10) \quad y(\zeta) = \Gamma(\lambda; \zeta, i) f(i).$$

Queste formule risolutive valgono però solo nel caso che il valore del parametro λ non sia singolare per il nucleo risolvante o il nucleo associato, e se inoltre, per ζ generico, questi nuclei non hanno, come funzioni di t , punti singolari reciproci di quelli di $f(t)$. Se queste condizioni sono soddisfatte, ma detti nuclei, o il termine noto $f(t)$, sono *funzioni polidrome*, il prodotto simmetrico (10) potrà avere più valori, e quindi potranno esistere *più soluzioni* $y(\zeta)$ dell'equazione (5).

4. Volendo effettivamente costruire il nucleo risolvante di un nucleo dato $k(\zeta, \alpha)$, supponiamo dapprima che questo sia *completamente regolare* nell'intorno dell'origine, sia cioè olomorfo per ζ, α variabili comunque entro un cerchio con centro nell'origine e raggio R maggiore di 1, cioè per

$$(11) \quad |\zeta| \leq R \quad |\alpha| \leq R.$$

In questo campo di variabilità il nucleo $k(\zeta, \alpha)$ si manterrà allora limitato in modulo, cioè

$$(12) \quad |k(\zeta, \alpha)| \leq M.$$

D'altra parte la sua *traccia* $k(\overset{\circ}{\zeta}, \overset{\circ}{\zeta}) = P[k(\zeta, \alpha)]$ (o, per meglio dire una delle determinazioni, quella che si dirà la *determinazione principale*) potrà in queste ipotesi calcolarsi colla formula (v. Note citate)

$$(13) \quad k(\overset{\circ}{\zeta}, \overset{\circ}{\zeta}) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\zeta} k\left(\zeta, \frac{1}{\zeta}\right) d\zeta = P[k(\zeta, \alpha)]$$

essendo C il circolo con centro nell'origine e raggio 1, quindi, dalla (12), avremo in conseguenza

$$(14) \quad |k(\overset{\circ}{\zeta}, \overset{\circ}{\zeta})| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi M \quad , \quad |k(\overset{\circ}{\zeta}, \overset{\circ}{\alpha})| \leq M.$$

soddisferà, per la (19) e la (14), alla disuguaglianza $|I_n| \leq M^n \sqrt{n^n}$ e quindi la serie

$$(21) \quad D(\lambda) = 1 - \lambda I_1 + \frac{\lambda^2}{2!} I_2 \dots + \frac{(-\lambda)^n}{n!} I_n + \dots$$

convergerà per ogni valore finito di λ , sarà cioè una trascendente intera in λ , dipendente inoltre dal nucleo $k(\lambda, \alpha)$.

Questa serie (21), funzionale analitico di $k(\lambda, \alpha)$, definito, per ora, per ogni $k(\lambda, \alpha)$ completamente regolare, si dirà il *funzionale determinante* di $k(\lambda, \alpha)$, e s'indicherà anche col simbolo $D[k(\lambda, \alpha); \lambda]$.

Per $|\lambda| < \frac{1}{M}$, consideriamo ora la serie convergente

$$(22) \quad D(\lambda; \lambda, \alpha) = \rho(\lambda; \lambda, \alpha) D(\lambda) = k(\lambda, \alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} c_n(\lambda, \alpha).$$

Si trova che i coefficienti $c_n(\lambda, \alpha)$ sono dati da

$$(23) \quad c_n(\lambda, \alpha) = k \left(\begin{matrix} \lambda, \hat{i}_1, \hat{i}_2, \dots, \hat{i}_n \\ \alpha, \hat{i}_1, \hat{i}_2, \dots, \hat{i}_n \end{matrix} \right)$$

e quindi, per λ, α entro il cerchio (11), a causa della (19) e (14) soddisferanno anch'essi alla disuguaglianza $|c_n(\lambda, \alpha)| \leq M^{n+1} \sqrt{(n+1)^{n+1}}$. Segue di qui che anche $D(\lambda; \lambda, \alpha)$ è una trascendente intera in λ , e il nucleo risolvente

$$(24) \quad \rho(\lambda; \lambda, \alpha) = \frac{D(\lambda; \lambda, \alpha)}{D(\lambda)}$$

essendo il quoziente di due trascendenti intere in λ , è una *funzione meromorfa* di λ , con poli fissi, indipendenti da λ e α , nelle radici $\lambda = \lambda_r$ di $D(\lambda)$. Queste radici λ_r si diranno gli *autovalori* del nucleo $k(\lambda, \alpha)$, o dell'equazione (5).

Vediamo così che, nell'ipotesi di un nucleo $k(\lambda, \alpha)$ completamente regolare, l'equazione funzionale (5) è risolubile colla formula (9), non solo per $|\lambda| < \frac{1}{M}$, ma per λ qualunque, purchè diverso dagli autovalori. Per $\lambda = \lambda_r$, si potrebbero sviluppare considerazioni in tutto analoghe a quelle classiche di Fredholm per le equazioni integrali nel campo reale.

6. Osserviamo infine che tutti i nostri calcoli seguitaranno a valere anche nel caso limite che $k(\lambda, \alpha)$ sia continua e limitata per λ, α in modulo ≤ 1 ; ipotesi che è certo verificata se la serie doppia

$$(25) \quad k(\lambda, \alpha) = \sum_{m,n}^{\infty} a_{mn} \lambda^m \alpha^n$$

è assolutamente convergente per $\alpha = 1$, cioè se è assolutamente convergente la serie $\sum_{m,n}^{\infty} a_{mn}$. Ritroviamo così, come caso particolare della teoria generale (per $a_{mn} = 0$), un teorema di Poincaré⁽¹⁾, che in detta ipotesi assicura la convergenza del determinante infinito

$$(26) \quad \begin{vmatrix} 1 & , & -\lambda a_{01} & , & \dots \\ -\lambda a_{10} & , & 1 & , & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = D(\lambda)$$

il quale risulta proprio uguale al *funzionale determinante* da noi definito colla formula (21).

7. Se il nucleo dell'equazione (5) non è completamente regolare, ma è regolare nell'intorno di $\alpha = \alpha_0$, $\alpha = \alpha_0$, posto

$$(27) \quad k(\alpha, \alpha; \varepsilon) = k(\alpha_0 + \varepsilon(\alpha - \alpha_0), \alpha_0 + \varepsilon(\alpha - \alpha_0))$$

questo nucleo coincide col nucleo dato, per $\varepsilon = 1$, mentre è completamente regolare per $|\varepsilon|$ abbastanza piccolo. Ottenuto allora il nucleo risolvete per questi valori di ε (funzione analitica di ε), basterà poi prolungarlo analiticamente fino al valore $\varepsilon = 1$, per applicare infine ancora la formula risolutiva (9).

Matematica. — *Alcune applicazioni della teoria della decomposizione delle espressioni differenziali lineari e omogenee allo studio delle equazioni differenziali lineari omogenee.* Nota di G. MAMMANA, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. G. SCORZA.

II. Assegnata l'equazione:

$$(1) \quad L[u] \equiv u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + p_2 u^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} u' + p_n u = 0$$

ho mostrato, in una Nota precedente⁽³⁾, come sia sempre possibile la determinazione di n integrali indipendenti: u_1, u_2, \dots, u_n ; tali che la enneupla di soluzioni della stessa (1):

$$(2) \quad \omega = u_1 + i u_n; u_2, u_3, \dots, u_n$$

(1) H. POINCARÉ, « Bulletin de la Société Mathém. de France », t. 14, 1886.

(2) Nella seduta del 17 marzo 1929.

(3) Questi « Rendiconti », *La decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in fattori simbolici del primo ordine*, vol. IX, 1929, p. 538.

ammetta catena completa di wronskiani,

$$W_0; W_1; W_2; \dots; W_n \equiv W$$

mai nulla in (a, b) .

Alla (1), quindi, potremo dare la seguente forma:

$$(3) \quad L[u] = \left(\frac{d}{dx} - D \lg \frac{W_n}{W_{n-1}} \right) \left(\frac{d}{dx} - D \lg \frac{W_{n-1}}{W_{n-2}} \right) \dots \left(\frac{d}{dx} - D \lg \frac{W_1}{W_0} \right) u = 0$$

e al relativo integrale generale, conseguentemente, l'altra:

$$(4) \quad U = \frac{W_1}{W_0} \int^x \frac{W_2 W_0}{W_1^2} dx \int^x \frac{W_3 W_1}{W_2^2} dx \dots \\ \dots \int^x \frac{W_{n-1} W_{n-2}}{W_{n-2}^2} dx \int^x \frac{W_n W_{n-1}}{W_{n-1}^2} dx.$$

Dalla (4) ricaviamo, detto c un qualsivoglia punto di (a, b) che: le n funzioni:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_1 = \frac{W_1}{W_0} \quad , \quad U_2 = \frac{W_1}{W_0} \int_c^x \frac{W_2 W_0}{W_1^2} dx \quad , \\ U_3 = \frac{W_1}{W_0} \int_c^x \frac{W_2 W_0}{W_1^2} dx \int_c^x \frac{W_3 W_1}{W_2^2} dx \dots \\ U_n = \frac{W_1}{W_0} \int_c^x \frac{W_2 W_0}{W_1^2} dx \int_c^x \frac{W_3 W_1}{W_2^2} dx \dots \int_c^x \frac{W_n W_{n-1}}{W_{n-1}^2} dx, \end{array} \right.$$

costituiscono un sistema fondamentale di integrali della (1), e precisamente il sistema per cui:

$$u_1(x) \neq 0 \quad ; \quad u_2(c) = 0 \quad , \quad u_2'(c) \neq 0 \quad ; \quad u_3(c) = u_3'(c) = 0 \quad , \\ u_3''(c) \neq 0; \dots u_n(c) = u_n'(c) = u_n''(c) \dots u_n^{(n-2)}(c) = 0 \quad , \quad u_n^{(n-1)}(c) \neq 0.$$

Gli integrali determinati dalle (5) sono complessi, la parte reale e il coefficiente dell'immaginario di ciascuno di essi, costituiscono sempre soluzioni della (1). Ora la soluzione U_n , contenuta nelle (5), è l'integrale di (1) nullo in c con le sue prime $n-2$ derivate; la sua parte reale, quindi, e il relativo coefficiente dell'immaginario, vengono a costituire due integrali reali di (1), nulli in c insieme alle loro prime $(n-2)$ derivate. Ma due tali integrali di (1), differiscono fra loro, al più per un fattore costante, ne segue: la formula che nelle (5) da U_n , rappresenta a meno di un fattore costante complesso, l'integrale reale della (1) nullo in c con le sue prime $(n-2)$ derivate:

Se nella (3), uguagliamo a zero i primi i fattori a cominciare dalla destra, otterremo una equazione lineare di ordine i omogenea e di tipo normale, della quale un sistema fondamentale di integrali è costituito dalle soluzioni della (1), $\omega = u_1 + iu_n, u_2, u_3, \dots u_i$. La parte reale del primo membro di questa equazione, eguagliata a zero, dà luogo a una equazione di ordine i di tipo normale a coefficienti reali di cui $u_2; u_3; \dots u_i$; sono $i - 1$ soluzioni indipendenti. Si dimostra che una i -esima soluzione di essa, indipendente dalle $i - 1$ menzionate non è soluzione della (1). In particolare avremo che: $\omega = u_1 + iu_n$, e u_2 sono soluzioni di una equazione del secondo ordine di tipo normale, e u_2 perciò soluzione di una equazione del secondo ordine di tipo normale a coefficienti reali. Potremo quindi enunciare l'importante risultato:

Esistono per la più generale equazione di ordine n , omogenea e di tipo normale, infiniti integrali che sono soluzioni di equazioni del secondo ordine, e però a carattere generalmente oscillatorio. Essi integrali si esprimono sotto forma di prodotti di un esponenziale per il seno di una funzione crescente. Preciseremo più avanti il caso in cui una equazione come la (1) non ammetta soluzioni a tipo oscillatorio.

Perchè il primo membro della (1), sia suscettibile di una decomposizione del tipo indicato nella (3), e al relativo integrale si possa, quindi, dare la conseguente forma (4), occorre e basta stabilire l'esistenza di un sistema integrale $U_1, U_2; \dots; U_n$; che ammetta catena di wronskiani mai nulli in (a, b) . È naturale chiederci se per la più generale equazione come la (1), un tale sistema, che esiste sempre, sia formato da elementi tutti reali.

In generale si può asserire che per una equazione generica, un sistema integrale reale che ammetta catena di wronskiani mai nulla in (a, b) , non esiste e quindi, in generale, non è possibile decomporre in fattori tutti reali il primo membro di una equazione lineare omogenea e di ordine n . Sussiste in proposito il

TEOREMA I. — *Condizione necessaria e sufficiente affinché il primo membro di una equazione di ordine n , e di tipo normale, sia decomponibile nel prodotto simbolico di n fattori del primo ordine di tipo normale e REALI, si è che ogni integrale di essa si annulli $n - 1$ volte al più in tutto l'intervallo (a, b) in cui ne sono definiti i coefficienti.*

A questa condizione possiamo sostituire l'altra:

Condizione necessaria, e sufficiente perchè il primo membro della equazione (1) sia decomponibile nel prodotto di n fattori del primo ordine reali, si è che l'integrale nullo in un punto con le sue prime $n - 2$ derivate non sia ulteriormente nullo in tutto l'intervallo.

In questa ipotesi, per la (1) esisteranno n integrali indipendenti reali dotati di catena completa di wronskiani $W_0; W_1; \dots; W_n$; mai nulla in tutto (a, b) .

Deduciamo per la (5) allora: Esistono n integrali della (1) indipendenti e mai nulli in tutto (a, b) ; rappresentabili, conseguentemente mediante

funzioni esponenziali. Ma c'è di più. A una tale enneupla di esponenziali, possiamo dare la forma seguente:

$$e^{\eta_1}, e^{\eta_1} e^{\eta_2}; e^{\eta_1} e^{\eta_3}; e^{\eta_1} e^{\eta_4}$$

dove η_1 è reale e continua in tutto (a, b) e $\eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n$ sono ivi reali continue e monotone *crescenti*.

Una tale equazione ha, dunque, comportamento perfettamente simile a quello di equazione a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica ammette radici tutte reali.

In ogni altra ipotesi per l'equazione (1) esistono integrali a tipo oscillatorio (soluzioni cioè di equazioni del secondo ordine) ed espresse quindi da funzioni del tipo:

$$e^n \sin \xi$$

dove ξ è monotona in tutto (a, b) e ha ivi una oscillazione maggiore $n\pi$.

Le (5) si prestano bene per lo studio relativo all'andamento degli integrali di una equazione come la (1), in intervalli (α, β) contenuti in (a, b) , da cui, poi si potrà dedurre del medesimo andamento in tutto (a, b) . Diamo qui un breve saggio di quanto affermiamo applicando le nostre considerazioni a una equazione del terzo ordine del tipo della (1).

Rappresentino U_1 e U_2 due integrali di una equazione del terzo ordine indipendenti. Il wronskiano W_2 di essi, in (a, b) si annulla, si dimostra, un numero finito m di volte: diciamo (α, β) un tratto dell'intervallo (a, b) in cui W_2 si conserva diverso da zero. In questo intervallo U_1 avrà un numero finito n di zeri, U_2 ivi ne ammetterà $n+1$ al più e gli zeri di quest'ultimo integrale separano quelli di U_1 , chè, essendo W_2 mai nullo in (α, β) , U_1 e U_2 costituiscono sistema fondamentale per una equazione del secondo ordine di tipo normale. Possiamo supporre il wronskiano della nostra equazione costante e uguale a uno. Siano ora c_1 e c_2 due zeri consecutivi di U_1 contenuti in (α, β) , e c un qualsivoglia punto interno all'intervallo (c_1, c_2) . Si avrà $u'_1(c_1) \neq 0$ e $u'_1(c_2) \neq 0$, e i segni di queste due derivate in c_1 e c_2 contrari. Per fissare le idee supporremo $u'_1(c_1) > 0$,

$u'_1(c_2) < 0$. La funzione $u_3 = u_1 \int_c^x \frac{W_2}{u_1^2} dx \int_c^x \frac{u_1}{W_2^2} dx$, nel tratto (c_1, c_2) ,

gli estremi esclusi, rappresenta l'integrale della equazione considerata, nulla o in c insieme alla sua derivata prima (integrale determinato a meno di un fattore costante). Ora la funzione: $\int_c^x \frac{u_1}{W_2} dx$, nel tratto (c_1, c_2) è monotona crescente, nulla in c , e però: negativa in c_1 , positiva in c_2 .

Consideriamo l'altra $\varphi = \frac{W_2}{u_1^2} \int_c^x \frac{u_1}{W_2^2} dx$, sempre in (c_1, c_2) , essa in c

è nulla, a sinistra di c sempre negativa, a destra positiva (U_2 essendo di-

verso da zero in (c_1, c_2) possiamo supporlo, per fissare le idee ivi sempre positivo) essa poi è continua, e ammette limiti determinati e in c_1 e in c_2 .

Si ha precisamente

$$\lim_{x \rightarrow c_1} \varphi = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow c_2} \varphi = +\infty.$$

L'integrale $u_3 = u_1 \int_c^x \varphi dx$, in ogni intervallo $(c_1 + \varepsilon, c_2 + \varepsilon)$, interno a (c_1, c_2) , comunque piccola sia ε , è finito e continuo, nullo in c , con la sua prima derivata, e poi sempre positivo; si ha inoltre:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c_1} u_3 &= \lim_{x \rightarrow c_1} u_1 \int_c^x \frac{W_2}{u_1^2} dx \int_c^x \frac{u_1}{W_2} dx = \lim_{x \rightarrow c_1} \frac{\int_c^x \frac{W_2}{u_1^2} dx \int_c^x \frac{u_1}{W_2} dx}{\frac{1}{u_1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow c_1} \frac{W_2 \int_c^x \frac{u_1}{W_2} dx}{-u_1'} = \text{quantità finita maggiore di zero} \\ \lim_{x \rightarrow c_2} u_3 &= \lim_{x \rightarrow c_2} u_1 \int_c^x \frac{W_2}{u_1^2} dx \int_c^x \frac{u_1}{W_2} dx = \lim_{x \rightarrow c_2} \frac{\int_c^x \frac{W_2}{u_1^2} dx \int_c^x \frac{u_1}{W_2} dx}{\frac{1}{u_1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow c_2} \frac{W_2 \int_c^x \frac{u_1}{W_2} dx}{-u_1'} = \text{quantità finita maggiore di zero.} \end{aligned}$$

Segue: ogni integrale della equazione considerata, nullo in un punto di (c_1, c_2) con la sua derivata, non è ulteriormente nullo in (c_1, c_2) . Dal teorema I deduciamo allora: *Fra i due zeri c_1 e c_2 consecutivi di U_1 , ogni altro integrale della equazione considerata si annulla due volte al più.*

Un procedimento della stessa natura porterebbe a concludere che in un intervallo (α_1, α_2) , i cui estremi sono zeri consecutivi di $U_1 \cdot W_2$, ogni integrale della nostra equazione, si annulla due volte al più. Concludendo abbiamo: supposto che $c_1, c_2 \dots c_m$ rappresentino, in ordine di grandezza, gli zeri distinti di un integrale U_1 di una equazione del terzo ordine e del wronskiano W_2 di U_1 e di un altro integrale U_2 di essa: *Fra due punti c_i e c_{i+1} consecutivi, ogni altro integrale della considerata equazione si annulla due volte al più.*

In questa conclusione è contenuta la più generale estensione del teorema di Sturm relativo alla separazione degli zeri di due integrali di una equazione del secondo ordine.

Per le considerazioni di cui qui faremo brevissimo cenno, e che svilupperemo nella Memoria che seguirà questa Nota, ci limiteremo solo alle equazioni del terzo e del quarto ordine; tali considerazioni però sono suscettibili di estensione. Uno dei problemi più importanti da considerare nello studio delle equazioni lineari, è quello della ricerca dei teoremi di oscillazione ad esse relativi.

Per quelle del secondo ordine possiamo affermare⁽¹⁾ che: *sussiste un teorema di oscillazione se non è possibile decomporne il primo membro in fattori del primo ordine reali*⁽²⁾ Ad esempio non ammette teorema di oscillazione una equazione del tipo: $u'' + pu' - (\lambda q)^2 u = 0$, comunque si prendano p e q reali, λ essendo un parametro variabile. Sotto altra forma si può dire che *condizione necessaria e sufficiente perchè una equazione del secondo ordine non ammetta teorema di oscillazione, si è che l'integrale di essa nullo a un estremo non sia più ulteriormente nullo*.

Questo teorema si generalizza per le equazioni del terzo ordine come segue: *Condizione necessaria e sufficiente perchè una equazione del terzo ordine definita nell'intervallo (a, b) e che possiamo sempre porre sotto la forma:*

$$(6) \quad L[u] \equiv u''' + pu' + qu = 0,$$

non ammetta un teorema di oscillazione⁽³⁾, *si è che l'integrale di essa e della sua associata*

$$(7) \quad \mathcal{L}[\bar{u}] \equiv \bar{u}''' + p\bar{u}' + (p' - q)\bar{u} = 0$$

nullo ad un estremo per esempio a , non sia più ulteriormente nullo in (a, b) .

In particolare, se la (6) è autoaggiunta, e però coincidente con la (7), la condizione necessaria e sufficiente perchè manchi per essa un teorema di oscillazione, si è che, il suo integrale nullo in a insieme alla sua derivata non sia più nullo in tutto (a, b) . Ora, si trova che per le equazioni autoaggiunte del terzo ordine l'integrale nullo in un punto c di (a, b) , ove si annulli ulteriormente in un altro punto, ivi dovrà annullarsi pure la sua derivata; ne segue, in tale ipotesi, che affinchè la (6) non ammetta teorema di oscillazione occorre e basta che non abbia integrali bitangenti in due punti di (a, b) . Tale condizione è soddisfatta, ad esempio, per la (6), se $p < 0$ in tutto (a, b) e $p'' > 0$.

Ritornando al caso generale, nella ipotesi dell'autoaggiunzione per la (6), si dimostra che esiste per essa un integrale sempre diverso da zero in tutto

(1) Cfr. la Nota citata in principio nota 3.

(2) In generale per una equazione lineare sussiste un teorema di oscillazione quando il suo primo membro ammette un fattore del secondo ordine reale e non ulteriormente decomponibile in fattori del primo reali.

(3) Cioè, il numero degli zeri di ogni suo integrale non sia mai superiore a due.

(a, b) , e due integrali da quello indipendenti, a wronskiano mai nullo; ad essa, quindi, potremo dare le forme seguenti:

$$(8) \quad L[u] \equiv \left(\frac{d}{dx} + \alpha \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} + \beta \frac{d}{dx} + \gamma \right) u - \left(\frac{d^2}{dx^2} + \mu \frac{d}{dx} + \nu \right) \left(\frac{d}{dx} + \lambda \right) u = 0$$

le $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu, \lambda$ essendo reali e continue in (a, b) .

Una ulteriore decomposizione di $L[u]$ in fattori reali non è possibile in generale: sussiste, pertanto, in generale, un teorema di oscillazione relativo alla equazione considerata.

Un sistema fondamentale della (6) è, allora, rappresentabile mediante funzioni del tipo seguente:

$$(9) \quad u_1 = e^{\lambda \xi}; \quad u_2 = e^{\eta \xi} \cos \xi; \quad u_3 = e^{\eta \xi} \sin \xi$$

con ξ funzione monotona in tutto (a, b) , e λ e η reali e continue.

Si ha poi, sempre nell'ipotesi dell'autoaggiunzione il seguente:

TEOREMA. — *Fra due zeri consecutivi dell'integrale della (6) nullo in un punto c , di (a, b) , con la sua derivata, ogni altro integrale si annulla due volte al più.*

Alla (6) possiamo in caso più generale dare la forma (8), e rappresentarne, conseguentemente, un sistema fondamentale con funzioni del tipo (9). Per le equazioni del terzo ordine possiamo, dunque, in generale, stabilire un teorema di oscillazione. Relativamente alle equazioni del quarto ordine che possiamo in ogni caso mettere sotto la forma:

$$(10) \quad L[u] \equiv u^{IV} + pu'' + qu' + ru = 0$$

enuncieremo i seguenti risultati:

TEOREMA. — *Se l'integrale u_1 della (10) nullo con la sua derivata prima e seconda nell'estremo a dell'intervallo (a, b) in cui son definiti p, q ed r , non è più ulteriormente nullo, e se l'integrale della associata alla (10),*

$$(11) \quad \mathcal{L}[\bar{u}] \equiv \bar{u}^{IV} + p\bar{u}'' + (2p' - q)\bar{u}' + (p''q' + r)\bar{u} = 0$$

nullo in a con le sue derivate prima e seconda, non è più zero in (a, b) , il primo membro della (10) è suscettibile di decomposizione in tre fattori reali, due del primo ordine e uno del secondo; in generale, quest'ultimo, non ulteriormente decomponibile.

In particolare quindi se la (10) è autoaggiunta è se per essa l'integrale nullo in a insieme alle sue derivate prima, e seconda, non è più nullo in (a, b) si possono dare alla equazione (10), le forme seguenti:

$$(12) \quad L[u] \equiv \left(\frac{d}{dx} + \alpha \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda \frac{d}{dx} + \mu \right) \left(\frac{d}{dx} + \beta \right) u \equiv \\ \equiv \left(\frac{d}{dx} + \gamma \right) \left(\frac{d}{dx} + \delta \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} + \varphi \frac{d}{dx} + \psi \right) u = 0$$

nella quale le funzioni $\alpha, \lambda, \mu, \beta, \gamma, \delta, \varphi, \psi$, sono reali e continue in tutto (a, b) . La presenza nella (12) dei fattori del secondo ordine, non ulteriormente, in generale, suscettibili di decomposizione in *fattori reali*, porta a concludere come sia possibile stabilire teorema di oscillazione per equazioni del tipo considerato, relativi a integrali di essa, e a wronskiani del secondo ordine formati con integrali della medesima. A una condizione di questo genere soddisfa l'equazione considerata da Davidoglou⁽¹⁾. *Si dimostra*, invero, che per essa l'integrale nullo nell'estremo sinistro con le derivate prima e seconda non è più ulteriormente nullo.

A quattro integrali costituenti sistema fondamentale della (11), nell'ipotesi che per essa si verifichi la condizione stabilita dal teorema sopra enunciato, possiamo dare la forma seguente:

$$(12) \quad u_1 = e^{\eta_1} \quad , \quad u_2 = e^{\eta_1} \cdot e^{\eta_2} \quad , \quad u_3 = e^{\eta} \cos \xi \quad , \quad U_n = e^{\eta} \sin \xi$$

dove η e η_i sono continue e reali in tutto (a, b) e ξ e η_2 ivi anche monotone. La forma (12) è quella di un sistema fondamentale di una equazione del 4° ordine a coefficienti costanti la cui equazione caratteristica ammette due sole radici reali.

Ove per la (10) non si verifichino le condizioni del precedente teorema, ma, esistano per essa due integrali a wronskiano mai nullo, potremo decomporne il primo membro nel prodotto di due fattori del secondo ordine reali. Ora se la (10) è autoaggiunta, *si dimostra*, che i wronskiani del secondo ordine formati con quattro suoi integrali indipendenti sono soluzioni (indipendenti cinque di essi) di una equazione del quinto ordine di tipo normale, basterà quindi per constatare l'esistenza di due integrali a wronskiano non nullo per la (10) dimostrare l'esistenza di un integrale mai nullo per questa equazione di ordine dispari cinque.

A un sistema fondamentale della (10), in questa ultima ipotesi, si potrà dare la forma seguente

$$(13) \quad u_1 = e^{\eta} \cos \xi \quad , \quad u_2 = e^{\eta} \sin \xi \quad , \quad u_3 = e^{\lambda} \cos \mu \quad , \quad u_n = e^{\lambda} \sin \mu$$

η e λ essendo continue, e reali, e ξ e μ anche monotone.

Nella Memoria che seguirà daremo a questo argomento un ulteriore sviluppo e una maggiore estensione.

(1) Étude de l'équation différentielle $\frac{d^2}{dx^2} \theta \frac{d^2}{dx^2} u = kqu$, « Annales de l'école Normale Supérieure de Paris », t. 22, 1905.

Matematica. — *Derivazione di un tensore lungo una linea.*
Nota di PIA NALLI, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Quando per una varietà metrica V_n si sia pervenuti in un modo qualunque alle equazioni differenziali del parallelismo e si sia dimostrata la loro indipendenza dal sistema di coordinate, si dimostra facilmente che, fissata una linea L regolare, tutta interna alla varietà, preso su di questa un punto P , si può determinare sulla linea un arco che comprende all'interno P e fissare per la varietà un sistema di coordinate geodetiche in tutti i punti dell'arco. Basterà all'uopo estendere il procedimento da me dato per una varietà a tre dimensioni nella Nota *Sulle coordinate geodetiche* pubblicata lo scorso anno in questi « Rendiconti ».

Conseguentemente, per un notissimo teorema, si potrà dividere L in un numero finito di archi per ognuno dei quali si potranno fissare coordinate geodetiche lungo di esso.

Quando si ponga mente a questo, si può asserire che tutto quanto vari autori hanno scritto prendendo in considerazione un tensore lungo i punti di una linea, si riduce ad ovvie estensioni negli spazi euclidei di nozioni acquisite per lo spazio ordinario.

A questo proposito crederei utile far notare che il dire, come fa taluno, che il Calcolo del Ricci opera sui sistemi di funzioni di n variabili non è esatto, e perciò non si fanno generalizzazioni quando si considerano solo funzioni definite in un certo campo, per esempio lungo una linea. Il Calcolo del Ricci è il calcolo dei tensori; ed un tensore potrebbe essere dato anche in un solo punto.

Inoltre, la considerazione di tensori lungo una linea, dopo l'introduzione di una metrica, non può presentare che scarso interesse finchè ci si limita a considerazioni locali, perchè localmente, quando si pensa di operare in una V_n generica, si opera in realtà in una S_n euclidea.

Le cose cambiano quando non si opera localmente. Così, per esempio, il trasporto di un vettore lungo una linea chiusa mette in gioco la curvatura della varietà.

Considerazioni locali feconde di risultati potranno essere invece quelle che riguardano due elementi di linee per uno stesso punto. Se ne ha un esempio nell'operazione che il Levi-Civita chiama trasporto lungo un parallelogrammo infinitesimo e che, secondo quanto ho dimostrato in una

(1) Nella seduta del 3 marzo 1929.

comunicazione al recente Congresso dei Matematici, si riduce ad una derivazione doppia.

L'operazione corrisponde alla formola d'inversione di due derivazioni covarianti e ciò spiega la sua fecondità in risultati, in quanto la non invertibilità di due tali derivazioni è ciò che distingue le varietà non euclidee dalle euclidee.

Esempi di nozioni locali che riguardano essenzialmente solo una varietà euclidea sono invece quella della derivazione di un tensore lungo una linea, di curvatura geodetica di una linea in un punto, di direzione e curvatura associate del Bianchi.

Ebbene: tutto ciò non è nè nuovo nè interessante.

Quando, per esempio, si parla di estensione delle formole di Frenet a varietà qualunque, non si arriva in realtà che alla ovvia estensione in uno spazio euclideo delle formole di Frenet per lo spazio ordinario. In verità nulla si scopre quando si trova che la curvatura geodetica di una linea in un punto è il valore assoluto del limite di un certo rapporto, tra un angolo, ottenuto spostando per parallelismo un certo versore, ed un arco.

Ed infatti, se la varietà V_n è riferita ad un sistema di coordinate \bar{x}_i geodetiche lungo una linea L , e se

$$ds^2 = \sum_{i,j} \bar{a}_{ij} d\bar{x}_i d\bar{x}_j$$

è il quadrato dell'elemento lineare, lungo L le \bar{a}_{ij} sono costanti, perchè lungo L è

$$\frac{\partial \bar{a}_{ij}}{\partial \bar{x}_r} = 0.$$

Denotando con b_{ij} il valore di \bar{a}_{ij} lungo L ,

$$ds^2 = \sum_{i,j} b_{ij} d\bar{x}_i d\bar{x}_j$$

è il quadrato dell'elemento lineare di una varietà euclidea S_n che, nella Nota citata, ho chiamata osculatrice alla V_n lungo L .

Orbene: un tensore in V_n funzione dei punti di L non è altro che un tensore in S_n funzione dei punti di L e la derivazione di esso lungo L , come la definiscono alcuni autori, è la medesima in V_n ed S_n .

Per il caso di un vettore si ha il vettore associato del Bianchi, chiamato meglio dal Levi-Civita vettore derivato.

È facile poi trovare in coordinate qualunque le componenti del tensore derivato, passando per un sistema di coordinate geodetiche, evitando così i lunghi calcoli di alcuni autori che hanno ottenuto dei risultati i quali potrebbero molto brevemente ottenersi usando semplicemente coordinate cartesiane.

Limitandoci, per brevità, al caso di un vettore \mathbf{R} funzione dei punti di L , con referenza ad un sistema di coordinate \bar{x}_i geodetiche lungo L (riferita ad un parametro t) il vettore \mathbf{T} derivato di \mathbf{R} ha le componenti

$$\bar{T}^i = \frac{d\bar{R}^i}{dt}.$$

Supposto, come è sempre lecito, $b_{ij} = \delta_i^j$ sarà

$$\bar{R}_i = \bar{R}^i.$$

Passando alle coordinate x_i :

$$T_i = \sum_j^n \bar{T}_j \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i}.$$

Ma

$$\bar{R}_j = \bar{R}^j = \sum_k^n R^k \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_k}$$

e

$$\bar{T}_j = \frac{d\bar{R}_j}{dt} = \sum_k^n \frac{dR_k}{dt} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_k} + \sum_{hk}^n R^k \frac{\partial^2 \bar{x}_j}{\partial x_h \partial x_k} \frac{dx_h}{dt},$$

quindi

$$T_i = \sum_{jk}^n \frac{dR_k}{dt} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_k} + \sum_{jkh}^n R^k \frac{\partial^2 \bar{x}_j}{\partial x_h \partial x_k} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i} \frac{dx_h}{dt}.$$

Ma lungo L

$$\sum_j^n \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_k} = a_{ik}$$

e (come ho mostrato nella Nota citata)

$$\sum_j^n \frac{\partial^2 \bar{x}_j}{\partial x_h \partial x_k} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i} = \left[\begin{matrix} h & k \\ i \end{matrix} \right],$$

quindi

$$T_i = \sum_k^n a_{ik} \frac{dR^k}{dt} + \sum_{hk}^n \left[\begin{matrix} h & k \\ i \end{matrix} \right] R^k \frac{dx_h}{dt}.$$

Da questa, moltiplicando per a^{ij} e sommando rispetto ad i :

$$T^j = \frac{dR^j}{dt} + \sum_{hk}^n \left\{ \begin{matrix} h & k \\ j \end{matrix} \right\} R^k \frac{dx_h}{dt}.$$

L'espressione di T^i si può mettere sotto altre due forme. Tenendo conto che

$$\sum_i^n a_{ik} \frac{dR^k}{dt} = \frac{dR_i}{dt} - \sum_i^n \frac{da_{ik}}{dt} R^k$$

e che

$$\frac{da_{ik}}{dt} = \sum_h^n \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_h} \frac{dx_h}{dt} = \sum_h^n \left(\left[\begin{matrix} k & h \\ i & \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} i & h \\ k & \end{matrix} \right] \right) \frac{dx_h}{dt},$$

si trova:

$$T_i = \frac{dR_i}{dt} - \sum_i^n \left[\begin{matrix} i & h \\ k & \end{matrix} \right] R^k \frac{dx_h}{dt}.$$

Si ha così la prima forma per T_i . La seconda si ha facendo figurare nel secondo membro le componenti covarianti di \mathbf{R} :

$$T_i = \frac{dR_i}{dt} - \sum_i^n \left\{ \begin{matrix} i & h \\ k & \end{matrix} \right\} R^k \frac{dx_h}{dt}.$$

Con altrettanta facilità si scrivono le formole per un tensore di rango qualunque.

Con tutto questo non vogliamo negare alla nozione di derivazione lungo una linea l'importanza che ha. Diciamo anzi che è nozione fondamentale, purchè se ne sappia usare.

Ed infatti da essa si può far discendere immediatamente la nozione di derivazione covariante. Per esempio, per un vettore, se \mathbf{R} è funzione non dei soli punti di una linea ma di tutti i punti della varietà nell'intorno di un punto P, e si osserva che per ogni linea passante per P le n quantità

$$\frac{dR_i}{dt} - \sum_i^n \left\{ \begin{matrix} i & h \\ k & \end{matrix} \right\} R^k \frac{dx_h}{dt},$$

cioè

$$\sum_i^n \left(\frac{\partial R_i}{\partial x_h} - \sum_i^n \left\{ \begin{matrix} i & h \\ k & \end{matrix} \right\} R^k \right) \frac{dx_h}{dt}$$

formano in P un sistema semplice covariante, si deduce, data l'arbitrarietà delle $\frac{dx_h}{dt}$, in virtù del principio della saturazione degli indici, che le quantità

$$R_{i|h} = \frac{\partial R_i}{\partial x_h} - \sum_i^n \left\{ \begin{matrix} i & h \\ k & \end{matrix} \right\} R^k$$

formano un sistema doppio covariante.

Ancora un passo e si arriva alla nozione di curvatura: notando che la differenza $R_{i|h} - R_{i|kh}$ è una forma lineare nelle R_j , si arriva ai sim-

boli di Riemann a quattro indici, come coefficienti di tale forma lineare, ed alla dimostrazione di tutte le proprietà di tali simboli ed ulteriormente di quelli a cinque indici.

Ma quando invece, come fa taluno, si procede in senso inverso e si dice che al vettore derivato si può arrivare con la considerazione del vettore

$$T_i = \sum_b^n R_{i|b} \frac{dx_b}{dt},$$

si commette concettualmente un errore, in quanto si studiano elementi relativi ad una varietà euclidea, passando per una varietà generica. E si scrivono formole complicate e noiose, mentre la complicazione e la noia potrebbero evitarsi con l'uso delle coordinate cartesiane.

Matematica. — *Su un teorema relativo alle equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine.* Nota di A. MAMBRIANI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. L. TONELLI.

In una recente Nota⁽²⁾ *Su una particolare equazione differenziale*, dopo avere dimostrato l'esistenza e l'unicità dell'integrale di una particolare equazione differenziale del 2° ordine con speciali condizioni ai limiti, ho brevemente accennato al fatto che il mio ragionamento serve anche a stabilire un teorema generale sulle equazioni differenziali del 2° ordine. Nell'indicazione rapida della proposizione generale, mi è occorso di omettere una condizione che, del resto, risulta del tutto evidente dalle considerazioni da me svolte. Mi propongo pertanto, nella presente Nota, di formulare con tutta precisione il mio teorema e di darne la completa dimostrazione.

TEOREMA. — 1° Sia $\varphi(x, y)$ una funzione definita e continua, rispetto ad (x, y) , nel campo $x \geq 0, y \geq 0$, con $\varphi(x, y) > 0$ per $x > 0, y > 0$ e $\varphi(x, 0) = 0$ per $x > 0$, ed essa sia, rispetto ad y , sempre crescente ed a rapporto incrementale limitato in ogni campo limitato; inoltre⁽³⁾, per ciascun $c > 0$, la $\varphi(x, c)$ abbia, nell'intervallo $(0, +\infty)$, un limite inferiore maggiore di zero.

2° Sia $\psi(x)$ una funzione continua e maggiore di zero per ogni $x > 0$, integrabile in ogni intervallo $(0, X)$, con $X > 0$, ma **non** integrabile in $(0, +\infty)$.

(1) Nella seduta del 7 aprile 1929.

(2) Questi «Rendiconti», vol. IX (1929), p. 142.

(3) Ed è questa la condizione a cui sopra accennammo. Senza tale condizione, la nostra dimostrazione proverebbe che l'equazione (1) ammette uno ed un solo integrale assunto, per $x = 0$, il valore dato $y_0 \geq 0$ e tendente, per $x \rightarrow +\infty$, ad un limite $\leq y_0$.

Ciò posto, per ogni $y_0 \geq 0$, l'equazione differenziale

$$(1) \quad y'' = \varphi(x, y) \psi(x)$$

ammette uno ed un solo integrale (nel campo $x \geq 0, y \geq 0$) che verifica le condizioni ai limiti

$$(2) \quad y(0) = y_0, \quad y(+\infty) = 0.$$

Dalle condizioni poste, per noti teoremi sulle equazioni differenziali ordinarie⁽¹⁾, risulta immediatamente che, essendo $y_0 \geq 0$, dal punto $(0, y_0)$ e con una data direzione di coefficiente angolare γ ($\gamma \geq 0$, se $y_0 = 0$), esce sempre uno ed un solo integrale $y_\gamma(x)$ dell'equazione differenziale (1). Risulta, inoltre, che questo integrale, insieme alla sua derivata prima, varia con continuità al variare di γ .

Esistenza. - Se è $y_0 = 0$ si ha la soluzione evidente $y(x) \equiv 0$. Supponiamo dunque $y_0 > 0$. Per $\gamma \geq 0$, è $y_\gamma(x)$ una funzione crescente di x , perchè la (1) mostra, in virtù delle ipotesi fatte, che è sempre $y'_\gamma(x) > 0$; è dunque $y_\gamma(x) > 0$ per ogni $x \geq 0$, ed anche $y_\gamma(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$.

Detto M il massimo della funzione $\varphi(x, y)$ nel campo $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq y_0$, indichiamo con x_1 la massima ascissa dell'intervallo $(0, 1)$ tale che sia

$$\int_0^{x_1} \psi(x) dx \leq \frac{1}{M}.$$

Allora, per $\gamma < -\left(\frac{y_0}{x_1} + 1\right)$, e finchè sia $0 < x \leq x_1, y_\gamma(x) \geq 0$ ed $y'_\gamma(x) < 0$, la (1) dà

$$y'_\gamma(x) \leq \gamma + M \int_0^x \psi(x) dx \leq \gamma + 1 < -\frac{y_0}{x_1},$$

donde segue, finchè sia $0 < x \leq x_1$ ed $y_\gamma(x) \geq 0$, che $y'_\gamma(x)$ si mantiene sempre minore di $-\frac{y_0}{x_1}$; l'integrale $y_\gamma(x)$ si annulla, perciò, per un x minore di x_1 .

Sia $\bar{\gamma}$ il limite superiore dei valori di γ per i quali l'integrale $y_\gamma(x)$ incontra l'asse delle x . Sarà $\bar{\gamma}$ compreso nell'intervallo $\left(-\frac{y_0}{x_1} - 1, 0\right)$. Indichiamo con $\bar{y}(x)$ l'integrale corrispondente a $\gamma = \bar{\gamma}$, e mostriamo che per ogni $x > 0$ è sempre $\bar{y}(x) > 0$ con $\bar{y}(+\infty) = 0$.

Infatti, se per un $\bar{x} > 0$ fosse $\bar{y}(\bar{x}) = 0$, dovrebbe aversi $\bar{y}'(\bar{x}) < 0$ [perchè la (1) ha la sola soluzione $y(x) \equiv 0$ che nel punto $(\bar{x}, 0)$ soddisfa

(1) Vedere C. CARATHEODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Cap. XI.

alle condizioni $y(\bar{x}) = 0, y'(\bar{x}) = 0$, e perciò tutti gli integrali $y_\gamma(x)$, con γ maggiore di $\bar{\gamma}$ e sufficientemente prossimo a $\bar{\gamma}$, incontrerebbero l'asse delle x , e ciò contro la definizione di $\bar{\gamma}$. Dunque è sempre $\bar{y}(x) > 0$. Inoltre, la $\bar{y}'(x)$, che, per la (1), è funzione crescente di x , non può assumere valori positivi, perchè, altrimenti, $\bar{y}(x)$ avrebbe un minimo maggiore di 0, dopo il quale sarebbe sempre crescente, e, per tutti i γ minori di $\bar{\gamma}$ e sufficientemente prossimi a $\bar{\gamma}$, gli integrali $y_\gamma(x)$ non potrebbero mai annullarsi: perciò $\bar{y}(x)$ è sempre decrescente. Nè può essere, poi, $\bar{y}(+\infty) = c > 0$, perchè dalla (1) si avrebbe, per $x \rightarrow +\infty$,

$$\bar{y}'(x) > \bar{\gamma} + \int_0^x \varphi(x, c) \psi(x) dx \cong \bar{\gamma} + \lambda \int_0^x \psi(x) dx \rightarrow +\infty,$$

dove con λ abbiamo indicato il limite inferiore di $\varphi(x, c)$ in $(0, +\infty)$, limite inferiore che è maggiore di zero per le ipotesi fatte.

Si conclude dunque che è $\bar{y}(+\infty) = 0$.

Unicità. - Infine, se esistessero due integrali distinti $y_1(x)$ ed $y_2(x)$, della (1), soddisfacenti alle condizioni (2), supposto $y_1'(0) > y_2'(0)$, dovrebbe essere, per la (1),

$$(y_1 - y_2)'' = \{\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2)\} \psi(x),$$

e la derivata di $y_1 - y_2$, che è positiva per $x = 0$, andrebbe crescendo col crescere di x , ed $y_1 - y_2$ risulterebbe sempre crescente. Ed avendosi $y_1(0) - y_2(0) = 0$, ne verrebbe $y_1 - y_2 \rightarrow +\infty$, per $x \rightarrow +\infty$, ed y_1 e y_2 non potrebbero ambedue annullarsi per $x \rightarrow +\infty$.

OSSERVAZIONE I. - L'ipotesi che la $\varphi(x, y)$ sia funzione crescente di y è superflua per l'esistenza dell'integrale soddisfacente alle (2), quando, per ogni $c > 0$ e minore y_0 , la $\varphi(x, y)$ abbia, nel campo $0 \leq x < +\infty$, $c \leq y \leq y_0$, un limite inferiore maggiore di zero.

OSSERVAZIONE II. - La dimostrazione qui data è identica a quella da me esposta per il caso particolare considerato nella Nota già citata. È evidente che il mio ragionamento serve anche a trattare casi più generali della equazione (1); così si possono, in modo assai facile, stabilire le condizioni sotto le quali tale ragionamento può applicarsi ad equazioni del tipo

$$(3) \quad y'' = f(x, y, y') \quad (1).$$

(1) Il prof. TONELLI mi comunica gentilmente un interessante teorema, relativo alla equazione (3), enunciato dal sig. G. SCORZA-DRAGONI nella Nota *Su un'equazione differenziale particolare*, che sarà pubblicata in questo stesso fascicolo. Il ragionamento da me svolto nella presente Nota dà, senz'altro, anche la completa dimostrazione del teorema dello Scorza-Dragoni.

Matematica. — *Su un'equazione differenziale particolare.* Nota di G. SCORZA-DRAGONI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. L. TONELLI.

In una sua recente Nota il sig. Mambriani ⁽²⁾ dimostra che l'equazione differenziale $y'' = y^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}$ possiede un integrale che soddisfa alle condizioni ai limiti $y(0) = 1, y(+\infty) = 0$. Ma poichè - forse tratto in inganno dalla poca chiarezza di quanto io dicevo nella mia Nota su quell'equazione, pubblicata in questi « Rendiconti » nel novembre dell'anno scorso ⁽³⁾ - egli sembra supporre che a dimostrare quella proprietà io abbia dedicato un'intera Memoria, mi sia permesso di enunciare uno dei teoremi generali cui in essa si perviene e dal quale si deduce immediatamente la proprietà in discorso.

L'equazione

$$y'' = \varphi(x, y, y')$$

ammette uno e un solo integrale che verifichi le condizioni

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = y_0 > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0,$$

se la $\varphi(x, y, y')$ è continua, insieme con le sue derivate parziali $\varphi_y, \varphi_{y'}$, ⁽⁴⁾, nell'insieme

$$I: 0 < x < +\infty, \quad 0 \leq y < +\infty, \quad -\infty < y' < +\infty;$$

(1) Nella seduta del 7 aprile 1929.

(2) A. MAMBRIANI, *Su una particolare equazione differenziale*, questi « Rendiconti », 20 gennaio 1929.

(3) G. SCORZA-DRAGONI, *A proposito di un'equazione differenziale*.

(4) Quest'ultima ipotesi può essere sostituita con quella più generale che i rapporti incrementali di φ rispetto a y e y' siano limitati in ogni porzione chiusa e limitata di I.

Naturalmente in questo caso, in luogo di soddisfare alla condizione - qui appresso indicata con γ) - $\varphi_y \geq 0, \varphi_{y'} \geq 0$, bisognerà imporre alla $\varphi(x, y, y')$ di essere una funzione crescente o almeno non decrescente di y e y' .

Osservo poi che nelle ipotesi fatte può darsi che gli integrali della $y'' = \varphi$ uscenti dal punto $x = 0, y = y_0 (y_0 > 0)$ non siano determinati in modo unico dal valore iniziale della derivata prima.

Infatti si consideri la funzione $\psi(x, y)$ definita nel modo che segue per ogni $x > 0$ e per ogni $y \geq 0$:

$$\begin{array}{ll} \psi(x, y) = y, & \text{se } 1 \leq x, \quad 0 \leq y, \\ \psi(x, y) = y, & \text{se } 0 < x < 1, \quad e^{-x} \leq y, \\ \psi(x, y) = 0, & \text{se } 0 < x < 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x, \\ \psi(x, y) = \frac{ye^{-x} - (1-x)e^{-x}}{e^{-x} - (1-x)}, & \text{se } 0 < x < 1, \quad 1-x < y < e^{-x}. \end{array}$$

se, detta $y(x)$ una funzione positiva e limitata, definita per $x > 0$ e derivabile, dall'esistenza del limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$$

e dell'integrale

$$\int_0^{\infty} \varphi(x, y(x), y'(x)) dx$$

segue che è

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0;$$

e se inoltre la $\varphi(x, y, y')$ verifica, in ogni insieme del tipo

$$0 < x < m, \quad 0 \leq y \leq n, \quad -\infty < y' < +\infty \quad (m, n = 1, 2, \dots),$$

le seguenti condizioni:

$\alpha)$ è

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, y') &\geq 0 \quad \text{per } y > 0, \\ \varphi(x, 0, 0) &= 0; \end{aligned}$$

$\beta)$ nell'intervallo $0 < x < m$ esiste una funzione $g_m(x)$, ivi sommabile, per la quale è

$$|\varphi(x_0, y, y')| \leq g_m(x_0)$$

ogni qual volta sia $0 < x_0 < m, 0 \leq y \leq n, -\infty < y' < +\infty$;

$\gamma)$ nell'interno di I è sempre

$$\varphi_y(x, y, y') \geq 0, \quad \varphi_{y'}(x, y, y') \geq 0.$$

Anche il sig. Mambriani, nelle ultime righe della sua Nota, dà un teorema che dovrebbe generalizzare la portata delle sue considerazioni. Ma il teorema che egli enuncia non è esatto: se nella sua proposizione si fa

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{1 + e^x} y, \quad \psi(x) \equiv 1 \quad (1)$$

Evidentemente la $\varphi(x, y)$ soddisfa a tutte le condizioni da me indicate; eppure dal punto $x = 0, y = 1$ partono almeno due curve integrali dell'equazione $y'' = \varphi(x, y)$ con una tangente iniziale di coefficiente angolare uguale a -1 , e precisamente le curve

$$y = 1 - x, \quad y = e^{-x},$$

l'ultima delle quali è anche la curva integrale dell'equazione $y'' = \psi$ uscente dal punto $(0, 1)$ ed asintotica all'asse delle x .

(1) Questo semplice esempio mi è stato indicato dall'amico CACCIOPOLI in seguito ad una conversazione avuta insieme.

si ottiene un'equazione per la quale sono verificate tutte le ipotesi restrittive da lui imposte, eppure nessuno degli integrali della

$$(1) \quad y'' = \frac{1}{1 + e^x} y$$

soddisfa alle condizioni

$$y(0) = y_0 > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0.$$

L'unico integrale della (1) uscente dal punto $(0, y_0)$ ed asintotico a una orizzontale è dato dalla funzione

$$y_1(x) = y_0 \frac{1 + e^{-x}}{2},$$

e per questo integrale si ha

$$y_1(0) = y_0, \quad y_1'(0) = -\frac{y_0}{2}, \quad y_1(+\infty) = \frac{y_0}{2}.$$

Se $y(x)$ è un'altra soluzione della (1) per la quale sia $y(0) = y_0$, riesce

$$y(+\infty) = +\infty \quad \text{oppure} \quad y(+\infty) = -\infty$$

a seconda che è

$$y'(0) > y_1'(0) \quad \text{oppure} \quad y'(0) < y_1'(0).$$

Matematica. — *Sull'esistenza degli integrali delle equazioni differenziali ordinarie.* Nota di E. PINI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrispondente L. TONELLI.

In questi stessi « Rendiconti », è stata recentemente richiamata l'attenzione degli Analisti sulle equazioni differenziali ordinarie $y' = f(x, y)$ non soddisfacenti completamente alle condizioni dei teoremi classici sull'esistenza ed unicità dei relativi integrali. E precisamente sono state considerate equazioni nelle quali la $f(x, y)$, anzichè essere sempre continua nel campo in cui viene definita, è discontinua ed anche illimitata.

Equazioni di questo tipo furono già studiate dal Carathéodory ⁽²⁾, il quale riuscì ad estendere ad esse, sotto opportune ipotesi, i risultati classici. Il metodo usato dal Carathéodory, in tale estensione, si discosta notevolmente dai metodi classici; ma è interessante osservare che anche i pro-

(1) Nella seduta del 7 aprile 1929.

(2) C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Kap. XI.

cedimenti classici permettono di trattare le equazioni più generali a cui qui ci riferiamo. Il prof. L. Tonelli mostrò già, in alcune lezioni all' Università di Bologna, come il metodo delle approssimazioni successive del Picard serva perfettamente allo scopo. Io, nella presente Nota, mi propongo di mostrare la stessa cosa per il primo dei metodi conosciuti, quello di Cauchy, quando ad esso si apporti qualche leggera modificazione.

Per semplificare la dimostrazione considero il caso in cui la $f(x, y)$ sia continua in tutto un rettangolo R , ad eccezione dei punti della retta $x = a$, nei quali essa può assumere anche valore infinito. È immediata l'estensione al caso in cui le rette $x = a$ siano in numero finito ed anche a casi più generali.

1. Consideriamo l'equazione differenziale

$$(1) \quad y' = f(x, y)$$

definita nel rettangolo $R = \{ a - \alpha \leq x \leq a + \alpha, b - \beta \leq y \leq b + \beta \}$, con $f(x, y)$ funzione continua in R , ad eccezione dei punti della retta $x = a$, nei quali essa può assumere anche il valore infinito.

Supponiamo, inoltre, che sia, in tutto R ,

$$(2) \quad |f(x, y)| \leq \psi(x),$$

dove $\psi(x)$ è una funzione positiva ed integrabile in tutto l'intervallo $(a - \alpha, a + \alpha)$.

Dimostriamo che, sotto queste condizioni esiste almeno una soluzione dell'equazione (1) la quale, per $x = a$, assume il valore b .

2. Premettiamo la seguente osservazione.

Prendiamo in considerazione un intervallo $(a - \delta, a + \delta)$, con $\delta < \alpha$ e tale che:

$$(3) \quad \int_a^{a+\delta} \psi(x) dx < \beta, \quad \int_{a-\delta}^a \psi(x) dx < \beta.$$

Sia poi $y_n(x)$ una successione di funzioni date nell'intervallo $(a - \delta, a + \delta)$, ugualmente continue, convergenti uniformemente verso una funzione $y(x)$, necessariamente continua, al tendere di n all'infinito; e sia (\bar{x}_1, \bar{x}_2) un intervallo appartenente ad $(a - \delta, a + \delta)$. Suddiviso l'intervallo (\bar{x}_1, \bar{x}_2) in parti mediante i punti $\bar{x}_1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \bar{x}_2$, dimostriamo che, se, per n tendente all'infinito, le differenze $x_{r+1} - x_r$ tendono tutte allo zero, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{n-1} \int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x, y_n(x_r)) dx = \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} f(x, y) dx.$$

Se l'intervallo (\bar{x}_1, \bar{x}_2) contiene l'ascissa a , circondiamo questa di un intorno $(a - \lambda, a + \lambda)$, con λ determinato in guisa che $\int_{a-\lambda}^{a+\lambda} \psi(x) dx < \varepsilon$, essendo ε scelto ad arbitrio; supponiamo in più che le parti (x_r, x_{r+1}) , della suddivisione, siano tutte minori di $\frac{\lambda}{2}$.

Possiamo, per tutti gli x di $(\bar{x}_1, a - \frac{\lambda}{2})$ e di $(a + \frac{\lambda}{2}, \bar{x}_2)$, essendo ivi la $f(x, y)$ continua, determinare un numero $\rho > 0$ in modo che, per ogni $|y_1 - y_2| < \rho$, si abbia $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon$.

Distinguiamo, allora, gli intervalli (x_r, x_{r+1}) in due categorie.

a) Consideriamo gli intervalli (x_r, x_{r+1}) che hanno almeno un punto esterno ad $(a - \lambda, a + \lambda)$; essi risultano tutti completamente esterni ad $(a - \frac{\lambda}{2}, a + \frac{\lambda}{2})$. Allora, per la uniforme convergenza delle funzioni $y_n(x)$ ad $y(x)$ e per la continuità della $y(x)$, si può determinare un indice \bar{n} , sufficientemente grande, tale che, per ogni $n > \bar{n}$, si abbia, in ciascuno degli (x_r, x_{r+1}) considerati:

$$|y(x) - y_n(x_r)| < \rho \quad \text{e quindi} \quad |f(x, y) - f(x, y_n(x_r))| < \varepsilon.$$

Potremo perciò scrivere la disuguaglianza:

$$\left| \int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x, y) dx - \int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x, y_n(x_r)) dx \right| < \\ < \int_{x_r}^{x_{r+1}} |f(x, y) - f(x, y_n(x_r))| dx < \varepsilon (x_{r+1} - x_r).$$

b) Consideriamo gli intervalli (x_r, x_{r+1}) che non hanno nessun punto esterno ad $(a - \lambda, a + \lambda)$; raggruppando i relativi integrali in un'unica somma, avremo:

$$\left| \sum_{x_r} \int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x, y) dx - \sum_{x_r} \int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x, y_n(x_r)) dx \right| < \\ < \sum_{x_r} \int_{x_r}^{x_{r+1}} |f(x, y) - f(x, y_n(x_r))| dx < 2 \sum_{x_r} \int_{x_r}^{x_{r+1}} \psi(x) dx \leq 2 \int_{a-\lambda}^{a+\lambda} \psi(x) dx < 2\varepsilon.$$

Ora, riunendo gli intervalli appartenenti alle due categorie, avremo:

$$\left| \sum_{r=0}^{n-1} \int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x, y) dx - \sum_{r=0}^{n-1} \int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x, y_n(x_r)) dx \right| < \\ < \sum_{r=0}^{n-1} \int_{x_r}^{x_{r+1}} |f(x, y) - f(x, y_n(x_r))| dx < \varepsilon(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) + 2\varepsilon = \varepsilon(\bar{x}_2 - \bar{x}_1 + 2)$$

per tutti gli $n > \bar{n}$. Ossia,

$$\left| \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} f(x, y) dx - \sum_{r=0}^{n-1} \int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x, y_n(x_r)) dx \right| < \varepsilon(\bar{x}_2 - \bar{x}_1 + 2).$$

Per l'arbitrarietà di ε è così provata la nostra affermazione.

Risulta anche che se x un punto qualunque dell'intervallo (\bar{x}_1, \bar{x}_2) è pure, per tutti gli $n > \bar{n}$,

$$(4) \quad \left| \int_{x_1}^x f(x, y) dx - \sum_{r=0}^{n-1} \int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x, y_n(x_r)) dx - \int_{x_{n'}}^x f(x, y_n(x_{n'})) dx \right| < \\ < \varepsilon(x - \bar{x}_1 + 2)$$

essendo $x_{n'}$ il massimo dei punti x_r non superiore ad x .

3. Ciò premesso, limitiamoci a considerare l'intervallo $(a, a + \delta)$, potendosi ripetere in modo identico, per l'intervallo $(a - \delta, a)$, i ragionamenti che ora faremo.

Per ogni valore di n suddividiamo l'intervallo $(a, a + \delta)$ in n parti uguali, mediante i punti $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = a + \delta$, e definiamo la funzione $y_n(x)$ nel seguente modo:

$$y_n(x) = b + \int_a^x f(x, b) dx \quad \text{per } a \leq x < x_1$$

$$y_n(x) = b + \int_a^{x_1} f(x, b) dx + \int_{x_1}^x f(x, y_n(x_1)) dx \quad \text{per } x_1 \leq x < x_2$$

$$y_n(x) = b + \int_a^{x_1} f(x, b) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_n(x_1)) dx + \int_{x_2}^x f(x, y_n(x_2)) dx \\ \text{per } x_2 \leq x < x_3$$

e così via, fino a definire $y_n(x)$ in tutto l'intervallo $(a, a + \delta)$.

Facciamo le seguenti considerazioni:

1. Le funzioni $y_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) appartengono tutte al campo R e quindi, sono tutte egualmente limitate.

Infatti, considerando successivamente i vari intervalli $(a, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots$ si nota che, in virtù della (2), si ha sempre,

$$|y_n(x) - b| < \int_a^x \psi(x) dx$$

e quindi, per le (3),

$$|y_n(x) - b| < \beta$$

valevole per ogni x dell'intervallo $(a, a + \delta)$.

II. *Le funzioni $y_n(x)$ sono tutte egualmente continue.*

Infatti, preso ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, possiamo determinare in corrispondenza di esso un numero $\eta > 0$, tale che l'integrale della $\psi(x)$ risulti minore di ε , per ogni intervallo di $(a, a + \delta)$ di ampiezza minore di η . Dimostriamo che in tutto l'intervallo $(a, a + \delta)$, dalla $|x'' - x'| < \eta$, segue $|y_n(x'') - y_n(x')| < \varepsilon$, qualunque sia n .

Dalla definizione delle $y_n(x)$, abbiamo, per $x' < x''$ ed indicando con x_s ed x_t i massimi degli x_0, x_1, \dots, x_n , non superiori ad x' ed x'' , rispettivamente,

$$\begin{aligned} |y_n(x'') - y_n(x')| &\leq \left| \int_{x'}^{x_{s+1}} f(x, y_n(x_s)) dx + \int_{x_{s+1}}^{x_{s+2}} f(x, y_n(x_{s+1})) dx + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_t}^{x''} f(x, y_n(x_t)) dx \right| \leq \int_{x'}^{x''} \psi(x) dx < \varepsilon. \end{aligned}$$

Queste considerazioni sono sufficienti per assicurarci che dalla successione $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x) \dots$ se ne può estrarre un'altra, convergente uniformemente, in tutto $(a, a + \delta)$, verso una funzione limite $\bar{y}(x)$, continua.

4. *Vogliamo dimostrare che la $\bar{y}(x)$ è soluzione della (1).*

Intanto, essendo la $\bar{y}(x)$ limite di funzioni tutte comprese fra $b - \beta$, $b + \beta$, per ogni x dell'intervallo $(a, a + \delta)$, è anch'essa compresa fra tali limiti e quindi appartiene al rettangolo R . Inoltre, per $x = a$, le $y_n(x)$ sono tutte uguali a b e quindi anche $\bar{y}(a) = b$.

Per semplicità di notazione, supporremo che la successione estratta da quella delle $y_n(x)$ e convergente uniformemente verso la $\bar{y}(x)$, sia la $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x) \dots$ stessa. Allora, preso ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, consideriamo il valore \bar{n} , già determinato al n. 2, e supponiamolo inoltre tale che, per ogni $n > \bar{n}$, valga anche la relazione:

$$(5) \quad |\bar{y}(x) - y_n(x)| < \varepsilon,$$

in tutto $(a, a + \delta)$.

Valutiamo quindi, sempre per $n > \bar{n}$, l'espressione

$$\bar{y}(x) - b - \int_a^x f(x, \bar{y}) dx.$$

Si ha:

$$\left| \bar{y}(x) - b - \int_a^x f(x, \bar{y}) dx \right| \leq \left| \bar{y}(x) - y_n(x) \right| + \left| y_n(x) - b - \int_a^x f(x, \bar{y}) dx \right|.$$

Ma, fissato il punto x e detto $x_{n'}$ l'ultimo dei punti x_r che precede x , è:

$$y_n(x) = b + \sum_{r=0}^{n'-1} \int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x, y_n(x_r)) dx + \int_{x_{n'}}^x f(x, y_n(x_{n'})) dx,$$

e perciò, tenendo conto delle relazioni (4), (5),

$$\left| \bar{y}(x) - b - \int_a^x f(x, \bar{y}) dx \right| < \varepsilon + \varepsilon(x - a + 2) = \varepsilon(x - a + 3).$$

Si ha, quindi, per l'arbitrarietà di ε ,

$$\bar{y}(x) = b + \int_a^x f(x, \bar{y}) dx$$

e derivando, per $x > a$,

$$\bar{y}' = f(x, \bar{y}).$$

Cioè $\bar{y}(x)$ è una soluzione della (1) che per $x = a$ assume il valore b .

Per quanto poi riguarda l'unicità dell'integrale uscente dal punto (a, b) , le relative condizioni furono già date, anche per il caso attuale e sotto forma molto generale, e dal Carathéodory e dal prof. L. Tonelli nella sua Nota *Sull'unicità della soluzione di un'equazione differenziale ordinaria* ⁽¹⁾.

(1) « Rendic. R. Accad. dei Lincei », vol. I, serie 6^a, 1925, pp. 272-277.

Matematica. — *Sur l'unicité du prolongement des fonctions harmoniques.* Nota di D. POMPEIU, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. - Soit $\varphi(x, y)$ une fonction harmonique définie dans une certaine portion (A) du plan. Nous prenons, comme définition de l'harmonicité, la propriété de la moyenne, la sommation (intégrale double) étant étendue aux valeurs de φ correspondant aux points d'un cercle.

Cela posé, supposons que sur une portion (λ) de la frontière du domaine (A), où φ se trouve définie, cette fonction prend une suite continue de valeurs, et que, de plus, de l'autre côté de (λ) on ait trouvé, dans un domaine (A_1), attenant à (A), une fonction $\varphi_1(x, y)$: harmonique, se raccordant avec φ le long de (λ) et telle que la fonction:

$$\begin{aligned} f(x, y) \dots &= \varphi(x, y) \quad \text{dans (A)} \\ &= \varphi_1(x, y) \quad \text{dans (A}_1\text{)} \end{aligned}$$

possède la propriété de la moyenne, aussi pour les points de la frontière (λ), qui sépare les domaines (A) et (A_1).

Dans ces conditions il est clair que $f(x, y)$ est une fonction harmonique dans le domaine (A + A_1), obtenu en supprimant la frontière (λ).

Mais une question se pose: peut-il exister dans le domaine (A_1) une autre fonction harmonique $\psi_1(x, y)$ différente de $\varphi_1(x, y)$; cette fonction $\psi_1(x, y)$ se raccordant, tout comme φ_1 , avec φ le long de (λ) et *prolongeant* ainsi φ dans (A_1)?

Je me propose de montrer que, si $\varphi_1(x, y)$ existe c'est la *seule* fonction prolongeant $\varphi(x, y)$ au delà de (λ).

2. - Pour cela j'observerai, d'abord, que si $\varphi(x, y)$ pouvait être prolongée, au delà de (λ), de deux manières différentes, on obtiendrait, par soustraction, une fonction $g(x, y)$: harmonique dans (A + A_1) et telle que

$$\begin{aligned} g(x, y) \dots &\equiv 0 \quad \text{dans (A)} \\ &\equiv \varphi_1(x, y) - \psi_1(x, y) \quad \text{dans (A}_1\text{)} \end{aligned}$$

et alors je me propose de montrer que dans (A_1) on a, nécessairement, aussi

$$g(x, y) \equiv 0$$

et ainsi l'unicité du prolongement serait établie.

(1) Nella seduta del 7 aprile 1929.

3. — Pour cela je vais m'appuyer sur un résultat d'un travail intitulé: *Sur une propriété intégrale des fonctions de deux variables réelles*, en cours d'impression dans le « Bulletin de la Classe des Science » (Académie Royale de Belgique) avril 1929.

Dans ce travail j'ai établi la proposition suivante:

Une fonction $F(x, y)$ étant définie dans tout le plan, et supposée *continue*: si, pour tout cercle Γ de centre arbitraire et de rayon constant r , on a

$$(1) \quad \iint_{(\Gamma)} F(x, y) dx dy = c^{te}$$

la fonction F se réduit à une constante.

Pour arriver à ce résultat j'ai établi d'abord que: *dans tout cercle Γ , la fonction F prend la même valeur pour deux points diamétralement opposés sur la circonférence de Γ , en vertu de (1).*

C'est de ce résultat partiel qu'il suffira de nous servir pour établir l'unicité du prolongement de $\varphi(x, y)$.

En effet, raisonnant sur $g(x, y)$, prenons dans (A) et dans le voisinage de (λ) un point P_0 , comme centre, et un cercle C qui soit complètement intérieur à $(A + A_1)$ et qui coupe la ligne-frontière (λ) .

Le résultat partiel, dont il vient d'être question, suffit pour établir que $g(x, y)$ est identiquement nul dans (A_1) et démontrer ainsi l'unicité du prolongement de $\varphi(x, y)$.

Matematica. — *Classificazione delle superficie dello spazio Hilbertiano il cui spazio 2-tangente è a quattro dimensioni.* Nota II di A. TONOLO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sui polinomi definiti e semidefiniti.* Nota di S. CHERUBINO, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla rappresentazione parzialmente intrinseca dei tensori.* Nota di M. PASTORI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sopra certi problemi di equivalenza.* Nota di G. VRANCEANU, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica matematica. — *Intorno alla nuova teoria di Einstein.* Nota di A. PALATINI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In alcune recenti Note ⁽²⁾, Einstein propone una nuova teoria destinata a completare la sua teoria della Relatività, nel senso che egli mira a trovare delle equazioni affatto generali, le quali caratterizzino contemporaneamente i campi gravitazionali ed elettromagnetici. Con la nuova teoria, partendo da un principio di Hamilton con appropriata funzione universale, Einstein perviene a risultati analitici soddisfacenti. Ma (a parte il fatto che la funzione universale non è univocamente determinata) i risultati sono di prima approssimazione, nè i metodi da Einstein adottati permettono di conseguire in modo agile le corrispondenti equazioni esatte ⁽³⁾, le quali del resto non sono state finora ottenute.

In questa Nota voglio mostrare come con l'uso sistematico di operazioni già note, senza ulteriori complicazioni formali, si possa pervenire con facilità alle equazioni cercate. Queste *non* soddisfano al primo requisito di ridursi a quelle della Relatività generale quando si annulla il campo elettrico. Una opportuna modificazione nella scelta della funzione universale (che così viene univocamente determinata) permette di giungere a risultati, i quali potranno forse esser ritenuti soddisfacenti.

1. In un continuo ad n dimensioni, riferito a coordinate affatto generali x_1, x_2, \dots, x_n , sia assegnata un'ennupla di direzioni ortogonali, caratterizzata dai momenti ⁽⁴⁾ λ_{ij} , oppure dai corrispondenti parametri

$$(I) \quad \lambda_i^r = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_{ij}^r}, \quad \lambda = \|\lambda_{ij}\| \neq 0.$$

(1) Nella seduta del 7 aprile 1929.

(2) A. EINSTEIN, *Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus* (« Sitzungsberichte », 1928, p. 217); *Neue Möglichkeit für eine einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität* (ibidem, p. 224); *Zur einheitlichen Feldtheorie* (ibidem, 1929, p. 2).

(3) Cfr. a questo scopo anche R. WEITZENBÖCH, *Differentialinvarianten in der Einsteinschen Theorie des Fernparallelismus* (ibidem, 1928, p. 466).

(4) Cfr. T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*. (Roma, Stock, 1925), cap. X.

Se si pone

$$g_{rs} = \sum_i \lambda_{i/r} \lambda_{i/s}$$

resta subordinatamente definita una varietà metrica V_n di elemento lineare

$$ds^2 = \sum_{rs} g_{rs} dx_r dx_s,$$

il cui discriminante g è legato a λ dalla relazione $\lambda = \sqrt{g}$.

Consideriamo ora nella V_n una stella di ennuple⁽¹⁾, cioè l'insieme delle $\infty \frac{n(n-1)}{2}$ ennuple nel quale le linee di due ennuple qualunque formano angoli costanti in ogni punto della V_n , ed esigiamo, con Einstein, che il campo gravitazionale-elettromagnetico sia caratterizzato da equazioni, che siano invarianti quando si passa da un'ennupla ad un'altra della stella. Per rispecchiare questo desiderato, Einstein fa uso di una speciale operazione di derivazione covariante⁽²⁾, che soddisfa appunto alla condizione voluta. Io noto però, che se si fa uso della rappresentazione intrinseca dei tensori, anzichè di quella covariante, la speciale derivazione ora nominata, non è altro che la nota derivazione intrinseca $\frac{\partial}{\partial s_i}$ se ds_i sono gli elementi d'arco delle linee dell'ennupla di riferimento. Si può constatare direttamente in modo facile che questa derivazione ha effettivamente carattere invariantivo quando si passa da un'ennupla ad un'altra di una medesima stella e il suo uso permette di evitare ogni complicazione formale. Accanto alla derivazione rispetto agli archi, fa però comodo adoperare come ausiliaria anche la derivazione tensoriale intrinseca definita, per un tensore qualunque, dalle formule

$$T_{i_1 i_2 \dots i_m / k} = \frac{\partial T_{i_1 i_2 \dots i_m}}{\partial s_k} + \sum_b^m \sum_i^n \gamma^{i b k} T_{i_1 \dots i_{b-1} i_{b+1} \dots i_m},$$

nelle quali le γ sono le ben note rotazioni di Ricci.

Ciò premesso, si ponga

$$(2) \quad e_{ihk} = \sum_{rs} \lambda_b^r \lambda_k^s \left(\frac{\partial \lambda_{i/r}}{\partial x_s} - \frac{\partial \lambda_{i/s}}{\partial x_r} \right);$$

queste formule caratterizzano degli invarianti di fronte ad un cambiamento di variabili ed anche di fronte ad un cambiamento di ennupla nella medesima stella. Con essi si possono costruire i due invarianti assoluti

$$A = \sum_{ihk} e_{ihk}^2 \quad ; \quad B = \sum_{ihk} e_{ihk} e_{kni},$$

(1) V. A. TONOLO, *Stelle di ennuple ortogonali*, ecc. (« Rend. R. Istituto Lombardo », 1927, vol. LX, p. 253).

(2) Questa operazione era già stata considerata dal VITALI, *Una derivazione covariante*, ecc. (« Atti della Soc. Ligustica », vol. II, 1924, p. 248).

che coincidono, salvo la forma, con quelli assunti da Einstein come funzioni universali.

Esigiamo perciò che le equazioni del campo gravitazionale-elettromagnetico, provengano da l'uno o l'altro dei principi hamiltoniani

$$(3) \quad \delta \int_S A dS = 0 \quad ; \quad \delta \int_S B dS = 0,$$

per incrementi arbitrari attribuiti ai momenti $\lambda_{j/r}$, nulli, assieme alle loro derivate, ai limiti della regione arbitraria S di V_n .

Se si pone

$$(4) \quad \delta \lambda_{h/r} = \sum_j f_{hj} \lambda_{j/r} \quad \text{e quindi} \quad \delta \lambda_h^r = - \sum_j f_{jh} \lambda_j^r$$

all'arbitrarietà delle $\delta \lambda_{h/r}$ corrisponde quella delle f_{hj} , le quali costituiscono un sistema doppio di invarianti.

Applichiamo il simbolo δ alle (2): si trova subito per le (4)

$$(5) \quad \delta e_{ihk} = f_{ihk} - f_{ikh} - \sum_r (\gamma_{hr} f_{rk} - \gamma_{kr} f_{rh}),$$

come pure si ha

$$(6) \quad \delta \lambda = \sum_{br} \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_{b/r}} \delta \lambda_{b/r} = \lambda \sum_{ik} \epsilon_{ik} f_{ik},$$

denotando con ϵ_{ik} l'unità o lo zero secondochè l'indice i coincide o no con k .

Ponendo $d\tau = dx_1 dx_2 \dots dx_n$, si ha $dS = \lambda d\tau$ e dalla prima delle (3), in causa di (5) è (6) e dell'espressione di A

$$\delta \int_S (A\lambda) d\tau + \int_S \left\{ \sum_{ihk} 4 (e_{ihk} f_{ih,k} + \sum_r \gamma_{hr} f_{rk}) + A \sum_{ik} \epsilon_{ik} f_{ik} \right\} dS = 0,$$

oppure, eseguendo una integrazione per parti⁽¹⁾ ed un opportuno scambio di indici è dato che le f_{ih} sono nulle ai limiti del campo,

$$\int_S \sum_{ik} \left\{ 4 (\sum_{hr} e_{hkr} \gamma_{hri} - \sum_r e_{ikr} \gamma_r) + \epsilon_{ik} A \right\} f_{ik} dS = 0.$$

Da qui, per l'arbitrarietà del campo S e delle f_{ik} , si deducono le equazioni

$$(7) \quad 4 \left\{ \sum_{hj} e_{hjk} \gamma_{hji} - \sum_h e_{ikh} \gamma_h \right\} + \epsilon_{ik} A = 0.$$

(1) Questa integrazione per parti si ottiene con una formula da me stabilita nel § 4 della Nota *Sui fondamenti del calcolo differenziale assoluto* («Rend. del Circolo matem. di Palermo», t. XLIII, 1918-19, p. 192). La formula è stabilita per sistemi covarianti e controvarianti, ma è subito trasformabile in una valida per sistemi invarianti.

Operando in modo perfettamente analogo sulla seconda delle (3) si trova invece

$$(8) \quad 2 \sum_h \{ e_{khi/h} - e_{hki/h} + \sum_j (e_{hkj} \gamma_{jhi} - e_{hjh} \gamma_{jhi}) \} + \varepsilon_{ik} B = 0.$$

2. Mediante le e_{ihk} si possono esprimere le rotazioni di Ricci con le formule

$$\gamma_{ihk} = \frac{1}{2} (e_{ihk} + e_{hki} - e_{khi}).$$

Con le rotazioni γ si possono poi costruire, in modo noto, le componenti intrinseche del tensore di curvatura di Riemann

$$\gamma_{ij, kh} = \frac{\partial \gamma_{ijk}}{\partial s_h} - \frac{\partial \gamma_{ijh}}{\partial s_k} + \sum_r \{ \gamma_{ijr} (\gamma_{rkh} - \gamma_{rkh}) + \gamma_{ril} \gamma_{rjk} - \gamma_{rik} \gamma_{rjh} \}.$$

Se si fa $h = j$ e si somma rispetto ad j , ponendo $\Gamma_{ik} = \sum_j \gamma_{ij, kj}$ si ottiene

$$(9) \quad \Gamma_{ik} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial s_k} + \sum_h \{ \gamma_{ihh/h} + \Phi_h \gamma_{ihh} - \sum_j \gamma_{hij} \gamma_{bjk} \},$$

dove si è posto

$$(10) \quad \Phi_i = \sum_j \gamma_{ji}^j.$$

Per note proprietà delle $\gamma_{ij, kh}$ i secondi membri delle (9) sono simmetrici rispetto agli indici i e k . Le Γ_{ik} non sono altro che le componenti intrinseche (a meno del segno) del tensore contratto di Riemann $G_{ik} = \sum_j \{ ij, jk \}$, cosicchè le equazioni gravitazionali della Relatività generale sono $\Gamma_{ik} = 0$.

Nelle (9) si faccia $i = k$ e si sommi rispetto ad i ; si ottiene la curvatura media della varietà V_n sotto la forma

$$(11) \quad G = 2 \sum_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial s_i} - \sum_i \Phi_i^2 - \sum_{ihk} \gamma_{ihk} \gamma_{khi}.$$

Ciò premesso, mediante le (9) e (10) si trasformino le (7) e (8). Viene

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4 \left\{ \Gamma_{ik} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial s_k} - \sum_h \gamma_{ihh/h} + \sum_{hj} (\gamma_{bij} \gamma_{bjk} + \gamma_{bkj} \gamma_{kji} - \gamma_{bji} \gamma_{bjk}) \right\} + \varepsilon_{ik} A = 0 \\ 2 \left\{ \Gamma_{ik} - 2 \frac{\partial \Phi_k}{\partial s_i} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial s_k} + \sum_h \gamma_{ikh/h} - \sum_{hj} (\gamma_{bij} \gamma_{bjk} + \gamma_{bkj} \gamma_{kji} - \gamma_{bji} \gamma_{bjk}) \right\} + \varepsilon_{ik} B = 0. \end{array} \right.$$

Se si ammette, con Einstein, che un campo gravitazionale puro si abbia quando si annullano le grandezze Φ_i , si vede tosto che, introdotte nelle ultime formule l'ipotesi $\Phi_i = 0$, non si ottengono le equazioni gravitazionali $\Gamma_{ik} = 0$.

È manifesto pertanto che, se la nuova teoria di Einstein è destinata al successo, è necessario modificare la funzione universale. Appare naturale assaggiare una combinazione lineare di A e B. L'unica che sembra conveniente è

$$H = A + 2B,$$

la quale per sè stessa non è espressiva, ma lo diventa se si introducono al posto delle e_{ikh} le rotazioni γ_{ikh} . Si ha infatti

$$H = \sum_{ikh} \gamma_{ikh} \gamma_{khi}.$$

Partendo da questa funzione e dal solito principio variazionale

$$\delta \int H dS = 0,$$

si traggono le equazioni

$$(13) \quad \Gamma_{ik} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial S_k} + \frac{1}{2} \epsilon_{ik} H = 0,$$

che qui, per i calcoli fatti, si possono senz'altro dedurre dalle (12).

Le equazioni ottenute dovrebbero caratterizzare in modo globale campo gravitazionale e campo elettrico.

Facendo nelle (13) $i = k$ e sommando viene, tenendo conto di (11),

$$(14) \quad \sum_i \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial S_i} - \Phi_i^2 \right) + \frac{n-2}{2} H = 0.$$

Quando manca il campo elettrico da qui si ottiene $H = 0$ e dalle (13) scendono effettivamente le equazioni gravitazionali $\Gamma_{ik} = 0$.

Sottraendo ora dalle (13) quelle che si ottengono con lo scambio di i con k , viene

$$(15) \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial S_k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial S_i} = 0.$$

Queste non sembrano essere le equazioni del campo elettrico, perchè non preludono all'esistenza di un potenziale. Però presuppongo che ciò sia dovuto alla presenza del campo gravitazionale. Se infatti si ammette *a priori* di poter separare il campo elettrico da quello gravitazionale con le condizioni $\Gamma_{ik} = 0$, dalle (13) si ottiene

$$(16) \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial S_k} = \frac{1}{2} \epsilon_{ik} H,$$

con

$$H = \frac{1}{n-1} \sum_j \Phi_j^2.$$

Formando le condizioni di integrabilità⁽¹⁾ si trova

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial s_j \partial s_k} - \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial s_k \partial s_j} = \sum_b (\gamma_{bjk} - \gamma_{bji}) \frac{\partial \Phi_i}{\partial s_b} = \frac{1}{n-1} \left(\varepsilon_{ik} \frac{\partial H}{\partial s_j} - \varepsilon_{ij} \frac{\partial H}{\partial s_k} \right)$$

e da qui

$$\gamma_{ijk} - \gamma_{ikj} = \frac{1}{n-1} (\varepsilon_{ik} \Phi_j - \varepsilon_{ij} \Phi_k),$$

donde

$$\sum_j (\gamma_{jik} - \gamma_{jki}) \Phi_j = 0.$$

Sommando queste equazioni con le (15) si ottiene

$$\Phi_{ijk} = \Phi_{kji}$$

e queste esprimono che le Φ_i sono le derivate intrinseche di una funzione, ossia esiste un potenziale.

3. Le equazioni (13) sono in generale in numero di n^2 e contengono le n^2 incognite λ_{ijr} . Questo significherebbe che la varietà V_n è univocamente determinata; ma non è così, perchè è facile provare che dalle equazioni (13) o, più generalmente, da quelle provenienti da una qualunque funzione universale, scendono sempre n identità.

Alle coordinate x_i se ne sostituiscano delle nuove legate alle antiche dalle relazioni

$$x'_i = x_i + \xi^i$$

dove le ξ^i denotano n funzioni infinitesime arbitrarie, costituenti un sistema semplice controvariante e si attribuiscono poi alle λ_{ijr} non degli incrementi arbitrari, ma quelli che a loro competono per l'operato cambiamento di variabili.

Dal pfaffiano

$$\psi_i = \sum_r \lambda_{ijr} dx_r,$$

considerato come invariante, si ottiene

$$\delta \psi_i = \sum_{rs} \left\{ \frac{\partial \lambda_{ijr}}{\partial x_s} \xi^s + \lambda_{ijr} \frac{\partial \xi^r}{\partial x_s} \right\} dx_r,$$

od anche, ponendo

$$\xi^r = \sum_j \eta_j \lambda_j^r$$

(con che le η_j sono invarianti arbitrari al pari delle ξ^r)

$$\delta \psi_i = \sum_k \left\{ \eta_{ik} + \sum_j \gamma_{ijk} \eta_j \right\} \psi_k.$$

(1) LEVI-CIVITA, loc. cit., p. 290.

D'altra parte

$$\delta\psi_i = \sum_r \delta\lambda_{ir} dx_r = \sum_k f_{ik} \psi_k,$$

quindi

$$(18) \quad f_{ik} = \eta_{i|k} + \sum_j \gamma_{ikj} \eta_j.$$

Ciò premesso, si supponga che partendo da una fissata funzione universale si sia giunti alle equazioni

$$\int_S \sum_{ik} A_{ik} f_{ik} dS = 0.$$

Sostituendo alle f_{ik} le espressioni (18), viene

$$\int_S \sum_{ik} A_{ik} (\eta_{i|k} + \sum_j \gamma_{ikj} \eta_j) dS = 0,$$

da cui, mediante una integrazione per parti,

$$\int_S \sum_{ik} \left\{ -A_{ik|k} + \sum_j A_{jk} \gamma_{jki} \right\} \eta_i dS = 0.$$

Data l'arbitrarietà delle η_i e del campo S , da qui si ottengono le n identità preannunciate

$$\sum_k \left\{ -A_{ik|k} + \sum_j A_{jk} \gamma_{jki} \right\} dS = 0.$$

Se le A_{ik} formano un sistema doppio simmetrico (come, p. es., Γ_{ik}) il secondo addendo è identicamente nullo e si ha il teorema della divergenza.

Astronomia. — *Saggio di confronto fra le grandezze fotografiche di varie zone del Catalogo Astrografico.* Nota di L. GENOVESE, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. A. BEMPORAD.

Venti Osservatori distribuiti nelle varie parti del mondo (Parigi, Bordeaux, Tolosa, Algeri, Greenwich, Oxford, Edinburgo, Città del Capo, Hyderabad, San Fernando, Potsdam, Helsingfors, Sydney, Melbourne, Perth, Cordoba, Tacubaya, Vaticano, Catania, Napoli) sono attualmente occupati a condurre a termine la grande impresa del Catalogo Astrografico destinato a fornire le posizioni e le luminosità esatte per tutte le stelle accessibili fino alla 11^a grandezza (fotografica). La fotografia celeste ha assolto magnificamente in pochi anni il compito di registrare circa un milione di posizioni stellari, quali apparivano su tutta la volta celeste attorno al 1900.

Assai più laborioso si è poi rivelato il lavoro di misura delle lastre e la successiva pubblicazione delle posizioni in forma di catalogo.

Ciò si deve in gran parte al fatto che nelle conferenze tenute a Parigi nel 1887 sotto la presidenza dell'ammiraglio Mouchez e successivamente sotto Loewy e Baillaud, si riuscì bensì a ottenere una intesa perfetta per quanto riguardava i procedimenti tecnici di esecuzione delle lastre, ma si lasciò a ciascun Osservatorio la cura di studiare i mezzi più opportuni per la misura o stima delle grandezze stellari, mentre si doveva prescindere completamente dalla formazione delle coordinate equatoriali riservata ad un secondo tempo. Avvenne così che alcuni Osservatori (come Helsingfors, Catania, Potsdam) giudicarono conveniente pubblicare subito le coordinate equatoriali, gli altri tutti si limitarono a pubblicare le sole coordinate rettilinee e quanto alle grandezze, si ebbero quasi tanti metodi di formazione quanti erano gli Osservatori partecipanti all'impresa, coll'inconveniente manifesto che per una medesima stella, contenuta in due o più lastre, risultano in generale grandezze molto diverse, soprattutto quando si tratta di lastre contenute in due diverse zone, cioè ottenute da due diversi Osservatori.

Solo in epoca relativamente recente il prof. Turner in una serie di ricerche apparse nelle « Monthly Notices » ha cominciato a pubblicare studi critici intorno ai sistemi di grandezze stellari adottati nei vari cataloghi che uscivano man mano. Nel medesimo intento, cioè per costituire una base sicura che permettesse di saggiare con uniformità di procedimenti gli errori sistematici delle grandezze stellari delle varie zone del Catalogo Astro-

(1) Nella seduta del 7 aprile 1929.

grafico, Miss Leavitt pubblicava ⁽¹⁾ nel 1919 un accurato studio contenente regioni prescelte a regolari intervalli (8° in media in Declinazione e 2^h in A. R.) e in ciascuna regione una ventina di stelle convenientemente scelte dalle più lucide alle più deboli, fino alla quindicesima grandezza, con coordinate equatoriali approssimate tanto quanto basta ad assicurare la identificazione e con luminosità fotografiche esatte, per quanto è possibile ottenerle, utilizzando il vastissimo materiale fotometrico e fotografico raccolto negli « Annali di Harvard College ». Tali grandezze sono state ricavate per mezzo di lastre disposte in serie ⁽²⁾, utilizzando la misura di due o più immagini. Il valore medio dei residui di ogni singola misura rispetto al medio delle varie determinazioni è di circa $\pm 0^m.10$. La scala adottata è quella stabilita dal Comitato Internazionale nel 1910 e 1913.

Avendo avuto dal prof. A. Bemporad il gradito incarico di istituire ricerche intorno al grado di precisione delle grandezze ottenute col metodo da lui proposto anni sono in questi « Rendiconti » ⁽³⁾, ho pensato che, oltre la precisione intrinseca dei risultati, già studiata dal prof. Bemporad nella introduzione alla zona $+48^{\circ}$ del Catalogo Astrografico (Napoli 1928), si potessero ricavare riscontri di notevole interesse confrontando le grandezze che diremo di Napoli col sistema fotometrico di Miss Leavitt. Estendendo poi il confronto ad altre zone fra quelle che hanno pubblicato le grandezze stellari, abbiamo potuto convincerci della superiorità del metodo di riduzione fotometrica adottato a Napoli.

Mi sia consentito di esprimere pubblicamente la mia gratitudine al prof. A. Bemporad che mi fu largo di consigli e di aiuto nella esecuzione della presente ricerca.

I risultati dei confronti sono riportati nella forma più concisa possibile nelle seguenti tabelle. I numeri d'ordine delle stelle si riferiscono agli elenchi pubblicati nel lavoro di Miss Leavitt.

Potsdam. — Il metodo usato a Potsdam per determinare le grandezze stellari è esposto dal prof. Scheiner (Introduzione al 1° vol.) all'incirca nei seguenti termini: Per alcune lastre fu fatto il confronto diretto delle immagini fotografiche colla Bonner Durchmusterung. Dal confronto risultò una relazione molto semplice fra il diametro delle stelle di 9^a e la distanza dei due fili del micrometro. Si stabilì quindi una scala per passare dai diametri alle grandezze. Per le stelle oltre la 9^a , non essendo più possibile il raccordo con la Bonner Durchmusterung, si stabilì di assegnare la grandezza 11^a a tutte le stelle che con posa di 5^m risultassero appena visibili e quindi per interpolazione si ricavarono le grandezze delle stelle comprese fra la 9^a e l' 11^a .

(1) « Annals of the astronomical Observatory of Harvard College », vol. 85, 1.

(2) Cfr. « Annals », vol. 71, p. 235.

(3) Cfr. « Rendiconti », vol. XXXVII, ser. V, p. 245.

Col procedimento in parola, oltre ad essere arbitraria la determinazione delle grandezze fra la 9^a e l'11^a, non si tiene conto delle condizioni atmosferiche in cui venne eseguita la fotografia, nè della qualità dell'emulsione, nè della posizione dell'immagine sulla lastra.

Risultano i seguenti scarti medi e massimi dalle grandezze di Miss Leavitt (P — L).

Potsdam			Stelle	Scarto: P — L	
—			—	medio	massimo
Lastra n. 14	vol. I		n. 2 e n. 5 — 11	— 1.5	— 2.6
» » 15	» »		» 1, 4, 7, 8, 10	— 1.2	— 2.1
» » 41	» »		» 1 — 9	— 0.6	— 1.1
» » 54	» »		» 2 — 9	— 0.4	— 0.9
» » 55	» »		» 1, 6, 9, 10	— 1.1	— 1.5
» » 68	» »		» 1 — 7	— 0.4	— 1.0
In media				— 0.9	— 1.5

Helsingfors. — Grandezze ottenute *a stima*, basandosi sui diametri delle stelle di 9^a e di 11^a grandezza delle *aree tipiche* di Pritchard-Kapteyn. Abbiamo potuto confrontare solo due lastre del Tome I colle regioni di Miss Leavitt; però i risultati concordano perfettamente.

Helsingfors		Stelle	Scarto: H — L	
—		—	medio	massimo
Cliché n. 4	Tome I	n. 1 — 3, 6 — 10	— 1.8	— 3.1
» » 43	»	» 1, 3 — 5, 7 — 11	— 1.7	— 3.0

Vaticano. — La Specola Vaticana comunica per ciascuna stella il solo diametro e inoltre una formola empirica del tipo $m = a - b\sqrt{d}$ proposta originariamente dal Christie ⁽¹⁾ e molto usata negli Osservatori inglesi. I valori delle costanti a , b dovrebbero variare da lastra a lastra, ma b rimane praticamente costante. Le lastre esaminate appartengono tutte al volume X (zona + 54°)

Lastra	Stelle	Scarto: V — L	
		medio	massimo
n. 35	n. 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10	— 0.7	— 1.2
» 36	» 1, 2, 4 — 11	— 0.7	— 1.0
» 45	» 1 — 7	— 0.7	— 1.1
» 46	» 2, 3, 4, 5, 7	— 1.0	— 2.0
» 55	» 3, 5, 6, 7, 8, 9	— 0.8	— 1.6
» 56	» 1 — 9	— 1.3	— 1.7
In media		— 0.9	— 1.4

(1) *On the Relation between Diameter of image, Duration of Exposure, ... in Photograph of Stars taken at the Royal Observatory, Greenwich*, by W. H. M. CHRISTIE, «Monthly Notices», vol. LII, 1891-92, p. 125.

Catania. — La zona di Catania (da $+46^{\circ}$ a $+55^{\circ}$) comprende 1008 lastre, di cui la metà, da 6^h a 18^h , viene ridotta a Napoli; l'altra metà in parte è già ridotta e stampata, in parte viene ridotta nello stesso Osservatorio astrofisico di Catania. Per questa parte e precisamente per la prima serie di volumi stampati fra il 1908 e il 1924, venne usata la semplice formola lineare $m = a - bD$ (proposta a suo tempo dallo Scheiner) ⁽¹⁾, rinunciando beninteso a ricavare le grandezze fotografiche per le stelle più lucide della 7^a. Più tardi il prof. A. Bemporad, appena venuto alla luce il « Draper Catalogue », che fornisce, insieme coi tipi spettrali di tutte le stelle fin oltre la 9^a, anche le grandezze fotografiche ricavate da varie fonti (cataloghi fotometrici e fotografici, « Durchmusterung » ecc.), ritenne più razionale fondare le riduzioni fotometriche delle varie lastre sui dati forniti dal detto catalogo che rappresenta attualmente il più esteso repertorio di grandezze fotografiche. Da numerosi saggi il prof. A. Bemporad ottenne come formola rappresentativa della relazione fra i diametri D e le grandezze fotografiche G ricavate dal Draper:

$$(1) \quad D = a + bg + cg^2 + dg^3$$

$$g = G - 8^M.$$

Prima di procedere alla riduzione il prof. A. Bemporad stima *ex novo* i diametri di tutte le stelle di ciascuna lastra, tenendo il debito conto del grado di nerezza per le stelle più deboli e correggendo dell'effetto di distorsione i diametri delle stelle in angolo e specialmente con ordinata y superiore a $30'$. Per tutte le stelle di una data lastra che risultano contenute nel « Draper Catalogue » si raggruppano in medie i diametri misurati D e le grandezze G (Draper) in modo da ottenere 4 o più coppie di valori che si rappresentano graficamente in una scala arbitraria. Tracciata a mano libera una curva che passi attraverso i punti rappresentativi con l'andamento conosciuto della parabola cubica, si ricavano per quattro ascisse g a intervalli uguali i corrispondenti valori di D e quindi, colla formola di Stirling arrestata al termine di 3° grado, si ottengono immediatamente col procedimento delle differenze finite i valori dei coefficienti a, b, c, d . Per la riduzione definitiva si utilizzano anche i valori delle grandezze limiti (corrispondenti a $D = 1$) quali risultano dal confronto delle stelle più deboli sulla lastra in esame e sulle quattro o sei che parzialmente la ricoprono e di cui si suppone già ottenuta, in prima approssimazione la corrispondente formola (1). Questo procedimento di approssimazioni successive può sembrare a prima vista eccessivamente laborioso, ma l'esperienza ha dimostrato che non può farsi a meno dei raccordi colle lastre contigue, soprattutto nel caso non infrequente che una data lastra contenga appena

(1) SCHEINER. *Die Photographie der Gestirne*, p. 215.

2 o 3 stelle del « Draper Catalogue », nel qual caso la determinazione diretta dei coefficienti della (1) diviene naturalmente impossibile. Ottenuti i valori dei coefficienti, la risoluzione dell'equazione cubica per passare dai D alle G vien fatta tabulando i valori di D di decimo in decimo di grandezza e invertendo poi la tabella. Questo procedimento permette di ottenere i valori di G teoricamente esatti fino al centesimo, mentre praticamente basta il decimo.

Vediamo ora i risultati del confronto fra gli accennati Cataloghi di Catania e di Napoli e le grandezze fotografiche di Miss Leavitt.

a) Lastre ridotte a Catania: formola lineare per le primè tre lastre, formola cubica per le altre due.

Lastra	—	Stelle	—	Scarto: C — L	
				medio	massimo
n. 1852	6 ^h 5 ^m + 47°	n. 2, 3, 4, 6, 9, 10		— 0.9	— 1.4
» 1921	1 55 + 47	» 1 — 8		— 0.5	— 0.8
» 2305	2 5 + 47	» 1, 5, 7		— 0.2	— 0.7
» 846	3 55 + 47	» 5 — 11		— 0.3	— 0.7
» 1932	4 5 + 47	» 1, 2, 3, 4, 7		— 0.2	— 0.6
In media				— 0.4	— 0.8

b) Lastre ridotte a Napoli: formola cubica

Lastra	—	Stelle	—	Scarto: N — L	
				medio	massimo
n. 1487	7 ^h 55 ^m + 47°	n. 1, 3, 4, 5, 6		— 0.5	— 1.0
» 1849	8 5 + 47	» 1, 2, 4, 6		— 0.2	— 0.3
» 871	9 55 + 47	» 1 — 5		— 0.3	— 0.6
» 3353	10 5 + 47	» 3, 4, 6, 7		— 0.3	— 0.5
» 552	11 55 + 47	» 1, 3 — 8		— 0.2	+ 0.7
» 2320	7 0 + 54	» 1 — 11		— 0.5	— 1.0
» 1933	9 0 + 54	» 1 — 7		— 0.2	— 0.5
» 1993	11 0 + 54	» 1 — 7		— 0.0	— 0.4
In media				— 0.3	± 0.6

I risultati della nostra discussione sono per sè stessi abbastanza eloquenti, tanto da rendere inutili ulteriori commenti. Mentre per le altre zone esaminate si hanno errori sistematici di *una grandezza stellare o più*, tali errori scendono per la zona di Catania al disotto di *mezza grandezza* e per la parte ridotta a Napoli col sussidio della formola cubica a soli *tre decimi di grandezza*.

Astronomia. — *Curva di luce e periodo di « W Ursae majoris ».* Nota di G. VIOLA, presentata dal Corrisp. A. BEMPORAD.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geodesia. — *Semplici e rapidi procedimenti di correzione topografica.* Nota di A. BELLUIGI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

I. — I valori di osservazione, ricavati con la bilancia di Eötvös, sono influenzati, com'è noto, dalle masse che si trovano al disopra ed al disotto del piede dell'istrumento; le elevazioni e gli avvallamenti di terreno disturbano nella individuazione delle masse immerse nel sottosuolo, a densità differenziale diversa da zero.

Occorre così correggere i valori di osservazione strumentale dalle influenze topografiche.

I metodi analitici di correzione hanno subito due fasi: formule generali con limitazioni topografiche (Eötvös, Schweydar, Ansel) formule generali per qualsiasi pendenza di terreno ⁽²⁾, oltre una quantità di formule particolari.

I procedimenti grafici offrono, fra gli altri, il grave inconveniente delle suddivisioni prefissate del terreno ed, a rigore, non sono mai esclusivamente grafici per cui, secondo noi, possono essere utilizzati solo per correzioni cartografiche ⁽³⁾.

Un'esperienza di tremila stazioni gravimetriche ci suggerisce che il problema topografico, mentre potrebbe apparire esclusivamente analitico, si presenta invece, nella prospezione mineraria, come un problema pratico, di scelta conveniente di stazioni, di opportune suddivisioni azimutali e radiali del terreno. Saranno perciò da preferirsi quei procedimenti di correzione che qui svilupperemo, che, oltre una maggiore esattezza possibile, permettono di eseguire stazioni in località anche impervie con possibilità di libera scelta delle suddivisioni del terreno, nel tempo minimo. La rapidità dei rilievi costituisce pure un problema importante, sia per rispondere sollecitamente al problema minerario, sia per ridurre il costo del rilievo.

(1) Nella seduta del 7 aprile 1929.

(2) A. BELLUIGI, *Sul calcolo della profondità di masse profonde gravimetricamente perturbanti.* « Gerlands Beiträge zur Geoph », B. d. XXI, Heft 2/3 1929.

(3) NUMEROV, *Graphische methode zur Berücksichtigung des topographischen Einflusses u. s. w.* « Zeit. f. Geoph. », I, Jahrg. s. 367. I procedimenti di Jung ed Haalck non sono che sviluppi del metodo di Numerov, il quale ultimo s'ispira alle formule di HAYFORD e BOWIE: *The effect of topographys and isostasy compensation*, ecc.

2. - Partiamo dalle espressioni in coordinate cilindriche delle derivate seconde dalla funzione potenziale di attrazione U di una massa di densità σ su una massa unitaria situata nell'origine delle coordinate x, y, z , $x = \rho \cos \alpha$ nella direzione del meridiano magnetico passante per l'origine, positivo a nord, $y = \rho \sin \alpha$ positivo ad est, z verticale positiva verso il basso:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = \rho^2 + z^2$$

K la costante di gravitazione, $dm = \sigma dv$, $dv = dx dy dz = \rho d\rho d\alpha dz$.

Ponendo:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} = U_{xz} \quad ; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} = U_{yz} \quad ; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = U_{xy} \quad ; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = U_{\Delta}.$$

$$(2) \quad A_1 = \int \frac{\rho^2 z}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} d\rho dz \quad ; \quad A_2 = \int \frac{\rho^3}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} d\rho dz.$$

$$(3) \quad \sum a_2 = \int_0^{2\pi} \sin \alpha d\alpha = \sum_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha \quad ; \quad \int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha = \sum_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha = \sum a_1.$$

Si ottiene:

$$(4) \quad U_{xz} = 3 K \sigma \sum a_1 \cdot A_1 \quad ; \quad U_{yz} = 3 K \sigma \sum a_2 \cdot A_2.$$

Omettiamo, per brevità, le formule della curvatura.

Poichè in generale, $z = f(\alpha\rho)$ (z si può rilevare solo in un numero discreto di punti) si tratta di rendere esplicita $z = f(\alpha\rho)$, in modo che essa sia conforme, il più possibile, con la superficie del terreno.

Eötvös assunse, com'è noto, $z = c + a\alpha + b\rho\alpha + d\rho$ Schweydar $z = f + \gamma\rho$ (vedi lavori citati) ma ne derivarono calcoli complessi e formule infine molto approssimate.

Poichè in un intervallo piccolo a piacere ($\alpha_2 - \alpha_1$; $\rho_{k+1} - \rho_k$) si può sempre ritenere z costante, oppure si può calcolare una z costante di compensazione, si ottiene per A_1 :

$$(5) \quad A_1 = \sum \left\{ \ln \rho \left(1 + \sqrt{1 + \frac{z^2}{\rho^2}} \right) - \left(1 + \sqrt{1 + \frac{z^2}{\rho^2}} \right)^{-1} \right\}_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}.$$

Sostituendo la (5) nelle (4) si ottengono così formule generali.

È evidente che se nelle (4) poniamo, per A_1 , i valori (5), si può pervenire a formule per correzioni topografiche, esatte quanto si vuole, valide per qualsiasi pendenza del terreno, senza limitazioni di applicabilità delle formule, limitazioni che derivano, più che dalle speciali assunzioni di $z = f(\alpha\rho)$, dal calcolo approssimativo delle A_1 .

Spesso è superfluo suddividere il terreno in un numero $2\pi : n$ di azimut ed in una $\sum_{k=1}^n (\rho_k - \rho_{k+1})$ con n molto grande, ed allora le (3) si

riducono a pochi fattori. Servono altrettanto bene, purchè applicate con opportuni criteri, formule ancora più semplici delle precedenti che indicheremo subito.

Suddividiamo al solito il terreno, intorno alla stazione, in corone circolari ed indichiamo con Ω il cerchio esternamente al quale non si risente più la influenza dell'altezza baricentrica h del gradiometro.

Due tipi di formule potranno così adoperarsi, quelli riguardanti la correzione esterna ad Ω e quelli riguardanti la correzione interna ad Ω .

Nel primo caso $(\rho^2 + \chi^2)$ o $[\rho^2 + (h - \chi)^2]$ si possono assimilare a ρ^2 e le (4) si riducono facilmente al tipo:

$$(6) \quad U_{\chi\chi} = \sigma \sum \{ (\chi_1^2 + \chi_8^2) - (\chi_4^2 + \chi_5^2) \} c_p + \sigma \{ (\chi_2^2 + \chi_7^2) - (\chi_3^2 + \chi_6^2) \} c'_p$$

dove c_p, c'_p sono coefficienti costanti, caratteristici, per ogni corona circolare, e gli indici delle χ si riferiscono ad 8 azimuts.

Nel secondo caso converrà utilizzare la (5), tenendo presente l'altezza baricentrica per cui:

$$(7) \quad (A_1)_{\chi=0}^{\chi=h} = \Phi_{\frac{h}{k}}^{k+1} (h - \chi) - \Phi_{\frac{h}{k}}^{k+1} (h)$$

oppure la (A_1) che deriva dall'assunzione di $\chi = m\rho$:

$$(8) \quad (A_1)_{**} = - (1 + m)^{-1/2} \{ \ln M + N \}_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}$$

formula simile alla (5) dove M e N sono però espressioni, piuttosto complesse, di h, m, ρ , espressioni che qui, per brevità, omettiamo.

Può essere opportuno dividere ulteriormente in due corone circolari la zona interna ad Ω , con un cerchio Ω' , ed applicare le formule che derivano dalla (8) solo ai cerchi interni ad Ω' e formule più approssimate ai cerchi compresi nella zona $\Omega - \Omega'$.

Basta osservare allora che per $\rho' > \rho$ minimo (facilmente determinabile a seconda dei valori di χ) $r^2 = \rho^2 + (h - \chi)^2$ può assimilarsi spesso a $(\rho^2 + h^2)$ senza commettere un errore superiore alla sensibilità normale della bilancia. Ciò equivale limitarsi a prendere i primi due termini nello sviluppo in serie di

$$(9) \quad [\rho^2 + (h - \chi)^2]^{-1/2} = (\rho^2 + h^2)^{-1/2} \left[1 - \frac{2h\chi - \chi^2}{\rho^2 + h^2} \right]^{-1/2}$$

ossia trascurare $\frac{2h\chi - \chi^2}{\rho^2 + h^2}$ come hanno postulato Eötvös e Schweydar senza rilevarne il significato fisico. Le formule si semplificano, riducendosi l'integrale rispetto a ρ al tipo:

$$(10) \quad (A_1)_{***} = \rho^3 [3 h^2 (\rho^2 + h^2)^{1/2}]^{-1}.$$

I limiti entro cui è tollerabile la limitazione posta, i limiti che condizionano l'applicabilità o meno, oltre che del procedimento qui definito, delle formule di Eötvös e Schweydar, si possono anche definire calcolando l'errore relativo ε_r rispetto al primo termine dello sviluppo in serie:

$$\varepsilon_r = f\left(\frac{\rho}{h}\right) = \frac{5m}{2} \left[\frac{\frac{\rho}{h}}{1 + \left(\frac{\rho}{h}\right)^2} \right] \left(1 - \frac{m\rho}{2h}\right)^2$$

dove $\chi = m\rho$ per m costante nell'intervallo di due cerchi consecutivi, ε_r aumenta con l'aumentare di χ ed ha il comportamento della $f\left(\frac{\rho}{h}\right)$.

Mentre con i procedimenti analitici si è seguito, per la distribuzione dei cerchi topografici, criteri empirici, Numerov, Jung ed altri, con i procedimenti grafici, hanno posto vincoli *a priori* nella distribuzione dei cerchi, giustificati solo da esigenze analitiche. Eppure il calcolo dell'azione del terreno ha bisogno di grande precisione, nelle immediate vicinanze della bilancia, in particolare se i valori di osservazione variometrica sono piccoli, precisione che non si può certo ottenere con distribuzione *a priori* di cerchi e raggi.

È inutile che occorre infittire i cerchi a partire dalle immediate vicinanze dell'apparecchio.

È facile vedere però a quale distanza della bilancia conviene tracciare il primo cerchio, calcolando la distanza da cui un elemento di massa del terreno superficiale esercita un'influenza massima di gradiente e curvatura. Riferentesi al solito sistema di assi ortogonali, considerando l'elemento di massa nel piano meridiano magnetico si ha $y = 0$ e quindi:

$$U_{x\chi} = 3K\sigma x\chi(x^2 + \chi^2)^{-5/2} dv \quad ; \quad U_{y\chi} = 0 \quad ; \quad U_{xy} = 0 \\ U_{\Delta} = 3K\sigma(y^2 - x^2)(x^2 + \chi^2)^{-5/2} dv.$$

Poichè la derivata prima di $U_{x\chi}$ rispetto ad x è proporzionale a $3K\sigma\chi(\chi^2 - 4x^2)(x^2 + \chi^2)^{-7/2}$ e si annulla per $x = \pm \frac{\chi}{2}$, poichè la derivata seconda di $U_{x\chi}$ è proporzionale a $-5K\sigma\chi(3\chi^2 - 4x^2)(x^2 + \chi^2)^{-9/2}$ ed è positiva per $x = +\frac{\chi}{2}$, negativa per $x = -\frac{\chi}{2}$.

$$\frac{\partial^2 U_{x\chi}}{\partial x^2} = -5K\sigma\chi^4 \left(\frac{5}{4}\chi^2\right)^{-9/2} \quad \text{per } x = +\frac{\chi}{2}$$

si conclude che per $x = +\frac{\chi}{2}$ l'elemento di massa considerato provoca, sul variometro, un massimo effetto di gradiente.

Se si considera la derivata prima di U_{Δ} , $3K\sigma x(3x^2 - 2\chi^2)^{-5/2}$ il massimo ed il minimo di U_{Δ} si ha o per $x = 0$ o per $x = \chi \sqrt{\frac{2}{3}}$.

La derivata seconda è proporzionale a $+3K(-12x^4 + 21x^2\chi^2 - 2\chi^4) \cdot (x^2 + \chi^2)^{-9/2}$, essa è negativa per $x = 0$ o per $x = \chi \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$. U_{Δ} si identifica con la curvatura poichè:

$$R = \pm [U_{\Delta}^2 + 4U_{xy}^2]^{1/2} = \pm U_{\Delta}.$$

Il fatto che l'influenza massima di gradiente sia per una certa distanza $\frac{\chi}{2}$ non ha, di per se stesso, importanza capitale al fine di infittire la suddivisione della correzione, anzi poichè vicino alla distanza l'influenza varia molto adagio col variare della distanza, si potrebbero apparentemente spaziare di molto i cerchi, solo apparentemente però, perchè la massima variazione si ha per $x = \chi \frac{\sqrt{3}}{2}$ quindi ancora ad una distanza, dal centro dell'apparecchio, abbastanza prossima. Per $h = 90$ cm. l'elemento di massa ha la stessa influenza allorchando è posto alle distanze comprese nei limiti: $0,45 \pm 0,25$ cm. Si conclude che il primo cerchio si deve considerare, dato $h = 90$ cm. a m. 0,70 dal piede dell'istrumento. Gli ulteriori cerchi concentrici si devono distribuire, tenendo conto soprattutto della particolare configurazione del terreno. Lo stesso dicasi per gli azimuts che da otto, com'è normale, si possono portare ad un numero maggiore ed a valore angolare differente.

Se ci si accorge di influenze topografiche dovute a terreno mosso, o ad inomogeneità dell'immediato sottosuolo, conviene alzare il baricentro del variometro. Nelle formule di Schweidar, che rimangono sempre molto buone, appaiono coefficienti per i quali si ricava con facili calcoli:

Coefficiente $h = 120$ cm. relativo al 1° cerchio a 150 cm. dalla stazione è uguale al coefficiente $h = 90$ cm. relativo al 3° cerchio a 500 cm. dalla stazione, dove h è l'altezza baricentrica.

Concludendo: 1) abbiamo indicato più tipi di formule: (5), (6), (7), (8), (9), (10) per rapide correzioni topografiche, con possibilità di suddividere a piacere il terreno, con esattezza di correzione superiore od uguale a quelle che si raggiungono con i vecchi procedimenti; 2) abbiamo risposto alla esigenza di una distribuzione razionale dei cerchi topografici ed accennato all'importanza degli espedienti strumentali per ridurre le influenze non calcolabili delle accidentalità del terreno, con un esempio dedotto applicando le formule di Schweydar.

Geofisica. — *Relazioni tra i parametri dell'Ellissoide terrestre e i valori della gravità.* Nota di C. MINEO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. ANGELITTI.

In miei scritti precedenti, ho dato lo sviluppo *rigoroso* della gravità superficiale d'un pianeta supposto ellissoidico di rotazione.

Questo sviluppo è

$$(1) \quad g = \gamma_0 + \gamma_1 e^2 + \gamma_2 e^4 + \dots,$$

dove

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{fM}{a^2} - \frac{2}{3} \omega^2 a + \frac{5}{3} \omega^2 a P_2, \\ \gamma_1 &= \frac{fM}{3a^2} + \frac{1}{3} \omega^2 a - \left(\frac{fM}{3a^2} - \frac{19\omega^2 a}{42} \right) P_2 - \frac{6}{7} \omega^2 a P_4, \\ \gamma_2 &= \frac{2fM}{15a^2} + \frac{19}{84} \omega^2 a - \left(\frac{fM}{3a^2} - \frac{5\omega^2 a}{392} \right) P_2 + \left(\frac{fM}{5a^2} - \frac{361\omega^2 a}{539} \right) P_4 + \\ &\quad + \frac{95}{231} \omega^2 a P_6, \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

essendo a il semiasse maggiore dell'ellissoide, e la sua eccentricità, ω la velocità di rotazione del pianeta, M la sua massa totale, f la costante dell'attrazione universale, P_2, P_4, P_6, \dots i polinomi di Legendre nei quali per x si ponga il coseno della colatitudine polare θ ⁽²⁾.

Invertendo la serie (1), si ha

$$(3) \quad e^2 = \frac{1}{\gamma_1} (g - \gamma_0) - \frac{\gamma_2}{\gamma_1^2} (g - \gamma_0)^2 + \frac{2\gamma_2 - \gamma_3}{\gamma_1^3} (g - \gamma_0)^3 + \dots;$$

la quale risolve subito in modo rigoroso il problema, cui accenna il Somigliana ⁽³⁾, di determinare l'eccentricità dell'Ellissoide terrestre, quando siano

(1) Nella seduta del 7 aprile 1929.

(2) Cfr. MINEO, *Sullo sviluppo rigoroso in serie di funzioni sferiche del potenziale esterno e della gravità superficiale d'un pianeta*, « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », Bologna, Zanichelli, 1926, pp. 173-179; ed anche: *Sulla determinazione del potenziale esterno, ecc.*, « Atti della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo », vol. XIV, 1926-1927, pp. 3-13.

(3) Vedi SOMIGLIANA, *Sulla gravità normale e la formola di Helmholtz*, « Rend. Accademia dei Lincei », vol. VII, aprile 1928, p. 537.

dati il semiasse maggiore e un valore della gravità superficiale. Beninteso, però, ch'io intendo individuato il campo della gravità esterna per mezzo delle costanti a, e , della rotazione ω e della massa totale o della densità media della Terra: densità media che è ricerca di laboratorio di Fisica. La (3), che generalizza in un certo senso la famosa formola di Clairaut, ha il classico ufficio di stabilire un legame tra dati gravimetrici e dati geodetici, con tutta l'approssimazione compatibile col grado di precisione delle misure (soprattutto di quelle gravimetriche). A questo scopo, conviene mettersi all'equatore (o nelle vicinanze), dove è $\gamma_1 \simeq 490 \text{ cm./sec}^2$, nel caso della Terra: la (3) è allora rapidamente convergente e si vede che un errore di circa 0.003 cm/sec^2 nel valore osservato di g porta un errore di pressochè 6 unità della sesta decimale in e^2 .

Determinando sperimentalmente la gravità in due punti della Terra, si hanno due equazioni (3) [o due equazioni (1)], che bastano teoricamente per la deduzione dei parametri a ed e^2 .

Sono, però, da mantenere le obiezioni, che ho già fatto altrove, circa la convenienza di determinare quei parametri con sole misure di gravità ⁽¹⁾; ma si può veder subito che per la via ch'io qui propongo si perviene a formole incomparabilmente più vantaggiose di quelle proposte dal Somigliana.

Sia k la densità media della Terra, supponendo che la sua massa sia distribuita uniformemente in tutto il volume ellissoidico; si ha allora

$$(4) \quad M = \frac{4}{3} \pi k a^3 \sqrt{1 - e^2}$$

con la quale si può eliminare M dalle (1), (2), (3).

Chiamando g_e e g_p i valori osservati della gravità all'equatore e al polo, si trova, *fermandosi ai soli termini in e^2 e trascurando anche quelli in $\omega^2 e^2$* :

$$a \simeq \frac{6 g_e}{3 f k \pi - 9 \omega^2}, \quad e^2 \simeq \frac{4 f k \pi a + 3 \omega^2 a - g_p}{2 f k \pi a}.$$

Assumendo per la Terra

$$g_e = 978.030 \text{ cm/sec}^2, \quad g_p = 938.215 \text{ cm/sec}^2,$$

si deduce

$$a \simeq 6377897 \times 10^2 \text{ cm}, \quad e^2 \simeq 0.00670113.$$

E naturalmente, per mezzo della formola rigorosa (3), si può teoricamente spingere l'approssimazione quanto si vuole, salvo in pratica le incertezze dei valori sperimentali di g .

(1) Vedi MINEO, *Forma e grandezza della Terra e misure di gravità*, «R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo», vol. XV, 1928.

Fisica. — *Fenomeni di resistenza negativa in un diodo sottoposto a un campo magnetico.* Nota di I. RANZI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio Q. MAJORANA.

È noto che, se un diodo, con placca cilindrica e filamento situato nell'asse di questa, viene sottoposto alla azione di un campo magnetico uniforme parallelo al filamento, gli elettroni da questo emessi descrivono traiettorie, le cui proiezioni su un piano qualunque perpendicolare al filamento presentano la tendenza a rinchiudersi sul filamento stesso: per valori sufficientemente elevati del campo, le traiettorie elettroniche divengono tangenti alla placca, e, per valori superiori, la corrente elettronica tra filamento e placca cade a zero. Questi fenomeni sono stati dettagliatamente studiati da Hull, il quale ha dato il nome di « magnetron » al diodo posto nelle condizioni anzidette e ne ha indicato varie applicazioni ⁽²⁾. La teoria sviluppata da Hull porta a stabilire che esiste un valore critico H_c del campo magnetico, per cui, sotto una data differenza di potenziale V tra anodo e filamento, le traiettorie elettroniche divengono tangenti alla superficie interna della placca anodica; H_c è dato da

$$H_c = \sqrt{\frac{8m}{e}} \frac{\sqrt{V}}{R},$$

ove $\frac{m}{e}$ è il rapporto tra massa e carica dell'elettrone, R è il raggio dell'anodo. Per valori di H inferiori ad H_c , gli elettroni sono tutti raccolti dall'anodo, per valori superiori invece nessun elettrone è raccolto dall'anodo. In pratica si osserverà che la corrente non cade bruscamente a zero passando da $H < H_c$ ad $H > H_c$, ma che essa varia continuamente riducendosi a zero in un intervallo di H che contiene il valore teorico H_c , intervallo tanto più stretto quanto più è simmetrica la placca rispetto al filamento. In questo intervallo una piccola variazione nel valore del campo magnetico provoca una grande variazione della intensità di corrente tra filamento e placca: di qui derivano le applicazioni del « magnetron » alla misura di campi magnetici. Studiando appunto una possibile applicazione a misure del campo magnetico terrestre, mi si sono presentati alcuni interessanti fenomeni che passo a descrivere.

(1) Nella seduta del 7 aprile 1929.

(2) « Phys. Rev. » 18, 1921, p. 31; 22, 1923, p. 279; « Journ. Am. Inst. Elect. Eng. », sett. 1921.

Come diodo mi son servito di una valvola raddrizzatrice Philips DA 08/10, in cui l'anodo è costituito da una placca cilindrica di nichel del diametro di circa cm. 1,1 e della lunghezza di cm. 2,8; lungo l'asse di questa è posto il filamento di tungsteno, la cui lunghezza è approssimativamente di cm. 3. Disposto il diodo nel campo magnetico creato tra le estremità affacciate di due bobine di diametro sufficiente per assicurare una certa uniformità di campo, si verifica che, quando la direzione del campo coincide con quella del filamento, la variazione della corrente elettronica in funzione del campo avviene colle stesse modalità viste da Hull.

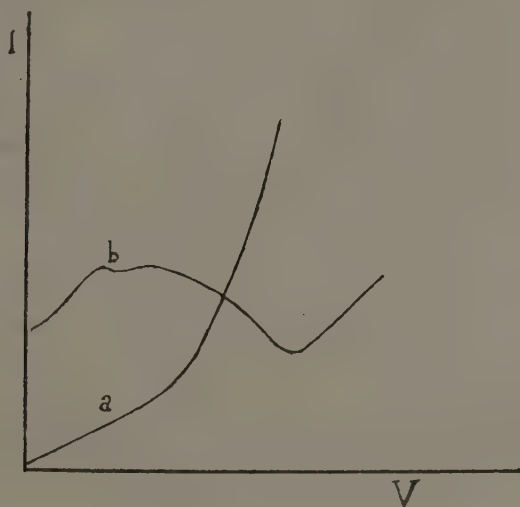


Fig. 1.

Se si dispone invece il diodo col filamento lievemente inclinato rispetto alla direzione del campo, tale variazione cambia completamente, notandosi che, a partire da certi valori del campo superiori a quello critico, all'aumentare del campo stesso la corrente elettronica, che dapprima diminuiva, va poi rapidamente aumentando fino a raggiungere un massimo, per poi tendere nuovamente a zero.

Ma molto più interessante è lo studio della variazione della corrente anodica in funzione della tensione anodica, mantenendo fisso il valore del campo magnetico. Quando il campo è diretto esattamente secondo il filamento, si nota che, aumentando la tensione anodica, la corrente anodica aumenta anch'essa sempre.

Mantenendo il campo alla stessa intensità e inclinando il diodo in modo che la direzione del filamento formi un certo angolo (pochi gradi) con quella del campo, la legge di variazione della corrente anodica in funzione

della tensione anodica cambia completamente e diviene tale che, a partire da certi valori della tensione anodica, la corrente, anzichè aumentare regolarmente come nel primo caso, diminuisce nettamente all'aumentare della tensione anodica stessa: in altri termini si nota l'apparizione di una vera e propria resistenza negativa nello spazio filamento-placca del diodo. La curva *a* della fig. 1 rappresenta il carattere generale della variazione della corrente anodica *I* in funzione della tensione anodica *V*, con campo diretto secondo il filamento; la curva *b* si riferisce alla stessa variazione, con campo di uguale intensità, ma inclinato lievemente rispetto al filamento.

È da notarsi che in generale vi sono due gruppi distinti di valori della tensione anodica, per cui, in determinate condizioni di intensità e direzione del campo, appare tale resistenza negativa.

Ho pensato di utilizzare la resistenza negativa offerta dal diodo nelle condizioni sopraindicate per mantenere in oscillazione un circuito; inserendo a tale scopo vari circuiti oscillanti nel circuito di placca del diodo posto in condizioni tali da presentare resistenza negativa, ho potuto ottenere oscillazioni persistenti dalle frequenze acustiche più basse fino a elevatissime frequenze, di 10^8 circa. Anche col « magnetron » di Hull, come è noto, è possibile mantenere in oscillazione un circuito, ma le modalità del fenomeno sono completamente diverse: infatti nel « magnetron » si fa agire nello spazio filamento-placca anche il campo magnetico dovuto alla corrente oscillatoria, disponendo opportunamente il diodo entro la bobina del circuito oscillante.

Attualmente ho in corso altre ricerche per uno studio più dettagliato dei fenomeni sommariamente esposti in questa Nota preliminare; i risultati di tali ricerche faranno oggetto di una prossima Nota.

Fisica. — *La carica dei centri di emissione posta in evidenza dalla polarità degli elettrodi.* Nota di A. OCCHIALINI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio A. GARBASSO.

Se i centri di emissione delle righe di arco sono neutri e quelli delle righe di scintilla sono ionizzati, e cioè carichi positivamente, c'è da aspettarsi che la regione della scarica elettrica occupata dalle righe di arco provenienti da uno degli elettrodi non sia influenzata dalla polarità, e che, al contrario, quella occupata dalle righe di scintilla muti di lunghezza quando si inverte il segno degli elettrodi.

Per verificare questa previsione, ho proiettato sopra la fenditura di uno spettroscopio l'immagine di una scintilla orizzontale scoccata tra un elettrodo negativo di magnesio e uno positivo di rame, ed ho allontanato l'elettrodo di magnesio dalla fenditura appena quanto bastava per rendere invisibile nello spettroscopio la riga di scintilla λ 4481.

Dopo di ciò, ho invertito la polarità degli elettrodi, e ho constatato che la riga tornava a vedersi, per non scomparire che dopo un ulteriore notevole allontanamento dell'elettrodo dalla fenditura.

La stessa osservazione fatta sopra righe di arco dello stesso metallo, quali la λ 5184 e la λ 5617, non ha svelato nessun cambiamento nell'inversione della polarità.

Misurate le lunghezze degli intervalli di scarica in cui le righe sono visibili, si sono ottenuti i risultati seguenti:

Per la 4481 Mg (scintilla)		
Elettrodo +	2.85 mm	} rapporto 1.43
» —	2.00	

Per la 5124 Mg (arco)		
Elettrodo +	2.92 mm	} rapporto 1.00
» —	2.93	

Per la 5167 Mg (arco)		
Elettrodo +	2.23 mm	} rapporto 1.00
» —	2.23	

Naturalmente ho voluto accertarmi che il fatto si ripete con le righe di altri elementi per le quali il carattere di arco o di scintilla sia ben sta-

(1) Presentata nella seduta del 7 aprile 1929.

bilito. E sempre ho trovato che le righe di arco si spingono alla stessa distanza dall'elettrodo, qualunque sia la polarità di questo; mentre le righe di scintilla, nelle condizioni sperimentali che saranno specificate più sotto, si spingono più lontane quando l'elettrodo è positivo, che quando è negativo.

Riga 5889 Hg II (1 ionizzazione)
 Elettrodo + 2.65 mm } rapporto 1.13
 » — 2.33 }

Riga 5425 Hg II (1 ionizzazione)
 Elettrodo + 2.65 mm } rapporto 1.13
 » — 2.33 }

Riga 5595 Hg III (2 ionizzazione)
 Elettrodo + 2.60 mm } rapporto 1.42
 » — 1.82 }

Per il piombo si è ottenuto

Riga 5609 Pb II (1 ionizzazione)
 Elettrodo + 2.64 mm } rapporto 1.12
 » — 2.34 }

Riga 5857 Pb III (2 ionizzazione)
 Elettrodo + 1.49 mm } rapporto 1.24
 » — 1.20 }

Riga 5207 Pb IV (3 ionizzazione)
 Elettrodo + 1.33 mm } rapporto 1.31
 » — 1.01 }

Risulta da queste determinazioni che per ogni elemento i rapporti tra le lunghezze delle righe, con la polarità positiva e negativa, sono uguali per le righe emesse da centri dotati dalla stessa carica, diversi e crescenti con l'ordine di ionizzazione per le righe emesse da centri diversamente ionizzati; fatto questo che può essere utilizzato per distinguere le righe di scintilla secondo l'ordine di ionizzazione dell'atomo che le emette.

A questo proposito è da rilevare che la riga λ 5595 è giudicata Hg II dal Bloch, dall'esame dell'ordine con cui compare nella scarica senza elettrodi, e Hg III dalla mia allieva dott. Ada Corsi, dal confronto della sua lunghezza con quella delle altre righe Hg II (v. lavoro in corso di stampa sul *Nuovo Cimento*). L'effetto della polarità conferma quest'ultimo risultato, dando per le lunghezze della riga λ 5595 il rapporto 1.42, indiscutibilmente maggiore del rapporto 1.13 trovato per le righe λ 5425 e λ 5889, che sono attribuite concordemente all'atomo semplicemente ionizzato Hg II.

Così tutto induce a credere che la misura della lunghezza delle righe con diversa polarità degli elettrodi possa informarci sullo stato elettrico dei centri che le emettono.

I risultati qui esposti sono stati ottenuti scaricando un quadro di Franklin in un circuito di piccola resistenza e privo di induttanza, condizioni, queste, che rendono la scarica assai rapida, e che non danno tempo ai centri elettrizzati di addensarsi davanti agli elettrodi.

Chimica. — *Pentasolfuri dietilici*. Nota di G. R. LEVI ed A. BARONI, presentata dal Socio G. BRUNI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Natrolite di Viagrande (Etna)*⁽¹⁾. Nota di S. DI FRANCO, presentata⁽²⁾ dal Socio F. MILLOSEVICH.

Nella regione etnea la presenza della *natrolite*, in distinti cristalli, sino ad oggi non è stata indicata da altri.

Sartorius⁽³⁾ descrisse per *natrolite* le sferette di circa tre millimetri di diametro, bianche come la neve, a struttura fibroso-raggiata, trovate nelle cavità delle rocce dei vulcani pre-etnei di Aci Castello e dell'isola dei Ciclopi, ed anche per *natrolite* descrisse i cristalli di *thomsonite* di quest'ultima località.

Lasaulx⁽⁴⁾ invece osservò che le sferette, indicate da Sartorius per *natrolite*, erano formate da elementi monoclini e per altri caratteri, le determinò giustamente come *mesolite*.

La *natrolite* dell'Etna si trova nelle cavità d'una lava antichissima di colore rossastro, molto simile ad una delle diverse rocce della valle di Calanna, trovata alla profondità di circa 30 metri e messa in evidenza in seguito ai lavori di perforazione, per ricerca d'acqua alla base del Monte Serra presso Viagrande, accompagnata da cristalli romboedrici di *calcite*⁽⁵⁾.

I cristalli di *natrolite* hanno abito prismatico, lunghi più d'un centimetro e grossi circa un millimetro, trasparenti, incolori, con lucentezza

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di mineralogia della R. Università di Catania.

(2) Nella seduta del 7 aprile 1929.

(3) SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN, *Der Aetna*, vol. II, Leipzig, 1880, p. 513.

(4) LASAULX A., *Ueber einige ätnäische Mineralien*, «Zeit. f. Kryst. u. Min.», vol. V, 1881, p. 334.

(5) A circa 20 metri di profondità si trovano invece abbondanti cristallini di ematite nelle cavità d'una lava simile a quella, già nota, con ematite di Aci Catena.

vitrea, tutti terminati alla estremità dell'asse $[\bar{x}]$ e presentano le forme $\{110\}\{111\}\{100\}\{010\}$; ma la combinazione più frequente è data dal prisma $\{110\}$ e dalla piramide $\{111\}$.

Le facce della forma $\{110\}$ si presentano piane, ampie, splendenti, raramente solcate o rigate parallelamente allo spigolo $[110 \cdot 1\bar{1}0]$.

Quelle della forma $\{111\}$ sono splendenti e piane; spesso una o due faccettine prendono uno sviluppo maggiore delle altre, dando al cristallo un'apparente simmetria monoclina.

Le facce della $\{100\}$ non sono sempre presenti e generalmente strette; quelle di $\{010\}$ sono un po' meno comuni e meno sviluppate delle precedenti.

Nessuna traccia di facce vicinali ben definite, come è stato notato nella natrolite di altre località.

I cristallini sono sempre isolati e la sfaldatura è secondo (110) .

Le misure angolari, messe in confronto con le costanti calcolate da Brögger⁽¹⁾:

$$a : b : c = 0.978523 : 1 : 0.353626$$

sono riassunte nel seguente quadro:

Angoli	Misure (medie)	Calcolati da Brögger	Riportati nell'Hintze (2)	Valori ricalcolati
$110 \cdot 1\bar{1}0$	88° 47'	88° 45' 30"	88° 45' 20"	88° 45' 22"
$110 \cdot 111$	63 5	63 10 31	63 10 30	63 10 40
$111 \cdot \bar{1}\bar{1}1$	53 19	53 39	—	53 38 39
$111 \cdot \bar{1}11$	37 40	37 37 45	37 37 45	37 37 45
$111 \cdot 1\bar{1}1$	36 51	36 47 30	36 47 30	36 47 30

Il piano degli assi è parallelo a (010) ; la bisettrice acuta, positiva, è parallela a $[101 \cdot 1\bar{1}0]$, e in generale i caratteri ottici coincidono con quelli già noti per la natrolite.

Gli indici di rifrazione determinati alla luce del sodio risultano:

$$\alpha = 1.4742$$

$$\beta = 1.4777$$

$$\gamma = 1.4874$$

dai quali valori si calcola: $2V = 62^\circ 19' 1/3$ (Na).

(1) BRÖGGER W. C., *Untersuchungen norwegischer Mineralien*, « Zeit. f. Kryst. u. Min. », III, p. 479, dai valori $(\bar{1}11) \cdot (111) = 37^\circ 37' 45''$ e $(111) \cdot (1\bar{1}1) = 36^\circ 47' 30''$ calcolò le seguenti costanti, con differenza nelle ultime cifre decimali: $a : b : c = 0.97856 : 1 : 0.353628$.

(2) HINTZE C., *Handbuch der Mineralogie*, p. 1680.

Il peso specifico, determinato col metodo della sospensione, risulta 2.19-2.21.

La *natrolite* è stata considerata come trimetrica; però sull'esistenza d'una varietà monoclina, richiamarono l'attenzione Lasaulx⁽¹⁾, Luedecke⁽²⁾ e Brögger⁽³⁾.

Lasaulx trovò nella *natrolite* di Brevig (Norvegia), una deviazione di 2°-3° della direzione di estinzione secondo lo spigolo [110·110] e in quella di Aci Castello 3°1/2-4°1/2 (*mesolite*).

Lasaulx tendeva a credere in un lento passaggio, per via di miscele isomorfe, dalla *natrolite* trimetrica alle *scoleciti*, per mezzo delle *mesoliti* con calce e soda variabili.

Luedecke nella *natrolite* di Aussig e Salesl trovò una deviazione di 5°-6° della direzione di estinzione secondo [110·110].

Brögger nella *natrolite* di Arò, presso Langesund (Norvegia) ne ammise la possibilità cristallografica; ma Negri⁽⁴⁾, rivedendo il lavoro di Brögger, dimostrò che le conclusioni erano poco attendibili, perchè basate su calcoli errati.

Secondo Hintze⁽⁵⁾ allo stato attuale delle nostre conoscenze non si può decidere se le apparenti varietà monocline siano dovute a disturbi, o se i cristalli rombici siano dovuti a geminazioni, o se in fine si tratta di dimorfismo (secondo Brögger di morfotropia, per il contenuto di K₂O).

Artini⁽⁶⁾, Negri⁽⁷⁾ ed altri che si sono occupati dei cristalli di *natrolite* delle regioni italiane, e particolarmente di quelli frequenti ed abbondanti della regione veneta, l'hanno considerata senz'altro per trimetrica.

Io nei diversi cristalli di *natrolite* dell'Etna, non ho notato mai la più lieve deviazione della direzione di estinzione.

I cristallini per l'analisi, da me scelti tra i migliori, furono liberati non solo di ogni più piccola particella di sostanza estranea proveniente dalla roccia, ma anche, dopo ripetuti lavaggi, furono lasciati per tre giorni in un recipiente, con acqua leggermente acidulata con acido acetico, allo scopo di allontanare qualsiasi traccia di *calcite* facilmente aderente ai cristalli di *natrolite*, essendo questi cristalli, come ho detto in precedenza, associati a quelli di *calcite*.

(1) LASAULX A., loc. cit.

(2) LUEDECKE O., *Mesolith und Skolezit*, « Jahrb. f. Min. Geol. u. Pal. », II, 1881, p. 38.

(3) BRÖGGER, W. C., *Die Mineralien der Syenitpegmatitgänge der südnorwegischen Augit- und Nephelinsyenite*, « Zeit. f. Kryst. », XVI, 1890, p. 600.

(4) NEGRI G. B., *Note cristallografiche su alcune natroliti venete*. « Riv. di min. e crist. italiana », VII, 1890.

(5) HINTZE, loc. cit., p. 1685.

(6) ARTINI E., *Natrolite della Regione Veneta*, « Rend. Acc. dei Lincei », serie 4^a, vol. IV, 1887; *Sulla così detta Savite di Montecatini*, « Rend. Acc. dei Lincei », serie 4^a, vol. V, 1888; *Natrolite di Bombiana nel Bolognese*, « Rend. Acc. dei Lincei », serie 4^a, vol. V, 1889.

(7) Loc. cit.

I risultati da me ottenuti, corrispondono con molta approssimazione alle quantità richieste dalla nota formula $\text{Na}_2\text{Al}_2\text{Si}_3\text{O}_{10} + 2\text{H}_2\text{O}$.

	Trovati	Calcolati
H ₂ O	9.58	9.47
SiO ₂	46.93	47.36
Al ₂ O ₃	27.02	26.85
Na ₂ O	16.43	16.32
	99.96	100.00

Per quanto riguarda la disidratazione della natrolite, sebbene abbia formato oggetto di indagine per diversi autori, tra i quali ricordo Damour⁽¹⁾, Hersch⁽²⁾, Friedel⁽³⁾, Zambonini⁽⁴⁾ e più recentemente Cavinato⁽⁵⁾; reputo non scevro d'interesse trascrivere i risultati delle mie osservazioni, sopra cristalli di questo nuovo giacimento.

Secondo le ricerche di Damour e di Hersch risulta che la natrolite fino a 200° presenta una perdita di peso molto piccola.

Friedel trovò che la natrolite di Salesl al di sotto di 250° perde la sua acqua molto lentamente e dai 250° lo svolgimento dell'acqua aumenta con grande rapidità e prima di 285° il minerale è completamente disidratato; posto allora in ambiente saturo di umidità, riassorbe non solo l'acqua perduta, ma anche il 3 % in più del suo peso primitivo.

Zambonini invece nella natrolite di Salesl, riscaldata in corrente di aria umida, ebbe le maggiori perdite di peso tra 300° e 324°; inoltre trovò che riscaldata dopo 15 ore di esposizione all'aria satura di umidità presenta sempre un aumento del peso primitivo.

Secondo Cavinato l'acqua viene quasi interamente emessa nell'intervallo di temperatura 275°-290°, e solo piccole frazioni vengono emesse all'infuori di tale intervallo. Quanto al riassorbimento, dopo esposizione delle polveri

(1) DAMOUR, A., *Recherches sur les propriétés hygrosopiques de la famille des zéolithes*, « Ann. de Chim. et Phys », 1858 (3), LIII, p. 438.

(2) HERSCH C., *Der Wassergehalt der Zeolithe*. Inaug. Diss. der Universität, Zürich, 1887.

(3) FRIEDEL M. G., *Nouveaux essais sur les zéolithes*, « Bull. de la Soc. Franc. de Minér. », 1899.

(4) ZAMBONINI F., *Contributo allo studio dei silicati idrati*, « Atti R. Acc. Sc. Fis. Mat., Napoli », serie 2^a, vol. XIV, 1910.

(5) CAVINATO A., *Nuove osservazioni sulle zeoliti del gruppo della natrolite* « Memorie R. Acc. dei Lincei », serie 6^a, vol. II, 1927.

all'aria ambiente per circa 50 ore, ha ottenuto un andamento analogo a quello osservato da Zambonini per riscaldamento sino a 300°, mentre oltre a questa temperatura e sino a 530° il potere di riassorbimento si conserva senza accennare a diminuzioni. Solo per riscaldamento a 530° e oltre ebbe una diminuzione.

La natrolite dell'Etna, sottoposta a temperatura crescente, subì le seguenti perdite di peso:

Temperatura	Acqua emessa
100°	0.08 %
150	0.13
220	0.15
250	0.31
275	0.90
290	3.38
305	8.46
315	9.12

Si ha così la conferma che nella *natrolite* la maggior parte dell'acqua si svolge in un intervallo assai ristretto di temperatura e nel caso della *natrolite* dell'Etna tra 290° e 305°.

Riscaldata alle precedenti temperature, dopo circa 30 ore di esposizione all'aria ambiente, mi ha dato, per quanto riguarda il potere di riassorbimento dell'acqua emessa, i valori che riporto nel seguente quadro, in percentuali sul peso totale della sostanza.

Temperatura	% di acqua riassorbita
100°	0.09
150	0.19
220	0.21
250	0.49
275	1.10
290	3.63
305	8.74
315	9.42

L'aumento di peso varia da 0.01 % a 100° sino al 30 °. a 315° ed è costante (6 %) da 150° 220°.

Anche nella proprietà assorbente, si nota nella *natrolite* dell'Etna una variazione assai brusca, perfino più rapida, che in molte altre zeoliti.

Però, mentre in altri minerali del gruppo delle zeoliti, man mano che s'innalza la temperatura alla quale avviene il riscaldamento, la velocità di assorbimento dell'acqua diminuisce, nella *natrolite* accade precisamente il contrario.

Riscaldata al rosso invece ha un potere assorbente molto minore di quello del minerale che è stato sottoposto all'azione di una temperatura più bassa.

Con la *natrolite*, le zeoliti esistenti nelle cavità delle rocce etnee e pre-etnee (Isola dei Ciclopi e Aci Castello) e sicuramente determinate sono otto e cioè:

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1) <i>analcime</i> | 5) <i>phillipsite</i> |
| 2) <i>herschelite</i> | 6) <i>thomsonite</i> |
| 3) <i>facolite</i> | 7) <i>mesolite</i> |
| 4) <i>gmelinite</i> | 8) <i>natrolite</i> |

Ora, dati gli errori e le inesattezze che per le zeoliti della regione etnea si notano in molti trattati italiani e stranieri, credo interessante di indicare, in occasione del presente studio, oltre i nomi delle zeoliti note, anche i rispettivi giacimenti.

Alcune zeoliti si trovano soltanto in determinate località, come: la *thomsonite*, esclusivamente nelle cavità delle rocce dell'isola dei Ciclopi, la *natrolite*, presso Viagrande, e la *gmelinite* nei dintorni di Aci Castello.

Altre, invece, in diversi giacimenti come l'*analcime*, diffusa in alcune rocce dell'isola dei Ciclopi, in pochissima quantità in quelle di Monte Calanna e della Valle S. Giacomo e ancora meno nel tufo di Monte Finocchio (Valle del Bove).

L'*herschelite* si rinviene discretamente frequente nella rupe di Aci Castello e nei dintorni di questa località, quasi sempre associata alla *phillipsite*.

La *facolite*, rara all'isola dei Ciclopi, in discreta quantità nella rupe di Aci Castello e frequente nei dintorni.

La *phillipsite*, abbondante nei dintorni e nella rupe di Aci Castello, frequente nelle coste di Aci Trezza, sia in distinti cristalli, sia in aggregati sferoidali, con struttura fibroso-raggiata; più rara all'isola dei Ciclopi, rarissima nelle rocce della Valle S. Giacomo, e in queste due ultime località mai in aggregati sferoidali.

La *mesolite*, in ultimo, ci rappresenta la zeolite più diffusa, inquantochè oltre a trovarsi all'Isola dei Ciclopi e ad Aci Castello, si rinviene nei

banchi inferiori della Timpa di Santa Maria la Scala (Acireale), nelle cavità della roccia di Monte Calanna, in quella della Valle S. Giacomo, nei tuffi di Monte Finocchio (nella Valle del Bove) e nelle rocce del *neck* di Paternò.

In fine nella regione etnea, oltre la *natrolite*, sono stati trovati da me per il primo i cristalli di *gmelinite*⁽¹⁾ e di *facolite*⁽²⁾; come pure alcuni dei suddetti giacimenti, non sono stati indicati da altri.

Biologia. — *Sull'azione fisiologica dello stronzio.* Nota di M. COMEL, presentata ⁽³⁾ dal corrisp. C. FOÀ.

Ho trattato varie serie di polli con somministrazioni endomuscolari, più o meno prolungate e a diversa dose, di exosiossipropionato di stronzio, e ho osservato un caratteristico quadro di intossicazione, che si sviluppa essenzialmente a carico del sistema nervoso.

Iniettando quotidianamente per via endomuscolare a polli del peso di circa un chilogramma 10 cmc. di una soluzione al 6% di exosiossipropionato di stronzio (che corrispondono a 0.162 grammi di stronzio metallico), i polli non presentano per i primi dieci giorni sintomi molto appariscenti. È tra la 10^a e 15^a iniezione che si appalesano i sintomi più importanti; si inizia un dimagrimento, che conferisce tosto agli animali un particolare aspetto sparuto, ma l'appetito non soltanto non è diminuito, ma l'animale anzi tende alla voracità. Si manifestano in un secondo tempo alcune alterazioni nervose: il pollo diviene atassico e procede barcollando e dondolando, perchè invece di porre a terra le zampe divaricandole leggermente, come di norma, esse si incrociano all'interno: questo sintomo è costante, ed è preceduto soltanto da una certa vivacità dei riflessi; così se si sospende il pollo per le zampe con la testa in basso si avvertono dei cloni molto pronunciati, e quasi ritmici. L'incedere dondolante si fa poi stentato, e il pollo non fugge se spaventato od inseguito, ma soltanto si allontana disorientato e barcollante. Se tenta di correre, tende a cadere di lato, e per parare la caduta corre aprendo le ali, ma superati alcuni metri finisce per cadere sopra un fianco, come se scivolasse. In questo periodo, che va dalla 15^a alla 20^a iniezione, il pollo non svolazza più; se alzato in aria e lasciato cadere, cade obliquamente al suolo, aprendo le ali.

L'ipotonìa va aumentando col procedere del trattamento, e, dopo la 20^a iniezione, le si aggiunge un'astasia più o meno pronunciata, che va poi

(1) DI FRANCO S., *La Gmelinite di Aci Castello*, «Rend. R. Acc. dei Lincei», vol. XIII, 1° sem. 1904.

(2) Idem, *La Facolite dell'isola dei Cicli*, «Boll. Acc. Gioenia», fasc. LXXXIII, dicembre 1904.

(3) Nella seduta del 21 aprile 1929.

accentuandosi; l'animale sta volentieri accovacciato, è difficile farlo alzare, e se finalmente si alza si allontana indolente, barcollando e incrociando ad ogni passo le zampe. Se rimane fermo all'impiedi per non cadere è costretto ad aprire le ali. Lo stato di nutrizione decade, sebbene l'appetito rimanga intenso, e se si tratta di polli in via di accrescimento, è tale il dimagrimento che raramente aumentano di peso, e spesso invece diminuiscono. Nella quinta settimana di trattamento entrano in scena i sintomi finali dell'intossicazione, mentre si accentuano l'ipotonìa generale, l'atassia, l'abasia, e l'astasia. I polli giacciono di solito accovacciati, oppure si reggono appoggiando a terra tutto il metatarso. Se si tenta di farli camminare, il loro passo si fa retrogrado ed il corpo si flette all'indietro anche quando le zampe sono ferme (opistotono).

La retrogressione e l'opistotono si osservano più accentuati nella prima mezz'ora che segue ad ogni iniezione, mentre si vanno poi attenuando sino quasi a scomparire dopo circa ventiquattro ore.

Nell'intossicazione più grave che precede la morte, il pollo camminando a ritroso estende il collo ed allarga le ali, assumendo un atteggiamento che si potrebbe definire serafico, sinchè arrestandosi il passo ed accentuandosi l'opistotono, l'animale cade appoggiato al codrione con la testa eretta o retroversa e con le ali spiegate, somigliante all'aquila degli stemmi. Questo atteggiamento non dura a lungo e il pollo finisce per cadere obliquamente all'indietro. Se viene sospeso per le ali le zampe si estendono e le dita rotano all'interno; al contrario di ciò che avviene nel pollo normale.

L'agonia dell'animale si protrae per molte ore coi segni della più completa astenia e atonia; esso giace semicoricato sovra un fianco con le ali aperte, e la testa iperestesa. Ogni tanto l'animale tenta di sollevarla e annaspa con le zampe, con un clono che ad intervalli dà luogo ad accessi di tremore generalizzato, e talvolta quasi convulsivi.

I tremori sono nelle ultime ore interrotti da periodi di boccheggiamento che precedono immediatamente la morte. Il quadro dell'intossicazione si svolge complessivamente in quattro o cinque settimane. Talvolta nell'ultima settimana prevalgono i fenomeni di ipotonìa generale, e la morte sopraggiunge senza che si siano manifestate la retroversione, la retrocessione, l'opistotono e gli accessi di tremore.

Se la somministrazione del farmaco è meno abbondante come avviene iniettando quotidianamente 5 cmc. di exosiossipropionato di stronzio (pari a 0.081 grammi di stronzio metallico) i primi sintomi dell'intossicazione compaiono ancora verso la fine della seconda settimana, con atassia, e col passo a zampe incrociate, ma non si notano generalmente, anche in prosieguo di tempo, i gravi sintomi di astasia, atonia, abasia, retrocessione ecc. Le galline crescono di statura e anche leggermente di peso, sebbene in minor grado delle galline normali; ma acquistano un aspetto particolarmente sparuto, dovuto, oltre che alla magrezza, anche all'arruffarsi del

piumaggio diradato. La fame diviene così vorace che il pollo continua a mangiare anche quando agonizza; uno di essi si trascinò moribondo sino al recipiente contenente il mangime, e vi cadde morto. Malgrado questa intensa alimentazione gli animali che sopravvivono lungamente alla somministrazione di stronzio sono estremamente deboli e non hanno la forza di tenere eretta la testa.

Se la dose dello stronzio, è aumentata a 20 cmc. per iniezioni (pari a 0.324 g. di stronzio metallico) l'animale muore nella maggior parte dei casi entro ventiquattro ore con gravi sintomi di abasia, di atassia, di atonia e di astasia.

I sintomi si iniziano con scariche di feci e con disturbi dell'equilibrio, poi l'animale rimane fermo ove si accovaccia, nè si riesce a farlo fuggire spaventandolo. Se si tenta di farlo stare sulle zampe, si regge sull'intero metatarso, e talvolta non riuscendovi stramazza al suolo, e non può risollevarsi malgrado i tentativi. È colpito da scosse cloniche diffuse e anaspasica con le zampe come un'anitra che nuoti. È interessante notare che ai polli che per una trentina di giorni sono stati sottoposti ad iniezioni quotidiane di 10 cmc. di sale di stronzio, raramente basta una sola somministrazione di 20 cmc. per ucciderli, più spesso anzi, quasi fossero divenuti più resistenti, ne occorrono due, tre, e persino quattro. In tale caso si accentuano i sintomi finali dell'intossicazione cronica, segnatamente la retrogressione, l'astasia e l'atonia.

L'autopsia degli animali intossicati non rileva localizzazioni precise delle lesioni, perchè nulla si riscontra, all'infuori delle lesioni del fegato e del cuore, che sono abituali nelle intossicazioni più varie. È caratteristico, ma non costante, un certo grado di edema sottocutaneo. Le ricerche istologiche in corso diranno forse qualcosa di più; in esse sarà posta attenzione particolarmente al cervelletto e ai nervi periferici, per cercare una spiegazione ai sintomi nervosi osservati, i quali partecipano così di quelli della polinevrite come di quelli che accompagnano le lesioni cerebellari.

Suggestivo è il raffronto fra i sintomi sovradescritti e quelli della mancanza di vitamina B; e la rassomiglianza è tale da indurmi a studiare se esista un rapporto tra i due stati morbosi. Ho potuto intanto osservare che la vitamina D calciofissatrice non è senza influenza sull'andamento della intossicazione da stronzio, sembrando che essa attenui i sintomi della polinevrite e del marasma, senza attenuare i sintomi cerebellari. Ulteriori indagini sono in corso sovra questi rapporti.

Biologia. — *L'otocisti degli anfi bi anuri considerata come sistema a mosaico* ⁽¹⁾. Nota di C. GUARESCHI, presentata ⁽²⁾ dal Socio F. SILVESTRI.

È noto come il Driesch, basandosi su esperienze di sviluppo totale o parziale di embrioni di vari animali, da singoli blastomeri isolati nei primi stadi della segmentazione dell'uovo, e su quelle di individui completi formati da parti di animali sperimentalmente o naturalmente divisi (Clavellina, Lumbricus, ecc.) abbia emesso il concetto di totipotenza o equipotenza e di mosaico.

È pure noto come da lui stesso, e da altri AA. ⁽³⁾ tale concetto sia stato portato a vari organi in via di sviluppo durante la vita embrionale.

Scopo di questa nota è di vedere se i medesimi concetti possano applicarsi all'otocisti, o vescicola otica primaria.

Lo Streeter ⁽⁴⁾ avendo trapiantata una otocisti sinistra vicino alla destra normale, allo stadio di coppa epiteliale, ottenne lo sviluppo di due otocisti quasi normali, non fuse. In altri lavori ⁽⁵⁾ parla anche della incapacità delle vescicole otiche trapiantate in zone anormali di dare labirinti completi e ben formati.

Maggiori dati sul problema che ci interessa fornisce invece Kaan ⁽⁶⁾, la quale trova che asportando la metà della coppa otica in *Amblystoma*, si ottiene un labirinto completo nel 25 % dei casi, incompleto nel 75 %. Tale risultato aberrante penso possa essere spiegato con la difficoltà enorme dell'operazione. L'otocisti, infatti, è, a differenza dell'occhio, completamente invisibile dall'esterno. Mentre quindi per l'occhio si può operare a colpo sicuro, per l'otocisti bisogna limitarsi a tagliare o a colpire la zona in cui si sa essere la piastra o la vescicola otica. Nè è da meravigliarsi se molte

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio dell'Istituto di Anatomia Comparata della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 21 aprile 1929.

(3) HARRISON R. G., *Experiments on the development of the fore-limb of Amblystoma, a self-differentiating Equipotential System.* « J. Exp. Zool. », V, 25, 1918.

(4) STREETER G. L., *Experimental observations on the development of the amphibian ear vesicle.* « Anat. Rec. », V, 3, 1909.

(5) ID., *Some experiments on the developing ear vesicle of the tadpole with relation to equilibration.* « J. Exp. Zool. », V, 4, 1906.

ID., *Some factors in the development of the amphibian ear vesicle and further experiments to equilibration.* « J. Exp. Zool. », V, 4, 1907.

(6) KAAH H. W., *Experiments on the development of the ear of Amblystoma punctatum.* « J. Exp. Zool. », V, 46, 1926.

volte, non ostante l'abilità dell'operatore, l'organo ricercato non venga affatto leso.

Dall'esame di molti casi di tentata asportazione, eseguiti nel 1927 e nel 1928, e nei quali si era formata una piccola e difettosa vescicola otica, che non poteva essere dovuta a rigenerazione, perchè altre esperienze escludevano la possibilità che avvenisse un simile fenomeno, io ero stato condotto alla convinzione che tali piccole anormali vescicole fossero prodotte da qualche pezzo dell'ispessimento o della vescicola primitiva rimasta *in situ*.

E, siccome da tali pezzi non si era formata una vescicola completa e normale, ne veniva come logica conseguenza, l'idea di considerare l'otocisti, come un sistema a mosaico, opinione convalidata da un caso di fusione di due otocisti, in cui la vescicola risultante, se è ancora troppo giovane perchè in essa si possano distinguere le varie formazioni, mostra però di essere di forma così irregolare da rendere incredibile una sua successiva regolazione. Essa infatti, che risulta dalla fusione di una vescicola trapiantata dorsalmente alla normale, con la normale stessa, è così sviluppata nel senso dorso ventrale, da spostare fortemente il midollo allungato dalla sua posizione mediale, e da costringerlo a descrivere un'ampia curva per ritornarla.

Così che nella tesi di laurea presentata il 10 luglio 1928 alla Commissione per le lauree in Scienze Naturali presso la R. Università di Roma, scrivevo: «... il fatto che la vescicola otica primaria quando sia stata resa difettosa di una parte o quando unita col trapianto ad un'altra vescicola otica può dare origine ad un occhio quasi normale prodotto da fusione dei due abbozzi regolatisi insieme, può essere invocato a conferma dell'ipotesi del Driesch per gli abbozzi degli organi.

« Vediamo ora se questi concetti sono applicabili all'otocisti.

« Abbiamo osservato precedentemente che asportando una porzione della vescicola otica si ottiene un labirinto più piccolo, ciò che si verifica anche ledendola direttamente o indirettamente (trapianto) con un trauma qualsiasi; difatti il labirinto risulta in questo caso più piccolo, irregolare, e viene arrestato o ritardato nel suo sviluppo.

« Inoltre già precedentemente abbiamo negato all'otocisti la possibilità di ogni regolazione.

« Ed anche i casi di fusione, che danno origine a vescicole sproporzionate, sembrano dimostrare che l'otocisti non può essere intesa, in base alla precoce determinazione delle sue parti, come un sistema armonico equipotenziale, cioè essa non è capace di autoregolazione.

« Nemmeno le zone circostanti alla vescicola otica sono capaci d'influire nel senso di una sua regolazione di forma e di grandezza come dimostrano i trapianti omotipici, che anzi esse vengono spostate se l'otocisti è più grande del normale, o condotti ad occupare parte del suo posto

quando è più piccola. Escludendo quindi che l'orecchio possa rappresentare, almeno nel suo sviluppo causale, un sistema equipotenziale armonico, possiamo noi ammettere che possa ricondursi a quel che il Driesch intende come abbozzo a mosaico?

«... (*omissis*)...»

«Ammetterò quindi almeno provvisoriamente, che l'otocisti rappresenti un sistema a mosaico» ⁽¹⁾.

Ora che altre esperienze, eseguite precisamente a tale scopo, hanno confermato le mie vedute, espongo i primi risultati in questa Nota.

Le parti dell'otocisti, dunque, che vengono asportate non si rigenerano nè dalle formazioni e dai tessuti vicini, nè dalla parte rimasta *in situ*. La prima di queste ipotesi poteva essere scartata *a priori*, pensando alla incapacità di rigenerazione dell'otocisti che ho sempre riscontrata operando allo stadio di coppa o di vescicola otica primaria; la seconda, che poteva apparire più probabile considerando ciò che avviene per l'occhio, si è anch'essa dimostrata completamente falsa.

Tutti i processi di riparazione possibili della vescicola otica si riducono alla formazione di una parete monostratificata di cicatrizzazione. È questa, oltre a quelle che ho già indicate ⁽²⁾ una profonda differenza tra l'otocisti e l'occhio.

Mi riservo di ricercare in seguito se le varie parti dell'orecchio siano già predeterminate nella vescicola otica primaria, o addirittura nella piastra o placca otica.

Biologia. — *Osservazioni sui processi regolativi in relazione allo sviluppo degli emisferi cerebrali negli embrioni di Anuri.* Nota di ALDO SPIRITO, presentata dal Socio F. SILVESTRI.

Sara pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Questa parte della mia tesi non fu pubblicata assieme al resto (C. GUARESCHI, *Ricerche sull'auto differenziamento della vescicola otica trapiantata, e sul differenziamento dipendente della capsula cartilaginea.* « Boll. Ist. Zool. R. Università », Roma, vol. VI, 1928-vii) per il desiderio che avevo, di compiere esperienze più precise al riguardo.

(2) C. GUARESCHI, op. cit.

Patologia. — *Su uno speciale metodo di colorazione dei parassiti della malaria.* Nota di S. PASTORE, presentata⁽¹⁾ dal Corresp. A. DIONISI.

Nell'Istituto di Anatomia Patologica della R. Università di Roma, diretto dal prof. Antonio Dionisi, il dott. Salvatore Pastore ha studiato e largamente sperimentato un metodo di colorazione rapido e sicuro dei plasmodi della malaria.

Questo metodo è nei suoi risultati di tale evidenza da far uscire il ricercatore da quella posizione incerta e spesso incresciosa in cui egli viene talvolta a trovarsi per la deficiente colorazione che si ottiene con i metodi comuni, con i quali l'accertamento di alcune fasi dei parassiti può riuscire dubbio ed ambiguo per peculiari caratteri morfologici dei parassiti stessi, come avviene a preferenza per le piccole forme marginali del tipo *praecox*.

Per il medico pratico delle zone malariche questo metodo è poi di tale speditezza nella sua applicazione e di tale evidenza nei suoi risultati da consentirgli in pochi minuti, al letto stesso dell'ammalato, un responso sollecito e sicuro.

Il liquido colorante contiene azzurro II, eosina, bleu di metilene, disciolti in alcool metilico. La preparazione della soluzione va fatta esclusivamente con i colori originali del dott. Grüber e C.^o di Lipsia.

La superiorità di questa miscela colorante nei confronti di altre già note, sta nell'aver raggiunto con ogni esattezza i necessari rapporti tra i diversi componenti della soluzione colorante, in modo che si ha una colorazione preferibile a tutte le altre, come quella che mette in bella evidenza la cromatina in rosso vivo con le particolarità della sua struttura rispetto alla parte acromatica del nucleo e nello stesso tempo conferisce al citoplasma una colorazione che permette ugualmente di vedere tutte le particolarità strutturali.

La tecnica della colorazione dei preparati per strisciamento è la seguente:

1° I preparati per strisciamento allestiti nel modo solito con accurata e perfetta nettezza su portaoggetti, vengono coperti con 20 gocce della soluzione colorante o anche meno, ma sempre tante che bastino a coprire la superficie dello striscio. Dopo un minuto primo la fissazione è già avvenuta.

2° Indi si aggiunge un numero di gocce doppio di acqua distillata e si lascia colorare per cinque minuti, dopo di avere accuratamente mesco-

(1) Nella seduta del 7 aprile 1929.

lato il miscuglio sul vetrino. La colorazione riesce anche con una soluzione diluita al terzo, nella proporzione cioè di una goccia per 3 gocce di acqua.

3° Trascorsi cinque minuti, il preparato si lava con un getto di acqua distillata. La colorazione però, come si può constatare, avviene già prima.

4° Asciugamento con carta bibula e osservazione ad immersione.

I corpuscoli rossi pigliano un colore roseo che negli strisci più densi assume una tinta più cupa, i leucociti a nucleo polimorfo e i monociti hanno il nucleo di colore bleu violetto e il protoplasma di un colore azzurro sbiadito; i linfociti mostrano il nucleo di un colore violetto assai intenso con una colorazione più sbiadita dell'orlo protoplasmatico; il cromomero nelle piastrine risulta rosso.

Quanto ai parassiti, il citoplasma ha varia colorabilità a seconda del suo spessore, in modo che è perfettamente distinta la porzione più sottile del citoplasma da quella più spessa, come distinguibili nettamente sono le formazioni vacuolari e il pigmento nero che si conserva nella sua completa integrità. La cromatina è in rosso vivace. In modo chiarissimo si rilevano la punteggiatura di Schüffner e le macchie di Maurer.

Per quanto riguarda i preparati a goccia spessa, è necessario nel loro allestimento distendere leggermente lo strato di sangue con un ago. La loro colorazione procede nel modo seguente:

1° Colorazione-emolisi con una soluzione acquosa del liquido colorante, preparato sul momento, in proporzione di una goccia di liquido colorante in 1 cc. di acqua distillata. Essa dura pochi minuti, fino a quando si vede sollevarsi l'emoglobina dalla superficie del vetrino.

2° Sgocciolamento rapido e copertura del vetrino con una soluzione acquosa del liquido colorante in proporzione di 10 gocce per ogni cc. di acqua distillata, preparata seduta stante. La colorazione si fa durare 2 minuti.

3° Lavaggio a getto con acqua distillata.

4° Essiccamento all'aria del vetrino in posizione verticale.

5° Osservazione ad immersione.

VALUTAZIONE DEL METODO.

Questo metodo ha i seguenti requisiti:

1° Applicazione facile e spedita.

2° Utilizzazione del potere fissativo della soluzione colorante.

3° Colorazione sicura e superiore a quella dei metodi finora noti.

La superiorità assoluta del metodo consiste soprattutto in ciò che esso, mentre permette un'analisi chiara e accurata della struttura citoplasmatica, ha il vantaggio di far spiccare il citoplasma del parassita con tale evidenza da eliminare qualunque dubbio sull'accertamento del parassita, che in un

istante colpisce vivamente l'occhio dell'osservatore. Nello stesso tempo la cromatina riesce nitidissima per il colore rosso vivace che assume, conservando le particolarità della sua struttura.

Risalta quindi il beneficio di questa colorazione in modo particolare nei casi nei quali il reperto parassitario è estremamente scarso.

4° Rapidità della colorazione. Nei preparati per strisciamento la colorazione si ottiene in maniera perfetta in 5 minuti, in modo da mettere in risalto le più fini particolarità del parassita e del globulo rosso, ma per la diagnosi d'embrée viene raggiunta già prima, in 3 minuti. In 2 soli minuti si ottiene la colorazione delle gocce spesse.

Eccezionalmente spedito viene così reso il compito del ricercatore e assai meno gravoso il lavoro dei laboratori.

5° Facilità non solo di scoprire i parassiti quando sono scarsissimi, ma di mettere sicuramente in evidenza le piccole forme molto giovani intracorpcolari e quelle marginali del parassita praecox.

6° Rilievo dei più piccoli dettagli della struttura del plasmodio.

7° Rilievo delle più minute alterazioni globulari.

Fisiologia. — *Il potere regolatore della reazione dell'acqua di mare.* Nota di R. MARGARIA, presentata dal Corrisp. A. HERLITZKA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *La riserva alcalina nell'acqua di mare.* Nota di R. MARGARIA, presentata dal Corrisp. A. HERLITZKA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

N. P.

ERRATA CORRIGE

Matematica. — *Alcune osservazioni sui fenomeni ereditari.* Nota del Socio V. VOLTERRA.

Pag. 587 riga 4, invece di: quindi se leggere: allorchè in $G(\tau)$, $\tau < 1$;
quindi se

ib. riga 8, dopo la parola: « ritardatrice » aggiungere: « finchè $\tau < 1$ ».

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 5 maggio 1929 (Anno VII)

Presidenza del sen. prof. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Il secondo tensore triplo di Christoffel e la derivazione intrinseca.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. U. CISOTTI.

Si abbia la varietà riemanniana definita da n coordinate x_1, x_2, \dots, x_n e avente per espressione del quadrato dell'elemento lineare la seguente forma differenziale quadratica:

$$(1) \quad ds^2 = \sum_{i,k}^n a_{ik} dx_i dx_k.$$

Nè i corrispondenti simboli di Christoffel di prima specie $\left\{ \begin{smallmatrix} h & k \\ i \end{smallmatrix} \right\}$, nè quelli di seconda specie $\left\{ \begin{smallmatrix} h & k \\ i \end{smallmatrix} \right\}$, definiscono un tensore; ciò è ben noto. Ho mostrato recentemente ⁽²⁾ che delle combinazioni lineari dei simboli di prima specie definiscono un tensore triplo C , vincolato all'ennupla di riferimento, che ho denominato *tensore di Christoffel*, precisamente di componenti covarianti

$$(2) \quad C_{hik} = \left[\begin{smallmatrix} h & k \\ i \end{smallmatrix} \right] - \frac{a_{ih}}{a_{hh}} \left[\begin{smallmatrix} h & k \\ i \end{smallmatrix} \right].$$

(1) Presentata nella seduta del 17 marzo 1929.

(2) *Il tensore triplo di Christoffel*, questi « Rendiconti », vol. IX (1° sem. 1929), p. 128.

Le componenti intrinseche, rispetto all'ennupla di riferimento, sono ⁽¹⁾

$$(3) \quad \gamma_{hik} = \frac{C_{hik}}{\sqrt{a_{hh} a_{ii} a_{kk}}}.$$

Quando l'ennupla è ortogonale questi coincidono coi coefficienti di rotazione di Ricci ⁽²⁾.

Mi propongo, nella presente Nota, di mettere in luce un secondo tensore triplo **K**, pure vincolato all'ennupla di riferimento, le cui componenti covarianti sono combinazioni lineari, in parte dei simboli di prima specie e in parte di quelli di seconda specie, che denomino *secondo tensore di Christoffel*, riservando all'altro la denominazione di *primo tensore di Christoffel*. Le componenti covarianti del nuovo tensore sono le seguenti:

$$(4) \quad K_{hik} = a_{ii} \left\{ \begin{matrix} h & k \\ i & \end{matrix} \right\} - \delta_{hi} \left\{ \begin{matrix} h & k \\ i & \end{matrix} \right\},$$

designando δ_{hi} l'unità o lo zero secondochè gli indici h e i sono uguali oppure distinti. È interessante rilevare subito che i due tensori **C** e **K** coincidono quando l'ennupla di riferimento è ortogonale.

Il tensore **K** interviene in modo essenziale nelle formule di *derivazione intrinseca* dei tensori. Precisamente, sieno $T^{i_1 \dots i_m}$ le componenti intrinseche ⁽³⁾

di un tensore m^{plo} **T**, le componenti intrinseche del suo tensore derivato sono:

$$(5) \quad T^{i_1 \dots i_m j k} = \frac{\partial}{\partial s_k} T^{i_1 \dots i_m} - \sum_l \Gamma^{i_l k}_{i_l} T^{i_1 \dots i_{l-1} i_{l+1} \dots i_m} + \dots,$$

essendo

$$(6) \quad \Gamma^{hik}_{hik} = \frac{K_{hik}}{\sqrt{a_{hh} a_{ii} a_{kk}}}$$

le componenti intrinseche del tensore **K**.

Se la ennupla di riferimento è ortogonale, Γ^{hik}_{hik} coincidono coi coefficienti di rotazione di Ricci e le (5) vanno a coincidere colle formule che ho stabilite da tempo ⁽⁴⁾.

(1) Loc. cit., formula (5).

(2) Loc. cit., n. 2.

(3) U. CISOtti, *Lezioni di Calcolo tensoriale*. Milano, Tamburini, 1928, nn. 50 e 51.

(4) *Derivazione intrinseca nel calcolo differenziale assoluto*, questi « Rendiconti », volume XXVII (1° sem. 1918, p. 388, formula (1')). Cfr. anche loco ora citato, p. 86, formula (2).

1. Per la giustificazione di quanto precede si consideri un vettore, o tensore semplice, di componenti covarianti T_i , il suo tensore derivato ha per componenti covarianti le espressioni ben note

$$(7) \quad T_{i/k} = \frac{\partial T_i}{\partial x_k} - \sum_l^n \left\{ \begin{matrix} i & k \\ l & l \end{matrix} \right\} T_l.$$

Introducendo le componenti intrinseche T_i del vettore e $T_{i/k}$ del suo tensore derivato⁽¹⁾ si ha:

$$T_i = T \sqrt{a_{ii}}, \quad T_{i/k} = T \sqrt{a_{ii} a_{kk}},$$

e quindi

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_k} = \sqrt{a_{ii}} \frac{\partial}{\partial x_k} T + \frac{1}{2} \frac{\partial a_{ii}}{\partial x_k} \frac{T}{\sqrt{a_{ii}}} = \sqrt{a_{ii}} \frac{\partial}{\partial x_k} T + \frac{1}{\sqrt{a_{ii}}} \left[\begin{matrix} i & k \\ i & i \end{matrix} \right] T.$$

Sostituendo in (7), e dividendo per $\sqrt{a_{ii} a_{kk}}$, si ottiene:

$$T_{i/k} = \frac{1}{\sqrt{a_{kk}}} \frac{\partial}{\partial x_k} T + \frac{1}{a_{ii} \sqrt{a_{kk}}} \left[\begin{matrix} i & k \\ i & i \end{matrix} \right] T - \sum_l^n \left\{ \begin{matrix} i & k \\ l & l \end{matrix} \right\} \frac{a_{ll}}{\sqrt{a_{ii} a_{ll} a_{kk}}} T.$$

Si noti che, come scende da (1),

$$ds_k = \sqrt{a_{kk}} dx_k,$$

e che

$$\frac{1}{a_{ii} \sqrt{a_{kk}}} \left[\begin{matrix} i & k \\ i & i \end{matrix} \right] T = \sum_l^n \frac{\delta_{il}}{\sqrt{a_{ii} a_{ll} a_{kk}}} \left[\begin{matrix} i & k \\ l & l \end{matrix} \right] T,$$

la precedente può scriversi dunque:

$$T_{i/k} = \frac{\partial}{\partial s_k} T - \sum_l^n \frac{1}{\sqrt{a_{ii} a_{ll} a_{kk}}} \left[a_{ll} \left\{ \begin{matrix} i & k \\ l & l \end{matrix} \right\} - \delta_{il} \left[\begin{matrix} i & k \\ l & l \end{matrix} \right] \right] T,$$

la quale, per le posizioni (4) e (6), diviene in definitiva:

$$(8) \quad T_{i/k} = \frac{\partial}{\partial s_k} T - \sum_l^n \Gamma_{i/k}^l T.$$

Questa formula notevole esprime le componenti intrinseche del tensore derivato mediante le componenti intrinseche del vettore e le sue derivate secondo gli archi delle linee coordinate: trattandosi di elementi tutti

(1) Loco prima citato, nn. 50, 51.

invarianti sono pure invarianti Γ e quindi ^{il k} i numeratori di (6) sono componenti covarianti di un tensore triplo, c. v. d.

2. La (8) è (5) per $m = 1$. È facile dedurre la (5) per m qualunque, seguendo il medesimo procedimento. Basta partire dalle formule di derivazione covariante di un tensore m^{plo} (2):

$$T_{i_1 \dots i_m / k} = \frac{\partial T_{i_1 \dots i_m}}{\partial x_k} - \sum_{\mu}^m \sum_l^n \left\{ \begin{smallmatrix} i_{\mu} & k \\ & l \end{smallmatrix} \right\} T_{i_1 \dots i_{\mu-1} l i_{\mu+1} \dots i_m},$$

e introdurre le componenti intrinseche, mediante le relazioni:

$$T_{i_1 \dots i_m} = \sqrt{a_{i_1 i_1} \dots a_{i_m i_m}} \cdot T_{i_1 \dots i_m}, \quad T_{i_1 \dots i_m / k} = \sqrt{a_{i_1 i_1} \dots a_{i_m i_m} a_{kk}} \cdot T_{i_1 \dots i_m / k};$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} T_{i_1 \dots i_m / k} &= \frac{\partial}{\partial s_k} T_{i_1 \dots i_m} + \frac{1}{2} T_{i_1 \dots i_m} \frac{1}{\sqrt{a_{kk}}} \frac{\partial}{\partial x_k} \log (a_{i_1 i_1} \dots a_{i_m i_m}) - \\ &- \sum_{\mu}^m \sum_l^n \frac{a_{ll}}{\sqrt{a_{i_{\mu} i_{\mu}} a_{ll} a_{kk}}} \left\{ \begin{smallmatrix} i_{\mu} & k \\ & l \end{smallmatrix} \right\} T_{i_1 \dots i_{\mu-1} l i_{\mu+1} \dots i_m}. \end{aligned}$$

Il secondo termine del secondo membro si può successivamente trasformare nel seguente modo:

$$T_{i_1 \dots i_m} \frac{1}{\sqrt{a_{kk}}} \sum_{\mu}^m \frac{1}{a_{i_{\mu} i_{\mu}}} \left[\begin{smallmatrix} i_{\mu} & k \\ i_{\mu} & \mu \end{smallmatrix} \right] = \sum_{\mu}^m \sum_l^n \frac{\delta_{i_{\mu} l}}{\sqrt{a_{i_{\mu} i_{\mu}} a_{ll} a_{kk}}} \left[\begin{smallmatrix} i_{\mu} & k \\ l & \mu \end{smallmatrix} \right] T_{i_1 \dots i_{\mu-1} l i_{\mu+1} \dots i_m},$$

perciò, sostituendo, si ottiene:

$$T_{i_1 \dots i_m / k} = \frac{\partial}{\partial s_k} T_{i_1 \dots i_m} - \sum_{\mu}^m \sum_l^n \frac{1}{\sqrt{a_{i_{\mu} i_{\mu}} a_{ll} a_{kk}}} \left[a_{ll} \left\{ \begin{smallmatrix} i_{\mu} & k \\ & l \end{smallmatrix} \right\} - \delta_{i_{\mu} l} \left[\begin{smallmatrix} i_{\mu} & k \\ l & \mu \end{smallmatrix} \right] \right] T_{i_1 \dots i_{\mu-1} l i_{\mu+1} \dots i_m},$$

da cui, per (4) e (6), si ottiene senz'altro (5).

(1) Cfr. le mie *Lezioni* su citate, n. 51.

(2) Loco ora citato, p. 75, (5).

Matematica. — *Sulla funzione potenziale di un doppio strato.*
(Estratto da una lettera al prof. T. LEVI-CIVITA). Nota ⁽¹⁾ del
Socio G. A. MAGGI.

A ragione rileva il prof. Picone ⁽²⁾ che i trattati lasciano qualche desiderio non del tutto soddisfatto nella importante questione dell'assegnamento del valore della funzione potenziale di un doppio strato, rappresentato, per un punto P esterno alla superficie σ , da

$$(1) \quad V = \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} h d\sigma,$$

nei punti della superficie σ medesima. Per cui propone una trasformazione della (1), che si presta a conseguire, con rigore e con ampiezza di condizioni, lo scopo.

Tuttavia, non parendo poter ottenersi tale trasformazione altrimenti che con un calcolo abbastanza lungo, non mi sembra inutile, dato anche il grande interesse dell'argomento, richiamare l'attenzione sull'uso a tale scopo dell'integrale

$$(2) \quad I = \int_{\omega} h \Sigma \mp d\omega,$$

dove $d\omega$ e ω rappresentano la grandezza dell'angolo solido sotto cui si vede, dal punto P, polo del raggio vettore, l'elemento $d\sigma$, e la stessa superficie σ (ω , grandezza del luogo dei punti d'intersezione della superficie sferica di centro P e raggio 1 colle semirette uscenti da P che incontrano, in uno o più punti, la superficie σ). Il quale notoriamente rappresenta (1), per P esterno a σ , e conserva, per ogni punto P_{σ} di σ , un valore finito.

Inteso che per valore V_{σ} di V in P_{σ} si prenda il limite, collo svanire della massima corda tracciabile nel contorno di un intorno σ'' di P_{σ} , di V' relativa alla superficie σ' , ottenuta levando σ'' da σ , rispetto alla quale P_{σ} è esterno, per modo che (distinguendo con un apice e con due le quan-

(1) Nella seduta del 5 maggio 1929.

(2) *Sul doppio strato superficiale*, nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », (5) vol. XXX, 1921.

tità relative a σ' e a σ'' , mentre l'assenza di apici significa che la quantità si riferisce a σ)

$$(3) \quad V' = I',$$

si dimostra subito rigorosamente, e colla sola condizione che h sia in σ limitata e integrabile, che questo limite è il valore di I in P_σ . Osserviamo perciò che, supposto $h < H$, e indicando con N il massimo numero di volte che una semiretta uscente da P incontra la superficie σ , segue da (2)

$$(4) \quad |I| \leq N H \omega,$$

con che I svanisce con ω e con σ .

Ora, abbiamo ovviamente, in P_σ

$$I' = I - I''.$$

Ossia, per (3),

$$V' = I - I'', \quad \lim V' = I - \lim I''.$$

Ma, per (4),

$$\lim I'' = 0.$$

Quindi

$$\lim V' = V_\sigma = I.$$

Valendosi delle precedenti relazioni, si dimostra pure agevolmente la continuità di V nei punti di σ , e la formola

$$\lim V = V_\sigma \pm 2\pi h,$$

$\begin{matrix} \text{se } h > 0 \\ \text{se } h < 0 \end{matrix}$

senza l'ipotesi della continuità di h , usata, per esempio, dal Poincaré, nella sua « *Théorie du Potentiel Newtonien* » ⁽¹⁾.

(1) § 103. (Paris, Carré et Naud, 1899).

Analisi. — *Operazioni funzionali lineari e sviluppi dello zero.*
Nota ⁽¹⁾ del Socio S. PINCHERLE.

1. Fra le operazioni funzionali lineari rappresentate da serie procedenti per le potenze del simbolo D di derivazione, la

$$(1) \quad A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} D^n \varphi$$

è al certo una delle più ovvie. Se $\varphi(x)$ è un elemento funzionale, ramo ad un valore di una funzione analitica regolare entro un campo semplicemente connesso contenente nel suo interno l'origine $x=0$, si descriva, dall'origine come centro, un cerchio tutto contenuto nel campo, indi il cerchio concentrico di raggio metà; per tutto questo secondo cerchio la serie (1) converge assolutamente ed uniformemente, e la sua somma è data da $\varphi(0)$.

2. È interessante di ricercare se questo risultato tanto noto e semplice si possa estendere ai casi in cui nel punto $x=0$ la funzione su cui si opera non è più regolare. Ciò può accadere infatti; ed eccone un esempio.

Sia $\varphi(x)$ un ramo di funzione analitica regolare in un'area T, limitata da una curva usuale su cui si trovi l'origine $x=0$; a T appartenga un tratto della normale al contorno condotta nel punto O; questa normale si assuma come semiasse reale positivo. In $x=0$, la $\varphi(x)$, pur non essendo regolare, abbia un valore finito e sia continua nel senso del semiasse reale positivo. Su questo semiasse, a partire dall'origine, si segni un segmento $O \dots a$ abbastanza piccolo perchè, per ogni punto x , Ox rappresenti la minima distanza di x dal contorno di T.

Ciò posto, sia h positivo e minore d'uno, e si consideri la serie

$$(2) \quad A_h(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h^n x^n}{n!} D^n \varphi,$$

dove x è un punto del segmento $0 \dots a$. Per ogni tale punto, è

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(x)|}{n!}} = \frac{1}{x},$$

perciò la (2) ha per somma $\varphi((1-h)x)$. Se ora la (2) rimane convergente per $h=1$, è applicabile il teorema di Abel per la continuità di $\varphi(x)$

(1) Presentata nella seduta del 5 maggio 1929.

per $x = 0$, e si ha quindi che anche in questo caso, la (1) dà come somma $\varphi(0)$.

3. La x^s , dove è $R(s) > 0^{(1)}$ soddisfa manifestamente alle condizioni poste per $\varphi(x)$ al numero precedente. Per $h < 1$, essa dà $(1-h)^s x^s$, e poichè per $R(s) > 0$ la $\sum (-1)^n \binom{s}{n}$ è convergente, si avrà

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{s}{n} = 0.$$

Applicando invece la A_h alla $\varphi^{(r)}(x)$, derivata r -esima di $\varphi(x)$, si avrà

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h^n x^n}{n!} D^{n+r} \varphi = \varphi^{(r)}(x(1-h));$$

per il caso di $\varphi(x) = x^s$, è ora sotto la condizione $R(s) > r$, si otterrà, col passaggio a limite per $h \rightarrow 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s(s-1) \cdots (s-n-r+1)}{n!} = 0,$$

che, per moltiplicazione per $\frac{1}{r!}$, viene a scriversi

$$(4) \quad \sum_{n=r}^{\infty} \binom{n}{r} \binom{s}{n} = 0.$$

Si sono così ottenuti i noti *sviluppi dello zero* (2) in serie di fattoriali, e sembra che il procedimento indicato ne metta in luce la genesi, altrimenti alquanto riposta.

4. Si può ora mostrare che ogni sviluppo dello zero in serie di fattoriali

$$(5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{s}{n} = 0,$$

valido per $R(s) > m$ (con m s'intenda il minimo intero per il quale la disuguaglianza $R(s) > m$ dà la condizione di convergenza) è una combinazione lineare a coefficienti costanti degli sviluppi (4) per $r = 0, 1, 2, \dots, m$. Per semplicità di scrittura, darò la dimostrazione per $m = 2$, ma lo svolgimento vale, qualunque sia m , negli stessi termini.

All'uopo, considero l'operazione

$$A(\varphi) = \sum a_n \frac{x^n}{n!} D^n \varphi.$$

(1) Con $R(s)$ s'intende «la parte reale di s ».

(2) Osservati per primo da FROBENIUS, «Journal für reine und angewandte Mathematik», t. LXXIII, pp. 1-30 (1871). Su questi, e sugli sviluppi d'interpolazione in genere, vedasi l'opera di N. E. NÖRLUND, *Leçons sur les séries d'interpolation*, ch. V (pp. 99-169). Paris, Gauthier Villars, 1926.

Ponendo in questa, successivamente, per φ gli elementi $1, x, x^2, \dots$ e tenendo conto dell'ipotesi (5), ottengo

$$A(s) = a_0, \quad A(x) = (a_0 + a_1)x, \quad A(x^2) = (a_0 + 2a_1 + a_2)x^2, \\ A(x^3) = 0; A(x^4) = 0, \dots A(x^n) = 0, \dots;$$

posto così $p_n = \nabla^n a_0$, si ha $p_n = 0$ per $n \geq 3$. Ma, dall'essere

$$a_n = p_n - np_{n-1} + \binom{n}{2} p_{n-2} - \dots + (-1)^n p_0,$$

che nel nostro caso si riduce ad

$$a_n = (-1)^n \left(p_0 - np_1 + \binom{n}{2} p_2 \right),$$

risulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{s}{n} = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{s}{n} - p_1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n \binom{s}{n} + \\ + p_2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \binom{n}{2} \binom{s}{n},$$

che è appunto una combinazione lineare a coefficienti costanti degli sviluppi (4) per $r = 0, 1, 2$.

5. Come la x^s , ogni altra funzione soddisfacente alle condizioni poste al numero 2 darà luogo, mediante applicazione della (1), ad interessanti osservazioni di analisi algebrica. Per darne un esempio assai semplice, si faccia $\varphi = x \log x$; essendo

$$x\varphi' = x + x \log x, \quad x^2\varphi'' = x, \dots x^n\varphi^{(n)} = (-1)^n (n-2)! x^n, \dots$$

la (2) dà

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b^n x^n}{n!} D^n \varphi = x \log x - b(x + \log x) + \frac{b^2 x}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{b^n x}{n(n-1)} + \dots,$$

la cui somma è $x(1-b) \log((1-b)x)$. Siccome lo sviluppo converge per $b = 1$, è applicabile il teorema di Abel ed il valore della serie è zero.

Si ritrova così il risultato $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$.

Se al posto di (1), si fosse preso lo sviluppo

$$(6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} D^n \varphi,$$

che per φ nelle condizioni del n. 1 o del n. 2 ha per risultato $\varphi(2x)$, l'applicazione alla precedente funzione $x \log x$ avrebbe dato da una parte, $2x \log 2x$, d'altra parte, con sostituzione diretta in (6):

$$x \log x + x + x \log x + \frac{x}{1 \cdot 2} - \frac{x}{2 \cdot 3} + \dots + (-1)^n \frac{x}{n(n-1)} + \dots,$$

onde si conclude

$$2 \log 2 = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(n-1)n} + \dots,$$

di verifica immediata.

Matematica. — *Sulla classificazione delle trascendenti intere.* Nota del Corrip. G. GIORGI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Ricerche sugli errori sistematici del « Draper Catalogue ».* Nota ⁽¹⁾ del Corrip. A. BEMPORAD e di L. GENOVESE.

Si è accennato in una Nota precedente ⁽²⁾ che tra i volumi finora pubblicati del Catalogo Astrografico esistono differenze sistematiche assai rilevanti, per quanto riguarda la determinazione delle grandezze fotografiche, fino a raggiungere l'importo di ben due grandezze. Dal confronto fra i vari cataloghi e le *typical regions* di Miss Leavitt ⁽³⁾ si concludeva che l'errore sistematico più piccolo (0^m.3) si presenta per le riduzioni delle lastre di Catania fatte nell'Osservatorio di Capodimonte con un procedimento che si fonda essenzialmente sulle grandezze fotografiche del *Draper Catalogue* ⁽⁴⁾. Con ciò non è detto che questo stesso catalogo, quantunque fondato sui migliori cataloghi esistenti di grandezze fotometriche e fotografiche, vada esente da errori sistematici: a Capodimonte ci fondiamo sul Draper solo perchè è il più vasto repertorio di grandezze fotografiche, di indici di colore, di spettri. Se tali errori esistono, è ovvio che devono ripercuotersi necessariamente sulle grandezze ricavate per la zona di Catania col procedimento

(1) Presentata nella seduta del 21 aprile 1929.

(2) *Saggio di confronto fra le grandezze fotografiche di varie zone del Catalogo Astrografico.* Nota di L. GENOVESE, questi « Rendiconti », vol. IX, p. 640, 1929.

(3) *Standards of magnitude for the Astrographic Catalogue.* « Annals of Harvard College Observatory », vol. 85, n. 1 (1919).

(4) « Annals of the Harvard College Observatory », voll. 91-99.

già accennato. È scopo della presente Nota mettere in luce tali errori che si possono investigare secondo due direzioni:

- a) secondo il tipo spettrale;
- b) secondo la grandezza stellare.

A tale fine abbiamo confrontato le grandezze fotografiche e gli spettri delle stelle del Draper che si trovano nelle anzidette regioni colle grandezze fotografiche di Miss Leavitt, dedotte appunto per servire di fondamento alle riduzioni fotometriche del Catalogo Astrografico, e abbiamo ordinato le differenze di grandezza D-L per ordine di classe spettrale da B ad Ma. Questo ci ha dato, sulla base di 306 confronti, le seguenti coppie di valori medi (classe e Δm):

Classe spettrale media	Δm D-L	Numero dei confronti	s	Valore calcolato (σ)	O-C $\Delta m - \sigma$
B ₆	+ 0 ^m .06	11	0.6	+ 0.03	(+ 0.03)
A ₁	+ 0 .06	67	1.1	+ 0.06	0.00
F ₄	+ 0 .16	85	2.4	+ 0.14	+ 0.02
G ₃	+ 0 .20	64	3.3	+ 0.20	0.00
K ₁	+ 0 .26	74	4.1	+ 0.26	+ 0.01
Ma	+ 0 .24	5	5.0	+ 0.31	(- 0.07)

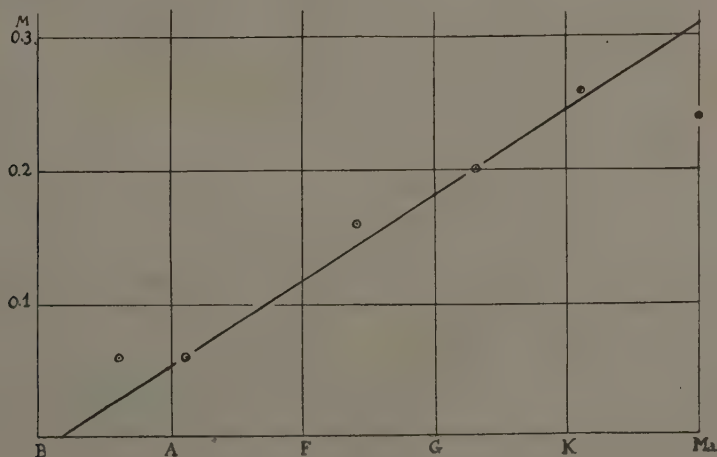


Fig. 1. — Errore sistematico dipendente dalla classe spettrale.

L'andamento dei valori medi di Δm è così regolare (v. fig. 1) che non lascia dubbio circa l'esistenza di un primo errore sistematico σ del

Draper Catalogue connesso colla classe spettrale, sebbene il relativo importo non ecceda che di poco i due decimi di grandezza stellare per le due ultime classi spettrali. Per valutare l'importo numerico di questo errore dipendente dallo spettro abbiamo fatto corrispondere alle classi B, A, F, G, K, Ma ordinatamente i valori interi di una variabile ausiliaria s da 0 a 5 e quindi abbiamo ridotto le 6 coppie di valori di Δm e di s col metodo dei minimi quadrati, dando peso $1/2$ alle due classi estreme, causa il minor numero di stelle da cui sono rappresentate. Si è così ottenuta la formola

$$(1) \quad \sigma = -0^m.009 + 0.064s,$$

che lascia i residui O-C riportati nell'ultima colonna della precedente tabella.

Ordinando lo stesso materiale secondo i valori delle grandezze stellari G (*Draper*) e formando le medie delle G e delle Δm per intervalli di una grandezza o di mezza grandezza, si sono ottenute le seguenti coppie di valori (G e Δm).

Grandezza media G	Δm D-L	Numero dei confronti	g	Valore calcolato (γ)	O-C $\Delta m - \gamma$
7 ^M .45	+ 0 ^M .04	53	- 0.55	+ 0 ^M .03	+ 0 ^M .01
8 .21	+ 0 .03	54	+ 0.21	+ 0 .06	- 0 .03
8 .72	+ 0 .13	62	+ 0.72	+ 0 .12	+ 0 .01
9 .19	+ 0 .19	65	+ 1.19	+ 0 .20	- 0 .01
9 .70	+ 0 .34	51	+ 1.70	+ 0 .31	+ 0 .03
10 .32	+ 0 .45	21	+ 2.32	+ 0 .48	(- 0 .03) $p^{1/2}$

I valori O-C dell'ultima colonna si riferiscono alla rappresentazione delle Δm ottenuta mediante la formola

$$\gamma = + 0^m.046 + 0.0646g + 0.0534g^2$$

dove $g = G - 8^M$. Le due formole (1) e (2) ci forniscono la valutazione dei due errori sistematici del *Draper Catalogue* dipendenti dalla classe spettrale e dalla grandezza. L'andamento dei valori calcolati mostra che l'errore γ può ritenersi nullo, praticamente, per le stelle più lucide della 7^a. Poichè le stelle che si pongono a base della riduzione fotometrica delle lastre di Catania sono ordinariamente comprese fra la 7^a e la 9^a grandezza, possiamo concludere che i detti errori σ e γ , anche se influissero per il loro pieno importo, non supererebbero in media l'importo di mezza grandezza, sono dunque in ogni caso notevolmente inferiori agli errori sistematici dei cataloghi considerati nella nota precedente. È però evidente che la eliminazione simultanea dei due errori sistematici σ e γ non può farsi

senz'altro colla applicazione delle due formule indipendenti (1) e (2) che porterebbe, come è risultato dal calcolo effettivo, ad una ultra-compensazione. L'intero materiale deve essere ridotto colla considerazione simultanea dei due errori sistematici in questione. Ciò è stato fatto mediante una formola del tipo

$$\Delta m = \sigma x + \gamma y.$$

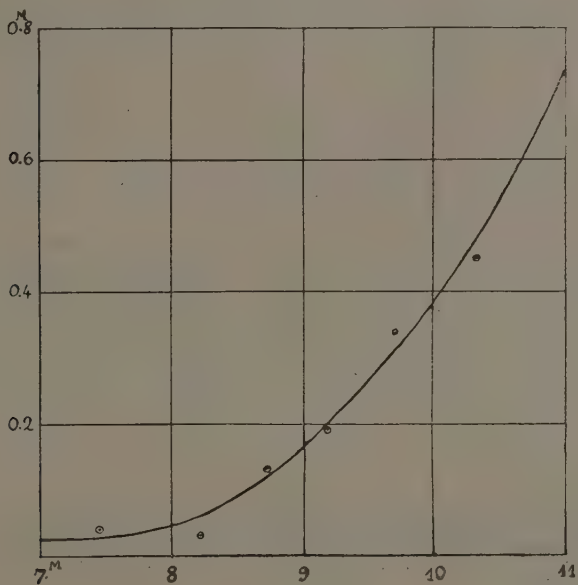


Fig. 2. — Errore sistematico dipendente dalla grandezza stellare.

Col metodo dei minimi quadrati, previa riduzione delle 306 equazioni disponibili in 28 equazioni di condizione comprendenti 10 o 11 stelle ciascuna (molto vicine fra loro per classe spettrale e per grandezza), si sono ottenuti i valori

$$x = 0.4460 \quad y = 0.5986$$

ai quali corrisponde la seguente

TABELLA

per la correzione simultanea dei due errori sistematici del « *Draher Catalogue* »

Gr Sp	B	A	F	G	K	M
7 ^M	— 0.02	— 0.04	— 0.07	— 0.10	— 0.13	— 0.16
8	— 0.03	— 0.05	— 0.08	— 0.11	— 0.14	— 0.17
9	— 0.10	— 0.12	— 0.15	— 0.18	— 0.21	— 0.23
10	— 0.23	— 0.26	— 0.29	— 0.31	— 0.34	— 0.37
11	— 0.43	— 0.45	— 0.48	— 0.51	— 0.54	— 0.57

I calcoli occorsi per la presente nota sono stati indipendentemente eseguiti, con varie approssimazioni, mediante formole quadratiche e cubiche, da ciascuno di noi. Ulteriori calcoli sono in corso per una trattazione più generale della questione che può ritenersi d'interesse fondamentale per le riduzioni fotometriche delle 20 zone in cui si suddivide il Catalogo Astrografico.

Astronomia fisica. — *Sull'interpretazione del comportamento di Algol e sulla variabilità della velocità della luce.* Nota⁽¹⁾ del Corrisp. M. LA ROSA.

Mi propongo in questa Nota di esaminare un ultimo punto rimasto oscuro nella mia « teoria balistica delle stelle variabili »: quello riguardante la divergenza fra le previsioni teoriche ed il comportamento offerto da Algol e dalle stelle analoghe, divergenza segnalata dai sigg. Bernheimer ⁽²⁾ e Salet ⁽³⁾ e su cui si appoggiano, per negare l'applicabilità del principio balistico alla propagazione della luce.

Prescindendo dalle riserve altra volta fatte, e che tuttavia mantengo, sulla fiducia da accordare alle misure indirette delle parallassi, mi metto volentieri, per abbondare in cautela, sul terreno indicato dai miei contraddittori, e discuto il comportamento di Algol (e quindi delle stelle analoghe) in base ai dati astronomici attualmente accettati.

(1) Presentata nella seduta del 21 aprile 1929.

(2) « C. R. » 180, 1925, p. 647; 183, 1926, p. 1263; 188, 1929, p. 387.

(3) « Zeit. f. Phys. », Bd. XXXVI, 1926, S. 302.

Algol, fra le stelle variabili ad eclissi, è quella che è stata oggetto preferito di studio, sicchè intorno ad essa abbiamo conoscenze estese e precise.

Gli elementi fondamentali che ne caratterizzano il comportamento sono :

- a) la curva di luce, che è stata determinata con scrupolosa esattezza, per mezzo della cella a selenio;
- b) la curva delle velocità radiali, pure esattamente determinata;
- c) le piccole anomalie che dette curve, e più specialmente la prima, presentano col tempo.

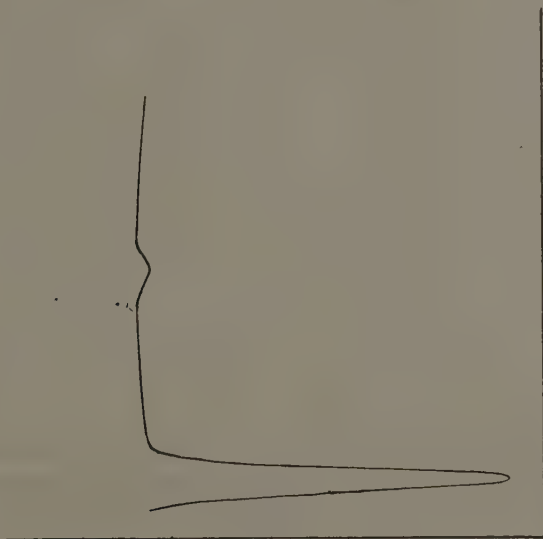


Fig. 1.

Importa molto tener presente che *curva di luce* e *curva di velocità* non possono essere riferite ad uno stesso ed unico corpo, avendo esse periodi estremamente diversi: precisamente di GIORNI 2,867 la curva di luce, di ANNI 1,88 la curva di velocità ⁽¹⁾.

Quest'ultima è quasi una sinusoide regolare, di ampiezza 10 Km/sec, mentre la prima ha la forma caratteristica che qui si riproduce.

L'analisi di queste curve e delle anomalie sopra accennate, e specialmente degli scarti trovati nelle epoche dei minimi di luce, ha condotto i vari studiosi a concludere che Algol risulta almeno di tre corpi: un primo corpo girevole con il periodo di giorni 2,867 (il quale è il corpo

(1) « Handbuch der Astrophysik » (J. Springer, 1928, Berlino). Bd. VI, II. Teil, p. 428 (art. di F. C. HEUROTEAU).

eccliassante che dà luogo al minimo principale), un secondo corpo attorno a cui il primo gira descrivendo un'orbita che contiene presso a poco la visuale, che è il corpo eccliassato, ed un terzo corpo attorno a cui gira il centro di massa dei primi due, con il periodo di anni 1,88 (dato della curva di velocità).

Di queste due orbite si conoscono gli elementi, e da esse si sono anche dedotte le costanti essenziali dei due primi corpi.

Sulla curva delle velocità non abbiamo gran che da osservare. Forse l'uso di mezzi più sensibili e di maggiore potere separatore potrà permettere in avvenire di rilevare (almeno in certi momenti) una costituzione complessa delle righe e di sceverare le componenti attribuibili ai vari corpi; ma poichè allo stato attuale ciò non è stato possibile di fare, tenuto conto del buon accordo delle misure eseguite, bisogna concludere che dei tre corpi, il secondo (cioè quello su cui lo spostamento periodico delle righe è stato in modo inequivocabile accertato) deve avere una luminosità notevolmente prevalente rispetto a quella degli altri due.

La curva di luce invece, contiene dei particolari più importanti che vanno studiati con molta maggior cura, essendo essi il prodotto del giuoco simultaneo dei tre corpi.

La presenza dei due minimi ci rivela una doppia eclissi; ci dice, cioè, che anche il primo corpo è luminoso, ossia che esso reca, quando non è nascosto dietro il secondo (minimo secondario) un contributo apprezzabile nell'intensità luminosa dell'insieme.

Inoltre, il confronto delle ampiezze dei due minimi ci può dire qualche cosa di più preciso sulle intensità relative dei tre corpi.

Se l'eclissi fosse totale le deduzioni che da questo confronto si possono dedurre avrebbero valore di certezza, ma il carattere del primo minimo — che manca di un tratto orizzontale — ci costringe a pensare che almeno la prima eclissi, la grande, sia parziale.

Attesa però la durata assai grande di questo minimo (quasi di 10 ore sulle 65 circa del periodo) si deve pensare che l'occultazione del secondo corpo, per parte del primo si estenda ad una frazione assai cospicua della sua superficie ⁽¹⁾ sicchè l'ampiezza del cambiamento di luce che avviene nel primo minimo ci darà un'idea abbastanza approssimata della luminosità del secondo corpo relativamente ai due corpi rimanenti.

Poichè la grandezza apparente dell'insieme, durante la fase sensibilmente costante viene valutata, nella solita scala delle grandezze stellari a 2.3, mentre al momento del minimo principale è valutata 3.5, si conclude che per questa incompleta occultazione del secondo corpo per parte del primo, l'intensità luminosa dell'insieme, al momento del minimo, dedotta dall'equa-

(1) Quest'ipotesi non ha, come vedremo, che scarsissimo peso sulle nostre conclusioni, le quali, perciò non possono venire inficiate da un'incertezza di essa.

zione di Pogson ci viene data dalla frazione 0,19, prendendo uguale a 1, quella osservata immediatamente prima, o immediatamente dopo il minimo stesso.

Questo ci dice che in conseguenza dell'eclissi, più dei $\frac{4}{5}$ della luce totale viene a mancare, e quindi che il contributo dato dal secondo corpo all'intensità normale dell'insieme è maggiore, o almeno uguale a questa frazione. Ciò è pienamente conforme a quanto la curva di velocità ci lasciava intuire.

Analogamente confrontando fra loro l'ordinata del secondo minimo e quella che abbiamo presa per confronto (rilevate con cura sulla figura) si trova che il cambiamento di luce che si produce in questa fase, valutato al solito, in grandezze stellari è di 0,036 dal quale numero si calcola che l'intensità luminosa al momento di questo minimo diventa appena 0,965 di quella osservata al momento in cui comincia (o finisce) la fase di passaggio per il primo minimo.

Questo risultato ci dice che l'intensità luminosa del primo corpo è piccola rispetto a quella totale del sistema ed a quella del secondo. Se si potesse supporre che questa eclissi secondaria fosse totale, si dedurrebbe che questa luminosità raggiunge appena 0,035 della totale.

Ma ammesso pure che ciò non sia, siamo sempre autorizzati a ritenere che l'intensità luminosa di questo corpo è solo di alcuni centesimi (prendendo 0,05 o 0,06 saremo al di sopra del vero) della totale.

In conseguenza possiamo concludere che l'intensità luminosa del corpo rimanente, il terzo, non sarà maggiore di $0,19 - 0,05 = 0,14$.

Volendo dunque ricostruire teoricamente quale dovrebbe essere la curva di luce del sistema prevedibile in base alla mia ipotesi sulla causa dei fenomeni di variabilità, bisogna tener conto della presenza di tutti e tre i corpi, delle loro intensità luminose e quindi dell'influenza su queste, dei loro movimenti.

Benchè del terzo corpo non sia stato rivelato un moto periodico, devesi ragionevolmente supporre che esso prenda parte al moto stesso di cui appare animato il centro di massa degli altri due, cioè che esso compie ⁽¹⁾ una rivoluzione col periodo di anni 1,88.

Nel cercare di dedurre quale debba essere la curva di luce, del sistema occorre conoscere, i contributi variabili che per effetto della propagazione balistica, possono essere dati da ciascuno dei tre corpi. E per stabilire l'entità di questi contributi e le loro leggi di dipendenza dal tempo, occorre calcolare per ciascuno dei tre corpi la costante fondamentale che nei miei lavori ho indicato con Kb , e cioè la quantità:

$$Kb = \frac{d}{c} \frac{v_0}{\tau}$$

(1) È anche plausibile pensare che essendo questo corpo tanto meno luminoso del secondo, sia più piccolo; e che quindi esso descriva un'orbita più grande e si muova con velocità più grande del secondo.

dove d è la distanza fra l'osservatore e la stella (o meglio il centro di massa dei tre corpi) τ il periodo di rotazione, v_0 l'ampiezza della velocità radiale, c la velocità *normale* di propagazione della luce.

Introducendo al posto di d la parallassi (in secondi di arco) la nostra costante viene data dalla formula:

$$Kb = 343,33 \frac{1}{\pi} \frac{v_0}{\tau}$$

in cui v_0 è espresso in Km/sec e τ in secondi.

Mettendo nel caso di Algol per π il valore 0,05 (quello stesso adottato dal signor Salet) e per v_0 e τ , i valori spettanti al primo corpo, cioè $v_0 = 40$ Km/sec, e $\tau = 1^{\text{e}}, 867 = 247.708$ sec., troviamo per Kb , il valore 1,85 il quale ci dice che in realtà questo corpo — così come vogliono i miei contraddittori — deve dare origine a effetti di variabilità nella curva di luce. Ma occorre tenere bene in mente, che questa variabilità, dovuta al primo corpo non può ricadere che sul contributo da esso recato alla luce totale, cioè sui 5 centesimi di questa. Analogamente per l'altro, il secondo, essendo $v_0 = 10$ Km/sec, e $\tau = 1,88$ anni, cioè $= 59,329,324$ sec., troviamo $K_2 b_2 = 1,46 \times 10^{-3}$. Essendo questo un valore di tanto inferiore al limite (0,02) occorrente perchè un effetto dipendente dal moto possa riuscire apprezzabile, dobbiamo concludere che il moto del secondo corpo non può dar luogo a variabilità di luce; ossia che esso, quando non è occultato dal primo, concorre col suo contributo costante di 0,81 all'intensità luminosa normale ($= 1$) dell'insieme.

Per il terzo corpo, come si è detto, non abbiamo dalle osservazioni conoscenza diretta del suo moto. Se lo supponessimo fermo non potremmo aspettarci apparenze di variabilità dipendenti da esso. Ma è molto ragionevole attribuire anche a questo corpo un moto orbitale, il cui periodo non può essere dubbio, dovendo essere lo stesso 1,88 anni del centro di massa degli altri due. Ciò che rimane incerta è la velocità.

Per metterci nelle condizioni a noi più sfavorevoli ammetteremo che questa sia maggiore di quella osservata per il centro di massa degli altri due (ciò che è prudente fare, tenendo conto della luminosità relativamente scarsa di questo corpo, rispetto al secondo), ed osserveremo che anche supponendola 10 volte maggiore, di quella del secondo corpo, (cioè che è certamente eccessivo), otterremo per il Kb un valore 10 volte più grande di quello del secondo corpo, ma sempre inferiore al limite occorrente, perchè si possa prevedere una variabilità di luce dovuta al moto orbitale.

Dunque dei tre corpi, solamente il primo può manifestare questa influenza, anzi in base al valore trovato di $K_1 b_1$ si può facilmente prevedere che esso deve presentare due massimi di eguale intensità poco discosti fra loro, ed abbraccianti uno dei minimi della curva di luce totale (quello dovuto all'eclissi), minimo che deve corrispondere o alla posizione di oppo-

sizione (minimo secondario), o a quella di congiunzione (minimo principale), a seconda il verso della rotazione.

L'ampiezza dell'escursione tra questi massimi ed il minimo più pronunziata a cui darebbe luogo questo primo corpo, sempre a causa del suo moto, prevedibile in base al valore di $Kb^{(1)}$, appare maggiore del rapporto 5:1 e minore del rapporto 10:1.

Volendo dunque prevedere quale possa essere il cambiamento della *luce totale* del sistema, in dipendenza della variabilità imputabile al primo corpo, troviamo che essa deve essere compresa fra questi limiti: $0,05 \times 5 = 0,25$ e $0,05 \times 10 = 0,5$.

Aggiungendo a questi valori, il contributo invariabile (0,95) dato dal secondo e dal terzo corpo, si trova che l'intensità luminosa totale, per effetto del moto del primo corpo, può subire un mutamento che deve essere compreso tra 1,2 e 1,45.

Un particolare importante degno di rilievo nel comportamento della luminosità la teoria balistica prevede nelle fasi di salita e di discesa di questi due piccoli massimi; precisamente essa prevede che si deve avere salita più graduale e discesa più ripida in corrispondenza di uno (primo, o secondo, dipendentemente del verso di rotazione) ed il comportamento opposto in corrispondenza dell'altro.

Ebbene, è ormai certo, dopo le misure accuratissime di Stebbins, che la curva di luce di Algol ⁽²⁾ presenta negli intervalli fra i due minimi, delle leggere variazioni; precisamente presenta due massimi che stringono da vicino il minimo secondario; di cui quello che segue il minimo principale presenta una graduale salita ad una brusca discesa; mentre l'altro presenta il comportamento opposto: una brusca salita ed una graduale discesa. Il valore di tali massimi, dedotto dalle curve di luce date da Stebbins, ed espresso direttamente come intensità risulta di 1,30.

Ognuno vede, come questo comportamento si adatti *meravigliosamente* con le deduzioni della teoria balistica; vede come questa riesca con estrema semplicità a darci ragione di tutto, perfino di questa circostanza accessoria ⁽³⁾: del carattere opposto con cui avvengono i due lievi cambiamenti, nella fase di salita ed in quella di discesa.

L'attento esame dei fenomeni presentati da Algol, fornisce dunque una *nuova e brillante conferma della mia teoria*; una nuova e fortissima prova

(1) Mi riservo di tornare presto su questo punto per dare in modo più preciso la curva di luce prevedibile per Algol, calcolando col metodo esposto nel mio recente lavoro, esattamente la variabilità da attribuire al primo corpo.

(2) Altre stelle analoghe presentano più spiccatamente questi importanti cambiamenti secondari che finora sono stati mal compresi.

(3) È superfluo fare rilevare che ammettendo come dimostrata l'ipotesi balistica si potrebbe, con un confronto più approfondito con i fenomeni presentati, precisare ancor meglio certe particolarità del sistema in esame.

del suo essenziale presupposto: l'influenza del moto della sorgente sulla velocità della luce.

Se questa influenza si faccia sentire in base al valore totale della v_0 , o in base ad una sua frazione secondo un coefficiente $q < 1$, non sono ancora in grado di stabilire con certezza ⁽¹⁾; ma mi sembra che oramai sia tempo che gli astronomi, e gli astrofisici specialmente, accolgano con minore diffidenza i miei sforzi, e diano con fervore l'opera loro per sottoporre a più esatti controlli — all'infuori di ogni idea preconcepita — questo punto essentialissimo delle nostre conoscenze sulla luce, di capitale interesse per la scienza dei cieli.

Fisica. — *Sulla misura della conduttività termica di campioni di forma non regolare.* Nota ⁽²⁾ del Corrisp. U. BORDONI.

1. Il problema della misura dei coefficienti di conduttività termica può notoriamente considerarsi come ormai risolto a sufficienza nella maggior parte dei casi «classici» che possono presentarsi; in questi ultimi anni, anzi, uno sfruttamento più attento delle possibilità offerte dai mezzi elettrici di produzione del calore e di misura delle temperature e da tipi nuovi di isolamento termico ha permesso di trasformare qualcuno dei metodi antichi, rendendoli ad un tempo più comodi e più precisi. Tuttavia, i tipi di apparecchi che utilizzano il calore sono oggi così numerosi ed importanti, che non è da meravigliare se le ricerche relative al loro perfezionamento pongano talvolta dei problemi sperimentali che i metodi accennati non sono senz'altro adatti a risolvere convenientemente; per es., il problema (già presentatosi due volte, e sotto forme poco diverse, a chi scrive) di determinare la conduttività di un materiale refrattario del quale si abbia un campione di forma non completamente regolare e (per qualche particolare ragione) non materialmente regolarizzabile.

In casi del genere accennato potrebbe pensarsi di applicare qualcuno dei metodi validi per campioni di forma regolare, salvo poi a correggere i risultati per tener conto delle irregolarità; ma a patto, naturalmente, che le correzioni siano calcolabili con sufficiente sicurezza e risultino modeste. Quando queste condizioni non si verifichino (come appunto è accaduto nei casi sopra accennati) l'esperienza ha mostrato allo scrivente che può invece usarsi con successo l'artificio consistente nella regolarizzazione

(1) L'ipotesi $q < 1$, è stata recentemente accettata dal sig. Kunitzki il quale per mezzo di essa ha cercato di spiegare il fatto conosciuto di ordine didattico: la maggiore frequenza. Quest'incertezza sul valore di q è vincolata a quella esistente nei valori delle parallassi.

(2) Presentata nella seduta del 5 maggio 1929-VII.

apparente, *dal punto di vista termico*, della forma del campione mediante l'aggiunta di altro materiale di natura bensì diversa, ma di proprietà termiche vicine il più possibile.

Nei casi ai quali qui si allude, il campione aveva presso a poco la forma d'una piastra, ma solo una delle faccie maggiori era sufficientemente piana (lo spessore era notevolmente ed irregolarmente variabile); sicchè era, ad esempio, possibile render piana anche l'altra con la aggiunta di quantità non grandissime di un adatto materiale ausiliario. Sono stati utilmente impiegati allo scopo materiali finemente polverizzati e moderatamente compressi (di natura variabile a seconda del campione in esame; sono stati provati dei materiali calcari, materiali argillosi cotti comuni o refrattari, farina fossile, anche polveri metalliche, etc.), oppure loro miscele in proporzioni convenienti, o loro impasti.

Il modo più semplice di sfruttare l'artificio accennato appare quello di regolarizzare termicamente il campione e applicare poi qualcuno dei metodi già noti; per es., eseguire la misura diretta della conduttività termica col metodo «del doppio strato», se si disponga di due campioni eguali, oppure con qualche sua variante che consenta (Jakob) di operare con un campione solo.

S'intende che occorrerà procedere per successive approssimazioni, servendosi delle prime misure, fatte a titolo di orientamento, nelle quali il materiale ausiliario non ha ancora proprietà sufficientemente prossime a quelle del campione, per ripeterle in condizioni sempre più soddisfacenti; e si ritiene inutile insistere qui sopra ovvie precauzioni sperimentali, fra le quali quella che le sonde termometriche siano a contatto diretto col materiale in esame, in guisa che, ai fini della misura, le funzioni del materiale ausiliario siano veramente ridotte al minimo possibile.

2. Per altro, malgrado l'accennata varietà delle combinazioni possibili che possono tentarsi per realizzare un adatto materiale ausiliario, possono incontrarsi difficoltà per ottenere mescolanze convenienti di conduttività termica non troppo bassa ⁽¹⁾, a meno di ricorrere a ripieghi od a impasti il cui uso non è sempre privo di inconvenienti.

Le prove fatte dallo scrivente mostrano che può spesso utilmente tentarsi un metodo di misura meno diretto. È noto che se la temperatura della superficie d'un «muro» omogeneo ed infinito viene fatta variare periodicamente con legge sinusoidale, anche nell'interno del muro (una volta raggiunto lo stato di regime) si verificheranno oscillazioni termiche dello stesso periodo; la cui ampiezza, per altro, andrà gradatamente attenuandosi con la profondità, con la quale varierà pure la fase della oscillazione. E dal punto di

(1) Negli usuali materiali di tipo calcare, la polverizzazione riduce notoriamente la conduttività termica a valori assai più bassi (anche a meno di un decimo) di quelli relativi al materiale originario compatto.

vista di questo fenomeno, le proprietà del muro sono individuate dal parametro $\frac{c}{\delta\gamma}$ (indicando con c la conduttività termica, con δ il peso specifico e con γ il calore specifico).

Ora, è un fatto sperimentale che i corpi migliori conduttori sono anche quelli di peso specifico più alto; si verifica perciò che, almeno per certe categorie di corpi, il parametro $\frac{c}{\delta\gamma}$ varia, da un corpo all'altro, entro limiti più ristretti di quelli del coefficiente di conduttività termica ⁽¹⁾; e che, ad ogni modo, il gruppo dei valori più facilmente realizzabili del parametro $\frac{c}{\delta\gamma}$ copre una serie di casi diversi da quelli ai quali è agevolmente applicabile l'altro procedimento sopra accennato.

La realizzazione sperimentale di questo procedimento richiede soltanto (oltre le misure, da farsi a parte, del peso specifico del campione e del suo calore specifico) la determinazione dell'attenuazione progressiva delle oscillazioni di temperatura nell'interno del «muro» ⁽²⁾, o quella del ritardo di fase (le due determinazioni possono controllarsi a vicenda). Il procedimento seguito è stato quello di regolarizzare termicamente il campione aggiungendovi del materiale ausiliario sino all'ottenimento d'uno spessore sufficiente; la faccia inizialmente più regolare del campione veniva poggiata orizzontalmente sopra una prima sonda termometrica (a resistenza) la quale a sua volta si trovava al disopra d'una adatta piastra riscaldante elettrica (rinchiusa entro una fodera di sottile lamiera di rame per rendere più uniforme la temperatura); una seconda sonda termometrica si trovava entro la massa del materiale, a contatto però con l'altra faccia del campione (in guisa che fra le due sonde si trovasse solo il materiale del campione in prova). L'avvicinamento delle condizioni sperimentali alle condizioni teoriche del muro indefinito veniva ottenuto con i tre provvedimenti seguenti:

a) una piastra riscaldante anulare ed un «anello di guardia» di materiale ausiliario (analogamente a quanto si pratica nel metodo «del doppio strato») rendevano la propagazione del calore sensibilmente normale alla faccia più regolare del campione;

(1) Così, mentre le conduttività termiche della sabbia quarzosa (in media 0,0008) e del Kieselguhr in forme del peso specifico 0,2 (in media 0,00022) sono rispettivamente 7,5 volte e 27 volte minori di quella (in media 0,006) del marmo, i corrispondenti parametri $\frac{c}{\delta\gamma}$ hanno i valori 0,0027; 0,0055 e 0,0105; sicchè i primi due sono soltanto 3,9 volte e 1,9 volte minori di quello relativo al marmo.

(2) È inutile rilevare che la più limitata variabilità del parametro $\frac{c}{\delta\gamma}$ non implica affatto, di per sè, che la determinazione di c attraverso la misura di questo parametro debba riuscire meno esatta.

b) la frequenza delle oscillazioni termiche (prodotte come si dirà poco oltre), dalla quale pure dipendono, a parità del materiale, la loro progressiva attenuazione nell'interno del muro ed il ritardo di fase, veniva regolata in modo che l'ampiezza delle oscillazioni stesse fosse già ridotta a circa 1/10 là dov'era situata la seconda sonda; dando allora al materiale ausiliario aggiunto uno spessore poco maggiore di quello del campione, si otteneva che l'ampiezza delle oscillazioni terminali fosse appena qualche millesimo dell'ampiezza delle oscillazioni della superficie a contatto con la prima sonda;

c) le oscillazioni termiche venivano prodotte (analogamente a quanto fu fatto dal King per uno scopo un po' diverso) inviando nella piastra riscaldante una corrente resa variabile periodicamente per mezzo della inserzione graduale di resistenze (in un circuito alimentato da una batteria di accumulatori), ottenuta con la rotazione di un braccio metallico portaspazze su di una trentina di piastrelle metalliche di contatto disposte circolarmente; la velocità della rotazione (comandata da un motorino elettrico con la interposizione di tre trasmissioni per cinghia, rallentatrici) veniva fissata in relazione a quanto è stato detto in *b)*; dopo qualche tentativo si riuscì a regolare i valori delle resistenze inserite fra una piastrina e l'altra e la larghezza delle piastrelle (cioè, i rapporti fra le durate dei contatti) in guisa che la prima sonda termometrica indicasse oscillazioni sufficientemente sinusoidali.

Nelle misure a temperature elevate (qualche centinaio di gradi) le sonde termometriche a resistenza (per lo più di filo sottile di rame ricotto smaltato, oppure di filo sottile di platino), venivano sostituite da coppie platino-platino rodio; l'isolamento dei due sottili fili nel tratto di attraversamento del materiale veniva ottenuto infilandovi sopra dei pezzetti di tubicino di vetro, di diametro appena superiore, ottenuti per sfilamento, e formanti una guaina pressochè continua.

È utile aggiungere che misure di controllo fatte sopra materiali noti, per i quali si poteva disporre di campioni di forma sia regolare, sia irregolare, hanno dimostrato che l'artificio suggerito in 1) ed i procedimenti descritti in 1) e 2) (maggiori particolari sulle modalità di applicazione verranno dati in altra sede) permettono realmente di raggiungere una esattezza soddisfacente purchè venga fatto un certo numero (variabile da caso a caso, ma non esagerato) di approssimazioni successive.

Può dunque affermarsi che i procedimenti qui proposti necessariamente più laboriosi di quelli già noti, allargano per altro, sensibilmente, la cerchia dei casi nei quali è ormai possibile compiere misure soddisfacenti di conduttività termica.

Fisica-chimica. — *Joni, numero elettronico e simmetria.* Nota del Corrisp. P. VINASSA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia. — *Gli insegnamenti tettonici di una nuova galleria ferroviaria della Costa Ligure.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. G. ROVERETO.

Fra Riva Trigoso e Moneglia, il raddoppiamento del binario della ferrovia costiera della Riviera, ha richiesto la perforazione di una galleria lunga più chilometri, benchè l'altezza della montagna soprastante non fosse molta.

Studiando ai due sbocchi il materiale estratto, ebbi a constatare, che non corrispondeva a ciò che avevo visto dall'esterno, lungo l'asse della galleria, in occasione del rilevamento geologico della tavoletta Sestri Levante, e del quale già avevo dato notizie particolareggiate ⁽²⁾.

Questo divario si riferiva soprattutto al tratto della galleria il cui materiale di scavo veniva depositato a Riva-Trigoso; richiesi, quindi, all'impresa Celle-Nardi Greco, assuntrice dei lavori di questa parte occidentale della perforazione, di permettermi, e di coadiuvarmi, in una visita nell'interno della galleria, ciò che ottenni con gentile condiscendenza.

All'esterno si osserva un complesso di strati di più formazioni, aventi in media direzione meridiana, e con vario grado di inclinazione (da 45° sino a 80°), però con immersioni tutte a ponente (ved. la planimetria). Come vedremo, questa uniformità di assetto è il fatto essenziale che discorda completamente con ciò che si osserva nell'interno, alla profondità massima dall'esterno di 400 m., ma in media di 200 m. e anche meno; e ciò era assolutamente imprevedibile.

Passo a descrivere le formazioni incontrate, a cominciare dall'imbocco di Moneglia, dove si ha la formazione più antica, e sottostante, dovunque sia in posizione stratigrafica, a tutto il restante. È questa rappresentata da scisti argillosi con interstrati calcarei — che qui sono calcari scistosi, bruni, a foraminiferi piritizzati, — gli stessi scisti che costantemente nella Riviera Orientale imballano, formando un insieme continuo, come chi scrive ha concretamente riconosciuto, tutte le masse ofiolitiche, grandi e piccole. Siccome questo complesso ofiolitifero forma una falda a sè, ha un contatto anormale — anche questo è un mio riconoscimento — con l'insieme che

(1) Presentata nella seduta del 7 aprile 1929.

(2) « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. XLVI, 1927, con carta geologica a p. 99.

le sta sopra, il quale si potrà considerare autoctono (sulla falda precedente), oppure un'altra falda, quando si giungerà a stabilire in modo sicuro l'età di tutti i termini stratigrafici che lo compongono, a cominciare dal più profondo, una scaglia vinata, che può essere cretacea, e quindi di falda, oppure eocenica (non più antica dell'eocene medio), e quindi autoctona.

Però, in corrispondenza della galleria e fuori, non è la formazione più profonda dell'insieme superiore che viene a contatto dell'insieme inferiore, ma l'arenaria macigno, che forma un anticlinale a sè, piegatosi, con la massima trasgressione, sulla falda inferiore. Ed è al mezzo di questo anticlinale, che all'arenaria succede uno scisto argilloso galestrino, con interstrati silicizzati, o ftanitici (differenti dalle ftaniti accompagnanti le ofioliti), e poi la scaglia di cui ho detto: mancano alla serie le arenarie, gli scisti policromi, gli scisti calcarei, gli ardesiaci e i calcari a fucoidi più superiori, che sono qui rimasti fuori di questo corrugamento, posteriore, com'è evidente, all'arrivo della falda ofiolitifera.

A questa complicata interpretazione regionale della serie stratigrafica e della tettonica (cui sono arrivato dopo molte incertezze, delle quali è reso conto nella serie, non ancora però del tutto completa⁽¹⁾, dei miei articoli sul rilevamento al 100.000 del foglio Rapallo) si aggiunge, in corrispondenza della galleria, un assetto che è eccezionale in grado ancora maggiore.

Il contatto anormale, fra gli scisti a interstrati calcarei e l'arenaria, ha all'esterno una inclinazione media di 60°, ciò che porterebbe a incontrarlo in galleria ad una distanza di circa m. 1100 dall'imbocco di Moneglia; invece si è incontrato a 2000 m. dallo stesso imbocco, perchè l'inclinazione da 60° passa in profondità a una media di 20°. Ora si noti, che la forte inclinazione osservata all'esterno corrisponde a un raddrizzamento, che è proprio di tutto il contatto anormale da me riconosciuto, da Moneglia sul mare a Bobbio in Val Trebbia, e che quindi era assolutamente inospettabile la mutazione nel suo andamento, a soli 420 m. di profondità, mutazione del resto ben corrispondente alla condizione di falda: il raddrizzamento lo spiegherò dopo.

Al di là del contatto anormale, così trasportato verso ponente, esiste, come ho detto, la formazione arenacea, e tutto il restante dell'autoctono, o della falda superiore, posteriore a quella ofiolitica. Questa arenaria si fa quasi orizzontale, e per coordinare tale condizione con ciò che si osserva all'interno, dove le inclinazioni sono in media di 45°, bisogna credere che formi una piega a C. Per di più si verifica un altro fatto ancora più notevole, ossia, la direzione degli strati, da circa NS - N 10° O, com'è al di fuori, ha in galleria una media di N 60° O, anche dove lo spessore della montagna soprastante non è maggiore di 200 m., sicchè, data la direzione

(1) « Boll. Soc. Geol. Ital. », dal vol. XLI (1922) al XLVI (1927).

della galleria, che è N 60° O, gli strati dell'arenaria sono stati perforati secondo la loro direzione; ciò, come ogni pratico può facilmente comprendere, ha influito sfavorevolmente sulla economia dell'avanzamento, massime in calotta.

Per spiegare tale anomalia bisogna ammettere, che la piega a C, risultante dal cambiamento di inclinazione, sia anche accartocciata e ripiegata per traverso rispetto al fianco coricato inferiore.

A 1400 m. dall'imbocco di Riva, questa anomalia di accartocciamento cessa, e si ritorna alla direzione meridiana: le arenarie racchiudono numerosi, e talvolta di notevole spessore, interstrati di scisti ardesiaci fogliettati, di frequente a contatto spostato e irregolare rispetto alle arenarie, per i movimenti delle masse a diversa resistenza. A 890 m. dall'imbocco di Riva, e sino a m. 950, si incontra, per di più, una faglia verticale, che mette le arenarie del fianco a mare della galleria di contro agli scisti ardesiaci del fianco a monte.

Si attraversa così il fianco inferiore del coricamento; dopo di che, una serie di immersioni a oriente (mancanti all'esterno) preannunziano un rialzamento della coltre scistoso-calcareo di base, e che la galleria ha perforato per 120 m. Tale rialzamento all'esterno presenta, nella sua fascia di arenaria, inclinazioni sino a 80°; mentre il suo affioramento avviene alquanto a monte della galleria, per un diverticolo che si osserva in località Casazzo (Tavoletta Sestri Levante), nella direzione generale del contatto anormale.

Dopo di che, questa coltre di coricamento non è più visibile in galleria, e si ritrova all'esterno, verso ponente, dopo parecchi chilometri da Riva, fra Cavi e Lavagna, nella località detta Lo Scoglio ⁽¹⁾, e da qui, dopo alcune diecine di altri chilometri, a Capo di Sant'Andrea di Cornigliano, e lungo tutto il confine di levante del massiccio ligure delle *pietre verdi*, dove definitivamente ha termine la sua espansione verso ponente. Sullo stesso allineamento finisce in Corsica; se ne conosce quindi la fine, ma non il principio, e questa ignoranza durerà finché la geologia italiana non avrà cambiato di vela.

Dopo il rialzamento della falda inferiore, l'assetto che si è trovato in galleria è eguale a quello esterno: alla distanza di m. 188 da Riva succede la serie degli scisti galestrini, con una intercalazione nel suo mezzo, e che è il mezzo di un anticlinale, di scaglia color vinato, la quale rappresenta, come già ho detto, la parte più profonda di tutto ciò che sta sopra alla falda ofiolitifera. È a questo punto che bisogna ricostruire un anticlinale, corrugato a grande discordanza sul letto formato dal dorso superiore di tale falda.

Rimane a farsi quest'altra considerazione, che può coordinarsi con una teoria finora poco provata. Il grande contatto anormale fra la formazione ofiolitifera e la serie dell'eocene, per tutto dove si osserva all'esterno, è a

(1) Ciò ho già segnalato nel « Boll. d. Soc. Geol. Ital. », a p. 103 del vol. XLVI (1927), dove però tale località è per errore chiamata « Il Castello ».

strati raddrizzati: a poca profondità però, come la galleria Riva-Moneglia insegna, è quasi orizzontale: ciò fa nascere il sospetto, che tale raddrizzamento provenga da un *movimento tettonico da denudazione*: man mano che la denudazione subatmosferica abbassava il rilievo montuoso, il tratto critico del contatto anormale si rialzava, e accentuava sino a 70°-90° la inclinazione dei suoi strati ⁽¹⁾.

Già ho avuto occasione di riconoscere altri fatti tettonici che hanno un'origine simile, benchè di diversa natura: quello da me chiamato *carreggiamento continuato*, o, se si vuole, *ripetuto*, e non possibile se le valli fossero piene, osservato nelle Alpi Venete ⁽²⁾; quello di fendersi in grandi spaccature, che ho dette *spaccature da isolamento*, le masse rocciose (dolomie, calcescisti, serpentine, ecc.) quando siano su di un sopporto di diversa natura, messo allo scoperto e isolato dall'erosione ⁽³⁾.

Un'altra sorpresa riservava in galleria l'eccezionale struttura geologica: un'abbondanza relativa di vene acquifere, mentre tutte le altre gallerie della stessa Riviera (eccezione fatta di quella attraverso il promontorio occidentale del Golfo della Spezia, che è in tutt'altra formazione geologica) ne sono prive, o quasi. Il fatto, che la formazione impermeabile degli scisti, con interstrati di calcari scistosi, si protende quasi orizzontale sotto a quella permeabile arenacea, deve rallentare lo scarico di questa; a ciò però bisogna aggiungere, che localmente i pendii esterni sono meno ripidi dell'ordinario, che l'arenaria è alterata e scomposta per un alto strato superficiale, che la galleria si allunga per un tratto sotto il principale corso d'acqua locale.

In quanto alle conclusioni pratiche e applicative, bisogna dire, che la galleria Riva-Moneglia è un nuovo avvertimento ai geologi, specialmente a quelli che si cullano nel semplicismo antico: nei paesi di falde il fare previsioni sulle condizioni geologiche di profondità è quanto mai difficile e problematico; è quasi sempre una illusione il credere di poter usare della *stratimetria*, ossia di ridurre a problemi geometrici l'assetto stratoso.

Nel caso presente, riducendo l'imprevisto alla più semplice consistenza, ne abbiamo, che a vece di perforare strati normali all'asse della galleria, e con inclinazione media, si sono incontrati strati allungati secondo la direzione della galleria stessa, con comportamento quindi quasi eguale a quello degli strati orizzontali: ciò ha senz'altro aumentato il costo della perforazione.

La quantità d'acqua trovata è eccezionale; quindi non se ne deduca la probabilità di trovare con perorazioni vene acquifere nel restante dell'ossatura rocciosa della stessa Riviera, come si sta ora progettando o tentando.

(1) In un breve tratto presso Rovegno avevo creduto di riconoscere che tale contatto formasse anche un piccolo coricamento (« Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. XLIII, 1924 tav. I sez. 2^a); dopo mi sono accorto che ciò non è, e che mi aveva tratto in inganno una frana superficiale: anche nei dintorni di Rovegno gli strati di contatto sono inclinati di 80°.

(2) « Rend. R. Accad. Lincei », vol. XXVI, p. 495, 1917.

(3) ROVERETO G., *Trattato di Geologia Morfologica*, p. 1061.

Fisiologia. — *Primi tentativi di registrazione delle correnti d'azione del nervo acustico.* Nota del Corrisp. C. FOÀ e di A. PERONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Patologia vegetale. — *Allerazione del fusto dei papiri prodotta da protozoi.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. L. PETRI.

Invitato dalla Direzione Generale delle Antichità e Belle Arti a determinare le cause di deperimento e di morte dei papiri che vegetano nelle fonti Aretusa e Ciane di Siracusa, ho intrapreso da alcuni mesi lo studio delle malattie parassitarie a cui vanno soggette quelle piante. Fra le diverse alterazioni che si riscontrano sui papiri in deperimento ve n'è una che presenta un particolare interesse per il fitopatologo. Si tratta di un processo di marciume della porzione del fusto immersa nell'acqua il cui agente specifico è un protozoo. I tessuti della regione colpita dall'alterazione si presentano notevolmente imbruniti visti dall'esterno, in sezione essi mostrano un color giallo-ocraceo che gradatamente passa al color bianco normale dei tessuti sani. Esaminate al microscopio le sezioni longitudinali o trasverse, eseguite in corrispondenza dell'alterazione, contrariamente a quanto potevasi prevedere non si è riscontrata alcuna traccia di ife fungine, neppure nel punto dove il marciume raggiunge il più grave stadio col dissolvimento delle pareti cellulari.

Questo processo d'idrolisi è attribuibile all'azione di batteri che, riuniti spesso in zooglee, restano limitati ad una ristretta zona in corrispondenza del punto iniziale dell'alterazione. Lo stadio avanzato di quest'ultima non ha permesso, in queste prime ricerche, di stabilire se il marciume sia stato provocato da traumi accidentali o da punture o erosioni di organismi animali.

Il fatto interessante è che nelle cellule del parenchima periferico e di quello lacunoso più interno si osservano numerosi individui di un protozoo flagellato. Per quanto lo sviluppo di questo potrebbe avvenire, almeno in apparenza, più facilmente negli ampi e numerosi meati intercellulari o nei vasi dei fasci fibrovascolari, tuttavia in questi non se ne trova traccia, come invece si sarebbe verificato se si fosse trattato di una forma saprofito vivente a spese dei prodotti di disorganizzazione dei tessuti sotto l'azione di altri microrganismi.

(1) Presentata nella seduta del 5 maggio 1929.

Nei preparati microscopici si osservano individui giovani, assai piccoli, che raggiungono μ 5 - 8 di lunghezza e di forma ovale; individui adulti, fusiformi, lunghi μ 16 - 18; cisti del diametro di μ 20 - 23; agglomerati d'individui giovani disposti talvolta a rosetta e che rappresentano probabilmente una forma di moltiplicazione.

In attesa di poter isolare e coltivare sopra agar nutritiva questo protozoo, si può presumere che esso sia riferibile al genere *Leptomonas* o *Crithidia*, già riscontrati nei tessuti di piante viventi. Come è noto, la presenza di flagellati nelle piante superiori è stata trovata in alcuni rappresentanti delle Euphorbiacee come in altre piante fornite di canali lattiferi, e in relazione a questa particolare localizzazione non sono stati osservati fenomeni gravi di malattia, ma non mancano casi di *flagellosi* localizzate in tessuti della più alta importanza fisiologica, come il clorenchima delle foglie con effetti patologici più o meno gravi per la pianta ospite.

Nel caso in esame non si notavano sintomi di malattia ben manifesti in dipendenza del processo di marciume della porzione basale del fusto, ma senza dubbio una simile alterazione non può che riuscire dannosa per l'ulteriore accrescimento della pianta, predisponendola ad altre infezioni sulla parte aerea del fusto, come quella che colpisce i papiri giovani, da poco emersi dall'acqua, i quali sono uccisi frequentemente da un'infezione fungina alla sommità del fusto, immediatamente sotto all'inserzione delle foglie.

Il protozoo in questione trova la sua principale fonte di nutrimento nel protoplasma delle cellule che egli invade perforandone la parete pecto-cellulosica⁽¹⁾. Anche i granuli d'amido, contenuti normalmente nelle cellule, presentano una sensibile diminuzione e anche la totale scomparsa in confronto a quanto si osserva nelle cellule prive del parassita, per cui è lecito ammettere che quest'ultimo trae dal citoplasma dell'ospite mediante l'azione di enzimi proteolitici e dall'amido, mediante l'azione di un'amilasi, il suo nutrimento.

(1) Che la cellulosa, è tanto più facilmente i composti pectici, possano essere idrolizzati dalle secrezioni enzimatiche di alcuni protozoi è un fatto già ben dimostrato specialmente per i flagellati che vivono nel tubo digerente delle termiti, le quali si nutrono di tessuto legnoso, e per quelle specie che attaccano le alghe di cui perforano la parete cellulosica.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sul raggio di convergenza degli sviluppi tayloriani.* Nota di S. MINETTI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. SEVERI.

§ 1. — Sono noti, nella teoria delle funzioni analitiche, i due seguenti teoremi dovuti rispettivamente il primo al Wigert ⁽²⁾, Le Roi ⁽³⁾ e Faber ⁽⁴⁾, il secondo al Faber ⁽⁴⁾:

I TEOREMA ⁽⁵⁾. — *Se $g(t)$ è una funzione intera che cresce meno rapidamente di e^t ($\varepsilon > 0$ e qualunque) la serie di potenze intere positive $F(z) = \sum g(n) z^n$ rappresenta una funzione uniforme avente un sol punto singolare; il punto $z = 1$.*

II TEOREMA. — *Se la serie $F(z) = \sum a_n z^n$ rappresenta una funzione uniforme avente il solo punto singolare $z = 1$ i suoi coefficienti possono essere messi sotto la forma $a_n = g(n)$, $g(t)$ essendo una funzione intera che cresce meno rapidamente di e^t .*

Questi due teoremi sono l'uno reciproco all'altro e dimostrano in particolare come le caratteristiche analitiche di una serie $\sum g(n) z^n$ (con $g(n)$ funzione intera) possono dipendere e dipendono in taluni casi da qualche « proprietà limite » della $g(n)$; ad esempio dal suo ordine.

Io ebbi occasione, qualche anno fa di estendere il teorema di Leau (vedi nota 5 a piè di pagina) dimostrando precisamente che ⁽⁶⁾:

Se $F(z)$ è funzione analitica regolare in $z = 0$ e se $\sum a_n z^n$ è il suo sviluppo in serie di potenze di z in un intorno di questo punto, il coefficiente generico a_n è il valore che, per n intero e positivo, assume una funzione in-

(1) Nella seduta del 6 gennaio 1929.

(2) WIGERT, *Sur les fonctions entières*, « Öfversigt af Svenska Vetenskapsakademiens Förhandlingar », 1900.

(3) LE ROI, *Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor*, « Annales de la Faculté de Toulouse », t. II, 1900, p. 341.

(4) FABER, *Ueber die Fortsetzbarkeit gewisser Taylor'schen Reihen*, « Math. Annalen », t. 57, p. 369.

(5) Questo primo teorema è una lieve generalizzazione di un teorema di Leau; vedi LEAU, *Recherches des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor*, « Journal de Mathématiques », 5^e série, t. V, 1899; vedi pure HADAMARD et MANDELBROIT, *La série de Taylor et son prolongement analytique*, II^{me} édition, avril 1926, « Coll. Scientia », p. 51, nota (1) a piè di pagina.

(6) S. MINETTI, *Sur le rayon de convergence et sur les singularités d'une classe de fonctions analytiques définies par le développement de Taylor*, « Comptes-Rendus de l'Académie de Sciences de Paris », t. 182, p. 1595, séance du 28 juin 1926. Vedi anche HADAMARD et MANDELBROIT, *La série de Taylor et son prolongement analytique*, II^{me} édition, avril 1926, p. 52.

tera $g(n)$ di genere $K = 0$ ed ordine $\rho = 1$ e se per una ∞^{ta} di valori dell'indice i è soddisfatta la condizione $r_{i+1} > (1 + \eta) r_i$, $\eta > 0$ qualunque, ma fissato a priori, il raggio R di convergenza della $F(z) = \sum a_n z^n$ è l'unità e $z = 1$ è punto singolare.

Restava dunque tuttora aperta la questione, di sapere sino a qual punto la « proprietà limite », per la $g(i)$, di essere di un determinato ordine, influisse sul raggio di convergenza e sulla distribuzione delle singolarità della corrispondente $F(z) = \sum g(n) z^n$.

Scopo della presente Nota è appunto quello di rispondere a questa questione. La risposta si consegue, è vero, in modo molto semplice, ma non mi sembra che tale circostanza sminuisca comunque l'interesse del quesito stesso.

Essa conduce indirettamente alla costruzione di una trascendente intera, data mediante il suo sviluppo esplicito in serie di Taylor, la quale soddisfa alla condizione che, per n intero e positivo assuma i valori dei coefficienti di uno sviluppo $\sum a_n z^n$ a raggio di convergenza non nullo.

Il Borel aveva già indicato un esempio di trascendente intera e precisamente la

$$g(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi} \sum \frac{(-1)^n a_n}{t - n}$$

tale che le quantità $g(0), g(1), g(2), \dots, g(n), \dots$ assumono i valori dati $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, ma sotto l'ipotesi restrittiva che la serie $\sum \left| \frac{a_n}{n} \right|$ fosse assolutamente convergente.

La funzione indicata dal Borel è « in generale », di ordine eguale a uno; la presente Nota permette invece di precisare che non esistono funzioni $F(z)$ definite da uno sviluppo del tipo $\sum a_n z^n$ per le quali i coefficienti a_n siano i valori, che per n intero e positivo, assume una trascendente intera di ordine apparente ρ « necessariamente » ⁽²⁾ maggiore di uno.

(1) BOREL, *Sur la détermination de classes singulières de séries de Taylor*, « Comptes-Rendus », t. 137, 12 nov. 1903, p. 695; vedi anche HADAMARD et MANDELBROIT, loc. cit., p. 50.

(2) Dico « necessariamente » perchè è chiaro che trovata una $g(n)$ di ordine $\rho \leq 1$ che, per n intero e positivo, assuma i valori a_n , a questa $g(n)$ può sommarsi una $g_1(n)$ di ordine ρ grande a piacere e che sia nulla per $n = 0, 1, 2, 3, \dots$; la nuova $G(n) = g(n) + g_1(n)$ è di ordine apparente eguale al maggiore dei due ordini apparenti delle g e g_1 ed assume, come la $g(n)$, per n intero e positivo i valori $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

Rilevo qui per incidenza che, se esiste una $g(n)$ di ordine $\rho < 1$, tale che $g(0) = a_0$, $g(1) = a_1$, $g(2) = a_2, \dots$ essa è unica; se ne esistesse invero un'altra $g_1(n)$ allora la funzione intera $G(n) = g(n) + g_1(n)$ dovrebbe essere di ordine apparente $\rho < 1$ e annullarsi per n intero e positivo il che è assurdo.

§ 2. - Sia dato uno sviluppo tayloriano a raggio R di convergenza $\neq 0$,

$$(I) \quad a_0 + a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + \dots + a_n \zeta^n + \dots = \sum a_n \zeta^n = f(\zeta).$$

Il coefficiente generale di questo sviluppo è dato dalla classica formula di Cauchy

$$(2) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$$

dove C è un circuito chiuso qualunque contenente nel suo interno l'origine $\zeta = 0$ e percorso nel verso diretto.

È agevole dimostrare che la funzione

$$(3) \quad \varphi(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$$

ove si interpreti n come una nuova variabile complessa, è una funzione analitica trascendente intera di n .

Occorre tuttavia rilevare che la (3) definisce « una » ben determinata trascendente intera di n fra ogni circuito di integrazione interno al campo di olomorfismo della $f(\zeta)$ racchiudente nel suo interno il punto $\zeta = 0$, che abbia ben determinati estremi di partenza e di arrivo (necessariamente coincidenti perchè il circuito è chiuso). Occorre inoltre che sia scelta la determinazione di ζ^{n+1} , ed è per quest'ultima ragione che forse conviene, per non incorrere comunque in ambiguità, di scrivere la (3) sotto la forma

$$(3') \quad \varphi(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{f(\zeta)}{e^{(n+1) \lg \zeta}} d\zeta.$$

Fissati dunque che siano gli estremi (coincidenti) di partenza e di arrivo del circuito d'integrazione C e la determinazione di $\lg \zeta$ che si vuol scegliere la (3') individua « una » ben determinata trascendente intera che gode, della proprietà che, per n intero e positivo, acquista il valore a_n .

È chiaro, d'altra parte, che di funzioni intere godenti di tale ultima proprietà ne esistono infinite e di un ordine così elevato come meglio piaccia.

Notiamo ora che la funzione integranda

$$\Phi(\zeta, n) = \frac{f(\zeta)}{e^{(n+1) \lg \zeta}}$$

è, rispetto ad n , olomorfa in tutto il piano delle n , e rispetto a ζ continua lungo il percorso di integrazione C .

Sotto tali ipotesi si dimostra subito che è lecita la derivazione sotto il segno ⁽¹⁾, ond'è

$$(4) \quad \varphi^{(k)}(n) = (-1)^k \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{f(\zeta) (\lg \zeta)^k}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

Ciò premesso è chiaro che, senza ledere la generalità della questione, si può sempre supporre R , raggio di convergenza dello sviluppo (1), maggiore dell'unità; se invero ciò non fosse ci si ridurrebbe subito a questo caso valendosi di una trasformazione omotetica $\zeta' = \lambda \zeta$, con λ cost.

Si fissi allora per contorno C d'integrazione il cerchio che ha per centro il punto $\zeta = 0$ e raggio eguale all'unità.

Lungo tal cerchio è

$$\begin{aligned} \zeta &= \rho e^{i\theta} = e^{i\theta} \\ \lg \zeta &= \lg \rho + i\theta = i\theta \\ d\zeta &= ie^{i\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Sostituendo tali valori nella (4) e supponendo, il che non lede la generalità del problema, $a_0 = 0$ si ottiene

$$\varphi^{(k)}(n) = (-1)^k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(i\theta)^k \sum_{s=1}^{\infty} a_s (e^{i\theta})^s}{(e^{i\theta})^{n+1}} e^{i\theta} d\theta.$$

Ed essendo evidentemente legittima l'integrazione per serie, può scriversi

$$\varphi^{(k)}(n) = (-1)^k \frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^{\infty} a_s \int_0^{2\pi} e^{i\theta(s-n)} \theta^k d\theta.$$

Ed integrando per parti sotto il segno \sum ,

$$\begin{aligned} \varphi^{(k)}(0) &= (-1)^k \frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^{\infty} a_s \left[\frac{1}{is} \left\{ (2\pi)^k - \frac{k}{is} (2\pi)^{k-1} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{k(k-1)}{(is)^2} (2\pi)^{k-2} - \dots \pm \frac{k!}{(is)^k} \right\} \right] \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} \varphi^{(k)}(0) &= -(-i)^{k-1} \frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a_s}{s} \left\{ (2\pi)^k + \frac{ki}{s} (2\pi)^{k-1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k(k-1)i^2}{s^2} (2\pi)^{k-2} + \dots + \frac{k!(i)^k}{s^k} \right\} \end{aligned}$$

(1) Tale proprietà è dimostrata, in generale, nei trattati sotto la più lata ipotesi dell'olomorfismo della funzione integranda rispetto ad ambedue le variabili.

o, più concisamente

$$\varphi^{(k)}(0) = - \frac{(-i)^{k-1}}{2\pi} \sum_{s=1}^{\infty} a_s \sum_{m=0}^k i^m \frac{k(k-1) \cdots (k-m+1)}{s^m} (2\pi)^{m-2}$$

con la convenzione di prendere come primo termine del secondo sommatorio (corrispondente dunque ad $m=0$) il valore $(2\pi)^k$.

In definitiva si ottiene

$$(5) \quad \varphi(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-i)^{k-1}}{2\pi} \sum_{s=1}^{\infty} a_s \sum_{m=0}^k i^m \frac{k(k-1) \cdots (k-m+1)}{s^m} (2\pi)^{m-2} \frac{n^k}{k!}$$

Dico che la funzione definita dalla (5) è effettivamente una trascendente intera e di ordine $\rho \leq 1$.

Si noti a tal uopo che

$$|\varphi^{(k)}(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} |f(z)| |g(z)|^k |dz| < \frac{1}{2\pi k} M(2\pi)^{k+1}$$

dove M sta a designare il massimo del modulo di $f(z)$ lungo il percorso d'integrazione C , o, se si vuole, nel campo C .

Posto

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k n^k$$

ne risulta pertanto

$$\sqrt[k]{|\alpha_k|} < \sqrt[k]{\frac{M(2\pi)^k}{k!k}}$$

e poichè

$$k! \sim \sqrt{2\pi k} e^{-k} k^k = \sqrt{2\pi k} e^k (\lg k - 1)$$

si conchiude che

$$\sqrt[k]{|\alpha_k|} < \sqrt[k]{\frac{M(2\pi)^k}{\sqrt{2\pi k} k^{\frac{3}{2}} e^k (\lg k - 1)}} \cdot (1 + \varepsilon) \quad \text{con } \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon = 0$$

relazione valida per un ε prefissato comunque $>$ di 0, almeno da un certo k in poi.

È perciò

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|\alpha_k|} < \frac{2\pi}{e^{\lg k - 1}} = \frac{2\pi}{k}.$$

In virtù dunque di taluni ben noti risultati sulla teoria delle funzioni intere, dovuti al Lindelöf⁽¹⁾ possiamo concludere che, indicato con $M(v)$ il massimo del modulo della $\varphi(n)$ per $|n| = v$ si ha

$$M(v) < e^{(1+\varepsilon)2\pi v}$$

dal che si conchiude appunto che $\varphi(n)$ è di ordine apparente eguale, al più, ad uno.

§ 3. — Le precedenti conclusioni conducono anche alla riflessione che la conoscenza perfetta delle funzioni intere di ordine $\rho \leq 1$ (aventi una sola singolarità essenziale all'infinito) porterebbe per conseguenza la conoscenza perfetta anche di una funzione analitica definita da uno sviluppo tayloriano e avente singolarità qualunque e comunque disseminate nel piano. Ciò non toglie che lo studio delle prime possa essere effettivamente più o meno difficile di quello delle seconde, *ma i due problemi, intesi nella loro interezza e da un punto di vista teoretico, non sono affatto l'uno più generale dell'altro.*

Il che mi sembra interessante.

Matematica. — *Sui polinomi definiti o semidefiniti.* Nota di S. CHERUBINO, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. G. SCORZA.

Le proprietà dei polinomi definiti o semidefiniti in relazione alle decomposizioni in somme di quadrati ed alla realtà o meno delle radici⁽³⁾, costituiscono un complesso di osservazioni che crediamo sia già bastevole per orientare su tale argomento tanto chi volesse ulteriormente approfondire lo studio, quanto chi volesse fare applicazione dei risultati ottenuti.

Per facilitare queste ultime, abbiamo pensato che sarebbe utile assegnare per questi polinomi delle forme tipiche cui far ricorso caso per caso, e che, oltre a riassumere quelle proprietà, presentino sufficiente sicurezza di comodo impiego nella pratica.

Il tentativo ci sembra abbia avuto esito felice poichè, insieme a queste forme tipiche, abbiamo ottenuto alcune interessanti osservazioni, che si possono classificare in questi tre gruppi:

1° precisazione dei coefficienti arbitrari, in relazione al numero delle radici reali dei nostri polinomi, e condizioni cui devono soddisfare gli altri;

(1) Vedi E. LINDELÖF, *Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini*, « Acta Societatis Scientiarum Fennicae », tomus XXXI, p. 39.

(2) Nella seduta del 21 aprile 1929.

(3) Proprietà da noi recentemente indicate nella Memoria: *Sulle decomposizioni in somme di quadrati dei polinomi definiti o semidefiniti* [in corso di stampa nei « Rend. Ist. Lomb. »], cfr. anche questi « Rendiconti », vol. IX, s. 6^a, 1° sem. 1929.

2° esame del problema dei polinomi di segno costante in un intervallo limitato e sua riduzione a quello già studiato (1);

3° osservazioni sui polinomi che si esprimono come combinazione lineare a coefficienti costanti di un dato polinomio definito o semidefinito e delle sue derivate successive.

L'interesse che possono avere, specie per le applicazioni, le osservazioni dei primi due gruppi è affatto evidente. Pel terzo gruppo di osservazioni, ci permettiamo rilevare che esse riguardano polinomi che sono stati frequentemente incontrati nell'analisi e che esse ci hanno fatto ritrovare, partendo da un punto di vista più generale, vari esempi di polinomi definiti, fra i quali alcuni già considerati da Hermite, da Hurwitz e da altri. Abbiamo inoltre riottenuto una elegante osservazione dello stesso Hurwitz (2), nonchè qualche altra, che ci è sembrata non meno interessate e che dipende in modo essenziale dalle osservazioni qui contenute (3).

1. Osservazioni sui coefficienti e prima forma tipica. Ogni polinomio di grado $2m$

$$f(x) = a_0 x^{2m} + a_1 x^{2m-1} + \dots + a_{2m}$$

si può sempre identificare ad una forma quadratica (associata ad $f(x)$)

$$(1) \quad \varphi(y) = \sum_{r,s=0}^{0 \dots m} a_{rs} y_r y_s$$

su $m+1$ variabili, ponendo in questa

$$y_0 = x^m, \quad y_1 = x^{m-1}, \dots, y_m = 1.$$

Per ciò, basta scegliere i coefficienti a_{rs} tali da soddisfare alle relazioni

$$(2) \quad a_i = \sum_{k+s=i} a_{k,s} \quad (k, s = 0, 1, \dots, m).$$

Orbene, il risultato fondamentale delle nostre precedenti ricerche assicura che: *affinchè $f(x)$ sia definito o semidefinito, occorre e basta che esista una $\varphi(y)$, soddisfacente alle (2), che sia definita o semidefinita (forma connessa ad $f(x)$) e, se questa è di caratteristica $p+1$, $f(x)$ possiederà almeno p coppie di radici immaginarie coniugate.*

(1) Questo problema presentava una difficoltà che poteva riuscire piuttosto seria, almeno per le applicazioni: essa è stata eliminata mercè un'osservazione di cui al primo gruppo.

(2) *Ueber definite Polynome* [«Math. Ann.», 73 (1913), pp. 173-176].

(3) E da una sulle matrici simmetriche, riportata nella nostra Nota: *Un'applicazione del calcolo di matrici alla teoria delle forme quadratiche* [anch'essa in corso di stampa nei «Rend. Ist. Lomb.»].

Ne segue facilmente, tenendo anche presente un procedimento che risale al Lagrange, che un polinomio del tipo ora detto si esprime con la formola

$$(3) \quad f(x) = a_0 \sum_{r=0}^m (e_{r,r} x^{m-r} + e_{r,r+1} x^{m-r-1} + \dots + e_{r,m})^2$$

ove $e_{0,0} \neq 0$ e soltanto p degli m parametri $e_{1,1}, \dots, e_{m,m}$ non sono nulli. Inoltre, se $e_{ii} = 0$, sono nulli anche tutti gli e_{is} ($s = i + 1, \dots, m$) cioè i termini della somma secondo membro della (3) sono precisamente $p + 1$.

Da questa (3) i coefficienti di $f(x)$ risultano rappresentati con altrettante forme quadratiche nei parametri reali e_{rs} , e cioè si ha

$$(4) \quad \begin{cases} a_i = a_0 \sum_{r=0}^m (e_{r,0} e_{r,i} + e_{r,1} e_{r,i-1} + \dots + e_{r,i} e_{r,0}) & (i = 0, 1, \dots, m) \\ a_{m+j} = a_0 \sum_{s=0}^m (e_{s,j} e_{s,m} + e_{s,j+1} e_{s,m-1} + \dots + e_{s,m} e_{s,j}) & (j = 0, 1, \dots, m). \end{cases}$$

In queste occorre tener conto che $e_{r,s} = 0$ per $r < s$ e che la seconda si può includere nella prima, estendendo i valori dell'indice i sino a $2m$ e ponendo $e_{r,m+j} = 0$, per $j > 0$.

Esaminando queste relazioni, si osserva abbastanza agevolmente che:

a) i primi (o gli ultimi) $m + 1$ coefficienti di $f(x)$, possono sempre tutti fissarsi ad arbitrio, qualunque sia p ;

b) se $0 < p < m$, oltre questi $m + 1$, sono arbitrari anche altri p coefficienti diversi dal termine noto (dal primo).

Il posto di questi coefficienti è però variabile col grado dei termini a secondo membro della (3).

c) pei polinomi definiti sono arbitrari tutti i coefficienti, tranne il termine noto (tranne il primo);

d) quando $p \equiv \frac{m}{2}$, ovvero $p \equiv \frac{m-1}{2}$, secondo che m è pari o dispari, possono diventare arbitrari, oltre i primi (o gli ultimi) $m + 1$, anche tutti i coefficienti dei termini di grado dispari;

e) se $p = 0$, cioè se $f(x)$ deve avere radici tutte reali, anche i primi (o gli ultimi) $m + 1$ coefficienti sono sottoposti a limitazioni⁽¹⁾, ed i rimanenti sono individuati da questi.

Le relazioni (4) costituiscono le condizioni cui devono soddisfare i coefficienti non arbitrari di $f(x)$, nel senso che, fissati quelli arbitrari e determinati, mediante le stesse (4), altrettanti fra i parametri e_{rs} (il che si può fare linearmente) le rimanenti relazioni esprimono i coefficienti non arbitrari mediante quelli che lo sono ed i parametri e_{rs} che non sono stati determinati, i quali ultimi restano del tutto arbitrari.

(1) Che sono assegnate dal noto teorema di CAYLEY-BORCHARDT.

Nel caso del polinomio definito, abbiamo indicato un altro mezzo per ottenere la condizione cui dovrà soddisfare l'unico coefficiente non arbitrario. Questa condizione si esprime in modo tutt'affatto generale ed assai semplicemente, sempre con l'ausilio di un certo numero di parametri ⁽¹⁾.

2. *Polinomi di segno costante in un intervallo.* È facile verificare che:
i polinomi di grado m e segno costante (zero compreso) nell'intervallo finito (a, b) sono tutti e soli quelli del tipo

$$(5) \quad \varphi(u) = (b-u)^m \cdot \psi\left(\frac{u-a}{b-u}\right)$$

dove $f(x) = \psi(x^2)$ varia nello insieme di tutti i polinomi definiti o semidefiniti di grado $2m$ e mancanti dei termini di grado dispari.

La osservazione d) del primo gruppo, ci assicura che la mancanza di questi termini non costituisce una modifica essenziale del problema trattato avanti poichè possono sempre aversi polinomi definiti o semidefiniti, di grado pari qualunque, assegnando a piacere i coefficienti dei termini di posto dispari.

È chiaro che il polinomio $\psi(y)$ che compare nella (5) risulta di segno invariato per ogni $y \geq 0$ e quindi che esso appartiene ad uno di questi tre tipi:

1° polinomi a radici tutte reali e negative;

2° polinomi definiti o semidefiniti;

3° prodotto di 2 polinomi uno del 1°, l'altro del 2° tipo ora indicati.

3. *Seconda forma tipica ed applicazioni.* Se la forma quadratica (I), connessa ad $f(x)$, è di caratteristica $p+1$, sappiamo ⁽²⁾ che esiste una sostituzione lineare omogenea reale, di modulo unitario, la cui matrice dei coefficienti si scrive

$$\Lambda = \begin{pmatrix} I & & -\lambda \\ & \dots & \\ 0 & & I' \end{pmatrix}$$

dove λ è una matrice reale di tipo $(p+1, m-p)$ ed I, I' sono 2 matrici unitarie di ordine $p+1$ ed $m-p$, per la quale sostituzione $\varphi(y)$ si trasforma nella

$$\varphi_1(\chi) = \sum_{ij}^{0 \dots p} a_{ij} \chi_i \chi_j,$$

avendo supposto, per fissare le idee, che siano indipendenti le prime $p+1$ righe della matrice a dei coefficienti di $\varphi(y)$. Ne segue immediatamente che si può porre

$$(6) \quad f(x) = \sum_{ij}^{0 \dots p} a_{ij} \chi_i(x) \chi_j(x) = \varphi_1(\chi_0, \dots, \chi_p) = \varphi_1(\chi)$$

(1) Per liberarsi dai quali bisognerà fare una ricerca di massimo o minimo. Tralasciamo di riportare la condizione predetta, per ragione di spazio.

(2) Un'applicazione del calcolo... (citata), n. 1.

dove

$$(7) \quad \chi_i(x) = x^{m-i} + \lambda_{i,1} x^{(m-p)-1} + \lambda_{i,2} x^{(m-p)-2} + \dots + \lambda_{i,m-p} \quad (i = 0, 1, \dots, p).$$

Si può così enunciare che:

a) i polinomi definiti o semidefiniti di grado $2m$, che posseggono p coppie di radici immaginarie coniugate, assumono tutti la forma (6), dove $\varphi_1(\chi)$ è una forma quadratica definita, su $p+1$ variabili, ed i polinomi $\chi_i(x)$ sono linearmente indipendenti e di grado $\leq m$ (ad es., sono dati dalle (7)). Viceversa, i polinomi di questa forma sono definiti o semidefiniti e posseggono ALMENO p coppie di radici immaginarie coniugate;

b) i polinomi definiti o semidefiniti di grado $2m$ sono tutti e soli quelli assegnati dalla formola

$$(8) \quad f(x) = a_{00} \chi_0(x)^2 + 2a_{01} \chi_0(x) \chi_1(x) + a_{11} \chi_1(x)^2$$

dove $\chi_0(x)$ e $\chi_1(x)$ sono 2 polinomi di grado $\leq m$, linearmente indipendenti, ed i parametri a_{00}, a_{01}, a_{11} soddisfano alla condizione

$$a_{00} a_{11} - a_{01}^2 \geq 0.$$

Orbene, si parta da un polinomio $f(x)$ che soddisfi alla a), quindi della forma (6), e si ponga

$$F(x) = \sum_{t=0}^{t=2m} \mu_t f^{(t)}(x)$$

dove $f^{(t)}(x)$ è la derivata di $f(x)$, di ordine t , ed i μ_t sono parametri reali.

Dopo un'accurata analisi, che del resto non è troppo laboriosa, abbiamo ottenuto che:

c) $F(x)$ è sempre combinazione lineare omogenea di $q+1 \leq m+1$ polinomi di grado $\leq 2m$, definiti o semidefiniti del segno di $f(x)$. Se $\mu_0 \neq 0$, fra questi polinomi alcuni sono proprio di grado $2m$ e posseggono, come $f(x)$, non più di $2(m-p)$ radici reali.

Cosicchè, se $f(x)$ è definito, sono tali anche questi polinomi di grado $2m$.

d) se la forma quadratica

$$(9) \quad \psi(y) = \sum_{r,s=0}^{0 \dots m} \mu_{r,s} y_r y_s \quad ; \quad \mu_{r,s} = \binom{r+s}{r} \mu_{r+s}$$

è definita o semidefinita di caratteristica $q+1$, il polinomio $F(x)$, ove $\mu_0 \neq 0$, oltre a soddisfare all'enunciato precedente, è definito o semidefinito del segno di $\mu_0 f(x)$. E se $q = m$, cioè se $\psi(y)$ è definita, $F(x)$ è anche esso tale.

Questo enunciato contiene, sotto forma alquanto più generale, la citata osservazione di Hurwitz.

Si ha inoltre che:

e) se $f(x)$ è definito e $\mu_0 \neq 0$, $F(x)$ è definito anche quando la (9) è semidefinita, anzichè definita.

Questa $\psi(y)$ è definita nei due casi in cui i parametri μ_r , soddisfano, per es., ad una delle due relazioni

$$\left. \begin{aligned} \mu_{r+s} &= \mu_r \cdot \mu_s \\ \binom{r+s}{r} \mu_{r+s} &= \sum_{k=0}^m \lambda_k \cdot \mu_{r-k} \cdot \mu_{s-k} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &(r, s = 0, 1, \dots, m) \\ &[\lambda_k \geq 0 \quad (k = 0, 1, \dots, m)]. \end{aligned}$$

In questi due casi rientrano gli esempi noti di polinomi definiti, considerati dallo Hermite e dallo Hurwitz, nonchè altri esempi che si costruiscono agevolmente.

Matematica. — *Classificazione delle superficie dello spazio hilbertiano il cui spazio 2-tangente è a quattro dimensioni.* Nota II di A. TONOLO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

3. *Le superficie V_2 della classe A.* — Si consideri una superficie V_2 dello spazio hilbertiano col σ_2 di quattro dimensioni, e si supponga che il determinante D (Nota I, formule (10)) sia diverso dallo zero. Esisteranno allora tre funzioni λ, μ, ν non tutte nulle per cui si ha:

$$(18) \quad \begin{cases} \lambda a^{(1,1)} + \mu x^{(1,1)} + \nu y^{(1,1)} = c^{(1,1)} \\ \lambda a^{(1,2)} + \mu x^{(1,2)} + \nu y^{(1,2)} = c^{(1,2)} \\ \lambda a^{(2,2)} + \mu x^{(2,2)} + \nu y^{(2,2)} = c^{(2,2)}. \end{cases}$$

Moltiplichiamo la prima equazione del sistema (18) per $x_{1,1}$, la seconda per $2x_{1,2}$, la terza per $x_{2,2}$ e poi sommiamo; indi operiamo in modo analogo con le funzioni $\gamma_{1,1}, 2\gamma_{1,2}, \gamma_{2,2}$. A causa delle (7) e della (12), si ricava:

$$(19) \quad \begin{cases} \lambda(a, x) + \mu(x, x) = 0 \\ \lambda(a, y) + \nu(y, y) = 0. \end{cases}$$

Abbiamo visto che non può essere $(x, x) = (y, y) = 0$.

Resta perciò a supporre che di queste espressioni tutte e due, o una sola, siano diverse da zero. Nel primo caso, non potendo essere $\lambda = \mu = \nu = 0$, si dovrà supporre $\lambda \neq 0$. E allora le (19) danno:

$$(20) \quad \mu = -\lambda \frac{(a, x)}{(x, x)}, \quad \nu = -\lambda \frac{(a, y)}{(y, y)}.$$

(1) Nella seduta del 21 aprile 1929.

Perciò, sostituendo in (18), si trae:

$$(21) \quad c^{(r,s)} = \lambda \left\{ a^{(r,s)} - \frac{(a, x)}{(x, x)} x^{(r,s)} - \frac{(a, y)}{(y, y)} y^{(r,s)} \right\}.$$

E ponendo le (21) nella (6), dividendo per $\lambda \neq 0$, si ha:

$$(22) \quad I - \frac{(a, x)}{a} X - \frac{(a, y)}{a} Y = 0,$$

avendo posto:

$$(23) \quad I = \sum_{r,s} a^{(r,s)} f_{r,s}.$$

Noi abbiamo supposto finora $(x, x) \neq 0$, $(y, y) \neq 0$: per la prima delle identità (15), ciò equivale a supporre $\Delta \neq 0$. L'insieme delle superficie per cui $D = 0$, $\Delta \neq 0$ costituirà la classe A : in queste superficie, potendo essere i due minori Δ_x , Δ_y entrambi non nulli, oppure uno solo nullo, o tutti e due nulli, suddivideremo questa classe rispettivamente nelle categorie a_1 , a_2 , a_3). Notiamo infine, che per le superficie di questa classe, la relazione (6) può venir sostituita dalla (22), nella quale figura l'invariante I , già incontrato in un'altra mia ricerca⁽¹⁾, e il cui annullarsi è condizione caratteristica delle superficie minime.

4. *Le superficie della classe B*. - Si supponga che una sola delle combinazioni (x, x) , (y, y) sia nulla, cioè che sia $\Delta = 0$. Si può sempre fare in modo che sia $(x, x) = 0$: in forza del lemma I non può accadere che anche (a, x) sia nulla. Allora la prima delle equazioni (19) ci dice che deve essere $\lambda = 0$, e la seconda $\nu = 0$, perchè $(y, y) \neq 0$. Quindi:

$$(24) \quad c^{(r,s)} = \mu x^{(r,s)} \quad (\mu \neq 0),$$

e l'equazione (6) diventa

$$(25) \quad \sum_{r,s} x^{(r,s)} f_{r,s} = 0.$$

Per le (24) si conclude che anche Δ_x è nullo, non però Δ_y , perchè se lo fosse, risulterebbe eziandio $D = 0$. L'insieme delle superficie per le quali si ha $D = 0$, $\Delta = 0$ costituirà la classe B : in questa non ci sono categorie da prendere in esame, perchè abbiamo visto che necessariamente uno e uno solo dei minori Δ_x , Δ_y deve essere nullo. Per queste superficie la (25) può sostituire la (6).

5. *Le superficie della classe C*. - Si supponga $D = 0$ e $\Delta \neq 0$. I due minori Δ_x , Δ_y non possono essere contemporaneamente nulli: infatti, se lo

(1) A. TONOLO, *Eine Eigenschaft der Minimalflächen des hilbertischen Raumes* [« Math. Zeitschrift », in corso di stampa].

fossero, non potendo le $x_{r,s}$, $y_{r,s}$ insieme essere proporzionali alle $a_{r,s}$, perchè allora esse sarebbero proporzionali fra loro, dovranno le $c_{r,s}$ esprimersi linearmente per le $a_{r,s}$ e $x_{r,s}$ (oppure per le $a_{r,s}$ e $y_{r,s}$). Ma d'altra parte, per la stessa ragione, dall'essere $D = 0$, segue che le $a_{r,s}$ si possono esprimere linearmente per le $x_{r,s}$ e $y_{r,s}$. Quindi, in definitiva, le $c_{r,s}$ sarebbero combinazioni lineari di queste funzioni, e perciò Δ nullo, contro l'ipotesi. L'insieme delle superficie per cui $D = 0$, $\Delta \neq 0$ costituirà la classe C): questa verrà suddivisa in due categorie c_1 , c_2) potendo i due minori Δ_x , Δ_y essere entrambi non nulli, oppure uno solo uguale a zero.

6. TEOREMA: *Non esistono superficie nelle quali $D = 0$, $\Delta = 0$.*

Poichè è $\Delta = 0$, sarà nulla in forza della prima delle identità (15), una delle combinazioni (x, x) , (y, y) . Si può sempre fare in modo che sia $(x, x) = 0$. Non potendo essere le $x_{r,s}$, $y_{r,s}$ proporzionali fra loro, dovrà essere

$$(26) \quad c_{1,1} = \alpha x_{1,1} + \beta y_{1,1} \quad , \quad c_{1,2} = \alpha x_{1,2} + \beta y_{1,2} \quad , \quad c_{2,2} = \alpha x_{2,2} + \beta y_{2,2} .$$

Moltiplichiamo la prima delle (26) per $y_{2,2}$ la seconda per $-2y_{1,2}$, la terza per $y_{1,1}$ e poi sommiamo. Per la (12) e la seconda delle (7), si trae:

$$0 = \beta (y, y) .$$

Quindi, essendo $(y, y) \neq 0$, sarà $\beta = 0$. Le (26) danno allora

$$(27) \quad c_{r,s} = \alpha x_{r,s} \quad (\alpha \neq 0) .$$

Sviluppiamo il determinante D secondo gli elementi della prima riga: si ha, essendo $D = 0$,

$$(a, c) = 0 ,$$

ovvero, per le (27),

$$(28) \quad (a, x) = 0 .$$

A questa deve essere associata la

$$(29) \quad (x, x) = 0 .$$

Ora, per il Lemma II della Nota I, le (28), (29) non possono aver luogo contemporaneamente. Il teorema è così dimostrato.

Riassumendo i risultati conseguiti nei numeri 3, 4, 5, abbiamo la seguente classificazione delle nostre superficie:

$$\begin{aligned} \text{Classe A)} \quad D \neq 0, \Delta \neq 0 & \left\{ \begin{array}{l} \text{categoria } a_1) \quad \Delta_x \neq 0, \Delta_y \neq 0. \\ \text{categoria } a_2) \quad \Delta_x \neq 0, \Delta_y = 0 [\Delta_x = 0, \Delta_y \neq 0]. \\ \text{categoria } a_3) \quad \Delta_x = 0, \Delta_y \neq 0. \end{array} \right. \\ \text{Classe B)} \quad D \neq 0, \Delta = 0. & \\ \text{Classe C)} \quad D = 0, \Delta \neq 0 & \left\{ \begin{array}{l} \text{categoria } c_1) \quad \Delta_x \neq 0, \Delta_y \neq 0. \\ \text{categoria } c_2) \quad \Delta_x \neq 0, \Delta_y = 0 [\Delta_x = 0, \Delta_y \neq 0]. \end{array} \right. \end{aligned}$$

7. *Tipi notevoli di superficie che appartengono alle tre classi.* - Le superficie minime sono tutte e soltanto quelle che appartengono alla categoria a_3) della classe A). E infatti, sia V_2 una superficie minima dello spazio hilbertiano col σ_2 a quattro dimensioni. Non tutti i minori contenuti nella matrice

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{2,2} \\ y_{1,1} & y_{1,2} & y_{2,2} \end{vmatrix}$$

possono essere nulli, perchè allora ci sarebbe proporzionalità fra le $x_{r,s}$ e $y_{r,s}$. Per fissare le idee, sia

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ y_{1,1} & y_{1,2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ovviamente risulta:

$$(30) \quad a_{1,1} D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & (a, a) \\ x_{1,1} & x_{1,2} & (a, x) \\ y_{1,1} & y_{1,2} & (a, y) \end{vmatrix}.$$

D'altra parte, per le superficie minime si ha ⁽¹⁾:

$$(31) \quad I = 0,$$

d'onde:

$$(32) \quad \sum a^{(r,s)} x_{r,s} = 0, \quad \sum a^{(r,s)} y_{r,s} = 0,$$

cioè:

$$(33) \quad (a, x) = 0, \quad (a, y) = 0.$$

Perciò, dalla (30),

$$(34) \quad a_{1,1} D = (a, a) \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ y_{1,1} & y_{1,2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Concludiamo intanto essere $D \neq 0$. Anche Δ è tale, perchè nel caso opposto, una delle (x, x) , (y, y) sarebbe nulla. Sia $(x, x) = 0$. Allora si avrebbe simultaneamente $(a, x) = 0$, $(x, x) = 0$, il che, per il Lemma II della Nota I, non può mai accadere. Che sia infine $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, risulta dalla seconda e terza identità del Lemma III in virtù delle (33). Concludiamo che le superficie minime dello spazio hilbertiano che hanno il loro σ_2 a quattro dimensioni, appartengono tutte alla categoria a_3) della classe A). Inversamente, se una superficie V_2 appartiene a questa categoria, essendo $\Delta \neq 0$, sarà $(x, x) \neq 0$, $(y, y) \neq 0$; ma $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, perciò per il Lemma II,

$$(a, x) = 0, \quad (a, y) = 0.$$

(1) Cfr. A. TONOLO, loc. cit. (1).

Valgono allora le (32), e di conseguenza si ha

$$I = 0;$$

la superficie V_2 è quindi minima.

8. *Le superficie rigate*, col σ_2 a quattro dimensioni, appartengono alla classe B). Infatti l'equazione di una tale superficie è del tipo

$$f = \varphi(u_1, t) + u_2 \psi(u_1, t).$$

Qui abbiamo:

$$\begin{aligned} f_1 &= \varphi_1 + u_2 \psi_1, & f_2 &= \psi, \\ f_{11} &= \varphi_{11} + u_2 \psi_{11}, & f_{12} &= \psi_1, & f_{22} &= 0, \end{aligned}$$

ove gli indici indicano ordinarie derivazioni rispetto alle variabili u_1, u_2 . Poichè $f_{22} = 0$, sarà pure nulla la derivata covariante $f_{2,2}$, perchè i simboli di Christoffel di seconda specie $\left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ t \end{smallmatrix} \right\}$ sono uguali a $\int f_1 f_{22} dt$. Perciò

$x_{2,2} = y_{2,2} = 0$. Assumiamo come assi di riferimento nel piano normale v quello di parametro $f_{1,2}$ e il suo ortogonale. Se con Y, X indichiamo parametri normali di questi assi, sarà

$$\begin{aligned} f_{1,1} &= x_{1,1} X + y_{1,1} Y, \\ f_{1,2} &= y_{1,2} Y. \end{aligned}$$

Per questa coppia di assi è: $x_{1,2} = x_{2,2} = y_{2,2} = 0$, quindi è principale. Ora nessuna delle funzioni $x_{1,1}, y_{1,2}$ è nulla, perchè altrimenti le $f_{1,1}, f_{1,2}$ sarebbero vincolate da una relazione lineare. Il determinante D è quindi diverso da zero. Si ha poi $(x, x) = 0$, perciò $\Delta = 0$. Segue $\Delta_x = 0, \Delta_y = 0$.

9. *Le superficie di traslazione* di equazione

$$f = \varphi(u_1, t) + \psi(u_2, t),$$

dove $\varphi = \varphi(u_1, t)$, $\psi = \psi(u_2, t)$ sono due curve (non rette) appartenenti a due spazi lineari tali che ogni direzione dell'uno sia perpendicolare ad ogni direzione dell'altro, appartengono alla classe C). Se con u_1, u_2 rappresentiamo gli archi di queste curve, le direzioni individuate dalle derivate ordinarie $f_1 = \varphi_1$, $f_2 = \psi_2$, $f_{11} = \varphi_{11}$, $f_{22} = \psi_{22}$ coincidono rispettivamente con le due tangenti alle due curve, e con le due normali principali alle medesime. Ne risulta che queste quattro direzioni sono due a due per-

pendicolari fra loro, e quindi indipendenti. Il σ_2 delle superficie considerate è a quattro dimensioni. Essendo $f_{1,2} = 0$, sarà pure $x_{1,2} = y_{1,2} = 0$: inoltre, avendosi

$$a_{1,2} = \int_k f_1 f_2 dt = 0,$$

il determinante D è nullo. Le superficie di traslazione qui considerate appartengono perciò alla classe C).

Matematica. — *Sulla decomposizione delle iperomografie vettoriali.* Nota di G. BACCHI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio R. MARCOLONGO.

I.

È ben nota la decomposizione (dovuta a Gibbs) delle omografie vettoriali, in omografie elementari dette *diadi*.

Una diade si determina come funzione lineare di due vettori; con la notazione più usata ⁽²⁾ si indica con:

$$H(u, v)$$

la diade determinata da due vettori, u, v . Se a è un vettore, si ha per definizione:

$$H(u, v)a = u \times a \cdot v$$

Le diadi hanno una notevole importanza nel calcolo omografico, e, tra l'altro, rendono agevole la trasformazione delle formule cartesiane in formule assolute.

In seguito alla recente introduzione nella pratica vettorialistica delle iperomografie vettoriali ⁽³⁾, si presentava naturale ricercare se questi nuovi enti potevano, come le omografie, essere espressi in funzione di vettori.

In questa Nota, appunto, definisco speciali iperomografie, (che chiamo *iperdiadi*) che sono funzione di soli vettori, e mediante le quali si possono decomporre le iperomografie generali.

Siano $a_1, a_2, a_3, \dots b_1, b_2, \dots$ vettori arbitrari dello spazio.

(1) Nella seduta del 5 maggio 1929.

(2) *Analisi vettoriale generale e applicazioni*. Vol. I. *Trasformazioni lineari*. 2^a edizione. Bologna, Zanichelli, 1929.

(3) BURALI F. e BOGGIO, *Espaces courbes et Relativité*. Ed. STEN. Torino.

la quale esprime l'iperomografia μ_r mediante il sistema multiplo (I) e le r -diadi formate con i vettori del sistema unitario ortogonale, i_1, i_2, i_3 .

III.

Valgono per le r -diadi che ho così introdotto, le seguenti formule che scrivo senza dimostrazione:

$$(D) \left\{ \begin{aligned} H_r(a_1, a_2, \dots, a_r, a_{(r+1)}) &= H_{(r-1)}(a_2, a_3, \dots, a_r, a_{(r+1)})(a_1 \times) = \\ &= H_{r-2}(a_3, a_4, \dots, a_r, a_{(r+1)})(a_2 \times)(a_1 \times) = \dots = \\ &= H_1(a_r, a_{(r+1)})(a_{r-1} \times)(a_{r-2} \times) \dots (a_2 \times)(a_1 \times) \end{aligned} \right.$$

e questa formula potrebbe servire per la definizione delle iperdiadi.

$$(E) \quad H_r(a_1, \dots, a_{r+1}) H_s(b_1, \dots, b_{s+1}) = \\ = a_1 \times b_{s+1} H_{r+s-1}(b_1, \dots, b_s, a_2, \dots, a_{r+1})$$

ossia, il prodotto di due iperdiadi è ancora una iperdiade.

Teoria dei numeri. — *Sopra gli ideali primi di un corpo quadratico.* Nota di A. M. BEDARIDA, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. FUBINI.

1. In un corpo circolare, generato da una radice primitiva di ordine q^r , essendo q un numero primo ed r un intero ordinario, l'esistenza e l'infinità degli ideali primi di ogni grado possibile f ⁽²⁾, vengono a dipendere dal celebre teorema di Dirichlet sopra le progressioni aritmetiche. Precisamente, da progressioni aritmetiche aventi tutte per ragione q^r e per termini iniziali numeri ben definiti. E, perciò la ragione è un divisore del numero fondamentale (discriminante) del corpo ⁽³⁾.

(1) Nella seduta del 20 gennaio 1929.

(2) Si ricordi che se P è un ideale primo di un corpo algebrico di grado n e p è il suo numero primo razionale coordinato, la norma dell'ideale è una potenza intera positiva f di p , $1 \leq f \leq n$: $N(P) = p^f$: il numero f è quello che viene chiamato grado dell'ideale primo P .

(3) Cfr. L. BIANCHI: *Lezioni sulla Teoria dei Numeri algebrici* (Zanichelli) pp. 424 e sgg. Il numero fondamentale di tale corpo è, salvo il segno, dato dall'espressione: $qq^{r-1}[r(q-1)-1]$. La circostanza asserita, dipende dal fatto che è sempre $qr-1[r(q-1)-1] \geq r$, escluso $q=2$ ed $r=1$, cioè il corpo $K(\sqrt{-1})$ (campo di Gauss), in cui gli ideali primi (numeri primi) sono dati, come è ben noto, dai numeri primi della progressione aritmetica $4x+3$.

Lo scopo della presente Nota consiste nel fare vedere come, in un corpo quadratico generale $K(\sqrt{m})$, l'esistenza e l'infinità, tanto degli ideali primi di primo grado, quanto degli ideali primi di secondo grado, si possa fare ancora dipendere dall'esistenza di infiniti numeri primi di progressioni aritmetiche ben determinate. Queste progressioni hanno tutte *per ragione*: se il corpo $K(\sqrt{m})$ è immaginario, il numero fondamentale, per $m \equiv 2, 3 \pmod{4}$, il numero fondamentale diviso per 4, per $m \equiv 1 \pmod{4}$; se il corpo $K(\sqrt{m})$ è reale, ancora il numero fondamentale, se $m \equiv 1, 2 \pmod{4}$, il numero fondamentale diviso per 4, per $m \equiv 3 \pmod{4}$. I termini iniziali sono numeri ben definiti ⁽¹⁾.

2. Sia P un ideale primo di un corpo quadratico qualunque $K(\sqrt{m})$, p il suo numero primo, razionale, coordinato, che supporremo $\neq 2$ e non critico, cioè non fattore del numero fondamentale ⁽²⁾. Come è ben noto, se l'ideale primo P è di primo grado, si ha $\left(\frac{m}{p}\right) = +1$; se è di secondo grado, si ha $\left(\frac{m}{p}\right) = -1$ ⁽³⁾. Allora, poichè ideali primi diversi hanno numeri primi razionali coordinati diversi ed inversamente, l'esistenza e l'infinità degli ideali primi di primo grado è degli ideali primi di secondo grado dipenderà dall'esistenza di infiniti numeri primi razionali p che, rispettivamente, rendono $\left(\frac{m}{p}\right) = +1$, $\left(\frac{m}{p}\right) = -1$.

Considereremo il caso degli ideali primi di secondo grado: l'altro si tratta nello stesso modo e conduce allo stesso risultato, come subito si desume dalle considerazioni che seguono.

3. Sia dunque $\left(\frac{m}{p}\right) = -1$ e siano q_1, q_2, \dots, q_s i fattori primi, razionali, diversi, di m ⁽⁴⁾. Per ben note proprietà del simbolo di Legendre, risulta:

$$(1) \quad \left(\frac{m}{p}\right) = \left(\frac{q_1}{p}\right) \left(\frac{q_2}{p}\right) \dots \left(\frac{q_s}{p}\right) = -1.$$

Indicando ora con q un o generico di questi numeri primi, consideriamo i seguenti casi per il simbolo $\left(\frac{q}{p}\right)$.

(1) In un mio lavoro di prossima pubblicazione, esporrò alcune mie ricerche sopra l'infinità degli ideali primi in un corpo algebrico generale.

(2) Con questo si vengono ad escludere ideali primi in numero finito.

(3) Cfr. BIANCHI: op. cit., p. 334.

(4) È m privo di fattori quadrati.

Sia $q = -1$: allora è $\left(\frac{-1}{p}\right) = \pm 1$ secondo che p appartiene alla progressione aritmetica $4x + 1$ oppure all'altra $4x + 3$ ⁽¹⁾.

Sia $q = 2$: allora è $\left(\frac{2}{p}\right) = \pm 1$ secondo che p appartiene ad una delle due progressioni aritmetiche $8x + 1$, $8x + 7$, oppure ad una delle altre $8x + 3$, $8x + 5$ ⁽²⁾.

Sia $q \equiv 1 \pmod{4}$: allora per la legge di reciprocità dei residui quadratici ⁽³⁾, risulta $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)$. Preso un intero razionale r , residuo quadratico di q , $r < q$, ogni numero primo p della progressione aritmetica $qx + r$ renderà $\left(\frac{q}{p}\right) = +1$, avendosi $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{r}{q}\right) = +1$. Se invece si prende un intero razionale r' , non residuo di q , $r' < q$, ogni numero primo p della progressione aritmetica $qx + r'$ renderà $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$, avendosi: $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{r'}{q}\right) = -1$.

Sia $q \equiv 3 \pmod{4}$, $q \neq -1$: allora, per la legge di reciprocità dei residui quadratici, risulterà $\left(\frac{q}{p}\right) = \mp \left(\frac{p}{q}\right)$ secondo che $p \equiv 3 \pmod{4}$ oppure $p \equiv 1 \pmod{4}$. Ora, preso il numero r del caso precedente: per ogni numero primo p comune alle due progressioni aritmetiche $qx + r$, $4x + 1$, sarà $\left(\frac{q}{p}\right) = +1$, perchè è $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{r}{q}\right) = +1$; per ogni numero primo p comune alle due progressioni aritmetiche $qx + r$, $4x + 3$, sarà $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$, perchè è $\left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{p}{q}\right) = -\left(\frac{r}{q}\right) = -1$.

Considerazioni analoghe si hanno se si considera il numero r' , non residuo di q .

Tenendo conto della (1), si potranno dunque fare le conclusioni seguenti:

1° Sia m dispari e positivo. Allora ogni numero primo p , comune alle s progressioni aritmetiche:

$$(2) \quad q_1x + r_1, \quad q_2x + r_2, \quad \dots, \quad q_sx + r_s$$

con $r_i < q_i$, $i = 1, 2, \dots, s$, ove i numeri r_i non residui quadratici di q_i , siano in numero dispari, renderà $\left(\frac{m}{p}\right) = -1$.

(1) Cfr. DIRICHLET-DEDEKIND: *Lezioni sulla Teoria dei Numeri* (trad. di A. FAIFOPFER) p. 86.

(2) Cfr. DIRICHLET-DEDEKIND: op. cit., p. 87.

(3) Cfr. DIRICHLET-DEDEKIND: op. cit., p. 89.

2° Sia m dispari e negativo. Allora ogni numero primo p , della progressione aritmetica $4x + 1$ e comune alle progressioni aritmetiche (2) con la stessa ipotesi sopra i numeri r_i ; oppure ogni numero primo p , della progressione aritmetica $4x + 3$ e comune alle (2) in cui i numeri r_i non residui di q_i siano in numero pari, renderà $\left(\frac{m}{p}\right) = -1$.

3° Sia m pari (positivo o negativo): si ponga $q_1 = 2$. Allora ogni numero primo p comune alle s progressioni aritmetiche:

$$8x + 1, \quad q_2x + r_2, \quad \dots, \quad q_sx + r_s;$$

oppure, comune alle altre s :

$$8x + 7, \quad q_2x + r_2, \quad \dots, \quad q_sx + r_s,$$

in cui $r_i < q_i, i = 2, 3, \dots, s$, ed i numeri r_i non residui quadratici di q_i , sono in numero dispari, renderà $\left(\frac{m}{p}\right) = -1$. Invece ogni numero primo p comune alle s progressioni aritmetiche:

$$8x + 3, \quad q_2x + r_2, \quad \dots, \quad q_sx + r_s;$$

oppure alle altre

$$8x + 5, \quad q_2x + r_2, \quad \dots, \quad q_sx + r_s,$$

in cui $r_i < q_i, i = 2, 3, \dots, s$ ed i numeri r_i non residui quadratici di q_i , sono in numero pari, renderà $\left(\frac{m}{p}\right) = -1$ (1).

Ora, ciascuno dei sistemi di progressioni aritmetiche che si sono considerati nei casi 1°, 2° e 3°, (come ciascuna coppia di progressioni aritmetiche che si è presentata nella discussione precedente, sopra il simbolo $\left(\frac{q}{p}\right)$, nel caso $q \equiv 3 \pmod{4}$) è tale che le relative progressioni hanno le ragioni prime tra loro due a due. Quindi, per i risultati esposti nella mia Nota: *Sopra i sistemi di progressioni aritmetiche*, in corso di stampa in questi « Rendiconti », ogni tale sistema (ogni tale coppia) possiede in effetto infiniti numeri primi, i quali sono tutti e soli i numeri primi di una progressione aritmetica avente per ragione il prodotto delle ragioni delle progressioni del sistema che si considera, cioè: nel caso 1°, tale ragione sarà m , nei casi 2° e 3°, sarà $4m$. Si è dunque stabilito il risultato, oggetto della presente Nota:

(1) È quasi ovvio notare che ogni numero primo delle progressioni $8x + 1, 8x + 5$ è un numero primo di quest'altra $4x + 1$; così, ogni numero primo delle progressioni $8x + 3, 8x + 7$ è un numero primo di quest'altra $4x + 3$. Questo occorre tenere presente nel caso di m pari e negativo

In un corpo quadratico $K(\sqrt{m})$, l'esistenza e l'infinità degli ideali primi di primo grado e degli ideali primi di secondo grado viene a dipendere dall'esistenza di infiniti numeri primi razionali di progressioni aritmetiche aventi per ragione: se il corpo è immaginario, il numero fondamentale, per $m \equiv 2, 3 \pmod{4}$, il numero fondamentale, diviso per 4, per $m \equiv 1 \pmod{4}$; se il corpo è reale, il numero fondamentale, per $m \equiv 1, 2 \pmod{4}$, il numero fondamentale diviso per 4, per $m \equiv 3 \pmod{4}$. I termini iniziali sono numeri ben definiti.

Si può, in ultimo, osservare che questi termini iniziali di tali progressioni aritmetiche si possono stabilire, in modo simmetrico, come viene appunto indicato nelle considerazioni finali della mia Nota più sopra citata ⁽¹⁾.

Teoria delle funzioni. — Ancora sulle serie di potenze che ammettono la circonferenza di convergenza come linea singolare. Nota di L. ONOFRI, presentata ⁽²⁾ dal Socio S. PINCHERLE.

1. In una precedente Nota ⁽³⁾ ho dimostrato che se una serie di potenze:

$$(1) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ha raggio 1 di convergenza ed è tale che la successione dei coefficienti a_n abbia fra i suoi punti limiti lo zero, è sempre possibile di determinare delle sostituzioni s sui coefficienti della (1) in modo che le serie ottenute, eseguendo queste sostituzioni, non siano continuabili al di fuori del cerchio di convergenza.

In questa Nota dimostro che il suddetto teorema è vero anche nel caso in cui lo zero non sia uno dei punti limiti della successione degli a_n .

2. Sia:

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

una serie avente il raggio di convergenza maggiore di 1 e sia:

$$b_{r_0}, b_{r_1}, \dots, b_{r_n}, \dots$$

(1) Se per es. $m = -q$, q primo ≥ 3 con $\left(\frac{-q}{p}\right) = -1$: i termini iniziali di tali progressioni aritmetiche (che qui avranno per ragione $4q$) potranno essere i numeri $s = 4ra' + 3qb'$ ove r è un residuo quadratico di q , $r < q$; a' e b' rispettivamente, le soluzioni delle congruenze $4x \equiv 1 \pmod{q}$, $qx \equiv 1 \pmod{4}$. Sarà evidentemente s primo con $4q$.

(2) Nella seduta del 5 maggio 1929.

(3) Presentata nella seduta del 17 marzo 1929.

una successione formata con coefficienti non nulli della (2) in modo che esistano infiniti numeri interi, positivi, diversi dagli indici r_0, \dots, r_n, \dots

Da questi infiniti numeri interi si estragga anzitutto una successione:

$$\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n, \dots$$

per la quale sia:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_{r_n}|} = 1;$$

e poi si effettui sui coefficienti della (2) la sostituzione:

$$s = (b_{r_0}, b_{\rho_0}) \cdot (b_{r_1}, b_{\rho_1}) \dots (b_{r_n}, b_{\rho_n}) \dots$$

formata di infiniti scambi.

La serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{s(n)} x^n,$$

che così si ottiene, ha per raggio di convergenza l'unità.

Basta infatti osservare che:

$$b_{s(\rho_n)} = b_{r_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_{s(\rho_n)}|} = 1.$$

3. Torniamo ora alla serie (1) e supponiamo che i coefficienti di essa, pur non possedendo per punto limite lo zero, abbiano un punto limite finito p .

La serie:

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - p) x^n,$$

i cui coefficienti hanno per punto limite lo zero, ha il raggio R di convergenza superiore od eguale all'unità inquantochè la (3) è la differenza fra la (1) e la:

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} p x^n.$$

Nel caso di $R > 1$ e nella ipotesi che esistano infiniti coefficienti di (3) diversi da zero è possibile (n. 2) di determinare una sostituzione s in modo che la:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{s(n)} - p) x^n$$

abbia raggio uno di convergenza.

Segue da ciò che per questa serie (od anche per la (3) se $R = 1$) si può costruire, servendoci dei procedimenti dati nella Nota precedente, una sostituzione t tale che la:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{st(n)} - p) x^n$$

ammetta la circonferenza di convergenza come linea singolare.

Osservando poi che la (4) ha un unico punto singolare e che:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{st(n)} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_{st(n)} - p) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} p x^n,$$

si può affermare che la sostituzione st , applicata ai coefficienti della (1), dà luogo ad una serie non continuabile.

L'unico caso di eccezione si presenta quando i coefficienti della (3) sono nulli da un certo punto in poi, e cioè quando si ha:

$$a_n = p.$$

4. Esaminiamo per ultimo il caso in cui i coefficienti a_n tendono all'infinito. Nella ipotesi che la (1) abbia raggio 1 di convergenza, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

Prendiamo ad arbitrio un numero intero $k \neq 1$ ed estragghiamo dalla successione dei coefficienti a_n una successione:

$$(\alpha) \quad a_{t_0}, a_{t_1}, \dots, a_{t_n}, \dots$$

in maniera che:

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n - t_{n-1}) = \infty,$$

$$(6) \quad \frac{t_n}{t_n - 1} \leq k.$$

Poi, servendoci dei numeri di (α) , costruiamo la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{t_n} - a_{t_{n-1}}) x^{t_n}$$

il cui raggio di convergenza, in virtù della tendenza all'infinito degli a_n , è sicuramente eguale ad 1.

Da ciò si deduce che dall'aggregato dei numeri:

$$\sqrt[n]{|a_{t_n} - a_{t_{n-1}}|}$$

si può estrarre una successione:

$$\sqrt[r_0]{|a_{r_0} - a_{s_0}|}, \sqrt[r_1]{|a_{r_1} - a_{s_1}|}, \dots, \sqrt[r_n]{|a_{r_n} - a_{s_n}|}, \dots$$

tendente all'unità.

Osserviamo infine che la successione:

$$(\beta) \quad a_{s_0}, a_{r_0}; a_{s_1}, a_{r_1}; \dots; a_{s_n}, a_{r_n}; \dots$$

(in cui gli indici sono posti in ordine crescente) soddisfa alla condizione (5) e, per la (6), è tale che:

$$(7) \quad \frac{r_n}{s_n} \leq k.$$

5. Consideriamo ora le sostituzioni cicliche:

$$c_n = (a_{s_n}, a_{r_n})$$

che scambiano a_{s_n} con a_{r_n} e formiamo il gruppo G di tutte le sostituzioni della forma:

$$c_0^{\epsilon_0} \cdot c_1^{\epsilon_1} \dots c_n^{\epsilon_n} \dots$$

dove ϵ_n può prendere i valori 0 od 1.

Il gruppo G ha evidentemente per ordine la potenza del continuo, mentre il suo sottogruppo Γ delle sostituzioni composte con un numero finito di cicli c_n ha per ordine la potenza del numerabile.

Siano g e h due qualsiasi sostituzioni di G e siano $f_g(x)$ e $f_h(x)$ le serie che si ottengono dalla $f(x)$ eseguendo sui suoi coefficienti le operazioni g ed h rispettivamente.

Se il prodotto gh è una operazione di Γ , la differenza $f_g - f_h$ si riduce ad un polinomio, se invece gh non appartiene a Γ , la funzione $f_g - f_h$ è una serie di potenze che ammette la circonferenza di raggio 1 quale linea singolare.

Infatti, poichè in questa serie i coefficienti di x^{s_n} e di x^{r_n} , se non sono entrambi nulli, hanno per valore assoluto $|a_{r_n} - a_{s_n}|$, si avrà (ricordando la (7)):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{r_n} - a_{s_n}|^{\frac{1}{r_n}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{r_n} - a_{s_n}|^{\frac{1}{s_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(|a_{r_n} - a_{s_n}|^{\frac{1}{r_n}} \right)^{\frac{r_n}{s_n}} = 1.$$

Inoltre, per la condizione (5), a cui, come già abbiamo osservato, soddisfa la successione (β), la $f_g - f_h$ è sicuramente una serie non continuabile.

Da queste considerazioni si deduce immediatamente che, se l'operazione gh non appartiene a Γ , non possono esistere, sulla circonferenza di raggio uno, dei punti che siano contemporaneamente regolari per f_g e per f_h .

6. Indichiamo con T l'insieme di tutti i punti della circonferenza di raggio uno che sono punti di regolarità per le serie f_g ed indichiamo con:

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n, \dots$$

i punti di argomento razionale che appartengono a T .

Se G_n è il complesso delle sostituzioni di G che ci forniscono serie aventi il punto regolare ϑ_n e se g_n è una qualsiasi di queste operazioni, si avrà, per quanto s'è detto superiormente:

$$G_n = g_n \cdot \Gamma,$$

e cioè il complesso G_n ha per ordine la potenza del numerabile.

Allora, ricordando che G ha per ordine la potenza del continuo, noi potremo affermare l'esistenza di una sostituzione s di G estranea ai complessi:

$$G_1, G_2, \dots, G_n, \dots$$

Questa sostituzione s , per il modo stesso con cui è stata scelta, darà luogo, applicata che sia ai coefficienti della (1), ad una serie f_s necessariamente non continuabile.

7. La dimostrazione che abbiamo ora data, pur assicurandoci dell'esistenza della operazione s , non ci suggerisce alcun procedimento concreto e pratico atto a realizzare la costruzione della suddetta sostituzione.

Se però è noto che la serie da cui si parte, cioè la (1), ha i punti singolari isolati, allora qualsiasi sostituzione g di G , non appartenente a Γ , ci fornisce una serie f_g non continuabile.

Invero, per quanto già sappiamo, la f_g potrebbe avere, al più, dei punti regolari isolati, il che è manifestamente assurdo.

Ad esempio, prendiamo la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

che ha l'unico punto singolare $x = 1$.

Se come successione (β) scegliamo la seguente:

$$2, 2^2; 2^3, 2^4; \dots; 2^{2n-1}, 2^{2n}; \dots,$$

qualsiasi sostituzione, della forma considerata ed operante su infiniti di questi elementi, ci permette di costruire, nel modo noto, una serie avente la circonferenza di raggio 1 come linea singolare.

Matematica. — *Ancora sulla rappresentazione lineare delle funzioni continue.* Nota di G. ASCOLI, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Le superficie iperspaziali con un doppio sistema coniugato.* Nota di E. BOMPIANI, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur l'équation de Riccati.* Nota di M. KOURENSKY, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Classificazioni della superficie dello spazio hilbertiano il cui spazio 2-tangente è a quattro dimensioni.* Nota di A. TONOLO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Tubazioni ricurve ed ali.* Nota di L. S. DA RIOS, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

I. — Azioni delle correnti sui tubi.

In seno ad una corrente uniforme si disponga un tubo di forma qualsiasi. Può darsi che i filetti fluidi vengano deviati in guisa che attraverso quel tubo si stabilisca un moto permanente. Sotto certe condizioni e con noti procedimenti si è valutato l'effetto cinetico reattivo e l'effetto cinetico di pressione sopportati dalla superficie tubolare, per l'azione del tronco di corrente limitato dalla superficie stessa e dalle sue sezioni terminali ⁽²⁾. Il primo di tali effetti è dovuto alla variazione della quantità di moto che si verifica nel passaggio attraverso il tubo; l'altro è dato dall'integrale dei decrementi della pressione dinamica (rispetto a quella statica) esteso internamente a tutta la parete del condotto.

(1) Nella seduta del 7 aprile 1929.

(2) Cfr., per es., T. LEVI-CIVITA, *Corso di Meccanica razionale; idrodinamica*, pp. 41 e segg.; La Litotipo, Padova, 1914.

L'azione del detto tronco non può confondersi con quella di tutta la massa fluida in moto. Insieme ai filetti che attraversano il tubo, altri deviano avvolgendolo esternamente, in modo che la deviazione s'attenua colla distanza fino ad annullarsi; del tutto all'infinito, e sensibilmente del tutto a distanza finita. Noi vogliamo richiamare l'attenzione anche sul tronco di corrente limitata dalla banda esterna del tubo e da superfici normali ai filetti. Di tale *tronco esterno* di corrente, come di quello interno suddetto, noi valuteremo l'azione dinamica in un caso particolare e con criteri opportuni.

La restante massa non sarà presa in considerazione. Ciò manifestamente, non appare lecito nel caso di fluidi perfetti; può tuttavia esser tollerato per i fluidi naturali, nei quali le reciproche azioni trasmettendosi da punto a punto s'affievoliscono fino a svanire. In altre parole, da un punto di vista realistico, noi riteniamo assolutamente preponderanti le azioni dei suddetti tronchi di corrente esterno ed interno alla tubazione, per ciò che i loro filetti periferici sono ad immediato contatto della parete.

Da una superficie di particolare configurazione, passeremo alla cellula alare e quindi alla semplice ala isolata. Conforteremo le nostre deduzioni teoriche con dati sperimentali sicuramente acquisiti, e non mancheremo infine di raffrontare il nostro procedimento con altri ben noti.

2. — *Speciale tubazione a sezione rettangolare.*

Sia $\widehat{O_1 O_2}$ un arco di curva situato in piano verticale; e si indichi con i (veggasi fig. 1) l'angolo che la sua corda forma con l'orizzonte, il valore di i essendo dell'ordine di grandezza degli angoli d'incidenza delle ali. Si consideri quindi la superficie generata dal movimento d'un rettangolo $ABCD$, il cui centro di figura O scorra sull'arco $\widehat{O_1 O_2}$ in modo che il suo piano riesca sempre normale all'arco direttore e che una sua mediana MON a quell'arco risulti sempre complanare. Due lati AB e CD del rettangolo si manterranno perciò orizzontali, e gli altri due AC e BD verticali. La superficie così generata è di forma tubolare e il rettangolo suddetto ne è la costante sezione normale.

Supponiamo che attraverso una siffatta tubazione (di cui la fig. 1 rappresenta la sezione mediana longitudinale) avvenga un moto permanente; come quello sopra immaginato. Siano S_1 ed S_2 le sezioni terminali piane di entrata e d'uscita del tronco interno di corrente, e rappresentate in figura dai segmenti $M_1 N_1$ ed $M_2 N_2$; e tanto nei punti di S_1 che in quelli di S_2 , la corrispondente velocità V_1 e V_2 abbia valore costante e sia diretta normalmente al piano della rispettiva sezione. L'effetto cinetico reattivo del tronco suddetto si risolve allora (come è ben noto) in due forze R_1 ed R_2 applicate ai rispettivi baricentri O_1 ed O_2 delle sezioni S_1 ed S_2 , essendo R_1 diretta come V_1 ed R_2 in senso opposto a V_2 . La portata P del moto essendo costante, saranno a ritenersi uguali i valori V_1 e V_2 , nonchè le

intensità R_1 ed R_2 . Indicando allora con φ l'angolo che formano fra loro le direzioni delle due forze R_1 ed R_2 , e con α l'angolo della direzione di R_1 con la verticale, le componenti orizzontale e verticale R_{1x} ed R_{1y} di R_1 sarenno

$$R_{1x} = R_0 \sin \alpha \quad ; \quad R_{1y} = R_0 \cos \alpha ;$$

e quelle di R_2 ,

$$R_{2x} = -R_0 \sin(\varphi - \alpha) \quad ; \quad R_{2y} = R_0 \cos(\varphi - \alpha),$$

designando R_0 il comune valore di R_1 ed R_2 .

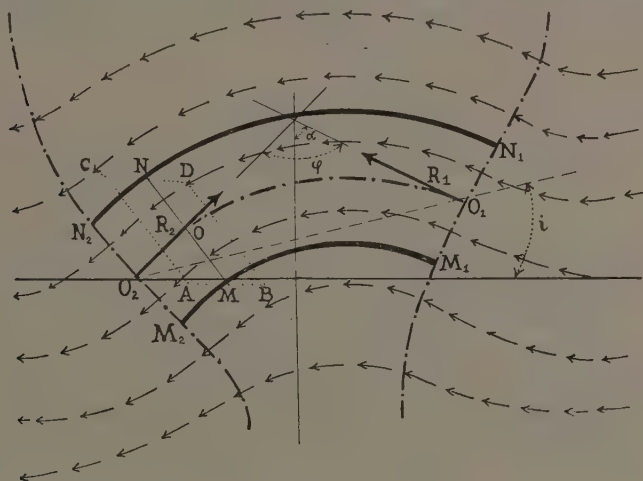


Fig. 1.

La risultante R di R_1 ed R_2 avrà quindi le due analoghe componenti

$$(1) \quad \begin{cases} R_x = R_0 \{ \sin \alpha - \sin(\varphi - \alpha) \}, \\ R_y = R_0 \{ \cos \alpha + \cos(\varphi - \alpha) \}. \end{cases}$$

Immaginiamo che le bande verticali della superficie tubolare siano prolungate al di sopra e al di sotto delle pareti ricurve. Con ciò, la tubazione essendo opposta ad una corrente, si verificherà un deflusso a filetti ricurvi non solo all'interno, ma anche superiormente e inferiormente alla tubazione stessa; mentre ai lati la corrente seguirà indisturbata. Si considerino le regioni fluide al di sopra e al di sotto delle pareti ricurve, limitate da queste e inoltre da superfici normali ai filetti, come appare dalla stessa fig. 1. Mentre i filetti attigui alle superfici rappresentate in figura dagli archi M_1, M_2 e N_1, N_2 , ne hanno lo stesso andamento, gli altri vanno successivamente

avvicinandosi all'andamento rettilineo. Ne consegue che, ove ci si limiti a due strati attigui alle pareti ricurve e di spessore abbastanza piccolo, il corrispondente effetto reattivo si traduce in due forze \mathbf{R}'_1 ed \mathbf{R}'_2 per il deflusso soprastante, e in due altre analoghe \mathbf{R}''_1 ed \mathbf{R}''_2 per l'altro; \mathbf{R}'_1 ed \mathbf{R}''_1 essendo parallele ad \mathbf{R}_1 ed \mathbf{R}'_2 e \mathbf{R}''_2 ad \mathbf{R}_2 . L'effetto degli altri strati andrà poi annullandosi al rettificarsi dei filetti. Volendo tenerne conto, alle forze $\mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2, \mathbf{R}''_1, \mathbf{R}''_2$ dovranno sostituirsi altre forze rispettivamente meno inclinate sull'orizzonte e di maggiore intensità.

Le formule (1) stabilite per il deflusso interno possono perciò riferirsi approssimativamente a tutto il deflusso interno ed esterno, salvo un maggior valore di R_0 . Esse porgono in generale per R_x ed R_y valori diversi da zero.

Seguiteremo ora la nostra indagine prescindendo dall'effetto cinetico di pressione.

3. — *Le tubazioni precedenti e le cellule alari; caso dell'ala isolata, sottile o spessa.*

Se il rapporto fra la base AB e l'altezza MN del rettangolo generatore ABCD (di cui alla fig. 1) è dell'ordine di grandezza dell'allungamento di un'ala, la tubazione corrispondente può essere comparata al sistema di due ali sottili di un biplano. Basta immaginare sopprese le bande laterali e supporre l'arco $\widehat{O_1 O_2}$ coincidente con la linea mediana d'un profilo d'ala. Veramente nei biplani le due ali sono per lo più identiche e spostate soltanto verticalmente l'una rispetto all'altra; quantunque non manchino esempi in cui l'ala inferiore sia meno profonda di quella soprastante. Comunque, l'aria investendo una cellula alare si comporta in sostanza come fosse in presenza della tubazione già descritta. Sicuramente ciò avviene nella parte centrale. Verso i bordi laterali i filetti tendono invece a sfuggire in obliquo, il che importa ivi un moto irregolare, e di conseguenza un minor valore del rapporto $\frac{R_y}{R_x}$, come fu sperimentalmente constatato⁽¹⁾. Nulla

però induce a ritenere che la mancata presenza dei setti verticali estremi influisca sulla direzione delle forze \mathbf{R}_1 ed \mathbf{R}_2 ; per cui sotto l'aspetto qualitativo seguiteranno a sussistere le conclusioni sopra dedotte. La cellula alare può, cioè, essere assimilata alla tubazione già descritta.

Se svanisce l'altezza MN del rettangolo generatore della superficie tubolare, questa viene allora trasformandosi in un'ala isolata estremamente sottile. Vengono meno con ciò le forze relative al deflusso interno; ma persistono quelle $\mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2$ relative al deflusso soprastante, nonchè le altre due $\mathbf{R}''_1, \mathbf{R}''_2$ del deflusso inferiore. Per le considerazioni sopra svolte, si può ritenere che la risultante \mathbf{R}_1 delle forze $\mathbf{R}'_1, \mathbf{R}''_1$ e quella \mathbf{R}_2 delle forze $\mathbf{R}'_2, \mathbf{R}''_2$ siano dirette approssimativamente secondo le tangenti agli

(1) Cfr., per es., A. FAGE, « A. R. S. Sc. », *The aeroplane*. London, Griffin, 1917.

estremi del profilo dell'ala. E perciò le conclusioni saranno ancora quelle volute dalle (1).

Bisogna infine notare che le ali praticamente usate hanno spessore considerevole, come appare dalla fig. 2; tanto che del loro profilo suole distinguersi il lembo superiore o *dorso* da quello inferiore o *ventre*, il primo essendo più incurvato dell'altro. In conformità le reazioni \mathbf{R}'_1 ed \mathbf{R}'_2 avranno direzioni prossime a quelle delle tangenti ai punti estremi del lembo superiore $\widehat{O_1 S O_2}$; ed $\mathbf{R}''_1, \mathbf{R}''_2$ a quelle delle tangenti agli estremi del lembo inferiore $\widehat{O_1 I O_2}$. Con ciò le risultanti \mathbf{R}_1 ed \mathbf{R}_2 di $\mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2$ e $\mathbf{R}''_1, \mathbf{R}''_2$ avranno tale andamento come l'ala spessa fosse sostituita da un'ala sottile di profilo intermedio fra i lembi suddetti.

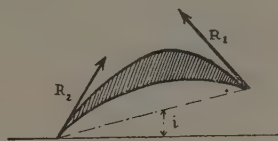


Fig. 2.

4. - Interpretazione di dati sperimentali.

In base alla precedente concezione e tenendo conto del solo effetto reattivo, si possono giustificare alcuni fatti, che di prima giunta sembrerebbero paradossali. Mi limito ai seguenti (1):

a) Di una cellula alare si è sperimentato il comportamento complessivo e quello di ciascuna ala in presenza dell'altra. Si è concluso che l'ala superiore non è influenzata da quella sottostante, ma viceversa; e che una minor profondità di quest'ultima dà luogo a buon funzionamento. E,



Fig. 3.

difatti, riguardando la cellula come una tubazione, si capisce bene che l'ala inferiore regoli e non perturbi il funzionamento dell'altra, e che ad essa spetti un minor sviluppo, con superficie parallela.

b) Le ali spesse, a parità d'altre condizioni, danno luogo ad una maggior sustentazione. Dalla fig. 2 si scorge infatti che le forze $\mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2$ hanno componenti verticali maggiori di quelle che avrebbero se l'ala fosse sottile e fosse perciò rappresentata da un arco di curva meno incurvato del lembo

(1) I fatti sperimentali che si citano sono ben noti. Essi sono riferiti nell'opera di EIFFEL, *Nouvelles recherches sur la resistance de l'air et l'aviation*. Paris, Dunod et Pinat, 1914.

superiore $\widehat{O_1 S O_2}$. S'intende, cioè, come la maggior sostentazione trovi la sua causa nell'incurvatura più accentuata dei filetti soprastanti.

c) Ad ali d'incidenza nulla, l'esperienza attribuisce un valore R_y diverso da zero. Ciò appare senz'altro dalla fig. 3, le forze R_1 ed R_2 avendo componenti verticali dello stesso segno.

5. — Effetto cinetico di pressione.

Ritorniamo alla superficie tubolare, di cui alla fig. 1. La risultante Π delle pressioni su di essa esercitate si può avere considerando separatamente il contributo delle bande laterali e delle pareti incurvate. Il primo è da ritenersi assolutamente nullo, per manifesta ragione di simmetria. Riguardo alle altre pareti, due ipotesi possono farsi: o la velocità per ogni punto P di esse è la stessa del punto P_i interno e di quello P_e esterno alla tuba-

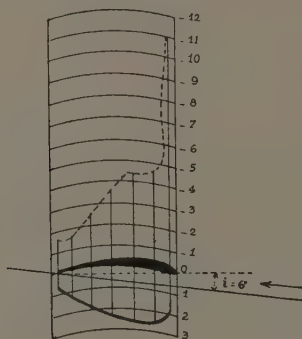


Fig. 4.

zione e situati con P nella stessa normale alla parete e a questa aderenti; oppure no. Solamente in questo secondo caso la Π potrà essere diversa da zero.

Dalla tubazione passando all'ala semplice (sia pure isolata) bisogna far notare che in realtà dal ventre al dorso ha luogo un notevole salto di pressione. Ne basta a conferma il disegno della fig. 4 dato da Eiffel; dove per ogni punto dei lembi superiore ed inferiore dell'ala è riportato in iscala la corrispondente effettiva pressione rispetto a quella statica normale dell'aria. L'effetto è rilevante; nè si può da esso prescindere praticamente.

Preme tuttavia far osservare che nel loro aspetto qualitativo le conclusioni precedenti restano immutate, anche se Π risulti diversa da zero.

6. — Raffronto col paradosso di d'Alembert.

Se i tronchi di corrente del caso generale da noi considerati si prolungano indefinitamente a monte e a valle, la velocità diventerà nelle sezioni

estreme quella della corrente uniforme preesistente. Riescono così opposte le forze \mathbf{R}_1 ed \mathbf{R}_2 , e nulla la loro risultante \mathbf{R} .

L'effetto dinamico di pressione, nelle condizioni di moto permanente regolare e continuo, deve poi ritenersi assolutamente nullo, senza altre restrizioni; come fu dimostrato dal prof. Cisotti⁽¹⁾.

Pertanto fra il paradosso di d'Alembert (che vuole nulla la resistenza al moto in un fluido indefinito) e le nostre conclusioni, il divario è dovuto alla sola circostanza di esserci limitati a tronchi di corrente, anziché all'intera massa in moto. Trattandosi però di fluidi naturali e non perfetti (come avvertimmo fin da principio) la nostra ipotesi e, con essa, le nostre conclusioni acquistano carattere di attendibilità realistica.

7. - *Raffronto col teorema di Kutta-Joukowski.*

Una vera e propria contraddizione pare esista invece fra il predetto risultato generale del prof. Cisotti e il teorema di Kutta-Joukowski; in quanto sotto le medesime condizioni essenziali di fluido perfetto indefinito in moto continuo e regolare, l'uno dà un valore nullo e l'altro no, per la reazione del fluido contro il corpo immerso.

Suppone il Joukowski che si tratti di un'ala infinitamente lunga e fa l'ulteriore ipotesi che sia diversa da zero la circolazione $\int_C \mathbf{v} d\mathbf{s}$ estesa ad

una linea chiusa C che circondi l'ala in un piano normale al suo bordo d'attacco. L'inatteso risultato è dal Cisotti⁽²⁾ attribuito al fatto che, essendo l'ala infinitamente lunga, all'infinito vengono meno le condizioni del moto uniforme che si presuppongono. Noi in proposito osserviamo che se il so-

lido cilindrico si riduce ad un'ala infinitamente sottile, l'integrale $\int_C \mathbf{v} d\mathbf{s}$ di-

verso da zero esteso al lembo superiore ed inferiore del profilo torna a dire che il valore della velocità \mathbf{v} in due punti contrapposti della superficie alare non è lo stesso. L'ala diventa quindi una superficie di discontinuità nel senso che, immaginata soppressa, tale discontinuità si avrebbe nella massa circostante.

8. - *Raffronto con la teoria newtoniana della resistenza al moto delle lastre.*

Secondo una teoria primordiale, tutti sanno che il funzionamento delle ali si spiega assimilandole a lastre inclinate, ed ammettendo che la reazione del fluido al moto d'una lastra si risolva in una risultante, alla lastra approssimativamente normale; appunto perchè le pressioni si suppongono di

(1) Cfr. *Sul paradosso di d'Alembert*, R. Istituto Veneto, 1904.

(2) Cfr. U. CISOTTI, *Sopra un paradosso e un principio in idroaeromeccanica*, Seminario matematico e fisico di Milano, 1927.

regola normali alle pareti. Ma con ciò si prescinderebbe dagli effetti reattivi, a cui invece si riferiscono le forze \mathbf{R}_1 ed \mathbf{R}_2 da noi introdotte.

Io ritengo che una lastra od ala piatta possa funzionare come un'ala ricurva, perchè la prima determina un andamento dei filetti comparabile con quello voluto dall'altra. Senonchè in prossimità al bordo d'attacco i filetti non possono stare aderenti alla superficie materiale piana; come si

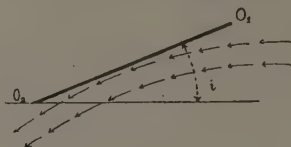


Fig. 5.

scorge dalla fig. 5. Vien quindi menomato necessariamente l'effetto sostenatore della forza che abbiamo indicata con \mathbf{R}_1 .

Che il profilo curvilineo dell'ala ne sia una qualità caratteristica che la differenzia dalle lastre, lo si rileva anche dal fatto che, per inclinazioni prossime a zero, il punto d'applicazione della reazione totale \mathbf{R} per le ali non va avvicinandosi al bordo d'attacco; ciò che accade invece per le lastre. E che così debba essere dipende dalle direzioni delle forze \mathbf{R}_1 ed \mathbf{R}_2 ; come è indicato dalla fig. 3, anche nella posizione di $i = 0$.

Meccanica. — *Sulla estensione del teorema del massimo effetto cineto-dinamico al moto dei sistemi a legami unilaterali.* Nota di E. GUGINO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una recente Nota ⁽²⁾ ci siamo occupati del teorema del massimo effetto cineto-dinamico relativo al moto di qualsivoglia sistema materiale S di punti P_i ($i = 1, 2, \dots, N$) di masse m_i a vincoli bilaterali privi di attrito ed indipendenti dal tempo, comunque sollecitato. Ci proponiamo ora di estendere tale teorema al moto dei sistemi a legami anche unilaterali, privi di attrito ed indipendenti dal tempo; la dimostrazione del teorema così generalizzato vogliamo inoltre rendere del tutto indipendente dal principio della minima costrizione del Gauss, sul quale, come si è visto, è fondata la precedente dimostrazione; infine traducendo analiticamente l'enunciato del teorema, faremo vedere come si pervenga alle stesse equazioni della dinamica,

(1) Nella seduta del 5 maggio 1929.

(2) Cfr. E. GUGINO, *Sopra una nuova interpretazione ecc.*, «Rend. Acc. Lincei», vol. VIII, p. 558, 1928.

che ugualmente si deducono dal detto principio, sotto la forma concisa ed espressiva dovuta all'Appell.

Secondo le notazioni della precedente Nota, essendo:

M_i la posizione generica del punto P_i allo istante t ;

L_i la posizione, che il punto occuperebbe dopo un intervallo di tempo τ abbastanza piccolo, in virtù delle forze F_i che lo sollecitano e della velocità v_i allo istante t , nella ipotesi, che i legami in tale istante, fossero bruscamente soppressi;

N_i la posizione del punto P_i allo istante $t + \tau$ nel moto reale vincolato (moto naturale);

V_i la posizione dello stesso punto P_i allo istante $t + \tau$ in un generico moto virtuale, realizzato mercè l'*aggiunta* di vincoli comunque scelti, purchè privi di attrito, a partire dall'atto di moto del sistema (configurazione e distribuzione delle velocità v_i) relativo allo istante t , rimanendo immutate le forze attive F_i ;

abbiamo definito come effetto cineto-dinamico relativo al moto naturale del sistema, durante l'intervallo di tempo τ , lo scalare E_N essenzialmente positivo, espresso dalla relazione:

$$(1) \quad E_N = \sum_i^N m_i \overline{M_i N_i^2} \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Analogamente l'effetto cineto-dinamico virtuale E , durante lo stesso intervallo di tempo τ , relativo ad un generico movimento virtuale $V_i \rightarrow M_i$, realizzato nelle circostanze sopra indicate, si è definito per mezzo della relazione:

$$(2) \quad E = \sum_i^N m_i \overline{M_i V_i^2} \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Si è visto, che durante il moto di ogni sistema materiale a vincoli bilaterali privi di attrito ed indipendenti dal tempo, per τ abbastanza piccolo, qualunque sia l'istante t , E_N è sempre maggiore di E .

Togliamo ora la restrizione, non necessaria, che i vincoli siano bilaterali; vogliamo dimostrare per via diretta il seguente teorema generalizzato:

Per ogni sistema materiale S a vincoli privi di attrito ed indipendenti dal tempo, comunque sollecitato, il moto naturale, in un intervallo di tempo τ abbastanza piccolo, a partire da un generico istante t , è caratterizzato, fra tutti i movimenti compatibili coi legami (nello stesso intervallo di tempo) come quello per il quale l'effetto cineto-dinamico E risulta massimo.

Infatti se con a_i si indica l'accelerazione del punto generico P_i allo istante t nel moto naturale vincolato, applicando la formula di Taylor ed arrestando lo sviluppo ai termini di secondo grado, tenendo conto della

equazione fondamentale della dinamica di un punto libero, si può scrivere:

$$(3) \quad \begin{cases} N_i - M_i = \mathbf{v}_i \tau + \frac{1}{2} \mathbf{a}_i \tau^2 \\ L_i - M_i = \mathbf{v}_i \tau + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \tau^2. \end{cases}$$

Indicando, pel generico punto P_i , con \mathbf{R}_i la risultante delle forze di legame, proveniente dai soli vincoli preesistenti, per il postulato delle reazioni vincolari si ha:

$$(3') \quad m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i.$$

Per sottrazione dalle (3) in virtù della (3') si ottiene:

$$(4) \quad N_i - L_i = \frac{\tau^2}{2 m_i} \mathbf{R}_i.$$

Analogamente indicando con \mathbf{R}_i^* la risultante delle forze vincolari proveniente da tutti i vincoli, preesistenti ed addizionali, con uguale procedimento si deduce:

$$(4') \quad V_i - L_i = \frac{\tau^2}{2 m_i} \mathbf{R}_i^*.$$

Dalle (4) e (4') si ricava:

$$(5) \quad m_i (V_i - N_i) = \frac{\tau^2}{2} (\mathbf{R}_i^* - \mathbf{R}_i).$$

Ciò posto si osservi, che il generico vettore $V_i - M_i$ ha nelle nostre considerazioni una interpretazione espressiva: esso rappresenta uno spostamento, che sarebbe effettivo, qualora al sistema S si aggiungessero certi nuovi legami privi di attrito; in altri termini $V_i - M_i$ caratterizza, durante l'intervallo di tempo τ , a partire dallo atto di moto relativo all'istante t , lo spostamento effettivo di un opportuno sistema S' , che differisce da S per i soli legami addizionali, rimanendo immutata la sollecitazione attiva \mathbf{F}_i . Ne segue, che nelle nostre ipotesi di vincoli (preesistenti ed addizionali) privi di attrito ed indipendenti dal tempo, il lavoro complessivo delle reazioni \mathbf{R}_i^* , che verrebbero a generarsi qualora effettivamente avvenisse lo spostamento $V_i - M_i$ del sistema S' , risulta notoriamente nullo ⁽¹⁾, anche quando tale spostamento dovesse risultare irreversibile per il sistema S coi soli legami preesistenti. Si ha quindi:

$$(6) \quad \sum_i^N \mathbf{R}_i^* \times (V_i - M_i) = 0.$$

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, vol. I (parte I) pag. 647.

D'altra parte lo stesso spostamento $V_i - M_i$ è certamente, per il sistema S , uno spostamento virtuale in generale irreversibile, onde per il principio dei lavori virtuali, nella forma più generale ⁽¹⁾, il lavoro complessivo $\Delta\Lambda$ effettuato dalle reazioni R_i per lo spostamento virtuale $V_i - M_i$, non può essere nullo; si ha quindi:

$$(6') \quad \Delta\Lambda = \sum_i^N R_i \times (V_i - M_i) \geq 0$$

secondo che lo spostamento $V_i - M_i$ è irreversibile oppure reversibile pel sistema S coi soli vincoli preesistenti.

Ciò premesso, tenendo conto della (5) e delle relazioni (6) e (6') si deduce senz'altro l'equazione:

$$(7) \quad \sum_i^N m_i (V_i - N_i) \times (V_i - M_i) = -\frac{\tau^2}{2} \Delta\Lambda.$$

Intanto dal triangolo $M_i V_i N_i$ per il teorema di Carnot relativo al lato $M_i N_i$ si ha:

$$\overline{M_i N_i}^2 = \overline{N_i V_i}^2 + \overline{M_i V_i}^2 - 2 (V_i - N_i) \times (V_i - M_i).$$

Moltiplicando entrambi i membri per m_i , sommando rispetto all'indice i , tenendo conto della (7) e delle definizioni (1) e (2) di E_N e di E , si ottiene:

$$(I) \quad E_N - E = \sum_i^N m_i \overline{N_i V_i}^2 + \tau^2 \Delta\Lambda.$$

Essendo tutti i termini del secondo membro positivi o nulli (e certamente non tutti nulli) si riconosce in tal modo che la differenza $E_N - E$ risulta essenzialmente positiva; onde, qualunque sia l'istante t , per τ sufficientemente piccolo:

$$E_N > E.$$

Il teorema è così dimostrato:

Stabilito ciò indichiamo con E_L l'effetto cineto-dinamico che corrisponde al moto libero, durante l'intervallo di tempo τ , ferme restando le forze attive e l'atto di moto relativo allo istante t , nella ipotesi, che in tale istante, i legami si disgregassero. Manifestamente può scriversi:

$$(8) \quad E_L = \sum_i^N m_i \overline{M_i L_i}^2.$$

Ci proponiamo di dimostrare il seguente corollario:

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, vol. I (parte I) pag. 644.

Per qualsivoglia sistema S a legami privi di attrito ed indipendenti dal tempo, l'effetto cineto-dinamico E_N , relativo al moto naturale, è sempre più piccolo dello analogo effetto cineto-dinamico E_L relativo al moto libero, durante lo stesso intervallo di tempo. Ciò appare senz'altro evidente in base al teorema già dimostrato, ove si osservi, che il moto naturale del sistema S , in un generico intervallo di tempo τ , si può sempre pensare dedotto dal moto libero, durante lo stesso intervallo di tempo, per l'aggiunta di vincoli opportunamente scelti, nel caso, che in particolare, tali vincoli si identifichino con quelli del sistema S che si considera.

Ciò nonostante, noi dimostreremo direttamente tale corollario, al fine di ottenere una relazione finale alquanto espressiva, dalla quale sarà possibile dedurre facilmente le equazioni generali della dinamica.

Infatti, essendo $N_i - M_i$ lo spostamento, che subisce il punto generico P_i nello intervallo di tempo τ , successivo allo istante t , il lavoro complessivo delle reazioni R_i per siffatto spostamento effettivo, nelle nostre ipotesi risulta nullo; si ha quindi:

$$\sum_i^N R_i \times (N_i - M_i) = 0$$

per la (4) si deduce:

$$(9) \quad \sum_i^N m_i (N_i - L_i) \times (N_i - M_i) = 0.$$

D'altra parte può scriversi:

$$(N_i - L_i) \times (M_i - L_i) = (N_i - L_i) \times [(M_i - N_i) + (N_i - L_i)].$$

Moltiplicando entrambi i membri dell'ultima relazione per m_i e sommando rispetto all'indice i , tenendo conto della (9) risulta

$$(10) \quad \sum_i^N m_i (N_i - L_i) \times (M_i - L_i) = \sum_i^N m_i \overline{N_i L_i}^2.$$

Intanto dal triangolo $M_i N_i L_i$ pel teorema di Carnot relativo al lato $M_i N_i$ si ha:

$$\overline{M_i N_i}^2 = \overline{M_i L_i}^2 + \overline{N_i L_i}^2 - 2 (N_i - L_i) \times (M_i - L_i).$$

Moltiplicando per m_i e sommando rispetto all'indice i , in virtù della (10) e delle definizioni (1) ed (8) di E_N e di E_L , si ottiene

$$(II) \quad E_N = E_L - \sum_i^N m_i \overline{N_i L_i}^2$$

onde la differenza $E_L - E_N$ è sempre positiva, qualunque sia l'istante t ed il successivo intervallo di tempo abbastanza piccolo τ .

Il corollario è così dimostrato; inoltre tale differenza uguale a

$$\sum_i^N m_i \overline{N_i} L_i^2$$

esprime, come è noto, la costrizione, definita dal Gauss ⁽¹⁾, che i vincoli esercitano sul sistema durante lo stesso intervallo di tempo τ . Si ha in conseguenza una maniera semplice ed espressiva per definire la costrizione vincolare; essa è uguale alla differenza, essenzialmente positiva, tra l'effetto cineto-dinamico relativo al moto libero e l'analogo effetto cineto-dinamico relativo al moto naturale vincolato, durante lo stesso intervallo di tempo. Tale costrizione relativa al moto naturale, pel principio del Gauss, risulta minima in confronto della analoga costrizione relativa ad un qualsivoglia moto compatibile coi legami; ciò, secondo le nostre considerazioni, risulta dalla particolare circostanza, che E_N è massimo fra tutti i possibili valori di E . Si può quindi ritenere, che i legami esercitino sul moto del sistema una particolare azione in un senso ben determinato: qualunque sia la modalità di realizzazione dei vincoli, tale azione si esplica mercè una conseguente riduzione dello effetto cineto-dinamico relativo al moto libero; il quale effetto cineto-dinamico d'altra parte dipende da elementi cinematici e dinamici inerenti ai singoli punti P_i del sistema, astrazione fatta dai legami.

A tale azione riduttrice, proveniente dai vincoli, fa riscontro, durante il fenomeno dinamico, un particolare comportamento del sistema, in virtù del quale al moto naturale che si genera, corrisponde sempre il massimo effetto cineto-dinamico virtuale E ; in altri termini, il moto naturale del sistema S è sempre tale da rendere minima siffatta azione riduttrice vincolare.

Ciò posto dalle (3) per sottrazione si deduce:

$$L_i - N_i = \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \mathbf{a}_i \right)$$

Tenendo conto di tale relazione, della definizione (8) e della prima delle (3) la (II) può scriversi:

$$(II') \quad E_N = \sum_i^N m_i \left(\mathbf{v}_i \tau + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \tau^2 \right)^2 - \frac{\tau^4}{2} \sum_i^N \frac{m_i}{2} \left[\frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \mathbf{a}_i \right]^2.$$

Se si considera un qualunque movimento virtuale realizzato con vincoli addizionali, con uguale procedimento si ottiene:

$$E = \sum_i^N m_i \left(\mathbf{v}_i \tau + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \tau^2 \right)^2 - \frac{\tau^4}{2} \sum_i^N \frac{m_i}{2} \left[\frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \mathbf{a}_i^* \right]^2$$

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, vol. II (parte II) pagg. 482-488.

ove si è indicato con \mathbf{a}_i^* una qualunque distribuzione delle accelerazioni, che a partire dall'atto di moto del sistema relativo allo istante t , sia compatibile coi vincoli preesistenti, senza peraltro coincidere colla distribuzione naturale \mathbf{a}_i . Essendo E_N , qualunque sia t , massimo tra tutti i possibili valori che può assumere E , si deduce, che a ciascun istante t , le accelerazioni \mathbf{a}_i , che assumono realmente i diversi punti P_i , tra tutte quelle compatibili coi vincoli, sono tali da rendere massima la funzione a secondo membro della (II'). Intanto appare manifesto dalle considerazioni svolte, che nella (II') le diverse grandezze \mathbf{F}_i , m_i , \mathbf{v}_i , τ , si debbano riguardare come assegnate; la (II') può allora mettersi sotto la forma:

$$E_N = R_\tau - \frac{\tau^4}{2} \left(\frac{1}{2} \sum_i^N m_i \mathbf{a}_i^2 - \sum_i^N \mathbf{F}_i \times \mathbf{a}_i \right)$$

dove R_τ è una funzione scalare indipendente dalle \mathbf{a}_i , definita dalla (II') stessa. Dall'ultima relazione si deduce, che E_N è massimo allorchè risulta minima la funzione

$$R = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \mathbf{a}_i^2 - \sum_i^N \mathbf{F}_i \times \mathbf{a}_i.$$

Si ritrova in tal modo il noto teorema dovuto all'Appell, al quale si ricollega, come lo stesso Autore fa osservare⁽¹⁾, il principio della minima costrizione del Gauss; tale teorema si può enunciare nei seguenti termini: Le accelerazioni \mathbf{a}_i che realmente assumono i punti P_i in un generico istante t , hanno tali valori da rendere minima la funzione R ; da siffatto teorema direttamente si deducono con opportuno procedimento le equazioni della dinamica nella più ampia e generale forma⁽²⁾.

(1) P. APPEL, « Comptes Rendus », 2^o sem. 1899, t. 129, p. 459.

(2) P. APPELL, « Comptes Rendus », id. id., p. 423.

Astronomia. — *Curva di luce e periodo di « W Ursae majoris ».* Nota di G. VIOLA, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. A. BEMPORAD.

Cenno storico. — La variabile *W Ursae majoris*, scoperta nel 1903 da Müller e Kempf, è stata fino ad oggi oggetto di accurato studio da parte di molti astronomi, ed in modo particolare dal prof. A. Bemporad.

Gli scopritori, in base a 140 osservazioni fotometriche raccolte all'Osservatorio di Potsdam, pubblicarono una curva di luce la quale presenta le seguenti caratteristiche:

a) la variazione luminosa è più rapida intorno al minimo che al massimo;

b) i rami presentano una inflessione a circa 45 minuti dal minimo;

c) il periodo di variazione luminosa è di $4^h 0^m 13^s.267$;

d) la curva è leggermente asimmetrica rispetto all'epoca del minimo;

e) il minimo non presenta fase costante, ma è sensibilmente acuto.

Nel 1908, Baldwin trattando la determinazione del periodo di *W Ursae majoris* col metodo dei minimi quadrati, eseguì una serie di 260 osservazioni i cui risultati pienamente confermarono quanto i due astronomi tedeschi avevano precedentemente trovato.

Shapley e Van Der Bilt studiando attentamente la durata della variazione luminosa constatarono una diminuzione del periodo, la quale recentemente fu confermata dalle osservazioni fatte da Campbell con un fotometro a polarizzazione e dal prof. Bemporad col fotometro a cuneo.

L'astronomo Russell discutendo gli elementi orbitali del sistema di *W Ursae majoris* ricavati dalle osservazioni fotometriche raccolte da Müller e Kempf e da Baldwin dedusse quanto segue:

a) *W Ursae majoris* è una variabile ad eclisse con componenti quasi uguali, per modo che i minimi, principale e secondario, hanno uguale profondità;

b) le stelle componenti hanno la stessa luminosità superficiale;

c) l'intervallo di tempo compreso tra i due minimi è di circa 4 ore.

In seguito a tali deduzioni, fu assunto dal Russell come valore del periodo il doppio di quello trovato dal Baldwin.

Nel ridurre tutte le osservazioni che passeremo in seguito ad analizzare adotteremo per il periodo il valore ammesso da Russell.

Nella presente discussione ci proponiamo di utilizzare esclusivamente le osservazioni fotometriche della variabile in questione raccolte dal professore A. Bemporad all'Osservatorio Astronomico di Capodimonte, le quali,

(1) Nella seduta del 21 aprile 1929.

quantunque ridotte dallo stesso Autore in forma pubblicabile, sono rimaste finora inedite.

Le osservazioni ammontano a 462, così distribuite:

Anno 1914	osservazioni	160
» 1915	»	135
» 1916	»	167

In base a queste osservazioni (ridotte col valore trovato da Baldwin) il prof. Bemporad costruì 3 curve di luce i cui minimi paragonati con gli elementi dati da Shapley davano per il periodo 3 valori decrescenti e poco differenti da quello dato da Baldwin.

Come valore definitivo fu assunto dal Bemporad il valore medio.

Stelle di confronto. — *Valori normali della grandezza osservate.* — Per le misure di estinzione fu adoperato il fotometro a cuneo di Toëpfer (cost. o. 1553) unito all'equatoriale di Dollond (distanza focale m. 3, apertura cm. 18).

Le stelle adoperate per i confronti sono le seguenti:

1°	B. D. + 56.1397	Gr. 6 ^m .67	Sp. K ₀
2°	+ 56.1399	8 .92	K ₀
3°	+ 55.1398	8 .95	K ₂
4°	+ 57.1231	5 .49	M ₂
5°	+ 55.1345	6 .43	A ₂

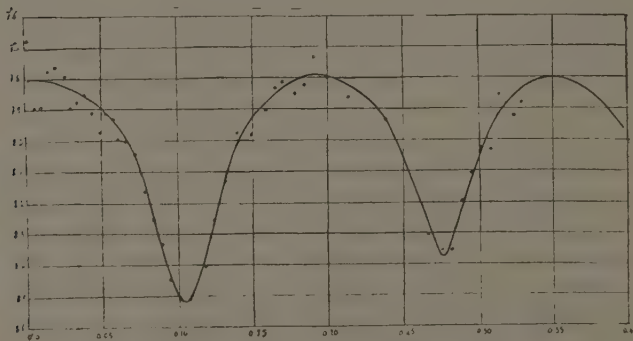


Fig. 1. Curva di luce osservata: Bemporad (1915).

Col valore 0^d.33364044 (Baldwin) del periodo, le osservazioni ridotte tutte all'intervallo di tempo medio eliocentrico Greenw. D. J. 2420579 - 2420579.33364044, ordinate secondo la fase e distribuite in gruppi di 9 e di 10 hanno dato 47 valori normali riprodotti a parte (fig. 1, tabella 1).

TABELLA I

Valori normali delle grandezze osservate — Residui

Numero	d. J.	G	Numero di osservaz.	Residuo	Numero	d. I.	G	Numero di osservaz.	Residuo
1	0 ^d .0023	7.67	10	+ 0.13	25	0 ^d .1332	8.13	9	0.00
2	0072	7.89	10	— 0.08	26	1411	7.97	10	+ 0.06
3	0107	7.89	10	— 0.09	27	1512	7.98	10	— 0.04
4	0165	7.77	10	+ 0.03	28	1597	7.90	10	— 0.01
5	0217	7.76	10	+ 0.05	29	1661	7.83	10	+ 0.02
6	0269	7.79	10	+ 0.03	30	1712	7.81	10	+ 0.02
7	0309	7.89	10	— 0.07	31	1789	7.85	10	— 0.04
8	0359	7.87	10	— 0.03	32	1865	7.82	10	— 0.03
9	0416	7.85	10	0.00	33	1925	7.73	10	+ 0.06
10	0461	7.91	10	— 0.04	34	2009	7.79	10	0.00
11	0512	7.97	10	— 0.07	35	2153	7.86	10	— 0.04
12	0545	7.91	10	+ 0.01	36	2392	7.93	10	0.00
13	0588	7.93	10	0.00	37	2673	8.30	10	— 0.03
14	0627	7.99	10	— 0.03	38	2769	8.35	9	+ 0.02
15	0674	8.00	10	— 0.01	39	2828	8.35	10	— 0.02
16	0732	8.04	10	0.00	40	2898	8.19	10	+ 0.02
17	0793	8.16	10	— 0.01	41	2960	8.10	10	+ 0.01
18	0849	8.25	10	0.00	42	3029	8.02	10	+ 0.01
19	0912	8.33	10	+ 0.02	43	3091	8.03	10	— 0.07
20	0967	8.44	10	— 0.01	44	3154	7.85	9	+ 0.07
21	1034	8.51	10	0.00	45	3201	7.88	9	0.00
22	1090	8.51	10	0.00	46	3252	7.92	9	— 0.06
23	1187	8.40	9	— 0.02	47	3311	7.87	9	— 0.04
24	1253	8.25	10	+ 0.01					

Curva media di luce. — La curva di luce è stata costruita soddisfacendo alle condizioni:

1° che la somma algebrica dei residui sia pressochè nulla;

2° che la somma dei quadrati di essi sia minima.

Presenta le seguenti particolarità:

a) è leggermente asimetrica rispetto all'epoca del minimo;

b) i minimi hanno profondità diverse, precisamente per il principale si ha: $\Delta G = 0^M.72$ e per il secondario $\Delta G = 0^M.58$;

c) la luce massima non ha valore costante;

d) l'intervallo di tempo che corre tra i due minimi non è uguale alla metà del periodo.

Minimo principale. — Minimo secondario. — Asimmetria della curva. — Dalle grandezze ricavate dalla curva di luce:

Gr.	Fase	Gr.	Fase	Gr.	Fase
7 ^M .94	0 ^d .0600	8 ^M .24	0 ^d .0850	8 ^M .51	0 ^d .1100
7 .97	0 .0650	8 .33	0 .0900	8 .44	0 .1150
8 .02	0 .0700	8 .42	0 .0950	8 .35	0 .1200
8 .07	0 .0750	8 .48	0 .1000	8 .26	0 .1250
8 .15	0 .0800	8 .52	0 .1050	8 .17	0 .1300

abbiamo determinato l'epoca del minimo dall'annullarsi dell'espressione:

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{w} \left(f^I(x) - \frac{1}{6} f^{III}(x) + \dots \right)$$

$$\text{Min. princ.} = D. J. 2420579.1064$$

Con analoga operazione si ha per il minimo secondario.

$$\text{Min. sec.} = D. J. 2420579.2777$$

quindi per confronto:

$$t_2 - t_1 = 0^d.1713,$$

e poichè è

$$\frac{P}{2} = 0^d.1668,$$

si ha

$$t_2 - t_1 - \frac{P}{2} = + 0^d.0045.$$

Cioè: il minimo secondario ritarda rispetto a $\frac{P}{2}$ di circa 7 minuti.

Dalla curva di luce si deducono i seguenti tempi corrispondenti a grandezze uguali sui due rami ascendente e discendente.

Gr.	Ramo disc.	Ramo ascen.	Media	Gr.	Ramo disc.	Ramo ascen.	Media
7 ^M .90	0 ^d .0525	0 ^d .1580	0 ^d .1052	8 ^M .20	0 ^d .0825	0 ^d .1285	0 ^d .1060
7 .95	0 .0615	0 .1505	0 .1060	8 .25	0 .0855	0 .1258	0 .1056
8 .00	0 .0683	0 .1445	0 .1065	8 .30	0 .0833	0 .1225	0 .1054
8 .05	0 .0732	0 .1395	0 .1063	8 .35	0 .0910	0 .1200	0 .1050
8 .10	0 .0768	0 .1350	0 .1059	8 .40	0 .0935	0 .1175	0 .1050
8 .15	0 .0800	0 .1317	0 .1058	8 .45	0 .0970	0 .1145	0 .1052

Se la curva fosse, come è ritenuta da alcuni, simmetrica, le medie dei tempi corrispondenti a grandezze uguali prese sui rami ascendente e discendente dovrebbero sensibilmente coincidere, invece a noi risultano piccole differenze le quali danno indizio di una leggera asimmetria.

Periodo. — Dalla curva di luce abbiamo dedotto per il minimo principale:

Minimo principale = D. J. 2420579 . 1064 (Bemporad)

quindi per confronto con:

Minimo principale = D. J. 2416129 . 1926 (Baldwin)

» » = D. J. 2418075 . 8176 (Shapley)

» » = D. J. 2423094 . 5660 (Campbell)

abbiamo come valori del periodo:

P₁ = 0^d.33364612

P₂ = 0 .33363760

P₃ = 0 .33361538

Questi valori, sensibilmente diversi fra loro e da quello dato dal Baldwin, manifestamente accennano alla variazione notata precedentemente dal professore Bemporad.

Astronomia. — *Il Polo galattico e la regione circumpolare galattica.*

Nota di P. EMANUELLI, presentata dal Corrisp. A. BEMPORAD.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geodesia. — *Determinazione radiotelegrafica di longitudine, e attrazione locale nel vertice di 1° ordine Monte Colma di Mombarrone.* Nota di U. BARBIERI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. E. SOLER.

Le condizioni particolarissime della vetta su cui si fece stazione, quasi sempre avvolta nella nebbia e sottoposta a furiosi temporali, la difficile accessibilità di parte dei vertici di 1° ordine ad essa collegati, le condizioni di permanente foschia (reiterati tentativi per collocare e vedere una

(1) Nella seduta del 7 aprile 1929.

mira a M. Vesco andarono frustrati dalla caligine) e, infine, la impossibilità di protrarre oltre la permanenza sulla vetta del monte, dove pure ci fermammo per oltre quindici giorni, senza un riparo che ci garantisse in modo sufficiente dalle intemperie, ci obbligarono a scegliere come mira per l'azimut il campanile di Donato, punto di 4° ordine, l'unico che si potè per breve tempo vedere il 4 e 5 agosto, a 6700 m. dal Mombarone, e ad esso direttamente collegato per le operazioni geodetiche dell'Istituto Geografico Militare.

Le osservazioni, eseguite nelle sere del 4 e 5 agosto, furono compiute in 4 strati, con reiterazione di 45° da strato a strato, e con inversione, dopo la prima sera, del cannocchiale sui suoi appoggi; ogni strato comprese sedici puntate, otto sulla Mira, ed altrettante sulla Polare, in posizione alterna del cerchio cercatore. Esse sono riassunte nello specchio seguente.

Data	Reitera- zione	Azimut	Media
4 Agosto 1897	0°	169° 38' 35".1	
» » »	45°	34 .2	169° 38' 32".90
5 » »	90°	31 .7	± 1".05
» » »	135°	30 .6	

La media riportata, ridotta al centro del segnale dà, quale *azimut astronomico di Donato, sull'orizzonte del M. Colma di Mombarone*

$$169^{\circ} 40' 10,00''.$$

DETERMINAZIONI DI LONGITUDINE.

Queste determinazioni furono compiute a mezzo della radiotelegrafia, usando l'apparato R. T. dell'Istituto di Geodesia della R. Università di Genova, della Ditta Allocchio e Bacchini di Milano, col quale, mercè un relais Vocca-Latini, ultimo modello, ed un relais polarizzato, era possibile registrare in modo perfetto i segnali trasmessi dalle stazioni internazionali di tempo. Tutto il materiale, acconciamente sistemato, fu portato sulla vetta ed allogato nel rifugio, mentre l'antenna bifilare, lunga 50 m. fu distesa sulle rocce, sostenuta da un estremo alla colonna del Redentore, prossima al vertice trigonometrico, e dall'altro all'asta smontabile, opportunamente ancorata.

Le ricezioni radiotelegrafiche si ebbero dal 3 al 9 agosto: tutte servirono per le determinazioni gravimetriche, compiute su larga scala; dal 4 al 5 inoltre, in unione alle osservazioni astronomiche di tempo, esse furono utilizzate per la deduzione della differenza di longitudine.

Le stazioni internazionali su cui ci basammo furono Parigi F. L. e Bordeaux L. Y.; la stazione di Nauen si ricevette solo nelle mattine del 6 ed 8, a orecchio, e pertanto non se ne tenne conto. Indipendentemente dalle inevitabili interruzioni causate dai disturbi atmosferici, il funzionamento di tutto l'impianto si dimostrò ottimo sotto ogni rapporto.

I cronometri a tempo siderale di cui si disponeva erano un Kullberg ed un Fletch, il primo riconosciuto eccellente per lunga esperienza; con essi avevansi inoltre due cronografi Cavignato a punta, uno nel casotto delle osservazioni astronomiche, l'altro, in unione al Kullberg si lasciò all'apparato R. T.

Appositi circuiti consentivano di impiegare altresì il Kullberg stesso per le osservazioni astronomiche e gravimetriche, il Fletch rimanendo destinato a servir di rispetto e di confronto. Malauguratamente, la sera del 4 agosto il funzionamento del Kullberg si presentò difettoso, per ossidazione nei contatti, e pertanto quel cronometro si dovette sostituire col Fletch.

Nelle determinazioni astronomiche di tempo, che per le avverse condizioni atmosferiche, si poterono solo compiere nelle sere del 4 e 5 agosto, fu impiegato il metodo di Döllén. I risultati sono riportati nello specchio seguente, al quale un altro ne segue relativo alle determinazioni radiotelegrafiche.

Data 1927	Oraria	Correzione Fletch	Tempo siderale corrispondente	Andamento orario	Osservazioni
Agosto 4	η Herculis ϵ Herculis α Ophinci	+ 14 ^s ,040	17 ^h 07 ^m 30 ^s ,6	0 ^s ,191	Dalla sera del 4 alla mattina del 5, le osservazioni R. T. dettero un andamento di 0 ^s ,173.
Agosto 5	α Cor. Bor. γ Serpentis γ Herculis	+ 18 ^s ,350	15 ^h 41 ^m 12 ^s ,1		

Data agosto 1927	Cronometro	Ora del cronometro ridotta al 1° segnale dedotta			Media ora ridotta 1° segnale Tempo siderale Greenwich al 1° segnale	Correzione del cronometro su Greenwich	Correzione del cronometro sui segnali ordinari	Media delle correzioni su Greenwich
		dai segnali ritmici	dalle coincidenze	dai 306° battito				
Parigi F. L.								
3	K	6h.46m.37s.612	6h.46m.37s.477	6h.46m.36s.492	6h.46m.37s.527 6.14.52.194	— 0h.31m.45s.333		— 0h.31m.45s.333
4	K	6.50.36.069	6.50.36.072	6.50.36.099	6.50.36.080 6.18.48.796	47.284		47.284
4	F	19.52.18.567	19.52.18.571	19.52.18.529	19.52.18.556 19.20.56.928	21.628		21.628
5	»	6.54.05.045	6.54.05.076	6.54.05.049	6.54.05.057 6.22.45.338	19.719		19.719
6	»						— 0h.31m.16s.623	16.623
7	»	7.01.50.795		7.01.50.939	7.01.50.867 6.30.38.468	12.329		12.399
8	»	7.05.43.356	7.05.43.357	7.05.43.379	7.05.43.364 6.34.34.898	08.466	08.415	08.410

Data agosto 1917	Cronometro	Ora del cronometro ridotta al 1° segnale dedotta		Media ora ridotta 1° segnale Tempo siderale Greenwich al 1° segnale	Correzione del cronometro su Greenwich	Correzione del cronometro sui segnali ordinari	Media delle correzioni su Greenwich
		dai segnali ritmici	dalle coincidenze				
Bordeaux L. Y.							
3	K	5 ^h .16 ^m .22 ^s .685	5 ^h .16 ^m .22 ^s .575	5 ^h .16 ^m .22 ^s .678 4 .44 .37 .440	— 0 ^h 31 ^m 45 ^s .200		— 0 ^h 31 ^m 45 ^s .200
4	K	5 .20 .21 .165	5 .20 .21 .138	5 .20 .21 .154 4 .48 .34 .009	47 ,145		47 ,145
6	F	5 .27 .43 .935	5 .27 .43 .939	5 .27 .43 .937 4 .56 .27 .116	16 ,821		16 ,821
7	»	5 .31 .36 .435	5 .31 .36 .444	5 .31 .36 .440 5 .00 .23 .643	12 ,797	— 0 ^h 31 ^m 12 ^s .803	12 ,800
7	»	17 .33 .32 .394		17 .33 .32 .479 17 .02 .21 .882	10 ,554		10 ,554
8	»	5 .35 .28 .840	5 .35 .28 .852	5 .35 .28 .859 5 .04 .20 .116	08 ,734		08 ,734
9*	»		5 .39 .20 .425	5 .39 .20 .360 5 .08 .16 .661	03 ,731	03 ,583	03 ,657

* Questa ricezione avvenne in condizioni atmosferiche pessime

Le osservazioni elencate nello specchio sopra riportato, consentono sul Fletch due determinazioni di longitudine, la sera del 4 e la mattina del 5 agosto; peraltro, essendosi preso il confronto fra i due cronometri la mattina del 5, noto l'andamento del Kullberg dalla mattina del 3 a quella del 4, si hanno altre due determinazioni fornite da questo cronometro, la mattina del 4, una su Bordeaux e l'altra su Parigi: per quanto esse riposino sull'ipotesi che l'andamento sia rimasto invariato dalla mattina del 4, a quella del 5, purtuttavia, come vedremo, esse si presentano in accordo accettabile, con le altre ottenute più rigorosamente dal Fletch. I prospetti seguenti riassumono i calcoli in discorso, e portano ai risultati che abbiamo potuto dedurne.

Cronometro Fletch.

Parigi 4 sera.

Ora cronometro (media) ridotta al 1° segnale	19 ^h 52 ^m 18 ^s ,556
Correzione astronomica corrispondente dedotta con l'andamento orario 0 ^s ,191	+ 14 ^s ,564
Ora corretta	19 ^h 52 ^m 33 ^s ,120
Tempo sidereo di Greenwich corrispondente	19 ^h 20 ^m 56 ^s ,928
Differenza di longitudine	$\Delta\lambda = - 0^h 31^m 36,192$

Parigi 5 mattina.

Ora cronometro (media) ridotta al 1° segnale	6 ^h 54 ^m 05 ^s ,057
Correzione astronomica corrispondente dedotta con l'andamento orario 0 ^s ,191	+ 16 ^s ,672
Ora corretta	6 ^h 54 ^m 21 ^s ,729
Tempo sidereo di Greenwich corrispondente	6 ^h 22 ^m 45 ^s ,338
Differenza di longitudine	$\Delta\lambda = - 0^h 31^m 36^s,391$

Cronometro Kullberg.

(correzione astronomica del confronto col Fletch a 6^h 06^m 30^s del 5 = - 12^s,777)

Parigi 4 mattina.

Ora cronometro (media) ridotta al 1° segnale	6 ^h 50 ^m 36 ^s ,080
Correzione astronomica corrispondente dedotta con l'andamento orario 0 ^s ,0815	- 10 ^s ,881
Ora corretta	6 ^h 50 ^m 25 ^s ,199
Tempo sidereo di Greenwich corrispondente	6 ^h 18 ^m 48 ^s ,796
	$\Delta\lambda = - 0^h 31^m 36^s,403$

Bordeaux 4 mattina.

Ora cronometro (media) ridotta al 1° segnale	5 ^h 20 ^m 21 ^s ,154
Correzione astronomica corrispondente dedotta con l'andamento orario 0 ^s ,0725	— 10 ^s ,981
Ora corretta	5 ^h 20 ^m 10 ^s ,173
Tempo sidereo di Greenwich corrispondente	4 ^h 48 ^m 34 ^s ,009
	$\Delta\lambda = - 0^h 31^m 36^s,164$

La media dei valori $\Delta\lambda$ fornita dalle determinazioni col Fletch, è pressochè identica alla media di quelle ottenute col Kullberg; terremo quindi come valore finale di $\Delta\lambda$ la media dei quattro risultati

$$\Delta\lambda = - 0^h 31^m 36^s,287 \pm 0^s,064 (= \pm 0'',96),$$

che ridotto al centro trigonometrico, mediante la formula

$$\delta_\lambda = \frac{e \sin (A - \varepsilon)}{N \cos \varphi' \sin i''},$$

diviene

$$\Delta\lambda = - 0^h 31^m 36^s,398 = - 7^\circ 54' 05'',970.$$

Tenendo conto dei valori forniti dall'Istituto Geografico Militare, per l'azimut geodetico di Donato, e per la latitudine del Mombarone

$$\alpha_g = 169^\circ 40' 24'',43 \quad \lambda_g = - 7^\circ 53' 37'',685,$$

la nota equazione di Laplace non risulta soddisfatta, e dà invece

$$- 14'',43 - 20'',20 = 0.$$

La ragione di ciò risiede nel fatto che l'azimut geodetico di Donato, punto di 4° ordine, e l'azimut astronomico non sono fra di loro paragonabili in precisione. Ed invero, la determinazione geodetica di Donato fu, dall'Istituto Geografico, compiuta sul quadrilatero Mombarone, Monte Rovella, Biella, Donato, in cui gli angoli variano da 10° a circa 160°, avvicinandosi qualche lato ai 20 Km., e ciò senza tener conto che in Donato lo strumento goniometrico adoperato, non potè certo avere elevata precisione.

Non introdurremo, di conseguenza, in calcolo, per ora, il valore da noi ottenuto per l'azimut astronomico, e terremo solo conto delle determinazioni radiotelegrafiche di longitudine.

L'equazione di Laplace dà allora

$$\alpha_a - \alpha_g = 20'',20,$$

da cui seguono, per note relazioni, i valori

$$\begin{aligned} \xi &= -21'',10 \\ \eta &= +19'',82 \end{aligned}, \quad A = 136^\circ 49' 29'' \quad , \quad \Theta = 28'',87,$$

i quali fissano l'attrazione locale al Mombarone, ed il suo azimut ellissoidico.

Fisica. — *Teoria del paramagnetismo per joni soggetti ad azione molecolare forte* ⁽¹⁾. Nota di R. BRUNETTI, presentata ⁽²⁾ dal Socio A. GARBASSO.

1. L'espressione quantistica ordinaria per la costante magnetica,

$$(1) \quad C_j = C_0 \cdot g^2 \cdot j(j+1),$$

dello stato di un atomo o jone caratterizzato dal numero quantico interno j , (g è il fattore di Landè, C_0 la costante di Curie-Langevin) è stata dedotta nell'ipotesi che il campo magnetico esterno sia *debole* e che lo stato dello jone sia nelle condizioni naturali o per lo meno sia assoggettato solo ad azione debole come quella del campo esterno.

Pare che gli joni trivalenti delle terre rare in composto chimico si trovino in condizioni prossime a quelle richieste dalla teoria, infatti a temperatura ambiente soddisfano alla relazione superiore, mentre in seguito a riscaldamento acquistano la costante magnetica propria dello jone eccitato ⁽³⁾. La stessa cosa non si può ripetere per gli joni del primo gruppo di passaggio, che, a temperatura ambiente, male si adattano alla relazione quantistica superiore e non subiscono eccitazione termica, come si deduce dalle misure eseguite a temperature elevate da Honda e Jshiwara su composti del gruppo del ferro ⁽⁴⁾.

Quest'ultima osservazione in particolare ci ha condotto a sospettare che i sottolivelli dello stato fondamentale multiplo, la cui presenza giustifica l'eccitazione degli joni delle terre rare, presso gli joni del primo gruppo di passaggio in composto chimico non esistano più, che cioè il campo intramolecolare agisca sopra di essi alla maniera di un campo *forte* e li distrugga.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Cagliari.

(2) Nella seduta del 7 aprile 1929.

(3) Questo è stato messo in evidenza fin qui solo per lo jone Ce''' , R. BRUNETTI, « Nuovo Cimento », marzo 1929.

(4) « Sc. Rep. of. the Tohoku Imp. Un. », S. II, vol. IV, p. 215, 1915.

Sappiamo che la distinzione fra campo debole e campo forte è riferita al valore del campo che dà luogo a una scissione di livelli dell'ordine di grandezza di quella fra i sottolivelli naturali. Ora questa scissione naturale presso gli joni del gruppo del ferro è circa dieci volte più piccola di quella che si può prevedere per uno jone di terra rara con egual numero di elettroni ottici ⁽¹⁾. Non pare dunque strano che quello che è campo debole per le terre rare sia campo forte per gli joni del gruppo del ferro.

Se dunque si può sostenere che certi joni sono sotto l'azione di campo intramolecolare forte, segue la necessità di procedere al calcolo del loro momento magnetico in modo diverso da quello in uso per joni normali o solo debolmente alterati da una struttura chimica.

2. La caratteristica dei campi forti è quella di rompere il legame esistente fra i vettori corrispondenti ai numeri quantici l (numero quantico azimutale diminuito di una unità) ed s (numero quantico dell'elettrone rotante).

Ammettiamo quindi che presso gli joni che consideriamo sia, a causa delle azioni intramolecolari, spezzato il legame normalmente esistente fra i vettori relativi ai numeri quantici l e s , cosicchè non si ha più ragione di tener conto del vettore corrispondente al numero quantico j risultante dei due.

Il livello fondamentale è allora scindibile o scisso nei sottolivelli definiti dai numeri quantici m_l ed m_s , ove m_l prende i valori $l, l-1, \dots, -(l-1), -1$, ed m_s i valori $s, s-1, \dots, (s-1), -s$.

Ammettiamo altresì che il campo intramolecolare sia di natura elettrica. Questo porta come conseguenza che in prima approssimazione i vettori relativi agli m_l sono già orientati nelle molecole, mentre gli m_s si possono nella stessa approssimazione considerare come liberi e orientabili solo in seguito ad azione di un campo esterno anche debole.

Supponiamo infine che il campo molecolare elettrico sia simmetrico rispetto a un asse, cosicchè la disposizione dei vettori m_l sia quella che si produce in campi forti di tal natura. La cosa, anche indipendentemente dalla nostra interpretazione del policroismo dei cristalli di sali di terre rare ⁽²⁾, non sembra impossibile a verificarsi.

Nelle ipotesi precedenti trascurando le complicazioni relative all'incrocio dei due campi, l'intramolecolare elettrico e l'esterno magnetico, l'asse di di rotazione elettronico diverrà parallelo o antiparallelo alle linee di forza del campo esterno, mentre l'asse di rotazione dell'orbita conserverà la sua posizione nel campo intramolecolare, che non sempre gli sarà dato domi-

(1) Con la relazione di Sommerfeld per la separazione dei sottolivelli relativistici. (A. SOMMERFELD, *Atombau und Spektrallinien*, Braunschweig, 1928, p. 446), si trova ad es. per Ce''' (stato $2F$) $\Delta\nu = 2500 \text{ cm.}^{-1}$ e per Ti''' (stato $2D$) $\Delta\nu = 230 \text{ cm.}^{-1}$.

(2) R. BRUNETTI, «Rendiconti R. Acc. dei Lincei», VII, serie 6^a, p. 238, 1928 e «Phys. ZS», 29, 571, 1928.

nare. Se l'asse del campo molecolare forma con la direzione delle linee di forza del campo magnetico esterno, supposto di intensità $H = 1$, angolo φ , l'energia dei singoli sottolivelli dello jone nel campo magnetico sarà

$$E(m_l m_s) = - [\omega(m_l) + \varepsilon(m_s) + \varepsilon(m_l) \cos \varphi]$$

ove, μ_0 essendo il magnetone di Bohr, $\varepsilon(m_s) = \mu_0 2 m_s$, $\varepsilon(m_l) = \mu_0 m_l$ ed $\omega(m_l)$ è una funzione quadratica degli m_l in prima approssimazione indipendente dagli m_s , che sta a indicare l'energia propria di ogni sottolivello ottenuto dal livello fondamentale in seguito alla scissione prodotta dal campo elettrico intramolecolare. Per semplificare il calcolo, se la differenza fra gli $\omega(m_l)$ di un medesimo livello non è rilevante, si può sostituire ad essi il loro valor medio $\bar{\omega}$. Osserviamo ancora che se gli assi molecolari hanno originariamente distribuzione caotica, φ può assumere tutti i valori fra zero e π e ci converrà sostituire a $\varepsilon(m_l) \cos \varphi$ il suo valor medio $\overline{\varepsilon(m_l)}$. Quindi in media

$$\overline{E(m_l m_s)} = - [\bar{\omega} + \varepsilon(m_s) + \overline{\varepsilon(m_l)}].$$

Calcoliamo separatamente $\overline{\varepsilon(m_l)}$. La probabilità che uno jone caratterizzato dal numero quantico m_l sia compreso nell'angolo fra φ e $\varphi + d\varphi$ è

$$\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{\varepsilon(m_l) \cos \varphi}{kT}} \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi \sim \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon(m_l) \cos \varphi}{kT} \right) \sin \varphi \cdot d\varphi$$

e quindi il valor medio dell'energia

$$(2) \quad \overline{\varepsilon(m_l)} = \frac{\varepsilon(m_l)}{2} \int_0^\pi \cos \varphi \left(1 + \frac{\varepsilon(m_l) \cos \varphi}{kT} \right) \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = \frac{\varepsilon^2(m_l)}{3 kT}.$$

Il numero di joni che posseggono questa energia in un cm^3 in cui si trovano N joni è

$$N(m_l m_s) = N e^{\frac{\omega + \varepsilon(m_s) + \overline{\varepsilon(m_l)}}{kT}} \sim N e^{\frac{\omega}{kT}} \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon(m_s) + \overline{\varepsilon(m_l)}}{kT} \right)$$

e il numero totale di joni nello stato l diviene

$$(3) \quad N_l = \sum_{m_s m_l} N(m_l m_s) = N e^{\frac{\omega}{kT}} \cdot \sum_{m_s m_l} \left(1 + \frac{\varepsilon(m_s) + \overline{\varepsilon(m_l)}}{kT} \right) = \\ = N e^{\frac{\omega}{kT}} (2l + 1)(2s + 1)$$

perchè $\sum_{m_s} \varepsilon(m_s) = 0$ e $\sum_{m_l} \frac{\varepsilon(m_l)}{3(kT)^2}$ è trascurabile in prima approssimazione.

Allora il momento magnetico per $H = 1$, cioè la suscettività per unità di volume risulta

$$K = \sum_{m_l m_s} N e^{\frac{\omega + \epsilon(m_s) + \epsilon(m_l)}{kT}} \cdot [\epsilon(m_s) + \overline{\epsilon(m_l)}] \sim \\ \sim N e^{\frac{\omega}{kT}} \left[1 + \frac{\epsilon(m_s) + \overline{\epsilon(m_l)}}{kT} \right] [\epsilon(m_s) + \overline{\epsilon(m_l)}]$$

ossia trascurando $\frac{\epsilon^2(m_l)}{3(kT)^2}$

$$K = N e^{\frac{\omega}{kT}} \left[\sum_{m_l m_s} \frac{\epsilon^2(m_l)}{3} + \sum_{m_l m_s} \epsilon^2(m_s) \right].$$

Ora

$$(4) \quad \begin{cases} \sum_{m_l m_s} \epsilon^2(m_l) = \mu_0 \frac{l(l+1)(2l+1)}{3} (2s+1), \\ \sum_{m_l m_s} \epsilon^2(m_s) = \mu_0 \frac{4s(s+1)(2s+1)}{3} (2l+1) \end{cases}$$

e ricordando la (3)

$$K = \frac{\mu_0 N_l}{3 kT} \left[4s(s+1) + \frac{1}{3} l(l+1) \right]$$

o per una grammomolecola

$$(5) \quad \chi = \frac{\mu_0 N_l^2}{3 RT} \left[4s(s+1) + \frac{1}{3} l(l+1) \right].$$

È facile vedere, seguendo le tracce del calcolo precedente in cui a $\overline{\epsilon(m_l)}$ si sostituisca $\epsilon(m_l)$, che se le orbite elettroniche fossero completamente libere dal dominio molecolare e si potessero quindi orientare così come vuole il campo, si avrebbe invece

$$(6) \quad \chi_m = \frac{\mu_0 N_l^2}{3 RT} [4s(s+1) + l(l+1)]$$

come in campo magnetico forte o come se i sottolivelli di uno jone non perturbato da azione intramolecolare fossero completamente eccitati.

Non escludiamo che per particolare distribuzione degli joni nella molecola si possa avere un contributo più grande o più piccolo di $\frac{1}{3} l(l+1)$ da parte delle orbite elettroniche. Aggiungiamo che, se anche il contributo degli elettroni rotanti dovesse essere incompleto, si avrebbe un fattore inferiore a $4s(s+1)$ e al limite, per distribuzione caotica anche degli assi degli elettroni rotanti, la suscettività diverrebbe $1/3$ di χ_m (6).

3. Non insistiamo per ora sopra casi particolari o ipotetici; ci basti aver osservato che il valore della suscettività nel caso di joni soggetti ad azione molecolare del tipo forte deve stare fra il valore rappresentato dalla (6) e dal suo terzo e preferibilmente cadere non lontano dal valore calcolato dalla relazione (5). Quindi la costante magnetica per grammomolecola deve essere prossimamente

$$(7) \quad C_l = \chi \cdot T = C_0 \left[4s(s+1) + \frac{1}{3} l(l+1) \right], \quad \text{ove} \quad C_0 = \frac{\mu_0 N_l^2}{3R} = 1/8 \text{ circa.}$$

Nella tabella sono elencati i valori delle costanti magnetiche C_j , C_m , C_l , e $\frac{1}{3} C_l$ per joni in cui il livello fondamentale è del tipo d . Nell'ultima colonna stanno i valori sperimentali correnti delle costanti magnetiche per joni del gruppo del ferro ricavati da composti in soluzione o pulverulenti ⁽¹⁾.

Configurazione	Stato ottico	$l s j$	C_j	C_m	C_l	$\frac{1}{3} C_m$ (limite inferiore)	Valori sperimentali
d^0	1S	0 0 0	0	0	0	0	Sc''' diam., Ti''' diam.
d^1	2D	2 $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$	0.3	1.13	0.63	(0.38)	Ti''' 0.42
d^2	3F	3 1 2	0.33	2.5	1.5	(0.83)	V''' 0.83
d^3	4F	3 $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$	0.08	3.38	2.38	(1.13)	Cr''' da 1.72-1.83 a 2.06, Mn''' 1.96
d^4	5D	2 0 0	0	3.75	3.25	(1.25)	Cr'' 2.93, Mn'' 3.17
d^5	6S	0 $\frac{5}{2}$ $\frac{5}{2}$	4.38	4.38	4.38	(1.46)	Fe''' 4.3, Mn'' 4.4
d^6	5D	2 2 4	5.63	3.75	3.25	(1.25)	Fe'' 3.5
d^7	4F	3 $\frac{3}{2}$ $\frac{9}{2}$	5.5	3.38	2.38	(1.13)	Co'' 3.1
d^8	3F	3 1 4	3.9	2.5	1.5	(0.83)	Ni'' 1.23
d^9	2D	2 $\frac{1}{2}$ $\frac{5}{2}$	1.58	1.13	0.63	(0.38)	Cu'' 0.46
d^{10}	1S	0 0 0	0	0	0	0	Cu' diam., Zn'' diam.

Sono in carattere diverso i valori teorici che più si avvicinano agli sperimentali o che meglio li limitano.

(1) I dati della tabella sono ricavati da STONER, *Magnetism and Atomic Structure*, London, 1926; da M. D. BOSE und BHAR, «ZS. für Phys.», 48, 716, 1928; LARS A. WELO, «Phil. Mag.», 6, 481, 1928.

Si vede che: 1° mentre la teoria che chiameremo dei campi intramolecolari deboli prevede a metà del gruppo un elemento a jone diamagnetico, la teoria dei campi forti giustifica, in accordo coi risultati d'esperienza, l'assenza di questa particolarità; 2° le costanti magnetiche di tutti gli altri joni si adattano bene intorno alla curva C_1 ; la cosa è da rilevare in modo particolare per Fe'' , Co'' , Ni'' , Cu'' che non entrano fra i limiti assegnati alle suscettività di questi joni dalla teoria dei campi deboli (tali limiti sono rappresentati dalle colonne C_j e C_m della tabella precedente).

La presente teoria prevede che il contributo al momento jonico del moto orbitale degli elettroni ed eventualmente quello degli elettroni rotanti possa variare a seconda del numero e della disposizione degli joni nella molecola. L. A. Welo presso alcuni sali di ferro trova costanti magnetiche anche inferiori al massimo di 1^a approssimazione 4,38 proprio di Fe''' nello stato ^6S . Ora in 2^a approssimazione, essendo $l=0$ presso lo jone Fe''' , solo la imperfetta orientazione nel campo magnetico esterno dei momenti degli elettroni rotanti può spiegare il difetto del valore sperimentale della costante magnetica rispetto al teorico calcolato dalla relazione (7)⁽¹⁾. B. Cabrera e Trumpler hanno messo in evidenza variazioni della costante magnetica di soluzioni cobaltose con la diluizione e A. Chatillon⁽²⁾ con il modo di preparazione e la storia del sale stesso, che pensiamo rientrino precisamente nel nostro modo di vedere.

Il riscaldamento in base alla presente teoria non produrrà eccitazione degli joni, così come dimostrano le misure di Honda e Jshiwara citate e quelle di A. Chatillon su soluzioni di sali cobaltosi. In tutte queste ricerche i sali considerati seguono da vicino la legge semplice di Curie o quella di Curie-Weiss.

La costante di Curie potrà variare solo nel caso che per azione termica il legame molecolare venga modificato. Può anche darsi che qualche sale esista, per cui lo stesso jone, che in altri sali presenta momento magnetico proprio di jone in campo forte, abbia invece il momento magnetico dei campi deboli.

Tutto quanto è detto fin qui vale dunque in buona approssimazione per i sali più comunemente noti di joni del primo gruppo di passaggio. Si è già detto quanto avviene invece per gli joni di terre rare. Per quanto riguarda gli altri tre gruppi di passaggio con formazione di anelli d ($4d$ prossimo alle terre rare, $5d$ o gruppo del platino $6d$ o dell'uranio) disgraziatamente mancano dati sperimentali atti a condurre a qualche conclusione.

(1) Non dimentichiamo tuttavia che nel calcolo abbiamo sostituito agli $\omega(m_i)$ il valore loro medio e abbiamo trascurato le complicazioni relative all'incrocio dei campi elettrici intramolecolari col campo magnetico esterno.

(2) A. CHATILLON, « Ann. de Phys. », t. IX, mars-avril 1928.

I pochi valori raccolti da M. D. Bose e H. G. Bahr⁽¹⁾ sono stati ricavati da sali nei quali lo jone pare abbia perduto le sue caratteristiche. Sali in cui questo fatto si verifica si trovano anche presso il primo gruppo di passaggio, come dimostrano le citate ricerche di A. L. Welo.

Così i risultati ottenuti con Ru''' , Pd'' , Ir''' , Os''' , Pt''' , Ir''' , Pt'' , diamagnetici o troppo debolmente paramagnetici, ci dicono solo che gli joni in legame chimico possono avere la loro configurazione fondamentale modificata anche più profondamente di quanto comporti l'esistenza di un campo intramolecolare del tipo forte. Invece $Ta''''(5d, S)$ e $Th''''(6d, S)$ sono diamagnetici come vuole il loro stato fondamentale, W'''' con $C_j = 0.4$ e W''' con $C_j = 0.02$ per gli stati 3F e 4F si trovano nelle condizioni stesse delle terre rare. Mo''' con $C_j = 1.65$ (stato 4F) e Ur'''' con $C_j = 0.86$ (stato 3F) si trovano piuttosto in quella degli joni normali in campo forte del gruppo del ferro.

Nel 1927 D. M. Bose⁽²⁾ ha ideato una teoria del paramagnetismo per gli joni del primo gruppo di passaggio partendo dalle ipotesi: 1° che sotto l'azione del campo esterno solo gli elettroni rotanti siano orientabili; 2° che lo stato quantico dello jone sia sempre quello per cui $l = 0$. Il Bose perviene così a relazioni per la costante magnetica che numericamente equivalgono alla prima parte della nostra formula (7). Il piccolo valore del contributo del moto orbitale degli elettroni nella nostra teoria fa sì che i valori teorici del Bose siano inferiori, ma poco distanti dai nostri C_l . In effetto la nostra ipotesi di partenza: azioni molecolari di natura elettrica capaci di rompere il legame fra i vettori paramagnetici dello jone, porta appunto come conseguenza quella che è l'ipotesi fondamentale del Bose, che solo gli elettroni rotanti siano liberi in prima approssimazione di orientarsi e perciò il loro contributo alla suscettività molecolare prevalga su quello delle orbite elettroniche.

Il modo di vedere da noi proposto ci pare abbia il vantaggio su quello del Bose di rientrare logicamente in concetti generali acquisiti, non introdurre trattamento eccezionale per particolare gruppo di joni e con la maggior elasticità delle relazioni fondamentali teoriche giustificare fatti che la teoria troppo rigida del Bose non contempla.

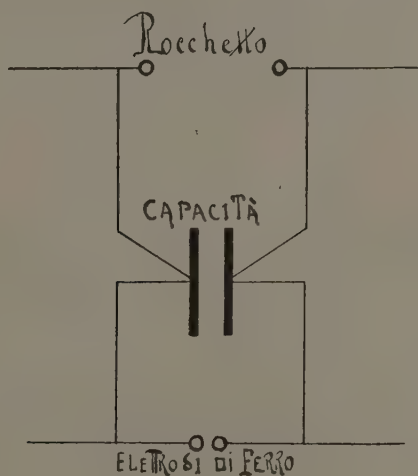
(1) Loc. cit.

(2) « Zeitschr. für Phys. », 43, 864. 1927.

Fisica. — *Una nuova serie nello spettro del ferro, prodotto con scariche fortemente condensate.* Nota di MARYA KAHANOWICZ, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. GIORGI.

Esaminando lo spettro della scintilla, prodotto fra elettrodi di ferro con scariche fortemente condensate, ho osservato una nuova serie, costituita da righe corte e larghe, di altissima intensità, e aggruppate in doppietti.

Questo *spettro rinforzato* appare sul fondo dello spettro continuo insieme col solito spettro d'arco, dal quale si distacca per il forte splendore e per il singolare aspetto delle righe; si compone di tre doppietti, dove la prima componente è più intensa e soprattutto più allargata della seconda e le cui distanze si vanno serrando, coll'elevarsi dell'ordine del termine della serie.



La scintilla si otteneva per mezzo della scarica di una bottiglia di Leida, di 1250 cm² di superficie, posta in derivazione sul circuito secondario di un grande rocchetto di Ruhmkorff, usato coll'interruttore Wehnelt a corrente alternata; la scarica avveniva (v. annessa figura) fra gli elettrodi dello spinterometro unito alla boccia. Si adoperavano elettrodi di dimensioni appropriate, a forma sferica di 5 mm. di raggio, oppure fili di 1 mm. di spessore. Per ottenere grande luminosità, si regolava la scintilla per piccole

(1) Nella seduta del 7 aprile 1929.

distanze esplosive, comprese fra 1 e 5 mm. Si ottenevano così scariche assai nutrite e rumorose, con luminosità apparente somigliante all'arco.

L'esame spettrale è stato eseguito con lo spettrometro Hilger graduato in lunghezze d'onda, con la graduazione tracciata sul tamburo esterno. La dispersione viene operata per mezzo di una copia del reticolo di Rowland, adattato sulla faccia di un prisma molto trasparente; la graduazione è estesa per tutto lo spettro visibile, da 8000 a 3900 Å, procedendo per tratti di 10 Å. In complesso, l'apparecchio raggiunge il potere risolutivo di 1 Å, ma per la sicurezza nel funzionamento, permette di apprezzare 0.5 Å.

La scintilla veniva raccolta sulla fenditura per mezzo di una lente di corta distanza focale, che si manteneva ad immediata vicinanza con la fenditura stessa, quasi addossata a questa; si raggiungeva così il vantaggio di intensificare lo spettro e di eliminare nello stesso tempo il disturbo dell'intermittenza.

In queste condizioni le misure hanno fornito per i doppietti i seguenti valori:

λ in Å	ν in cm^{-1}
5937.5	16842
5928	16869
5677.5	17613
5666.5	17648
5003	19988
5001	19996

i quali conducono alla serie:

$$(1) \quad \nu = R \left\{ \frac{1}{2^2} - \frac{1}{\left(\frac{n}{32}\right)^2} \right\}$$

(a) con $n = 103$ e 103.1 ; 107 e 107.1 ; 123

(b) oppure $n = \{(4 \times 26) - 1\}$; $\{(4 \times 27) - 1\}$; $\{(4 \times 31) - 1\}$.

La (1) rivela comportamento idrogenoide dell'atomo emissivo con le seguenti caratteristiche:

a) I due termini quantici compaiono con espressione analitica differente, il che indica espressioni diverse per i livelli energetici e forme varie

per le orbite di arrivo e di partenza. L'orbita di arrivo è la biquantica Balmeriana; le orbite di partenza sono di ordine $\frac{n}{3^2}$, con un eccesso di energia rispetto alle Balmeriane, determinato dall'importo della parte frazionata.

b) I numeri quantici si succedono, contrariamente al principio di selezione, con intervalli di quattro unità ⁽¹⁾.

c) La serie, come indica la forma (b) del termine corrente, è di ordine dispari, e quindi resta esclusa la possibilità di una eventuale coincidenza con le righe della serie Balmeriana.

d) Pertanto, per la costante di Rydberg si ottengono i valori (v. tabella)

$$R = 109689 \text{ cm}^{-1} \text{ (1ª serie)}$$

$$R = 109738 \text{ cm}^{-1} \text{ (2ª serie),}$$

dei quali il primo è molto vicino al valore sperimentale (109678) e il secondo si riporta al valore teorico calcolato (109737).

e) La successione dei termini procede conformemente al principio di corrispondenza, in quanto che le frequenze osservate (v. tabella) risultano tutte multiple di una medesima frequenza

$$\nu_0 = 163 \text{ cm}^{-1} = 4.89 \times 10^{12} \text{ sec}^{-1}, (\lambda_0 = 60 \mu)$$

la quale può considerarsi, secondo la teoria elettromagnetica, come radiazione fondamentale, e i doppietti come armonici superiori. La buona verifica del principio di corrispondenza si spiega col fatto, che la serie si riferisce a numeri quantici elevati, e per questi le frequenze emesse secondo la teoria di Bohr coincidono con quelle che verrebbero emesse secondo la teoria elettrodinamica classica.

f) Circa il limite si può osservare che, trattandosi di una serie dove le distanze dei doppietti diminuiscono gradatamente, si è indotti di considerare la (1) come composta di due serie della stessa forma, entrambe tendenti al limite comune $\frac{R}{4}$, corrispondente a 3700 Å .

La serie si inizia nell'ultrarosso (60μ) e si spegne nell'estremo violetto (3700 Å); l'effetto del campo si riduce in ultima analisi ad esaltare alcuni armonici di una radiazione del lontano ultrarosso.

(1) Stark e i suoi allievi hanno dimostrato che vi sono delle serie anomali che prendono origine soltanto per campi molto intensi e che si presentano come eccezioni rispetto al principio di selezione. (SOMMERFELD, *Constitution de l'Atome et les Raies Spectrales*, p. 406, 1923).

In complesso, il comportamento della serie può essere riassunto nel seguente schema:

$$\nu = R \left\{ \frac{1}{2^2} - \frac{1}{\left(\frac{n}{32}\right)^2} \right\}$$

	λ in Å	ν in cm^{-1}	n	ν_0 in cm^{-1}	Limite	R	
1 ^a serie (più intensa)	5937.5	16842	103	$\{(4 \times 26) - 1\}$	163	27432 cm^{-1}	109735
	5677.5	17613	107	$\{(4 \times 27) - 1\}$	165	3700 Å	109700
	5003	19988	123	$\{(4 \times 31) - 1\}$	162.5	»	109633
2 ^a serie	5928	16869	103.1	$\{(4 \times 26) - 0.9\}$	163.6	»	109780
	5666.5	17648	107.1	$\{(4 \times 27) - 0.9\}$	164.8	»	109800
	5001	19996	123	$\{(4 \times 31) - 0.9\}$	162.6	»	109633
				<u>163</u>			

La successione dei livelli energetici secondo il termine

$$(2) \quad W = - \frac{32 R h}{n}$$

indica un cumulo di energia per l'atomo eccitato, che si risolve in un eccesso rispetto ai livelli Balmeriani. La (1) rappresenta per conseguenza uno spettro di grado energetico assai elevato, che soddisfa al principio generale di corrispondenza, ma per cui il principio di selezione si applica secondo la regola statistica

$$(3) \quad n = \{(4 \times 9) - 1\}$$

Lo spettro osservato entra così nella categoria degli spettri anomali di Stark e può considerarsi come una modalità del secondo effetto Stark⁽¹⁾, prodotto con campi di grande densità di corrente.

(1) E. FERMI, *Introduzione alla fisica atomica*, p. 235, Zanichelli 1928.

Fisica. — *Sulla risoluzione funzionale dei problemi lineari di propagazione del calore.* Nota di S. L. STRANEO, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. GIORGI.

1. La trattazione dei problemi di propagazione del calore è sovente eseguita frazionando ogni problema complesso in più parti, come è per es., esposto nel classico trattato di Riemann. Questo sistema di frazionamento, e il fatto che ogni problema parziale venga poi indipendentemente studiato per la via che sembra più adatta per giungere al risultato, fanno sì che spesso le soluzioni vengano a risultare costituite da parti poco omogenee tra di loro.

Dal punto di vista puramente matematico, la risoluzione dell'equazione di propagazione del calore è un problema ormai risolto: oltre che per mezzo delle soluzioni semplici, possiamo giungere alla sua risoluzione con procedimenti formalmente più rigorosi derivati da quello di V. Volterra ⁽²⁾ (estensione dei metodi di Green alle equazioni paraboliche) oppure attraverso alla teoria delle equazioni integrali. Però i fisici, in generale, hanno conservata la loro preferenza alla prima forma di soluzione, per ovvie ragioni di comodità e di intuizione.

È perciò che ancora recentemente da varie parti si è cercato di giungere a quelle soluzioni classiche anche per vie che fossero al riparo delle critiche fatte alle primitive deduzioni e specialmente a quella di Riemann relativa all'influenza della variazione nel tempo della temperatura al contorno. Si veggia per es., per il caso lineare, l'importante studio di Doetsch ⁽³⁾.

In alcune Note precedenti ⁽⁴⁾, io avevo trattato il problema della propagazione del calore in diversi casi parziali, cercando principalmente di dimostrare l'applicabilità del calcolo degli operatori funzionali a tali problemi. Perciò mi ero esclusivamente curato di giungere ai risultati sotto la forma di Riemann: ed è per questo che, in una Nota precedente ⁽⁵⁾, studiando lo

(1) Nella seduta del 5 maggio 1929.

(2) V. VOLTERRA, *Sur les équations différentielles du type parabolique*, « Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences », Paris, 5 décembre 1904.

(3) G. DOETSCH, *Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung*, « Math. Zeitschr. », Band 22, S. 285-306, Band 25, S. 608-626.

(4) S. L. STRANEO: 1. *Metodo funzionale applicato alla risoluzione di problemi sulla propagazione del calore*, « Atti della Pont. Acc. delle Scienze Nuovi Lincei », anno LXXXI, (sessione II del 15 gennaio 1928); 2. *Applicazione del metodo funzionale allo studio del raffreddamento di una sbarra*. « Rendiconti della R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. VIII, serie 6^a, 2° sem., fasc. 11 (Roma, dicembre 1928); 3. *Risoluzione funzionale di problemi di propagazione del calore*. In corso di pubblicazione negli « Atti della Pont. Acc. delle Scienze ».

(5) V. sopra annotazione (4), n. 2.

stesso problema per una sbarra infinita e successivamente per una sbarra finita, ho applicato due diversi procedimenti che mi sembrarono i più opportuni per giungere ai due risultati desiderati.

Successive considerazioni sul problema nel suo complesso mi hanno convinto che il calcolo degli operatori funzionali permette una trattazione unitaria, che può con uniformità condurre oltre che a tutte le formole parziali di soluzione, anche a gettare molta luce sullo spirito fisico della questione generale di quei frazionamenti, apparentemente almeno, assai arbitrari.

Del complesso delle mie ricerche finora svolte, estese anche al caso che la sbarra, limitata o illimitata, sia percorsa da una corrente elettrica, e che perciò sia sede di svolgimento di calore, per effetto Joule e Thomson, e che quindi si abbia da integrare l'equazione

$$(1) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a \frac{\partial U}{\partial x} - b \frac{\partial U}{\partial t} - cU + d = 0,$$

dò un ampio resoconto negli « Atti della Società Ligustica di Scienze e Lettere ». Mi permetto qui invece di esporre alcune considerazioni sul lato più generale della questione cui ho or ora accennato.

2. Lagrange, Boole, Forsyth, Oltramare, Heaviside, ecc., nei tempi passati illustrarono l'applicazione del calcolo funzionale all'integrazione di equazioni differenziali ordinarie o a derivate parziali, ma generalmente o da un punto di vista che può avere un interesse puramente matematico, cioè senza tener conto delle condizioni ai limiti, o limitandosi a considerare casi completi, ma molto particolari.

Ultimamente Giorgi ⁽¹⁾, usando sistematicamente il simbolo $\Delta = \frac{\partial}{\partial t}$, integrò l'equazione:

$$(2) \quad a \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + b \frac{\partial U}{\partial t} + cU = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

(cui può notoriamente essere ricondotto lo studio della propagazione dell'elettricità e del calore), supponendo il sistema indefinitamente esteso nella direzione della propagazione.

Nelle Note citate, io ho usato sistematicamente non solo il simbolo $\Delta = \frac{\partial}{\partial t}$, ma anche quello $\mathfrak{D} = \frac{\partial}{\partial x}$, mantenendoli però costantemente separati, cioè ponendo nell'equazione

$$(3) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = b \frac{\partial U}{\partial t} - cU$$

(1) G. GIORGI, *Sugli integrali dell'equazione di propagazione in una dimensione*, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. LII (1928), pp. 265-312.

dopo aver frazionato il problema, uno solo dei due simboli, a seconda dei casi.

Questo procedimento non differiva sostanzialmente dal procedimento classico. Infatti è noto che, considerando per es., l'equazione (1), si può porre in essa $U = U_1 + U_2$; la (1) allora si scinde nelle due seguenti

$$(4) \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + a \frac{\partial U_1}{\partial x} - b \frac{\partial U_1}{\partial t} - c U_1 + d = 0;$$

$$(5) \quad \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + a \frac{\partial U_2}{\partial x} - b \frac{\partial U_2}{\partial t} - c U_2 = 0.$$

La costante d può evidentemente essere posta ad arbitrio o nella prima o nella seconda equazione. Le condizioni ai limiti cui deve soddisfare la U vengono ripartite nel modo che si giudica più adatto, tra le (4) e (5), in modo che la somma delle U_1 e U_2 soddisfi poi alle condizioni imposte per la U .

3. Se invece, nell'equazione (1) si pongono contemporaneamente i Δ e i \mathfrak{D} precedentemente definiti, l'apparente arbitrarietà di scrivere le (4) e (5) può, credo, essere giustificata con un semplice ragionamento. Noto subito che questo ragionamento non ha alcuna pretesa di rigore matematico, ma cerca soltanto di prospettare la questione in linea di massima.

L'equazione (1), trasformata mediante l'uso dei simboli \mathfrak{D} e Δ , può essere scritta così:

$$(6) \quad (\mathfrak{D}^2 + a\mathfrak{D})U - b\Delta U - cU + d = 0;$$

ossia, indicando con $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ tre operatori, riferiti rispettivamente ai primi tre termini della (6), potremo scrivere:

$$(7) \quad \theta_1 U + \theta_2 U + \theta_3 U + d = 0.$$

Ora consideriamo che $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sono simboli rappresentativi di operazioni funzionali tra loro indipendenti. Si potrà dire che, come, per fare il differenziale di una funzione di tre variabili indipendenti, noi le facciamo variare una alla volta, mantenendo costanti le altre due e sommando poi i risultati, così, per eseguire l'operazione funzionale completa indicata nella (7), dovremo successivamente ritenere costanti due degli operatori e far operare il terzo, effettuando tutte le possibili combinazioni e sommando. Del termine d , che può essere arbitrariamente riferito a uno qualunque dei termini che si ottengono, pel momento non ci occuperemo. Quanto ho detto equivale a scrivere, ponendo tra parentesi quadre gli operatori ritenuti volta a volta costanti,

$$(8) \quad \theta_1 [\theta_2, \theta_3] U + \theta_2 [\theta_1, \theta_3] U + \theta_3 [\theta_1, \theta_2] U = 0.$$

Data la natura degenerare dell'operatore θ_1 , che da solo non rappresenta una vera operazione funzionale, il terzo termine della (3) sarà nullo: avremo quindi

$$(9) \quad \theta_1[\theta_2, \theta_3]U + \theta_2[\theta_1, \theta_3]U = 0.$$

Per l'indipendenza delle due operazioni funzionali θ_1 e θ_2 , segue

$$(10) \quad \theta_1[\theta_2, \theta_3]U = K \quad : \quad \theta_2[\theta_1, \theta_3]U = -K.$$

Riprendendo ora il termine costante d , si potrà ritenerlo posto in una delle (10) ad arbitrio.

Tutto ciò equivale perfettamente al frazionamento classico, che conduce alle (4) e (5), ma trova, in questa impostazione simbolica, una logica giustificazione.

Le (10) sono appunto le equazioni funzionali che ho risolto nelle Note citate, ottenendo le soluzioni nelle forme note e in altre date pure da Doetsch.

4. Può essere interessante osservare che, a seconda che il termine d , dipendente dallo sviluppo di calore, venga posto nella prima o nella seconda delle (10), la soluzione assuma aspetti diversi, non solo dal punto di vista formale, ma anche da quello fisico.

Consideriamo, ad es., l'equazione della propagazione del calore accompagnata da sviluppo costante di calore

$$(11) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - b \frac{\partial U}{\partial t} - cU + d = 0$$

essendo b, c, d costanti positive. Le condizioni per un sistema esteso tra $x = 0$ e $x = \infty$ siano:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = \varphi(t) \quad \text{per } x = 0 \quad \text{e per } t > 0: \\ U = F_0(x) \quad \text{per } t = 0 \quad \text{e per } 0 < x < \infty \\ \text{Per } x \rightarrow \infty \text{ la } U \text{ debba restare finita.} \end{array} \right.$$

5. Le equazioni simboliche esplicite corrispondenti alle implicite (10) sono, quando poniamo la costante d nella seconda:

$$(13) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = (b\Delta + c)U \quad : \quad (14) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{b}(\mathfrak{D}^2 - c)U - \frac{d}{b}.$$

Distribuiremo ora le condizioni (12) in modo che la U della (13) e la U della (14), che diremo rispettivamente U' ed U'' soddisfino alle condizioni:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} U' = \left\{ \begin{array}{ll} = \varphi(t) & \text{per } x = 0 \quad \text{e } t > 0 \\ = 0 & \text{per } t = 0 \quad \text{e } 0 < x < \infty \end{array} \right. \\ U'' = \left\{ \begin{array}{ll} = F_0(x) & \text{per } t = 0 \\ = 0 & \text{per } x = 0 \quad \text{e per } t > 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

e che ambedue restino finite per $x \rightarrow \infty$.

Integrando la (13), si ha

$$(16) \quad U' = e^{-x\sqrt{b\Delta+c}} C_1(t) + e^{x\sqrt{b\Delta+c}} C_2(t)$$

essendo $C_1(t)$ e $C_2(t)$ costanti rispetto alla variabile d'integrazione x e quindi funzioni della sola t .

Dalla condizione imposta per $x \rightarrow \infty$ si ricava $C_2 = 0$; dalla condizione per $x = 0$ si ricava $C_1(t) = \varphi(t)$ e quindi

$$(17) \quad U' = e^{-x\sqrt{b\Delta+c}} \varphi(t).$$

In una Nota citata (1), ho valutato l'espressione simbolica della (17) colla condizione che si annulli per $t = 0$, in

$$(18) \quad U' = \frac{x\sqrt{b}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{c}{b}(t-\tau)} e^{-\frac{bx^2}{4(t-\tau)}}}{\sqrt{(t-\tau)^3}} \varphi(\tau) d\tau.$$

Per determinare la U'' , integriamo la (14): abbiamo:

$$(19) \quad U'' = e^{-\frac{a}{b}t} e^{\frac{t}{b}\mathfrak{D}^2} C(x) + \frac{d}{\mathfrak{D}^2 - c}.$$

Il secondo membro della (19) è costituito di due termini, il secondo dei quali, a differenza del primo è indipendente dal tempo; ognuno dei due termini rappresenta un'operazione funzionale e queste due operazioni sono tra loro indipendenti. Il loro risultato complessivo è la funzione U'' . Ne segue che il risultato di ciascun'operazione deve essere esprimibile per mezzo di una singola funzione, essendo complessivamente $U'' = U''_1 + U''_2$.

L'espressione di U''_2 , cioè la valutazione dell'operatore $\frac{d}{\mathfrak{D}^2 - c}$ è notoriamente (2)

$$(20) \quad U''_2 = \frac{d}{c} [e^{-x\sqrt{c}} C_1 - e^{x\sqrt{c}} C_2 + 1]$$

essendo C_1 e C_2 costanti arbitrarie. Poichè U''_2 deve essere finita per $x \rightarrow \infty$ sarà $C_2 = 0$; poichè U''_2 deve essere nullo per $x = 0$ sarà $C_1 = -1$; quindi:

$$(21) \quad U''_2 = \frac{d}{c} [1 - e^{-x\sqrt{c}}].$$

U''_2 , risultando indipendente dal tempo deve rappresentare lo stato stazionario $U_S(x)$: il che si verifica.

(1) All'annotazione (4), n. 1 a p. 765.

(2) BOOLE, *Differential Equations*, London, 1872, pp. 390-391.

Passiamo ora alla valutazione di U'' . Calcoliamo $C(x)$ nella (19) in modo che per $t = 0$ sia $U'' = F_0(x)$: risulta $C(x) = F_0(x) - U_S$. La valutazione, che si annulla per $x = 0$, del primo operatore è

$$(22) \quad U'_t = \frac{\sqrt{b} e^{-\frac{c}{b}t}}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty [F_0(\alpha) - U_S(\alpha)] \left\{ e^{-\frac{b(\alpha-x)^2}{4t}} - e^{-\frac{b(\alpha+x)^2}{4t}} \right\} d\alpha.$$

La U si ottiene quindi sommando le (18), (21) e (22).

6. Riprendiamo ora lo stesso caso, attribuendo il termine d alla prima invece che alla seconda delle (10): ripartiremo le condizioni ai limiti, fra le due equazioni

$$(23) \quad \frac{\partial^2 U'}{\partial x^2} = (b\Delta + c)U' - d \quad : \quad (24) \quad \frac{\partial U''}{\partial t} = \frac{1}{b}(\mathfrak{D}^2 - c)U'',$$

allo stesso modo che dianzi (15).

Integrando la prima si ottiene:

$$(25) \quad U' = \frac{d}{b\Delta + c} + e^{-x\sqrt{b\Delta + c}} C_1(t) + e^{x\sqrt{b\Delta + c}} C_2(t).$$

Perchè sia verificata la condizione per $x \rightarrow \infty$, sarà $C_2 = 0$.

La valutazione del primo termine del secondo membro della (25) è nota: esso corrisponde a un integrale il cui limite inferiore è arbitrario: determiniamolo in modo che il suo valore sia nullo per $t = 0$: si ha

$$(26) \quad \frac{d}{b\Delta + c} = \frac{d}{b} e^{-\frac{c}{b}t} \int_0^t e^{\frac{c}{b}t} dt = \frac{d}{c} \left[1 - e^{-\frac{c}{b}t} \right].$$

Determiniamo la C_1 della (27) in modo che, per $x = 0$, sia $U' = \varphi(t)$.

Si constata che $C_1(t) = \varphi(t) - \frac{d}{c} \left[1 - e^{-\frac{c}{b}t} \right]$, ossia

$$(27) \quad U' = \frac{d}{c} \left[1 - e^{-\frac{c}{b}t} \right] + e^{-x\sqrt{b\Delta + c}} \left\{ \varphi(t) - \frac{d}{c} \left[1 - e^{-\frac{c}{b}t} \right] \right\}.$$

Tenendo presenti le (17) e (18) si ha

$$(28) \quad U' = \frac{d}{c} \left[1 - e^{-\frac{c}{b}t} \right] + \frac{x\sqrt{b}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{c}{b}(t-\tau)}}{\sqrt{(t-\tau)^3}} e^{\frac{bx^2}{4(t-\tau)}} \left[\varphi(\tau) - \frac{d}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{b}\tau} \right) \right] d\tau.$$

Per determinare U'' , si integra la (24); si ricava

$$(29) \quad U'' = e^{\frac{t}{b}(\mathfrak{D}^2 - c)} C(x).$$

Colla condizione per $t = 0$ si trova $C(x) = F_0(x)$, e mediante la (24)

$$(30) \quad U'' = \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{c}{b}t} \int_0^\infty F_0(\alpha) \left\{ e^{-\frac{b(\alpha-x)^2}{4t}} - e^{-\frac{b(\alpha+x)^2}{4t}} \right\} d\alpha.$$

E la U si ottiene sommando fra loro le (28) e (30).

7. Confrontando ora le due soluzioni complete, dedotte nei numeri 5 e 6, vediamo che in esse risultano identiche le parti che esprimono la conseguenza della variazione $\varphi(t)$ della temperatura all'estremità $x = 0$ [equazione (18) e parte della (28) contenente $\varphi(t)$ a fattore, sotto il segno di integrazione]; come pure le parti che esprimono la conseguenza della distribuzione iniziale [parte dell'equazione (22) contenente $F_0(x)$ a fattore sotto il segno di integrazione e equazione (30)].

Le conseguenze invece del puro riscaldamento, quale si avrebbe se fossero $F_0(x) = 0$ e $\varphi(t) = 0$, risultano quindi date nei due modi seguenti. Nel primo, dalla (21) e dalla parte non considerata della (22), e quindi risultano riferite essenzialmente allo stato stazionario U_s , cioè allo stato corrispondente a $t = \infty$. Nel secondo, dalla parte della (28) che non abbiamo ancora considerata e che contiene esternamente e sotto il segno di integrazione la funzione $\frac{d}{c} \left[1 - e^{-\frac{c}{b}t} \right]$ indipendentemente dalle x e che notoriamente rappresenta la temperatura di un conduttore esteso fra $-\infty$ e $+\infty$; cosicchè la temperatura risulta in questo secondo modo essenzialmente riferita allo stato corrispondente a $x = \infty$.

Ciascuna delle due interpretazioni si riconnette a un senso fisico peculiare, e ben evidente.

Applicando opportune trasformazioni, per cui rimando alla Memoria della « Società Ligustica », le due soluzioni vengono a risultare identiche.

Fisica. — *Sulla teoria quantistica dell'effetto Raman.* Nota di E. AMALDI, presentata dal Socio O. M. CORBINO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sopra l'elettrodinamica quantistica.* Nota di E. FERMI, presentata dal Socio O. M. CORBINO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulla teoria quantistica della fluorescenza.* Nota di E. SEGRÈ, presentata dal Socio O. M. CORBINO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Pentasolfuri dietilici*⁽¹⁾. Nota I di G. R. LEVI ed A. BARONI, presentata⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

In una serie di ricerche sulla esistenza di catene miste di solfo e selenio, ricerche delle quali è stata data una comunicazione preliminare il 16 maggio 1928⁽³⁾ e delle quali verrà riferito quanto prima, abbiamo avuto occasione di studiare, a scopo di confronto con le catene miste, alcuni polisolfuri alchilici. Riteniamo che lo studio delle catene miste possa portare anche un contributo alla conoscenza della formula dell' S_2Cl_2 e dei cloruri politionici; oggi si preferisce generalmente per S_2Cl_2 la formula $Cl_2 = S = S$. In queste ricerche sui polisolfuri alchilici abbiamo avuto occasione di notare delle forti discordanze nelle proprietà dei composti descritti da precedenti autori, anche recenti. L'impiego di S_2Cl_2 nella loro preparazione porta ad un contributo chimico sulla struttura di esso e dei cloruri politionici in genere. Per questo complesso di ragioni abbiamo ritenuto utile correggere i dati errati esistenti ed estendere le ricerche su prodotti più solforati.

La questione della esistenza di cloruri politionici nelle soluzioni di zolfo in cloruro di solfo è stata studiata con metodi chimico-fisici da diversi autori⁽⁴⁾. In particolare il lavoro di Bruni e Amadori e quello successivo di Hammick e Zvegintzov, i primi con misure crioscopiche ed i secondi con misure di solubilità, conducono ad ammettere in modo sicuro l'esistenza di cloruri politionici nelle soluzioni di zolfo in S_2Cl_2 specie se la miscela è stata riscaldata a 150°.

Negli ultimi anni diversi sperimentatori⁽⁵⁾ hanno condotto delle ricerche sui polisolfuri alchilici preparandoli con diversi metodi e cioè per azione

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Chimica Fisica della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 7 aprile 1929.

(3) Società di Chimica Industriale di Milano, seduta del 16 maggio 1928; v. «Giornale di Chimica Industriale», p. 266 (1928).

(4) ARONSTEIN e MEIUIZEN, «Proc. K. Ak. Wetens», Amsterdam, 1, 1 (1898); ATEN, «Z. phys. Chem.», 81, 257 (1913) e 86, 10 (1913); BRUNI e AMADORI, «Rend. Lincei», 28, 217 (1919) e «Z. anorg. Chem.», 149, 387 (1925); RUFF e GOLLA, «Z. anorg. Chem.», 138, 33 (1924); LOWRY, McHATTON e JONES, «J. Chem. Soc.», 131, 746 (1927); HAMMICK e ZVEGINTZOV, «J. Chem. Soc.», 133, 1785 (1928).

(5) BEILSTEIN, IV ed., 1°, p. 291, 348 e supp. 1°, p. 145, 173; CHAKRAVARTI, «J. Chem. Soc.», 123, 964 (1923); THOMAS e RIDING, «J. Chem. Soc.», 123, 3271 (1923) e 125, 2460 (1924).

dei magnesio-alchili sul cloruro S_2Cl_2 , da ammoniaca e zolfo sui disolfuri alchilici in soluzione alcoolica, dai sodio-mercaptidi ed S_2Cl_2 pure in soluzione alcoolica, dal bi e tetrasolfuro sodico e dal pentasolfuro potassico con alogenuri alchilici, ecc.

Queste due serie di ricerche sono state condotte indipendentemente le une dalle altre; noi abbiamo invece pensato che la preparazione di polisolfuri alchilici con $S > 4$ attraverso il cloruro di zolfo potesse essere messa in relazione con una osservazione di Angeli⁽¹⁾ che ottenne dall'azione de-cloruro di solfo del commercio sull'acetilacetone anche piccole quantità di tritioacetilacetone, perchè appunto da un cloruro di zolfo greggio avevamo ottenuto un tetrasolfuro dietilico fortemente impuro di pentasolfuro; successivamente Henriques aveva ottenuto dal cloruro di solfo e beta-naftolo un po' di tetratioderivato. Le nostre preparazioni ci hanno permesso di stabilire che effettivamente il cloruro di zolfo S_2Cl_2 reagisce con lo zolfo e che, in accordo con le misure di solubilità, l'optimum di temperatura è appunto a 150°. Infatti le miscele ottenute con riscaldamenti superiori o inferiori diedero rese sempre più basse in pentasolfuro.

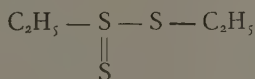
Le costanti fisiche, peso specifico ed indice di rifrazione, dei polisolfuri che si formano nella condensazione del mercaptano col cloruro di zolfo, dimostrano in entrambi i casi un incremento più o meno graduale. La presenza di zolfo non combinato innalza assai di più l'indice di rifrazione e questo mezzo appunto permette di riconoscere con delicatezza se sia presente zolfo non combinato.

Abbiamo anche potuto notare che per conveniente riscaldamento lo zolfo si somma al disolfuro dietilico dando tri e tetradervato e un pentasolfuro isomero a quello formatosi da mercaptano e cloruro di zolfo. Nessun isomero bi, tri e tetra è stato mai da noi ottenuto perchè indici di rifrazione, pesi specifici e punti di ebollizione di questi composti preparati con entrambi i metodi, sono sempre risultati identici.

Si è osservato che, mentre il tetra e il pentasolfuro anneriscono per riscaldamento a bagno maria con una sospensione acquosa di idrato di piombo, il trisolfuro in queste condizioni rimane inalterato.

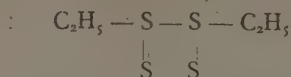
I due pentasolfuri isomeri e il tetrasolfuro mediante misure crioscopiche di peso molecolare in bromoformio mostrano valori normali.

Poichè il trisolfuro si forma anche da S e $(C_2H_5)_2S_2$, è lecito attribuirgli la formula:

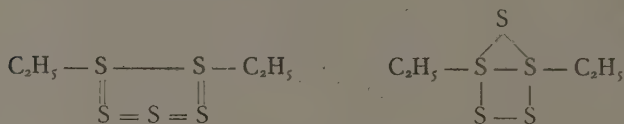


(1) ANGELI e MAGNANI. «Gazzetta», 23, II, 415 (1893) e 24, I, 349 (1894); HENRIQUES, «Berichte», 25, 2993 (1894).

e analogamente al tetrasolfuro la formula:

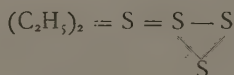


non essendo verosimile, a nostro avviso, ammettere che atomi di zolfo in queste condizioni possano funzionare da esavalenti. Ai due pentasolfuri dietilici isomeri, si potrebbero allora attribuire le formule:

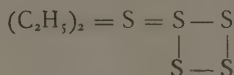


e verosimilmente la prima a quello a punto di ebollizione 119° derivante dalla condensazione del cloruro $\text{Cl} - \text{S} - \text{S} - \text{Cl}$ sul mercaptano, e la seconda a quello formatosi per azione diretta di zolfo sul disolfuro.

Ammettendo invece per il disolfuro la formula: $(\text{C}_2\text{H}_5)_2 = \text{S} = \text{S}$, si arriverebbe ad un trisolfuro: $(\text{C}_2\text{H}_5)_2 = \text{S} = \text{S} = \text{S}$ e conseguentemente ad un tetrasolfuro:

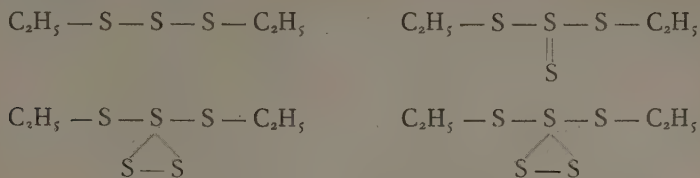


Da questo si giungerebbe ad un solo pentasolfuro:

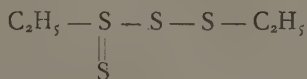


mentre ne esistono almeno due. Ammettendo l'esistenza di un altro tetrasolfuro della formula: $(\text{C}_2\text{H}_5)_2 = \text{S} = \text{S} = \text{S} = \text{S}$, si spiegherebbero ben facilmente i due pentasolfuri isomeri, ma ciò è in contraddizione col fatto che noi abbiamo ottenuto solamente un tetrasolfuro. In conseguenza le formule precedenti ci sembrano le più verosimili. Ad esse si potrebbe però fare questa osservazione: l'incremento dell'indice di rifrazione, passando ai composti più ricchi di zolfo, è particolarmente forte dal tri al tetra, mentre è relativamente minore dal bi al tri e dal tetra al penta; lo stesso può dirsi dei pesi specifici. In relazione a ciò sarebbe da attribuire il maggior incre-

mento alla formazione del doppio legame ed in tal caso le formule dei diversi composti sarebbero:



Mentre riteniamo che le formule del secondo tipo siano poco attendibili, non ci sentiremmo allo stato attuale delle cose di scegliere fra quelle del primo e del terzo tipo pur ritenendo oggi preferibili quelle del primo. Infatti per quelle del terzo tipo noi abbiamo dato al tetrasolfuro la formula più probabile, non possiamo tuttavia escludere l'altra



e conseguentemente si cadrebbe come per il tipo secondo in due tetrasolfuri finora non ottenuti.

Il complesso delle ricerche in corso su questi composti, anche a catene miste di zolfo e selenio, e misure di indice di rifrazione applicate al sistema $\text{S}_2\text{Cl}_2 + x\text{S}$, potranno forse dare argomenti in favore ad un tipo di formula piuttosto che all'altro.

Preparazione del pentasolfuro dietilico normale (I) (p. e. 119° a 26 mm.) — Per la preparazione di questo prodotto è stato utilizzato lo stesso metodo col quale Klason⁽¹⁾ ha preparato il tetrasolfuro dietilico e cioè si è mescolato a temperatura ordinaria il cloruro di zolfo con eccesso di mercaptano, entrambi sciolti in solfuro di carbonio. Dopo moderato riscaldamento si distilla il solfuro di carbonio e l'eccesso di mercaptano. Però il residuo non fu distillato in corrente di vapore, ma sottoposto a distillazione frazionata nel vuoto. La preparazione, che per il cloruro di zolfo puro va secondo lo schema:



porta nel caso di $\text{S} > 2$ appunto alla formazione di una maggiore o minore quantità di pentasolfuro.

Le preparazioni da noi eseguite possono essere così riassunte:

a) *Preparazione con S_2Cl_2 distillato.* — Gr. 7 di S_2Cl_2 puro, sciolti in circa 5 parti di CS_2 , vengono addizionati a 10 gr. di mercaptano sciolti

(1) « Journ. für prakt. Chemie », (2) 15, 214.

pure in 5 parti di CS_2 . Ad operazione finita si aggiunge circa 1 grammo di CaCO_3 precipitato; si scalda a bagnomaria 20 minuti, si distilla il CS_2 alla fine in corrente di gas illuminante e poi si fraziona a 26 mm.:

1° fraz. p. e.	85°	$(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}_3$	gr. 3.4
2° fraz. p. e.	109°	$(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}_4$	gr. 3.0

residuo gr. 1.0; nessun prodotto a punto di ebollizione superiore a 109°.

b) *Preparazione con S_2Cl_2 commerciale.* — La preparazione fu condotta esattamente come la precedente col seguente risultato:

1° fraz. p. e.	85°	$(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}_3$	gr. 1.6
2° fraz. p. e.	109°	$(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}_4$	gr. 4.8
3° fraz. p. e.	119°	$(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}_5$ (I)	gr. 1.1

residuo gr. 1.5; nessun prodotto a punto di ebollizione superiore a 119°.

c) *Preparazione con $\text{S}_2\text{Cl}_2 + 2\text{S}$ riscaldati in tubo chiuso a bagnomaria un'ora.* — In questa preparazione vennero usati gr. 7 di S_2Cl_2 di recente distillato addizionato della quantità esatta di S (gr. 3.2), in modo da avere un prodotto corrispondente alla formula greggia S_4Cl_2 , riscaldando la miscela un'ora a bagnomaria. Con questa miscela fu eseguita la preparazione esattamente come in (a) e in (b) col seguente risultato:

1° fraz. p. e.	85°	$(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}_3$	gr. 1.1
2° fraz. p. e.	109°	$(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}_4$	gr. 4.9
3° fraz. p. e.	119°	$(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}_5$ (I)	gr. 0.5

residuo gr. 2.0; nessun prodotto a punto di ebollizione superiore a 119°.

d) *Preparazione con $\text{S}_2\text{Cl}_2 + 2\text{S}$ riscaldati in tubo chiuso a 150° in bagno d'olio per un'ora.* — La sola differenza di questa preparazione rispetto alla precedente fu appunto il riscaldamento della miscela di S_2Cl_2 e zolfo a 150°. Alla distillazione risultò:

1° fraz. p. e.	85°	$(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}_3$	gr. 1.5
2° fraz. p. e.	109°	$(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}_4$	gr. 1.4
3° fraz. p. e.	119°	$(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}_5$ (I)	gr. 2.1

residuo gr. 2.5; nessun prodotto a punto di ebollizione superiore a 119°.

e) *Preparazione con $\text{S}_2\text{Cl}_2 + 2\text{S}$ riscaldati in tubo chiuso in bagno d'olio a 200° per un'ora.* — Con gli stessi quantitativi usati in (b) e in (c), ma con un cloruro di zolfo S_4Cl_2 riscaldato 50° più alto, si ottiene alla successiva distillazione, il seguente risultato:

1° fraz. p. e.	85°	$(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}_3$	gr. 2.0
2° fraz. p. e.	109°	$(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}_4$	gr. 3.2
3° fraz. p. e.	119°	$(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}_5$ (I)	gr. 1.1

residuo gr. 3.3; nessun prodotto a punto di ebollizione superiore a 119°.

Il prodotto a punto di ebollizione 119° proveniente dalle preparazioni (b), (c), (d), (e), fu analizzato pesando sempre il solfuro alchilico in microbilancia di Longue sensibile a $\frac{1}{1000}$ di mgr. e il BaSO_4 corrispondente, dopo fatto il microcarius, in una comune buona bilancia d'analisi. I risultati ottenuti sono i seguenti:

polisolfuro	BaSO_4	S % trovato
gr. 0.007635	gr. 0.0495	72.85
» 0.006705	» 0.0361	74.00
» 0.012331	» 0.0655	73.01
» 0.014999	» 0.0801	73.34
» 0.013158	» 0.0700	73.08

calcolato per $(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}$, 73.43.

Il peso specifico risultò col metodo dei liquidi pesanti a 20° 1.1687 e col metodo del picnometro 1.169. L'indice di rifrazione risultò come media di due determinazioni perfettamente coincidenti $n_D^{13} = 1.60269$.

In tutte le preparazioni da (a) ad (e) fu ottenuto in quantità variabile del tetrasolfuro dietilico. Questo prodotto all'analisi condotta come per il penta, diede i seguenti risultati:

polisolfuro pesato	BaSO_4 pesato	S % trovato
gr. 0.009113	gr. 0.0453	68.25
» 0.012920	» 0.0642	68.27

calcolato per $(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}_4$ 68.87. Il peso specifico a 20° risultò col metodo dei liquidi pesanti 1.1253 e l'indice di rifrazione 1.58436 a 13° .

Le analisi sopra dette furono fatte per il tetrasolfuro in considerazione del fatto che i precedenti autori avevano distillato il prodotto a pressione ordinaria e il valore dato per il punto di ebollizione non era comparabile col nostro. Per il trisolfuro di cui era noto il punto di ebollizione a pressione ridotta, avendo risultati perfettamente coincidenti ai nostri, abbiamo ritenuto superfluo fare l'analisi. Abbiamo determinato invece il p. sp. = 1.1140 e l'indice di rifrazione $n_D^{13} = 1.56899$, valori non ancora noti. Per il disolfuro riferiamo invece i valori già determinati da Nasini (1).

$$D_4^{20} = 0.99267 \quad n_D^{20} = 1.50633$$

Riteniamo importante qui far osservare che il prodotto preparato da Thomas e Riding (2), per il quale gli autori danno una densità 1.233 a 18°

(1) BEILSTEIN, loc. cit.

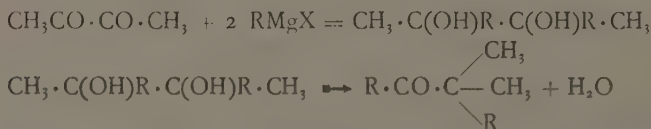
(2) Loc. cit.

e dichiarano che si decompone prima di bollire, non è del vero pentasolfuro, ma sostanzialmente una miscela di tetrasolfuro e zolfo. Infatti il loro valore non si accorda col nostro, ma è notevolmente più elevato. Noi abbiamo preparato a bagno maria una miscela di tetrasolfuro e zolfo nei rapporti ponderali corrispondenti al pentasolfuro, ottenendo il valore 1.221, valore assai vicino a quello dato dagli autori citati. Le costanti fisiche di questo pentasolfuro restano così fissate: punto di ebollizione 119° a 26 mm., peso specifico 1.1687 a 16°, indice di rifrazione 1.60269 a 13°.

Sulla preparazione del pentasolfuro isomero a p. eb. 130° del quale si è fatto cenno più sopra, sulla trasformabilità dell'uno nell'altro come pure sulle misure di peso molecolare eseguite col metodo crioscopico riferiremo in una prossima Nota.

Chimica. — *Condensazione del piperonalio con alcune pinacoline* ⁽¹⁾. Nota di E. PACE, presentata ⁽²⁾ dal Socio R. NASINI.

In una precedente nota ⁽³⁾ ho descritto alcune pinacoline da me ottenute facendo reagire il bromuro di magnesio alchile sul diacetile tenuto in soluzione eterea e disidratando poi con acido solforico il prodotto della reazione (pinacone):



Tali pinacoline ottenute sono: Metil-terziario-butilchetone, etil-terziario-amilchetone, propil-terziario-esilchetone.

Dato il comportamento generale dei composti a funzione chetonica, i quali presentano possibilità di condensazione è da prevedersi che le pinacoline, contenenti nella loro molecola l'aggruppamento chetonico, possano dare anch'esse prodotti di condensazione, come effettivamente le esperienze descritte nella presente nota dimostrano.

Uno dei composti più importanti ed interessanti per la facilità con la quale si hanno condensazioni è l'aldeide piperonilica; ed infatti sono già stati ottenuti prodotti di condensazione del piperonalio con i più svariati composti; coi chetoni sono da notarsi quelli ottenuti da Haller ⁽⁴⁾ con la

(1) Lavoro eseguito all'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Pisa.

(2) Nella seduta del 5 maggio 1929.

(3) «Rendiconti Accademia dei Lincei», (6), 8, 309 (1928).

(4) «Compt. rend.», CXXVIII, 1370 (1899), CXXX, 688 (1900).

canfora, il tuione e l'isotuione; da Hertzka⁽¹⁾ col mentone, metil-naltichetone e benzilchetone; da Vörlander⁽²⁾ con l'acetofenone e da Francesconi e Cusmano⁽³⁾ con il cinnamalacetone.

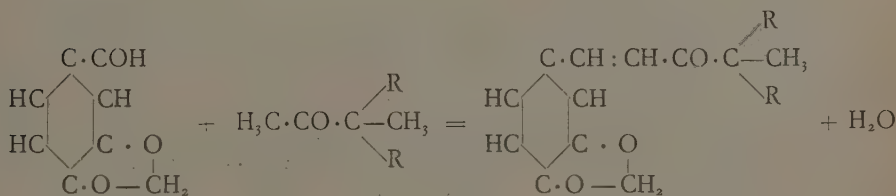
Ho ritenuto perciò interessante eseguire la condensazione delle tre suaccennate pinacoline non solo per estenderne lo studio, determinandone i principali caratteri chimico-fisici, ma anche perchè i chetoni così ottenuti, contenenti nella loro molecola un doppio legame, mi servono ulteriormente per studiarne il comportamento con l'ossicloruro di carbonio, del quale ho già messo in evidenza in una prima nota⁽⁴⁾ alcune particolarità rispetto ad idrocarburi ed alcoli ad un doppio legame.

Le misure dell'indice di rifrazione sono state eseguite col metodo delle minime deviazioni prismatiche, usando uno spettrometro che dà per lettura diretta i 10' e per approssimazione i 5". Le determinazioni sono state fatte rispetto alle righe α , β e γ dello spettro dell'idrogeno ed alla riga D del sodio.

Il solvente adoperato è stato l'alcool a 96°.

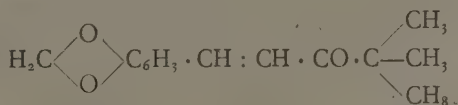
Le densità sono state determinate con i comuni picnometri a boccetta. Le pesate e le densità sono state sempre ridotte al vuoto e a 4°.

Le reazioni di condensazioni possono essere schematicamente rappresentate:



PARTE SPERIMENTALE.

Piperonal-metil-terziario-butilchetone :



Si sciolgono gr. 7.5 di piperonalio e gr. 5 di pinacolina in 50 cm.³ di alcool e si aggiungono 50 cm.³ di soda al 6%, in modo da avere una quantità di alcali un poco superiore alla metà della pinacolina aggiunta.

(1) « Monatsh. », XXIV, 227 (1905).

(2) « Ann. », CCCXLI, I, (1905).

(3) « Gazz. Chim. », XXXVIII, II, 77 (1908).

(4) « Gazz. Chim. », LIX, II, (1929).

Si ha a poco a poco separazione di un olio giallastro ed una leggera fluorescenza verdognola. Dopo alcune ore di riposo si aggiungono 50 cm³ di acqua ed in tal modo l'olio si rapprende in una massa cristallina giallastra. Il prodotto raccolto e spremuto alla pompa si ricristallizza prima dall'etere e quindi da un miscuglio a parti uguali di etere ed alcool.

Cristalli aghiformi bianchi, molto splendenti, birifrangenti, biassici sui quali non è stato possibile fare determinazioni goniometriche data la loro forma aciculare.

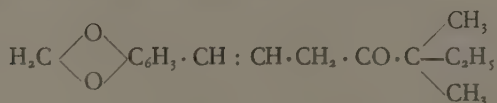
Hanno un peso specifico di 1.0765. Fondono senza decomporsi a 98°; odore canforaceo. Il potere rifrangente è stato dedotto dalla formula di Lorenz e Lorentz.

	per H _α	per D	per H _β	per H _γ
Indice di rifrazione	1.34576	1.34825	1.35072	1.35363
Potere rifrangente specifico	0.19769	0.19898	0.20025	0.20174
Potere rifrangente molecolare	45.86408	46.16336	46.4580	46.80368

La determinazione della grandezza molecolare (solvente acido acetico) e l'analisi elementare hanno dato:

	peso molecolare trovato = 230.8		
	trovato ‰:	C 72.8	H 6.9
per C ₁₄ H ₁₆ O ₃ = 232	calcolato ‰:	C 72.4	H 6.9

Piperonal-etil-terziario-amilchetone:



Si scioglie in alcool il piperonalio e l'etil-terziario-amilchetone in proporzione di molecola a molecola e si aggiunge alla soluzione soda al 10 ‰, in ragione cioè di 10 cm³ per ogni grammo di pinacolina. Il liquido si colora in giallo assumendo una bella fluorescenza verde. Aggiungendo acqua, dopo alcune ore di riposo, precipita un olio il quale a poco a poco si cristallizza.

La sostanza raccolta alla pompa si purifica mediante ripetute cristallizzazioni da miscugli a parti uguali di etere e di alcool.

Si presenta in cristalli biassici, giallo chiaro di densità 1.08830 fusibili a 106°, odore canforaceo molto intenso.

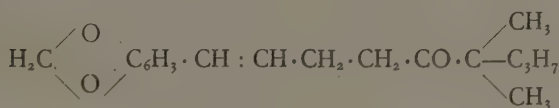
	per H_{α}	per D	per H_{β}	per H_{γ}
Indice di rifrazione	1.35894	1.36132	1.36641	1.37057
Potere rifrangente specifico	0.20225	0.20345	0.20602	0.20812
Potere rifrangente molecolare	52.5850	52.8970	53.9652	54.1112

La determinazione del peso molecolare (solvente acido acetico) e l'analisi elementare hanno dato:

peso molecolare trovato = 258.8

	trovato %	C 73.4	H 7.6
per $C_{16}H_{20}O_3 = 260$	calcolato %	C 73.8	H 7.7

Piperonal-propil-terziario-esilchetone:



Dalle soluzioni alcooliche del piperonalio e del propil-terziario-esilchetone in proporzioni equimolecolari trattate con soda al 10%, si separa un olio che essiccato su cloruro di calcio si cristallizza facilmente.

Il prodotto sciolto in alcool si purifica con ripetute cristallizzazioni.

Cristalli biassici giallastri di densità 1.0928; fusibili senza decomporsi a 117°, odore canforaceo pronunciato.

	per H_{α}	per D	per H_{β}	per H_{γ}
Indice di rifrazione	1.38154	1.38576	1.38943	1.39305
Potere rifrangente specifico.	0.21273	0.21411	0.21783	0.22018
Potere rifrangente molecolare.	61.26624	61.66368	62.73504	63.41184

L'analisi elementare, e la determinazione della grandezza molecolare (solvente acido acetico) hanno dato:

peso molecolare trovato = 286.8			
	trovato ‰:	C 74.25	H 8.3
per $C_{18}H_{24}O_3 = 288$	calcolato ‰:	C 75 —	H 8.3

Concludendo: Sono stati ottenuti i prodotti di condensazione delle tre pinacoline: metil-terziario-butilchetone, etil-terziario-amilchetone e propil-terziario-esilchetone con l'aldeide piperonilica e ne sono stati studiati i principali caratteri chimico-fisici.

Chimica-fisica. — *Sulla importanza della forma cristallina nella formazione di soluzioni solide.* V. *Analisi termica e röntgenografica dei sistemi* $CoCl_2 - FeCl_2$ e $MnCl_2 - FeCl_2$ *anidri.* Nota⁽¹⁾ di A. FERRARI, A. CELERI e F. GIORGI, presentata⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

Come abbiamo detto nelle precedenti Note⁽³⁾ la struttura cristallina simile dei cloruri bivalenti romboedrici ($MgCl_2$, $NiCl_2$, $CoCl_2$, $FeCl_2$, $MnCl_2$ e $CdCl_2$) faceva prevedere che le 15 coppie formate da questi cloruri dessero una miscibilità completa allo stato solido. Di questi sistemi tre erano stati studiati precedentemente da altri autori⁽⁴⁾, cinque nelle Note III e IV del presente studio⁽⁵⁾. Dei sistemi $CoCl_2 - FeCl_2$ e $MnCl_2 - FeCl_2$ riferiamo nel presente lavoro. I cloruri di cobalto, di ferro e di manganese puri anidri sono stati ottenuti nel modo descritto nelle precedenti Note. Essi diedero le seguenti caratteristiche:

$CoCl_2$: analisi	{	trovato Co 45.30 ‰ Cl 54.73 ‰	punto di fusione ⁽⁶⁾ $722^\circ \pm 1$
		teorico Co 45.40 ‰ Cl 54.60 ‰	

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Chimica-Fisica della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 7 aprile 1929.

(3) Questi «Rendiconti» (6*), VIII (1928), 238 e 306.

(4) $CdCl_2 - MnCl_2$ da C. SANDONNINI e G. SCARPA, «Rend. Acc. Lincei» (5*), XX (1911), 61; $MgCl_2 - MnCl_2$ da C. SANDONNINI, «Rend. Acc. Lincei» (5*), XXI (1912), 634; $MgCl_2 - CdCl_2$ da O. MENGE, «Zeits. an. Chem.», LXXII (1911), 165.

(5) $MnCl_2 - CoCl_2$, $CdCl_2 - CoCl_2$ e $MgCl_2 - CoCl_2$, «Rend. Acc. Lincei» (6*), VIII (1928), 238; $MgCl_2 - FeCl_2$ e $CdCl_2 - CoCl_2$, «Rend. Acc. Lincei» (6*), VIII (1928), 306.

(6) I punti di fusione sono riferiti a quelli del cloruro sodico (precipitato con acido cloridrico) 803° e del cloruro potassico puro 774° .

FeCl ₂ : analisi	trovato Fe 44.44 % Cl 55.50 %	punto di fusione 674° ± 1
	teorico Fe 44.05 % Cl 55.95 %	
MnCl ₂ : analisi	trovato Mn 43.48 % Cl 56.30 %	punto di fusione 650° ± 1.
	teorico Mn 43.65 % Cl 56.35 %	

I punti di fusione concordano bene con quelli di altri autori per il cloruro manganoso e con nostre precedenti determinazioni per il cloruro di cobalto e per il cloruro ferroso.

L'analisi termica dei due sistemi in questione è stata eseguita col dispositivo e con le cautele descritte nella Nota I del presente studio, essa conferma che il cloruro ferroso è miscibile in ogni proporzione coi cloruri di manganese e di cobalto come si prevedeva. I punti di fusione delle miscele sono intermedi a quelli dei componenti puri, gli intervalli di cristallizzazione così piccoli da non potersi apprezzare. I dati sperimentali relativi ai due sistemi raccolti nella tabella I e rappresentati graficamente nella fig. 1 si illustrano da soli.

TABELLA I.

Sistema CoCl ₂ — FeCl ₂		Sistema MnCl ₂ — FeCl ₂	
Molecole % di FeCl ₂	Inizio della cristallizzazione	Molecole % di FeCl ₂	Inizio della cristallizzazione
0	722°	0	650°
10	716°	10	651°
20	712°	20	652°
30	707°	30	654°
40	700°	40	656°
50	694°	50	659°
60	689°	60	661°
70	685°	70	665°
80	681°	80	668°
90	677°	90	671°
100	674°	100	674°

Se i cristalli misti si decomponessero a temperature relativamente basse, l'effetto termico potrebbe anche sfuggire all'osservazione essendo il metodo termico troppo poco sensibile a queste temperature.

L'analisi röntgenografica ci mostrerebbe però, qualora la decomposizione fosse avvenuta, la presenza dei due reticoli dei componenti al posto di quello unico della soluzione solida. Se però gli individui cristallini provenienti dalla decomposizione della soluzione solida fossero troppo piccoli potrebbe la sostanza comportarsi praticamente come amorfa e mancare qualsiasi riflessione. Comunque l'analisi röntgenografica deve permettere di rilevare con sicurezza l'eventuale decomposizione della soluzione solida, e per questo applichiamo detto metodo allo studio dei due sistemi.

La prima questione da risolvere per questo esame è quindi lo studio dei reticoli dei tre componenti puri.

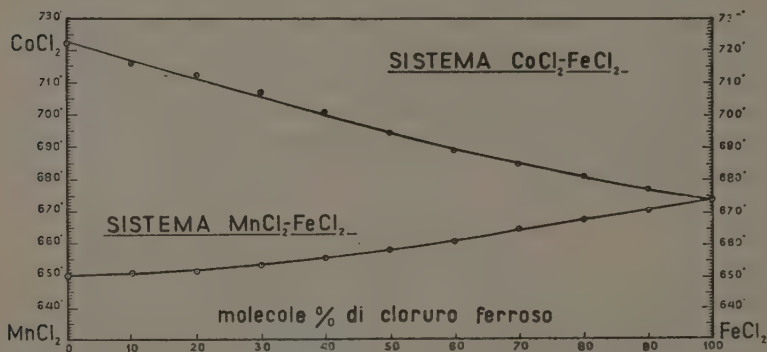


Fig. 1.

Uno di noi (A. Ferrari) si era già occupato della struttura cristallina di questi cloruri dimostrando dapprima con fotogrammi di Laue che i cloruri di magnesio, manganese e cadmio, appartengono al sistema romboedrico⁽¹⁾ e dando in seguito la simmetria e il rapporto assiale del cloruro ferroso e le dimensioni della cella elementare dei cloruri di magnesio, cobalto e nichelio⁽²⁾. Di queste celle assai simili sono state esposte allora due rappresentazioni, una esagonale contenente 36 molecole e aventi le dimensioni:

MgCl ₂	a = 7.18 Å	c = 17.60 Å	c/a = 2.45
CoCl ₂	a = 7.08 »	c = 17.35 »	c/a = 2.45
NiCl ₂	a = 7.07 »	c = 17.32 »	c/a = 2.45

(1) G. BRUNI e A. FERRARI. Questi « Rendiconti » (6^a), IV (1926), 10.

(2) Questi « Rendiconti » (6^a), VI (1927) 56.

TABELLA II.

Cloruro di cobalto		Cloruro ferroso		Cloruro manganoso		Indici $b_1 b_2 b_3$ rom- boedrici	Costante reticolare di		
$d = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$	Intensità	$d = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$	Intensità	$d = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$	Intensità		CoCl ₂	FeCl ₂	MnCl ₂
5.510	f	5.705	f	5.705	f	0 0 1	6.75	6.99	6.87
						1 1 1	6.75	6.99	7.06
2.935	d	3.041	dd	—	—	$\bar{1}$ 1 1	6.88	7.14	—
2.452	f	2.525	f	2.562	f	0 2 2	6.94	7.15	7.175
						0 1 3	7.03	7.15	—
2.027	d	2.061	d	—	—	2 3 3	7.03	7.15	—
						1 1 $\bar{2}$	7.03	7.15	—
				—	—	0 0 3	7.03	7.15	—
1.908	d	1.947	d	1.391	d	3 3 3	7.03	7.15	7.175
				—	—	0 2 3	7.03	7.15	—
				—	—	1 3 3	7.03	7.15	—
				—	—	$\bar{1}$ 2 2	7.03	7.15	—
1.755	ff	1.786	ff	1.834	md	0 $\bar{2}$ 2	7.03	7.15	7.18
				1.796	f	2 2 4	7.03	7.15	7.19
1.675	m	1.708	d	—	—	2 3 4	7.03	7.15	—
						1 $\bar{2}$ 2	7.03	7.15	—
1.434	f	1.458	mf	1.495	m	0 0 4	7.03	7.15	7.20
				1.454	m	4 4 4	7.03	7.15	7.20
						0 3 4	7.035	7.15	—
1.393	d	1.416	d	—	—	0 2 $\bar{3}$	7.035	7.15	—
						$\bar{1}$ 3 3	7.035	7.15	—
—	—	—	—	1.284	d	0 4 4	—	—	7.20
						4 4 6	7.05	7.15	—
1.147	d	1.160	d	—	—	2 2 6	7.05	7.15	—
						0 $\bar{2}$ 4	7.05	7.15	—
1.115	f	1.130	f	1.159	mf	$\bar{2}$ 2 4	7.05	7.15	7.20
				1.140	f	2 4 6	7.05	7.15	7.20
1.018	f	1.033	f	1.061	m	2 2 $\bar{4}$	7.05	7.16	7.20
				1.034	f	4 6 6	7.05	7.16	7.21

N. B. — Tutte le linee osservate in questi 3 fotogrammi corrispondono alla radiazione K α .

ed una cubica (cubica però solo nella forma geometrica mancando internamente nella disposizione degli atomi questa simmetria) con 16 molecole avente le seguenti costanti:

$$\text{MgCl}_2 \quad a = 10.16 \text{ \AA}$$

$$\text{CoCl}_2 \quad a = 10.02 \text{ »}$$

$$\text{NiCl}_2 \quad a = 10.00 \text{ »}$$

I fotogrammi di questi tre cloruri e di quello ferroso e manganoso, le cui dimensioni della cella non erano allora state studiate, si possono ordinare anche in una cella più piccola a forma di romboedro che si ottiene da quella cubica come è mostrato dalla fig. 2. Gli otto vertici del romboedro sono: i centri delle facce e due vertici opposti del cubo.

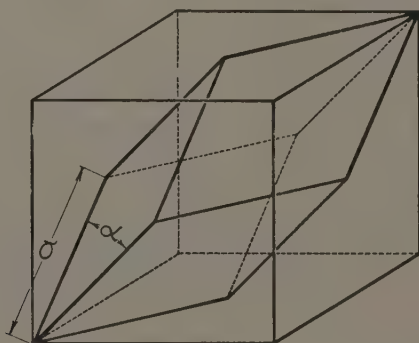


Fig. 2.

Nella tabella II sono riportate le distanze reticolari e le intensità delle linee osservate nei fotogrammi di Debye dei cloruri cobaltoso, ferroso e manganoso ottenuti con anticatodo di ferro. Le ultime colonne danno gli indici delle diverse linee e la costante reticolare a della cella romboedrica, rappresentata dalla fig. 2, dei tre cloruri.

Il valore di questa costante è:

CoCl_2	$a = 7.050 \pm 0.01 \text{ \AA}$	$\alpha = 60^\circ$
FeCl_2	$a = 7.155 \pm 0.01 \text{ »}$	$\alpha = 60^\circ$
MnCl_2	$a = 7.200 \pm 0.01 \text{ »}$	$\alpha = 61^\circ 25' (1)$

(1) In relazione al fatto che l'angolo del romboedro del cloruro manganoso è diverso da 60° , si osserva nella tabella II che molte delle linee dei fotogrammi dei due primi cloruri sono sdoppiate in quelle del terzo. Mal prestandosi i diagrammi di Hull all'ordi-

I volumi delle celle e le densità che si calcolano sono:

$$\text{CoCl}_2 \quad V = 247.48 \text{ \AA}^3 \quad \text{dens.} = \frac{4 \times 129.89 \times 1.66 \text{ gr.}^{-24}}{247.48 \text{ cm.}^{-24}} = 3.485$$

$$\text{FeCl}_2 \quad V = 258.60 \text{ \AA}^3 \quad \text{dens.} = \frac{4 \times 126.76 \times 1.66 \text{ gr.}^{-24}}{258.60 \text{ cm.}^{-24}} = 3.251$$

$$\text{MnCl}_2 \quad V = 272.22 \text{ \AA}^3 \quad \text{dens.} = \frac{4 \times 125.85 \times 1.66 \text{ gr.}^{-24}}{272.22 \text{ cm.}^{-24}} = 3.069$$

namento dei fotogrammi di questi cloruri ci siamo serviti di queste doppiette per il calcolo del valore di α del cloruro manganoso. I fotogrammi dei cloruri cobaltoso e ferroso sono di facile ordinamento perchè pseudocubici. Seguendo lo spostamento graduale e lo sdoppiamento progressivo delle linee nei fotogrammi delle miscele come è messo in evidenza dal diagramma della fig. 3 è facile individuare gli indici delle linee del fotogramma del cloruro manganoso anche senza conoscere l'angolo del romboedro. Il calcolo di α è stato fatto nel modo seguente. Prendendo due linee ad indici noti si può scrivere:

$$d_{100} = d_{h_1 h_2 h_3} \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 - 2(h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_1 h_3) \cos \Sigma}$$

$$d_{100} = d_{h'_1 h'_2 h'_3} \sqrt{h_1'^2 + h_2'^2 + h_3'^2 - 2(h'_1 h'_2 + h_2' h'_3 + h_1' h'_3) \cos \Sigma}$$

Eguagliando i secondi membri si ha una equazione con la sola incognita $\cos \Sigma$ che si può così ricavare.

Fatto questo calcolo su tre doppiette del cloruro manganoso si ricavano i valori di $\cos \alpha$: 0.3235, 0.3240, 0.3245 abbastanza concordanti. Assumendo come media 0.324 si calcola dalla formula $\cos \Sigma = \frac{\cos \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$ il valore di $\alpha = 61^\circ.25'$. Col valore 0.324 abbiamo calcolato le costanti a del cloruro manganoso che compaiono nell'ultima colonna della tabella II.

Noto il valore dell'angolo α del romboedro ricavato nel modo sopra detto, si ricava il rapporto assiale applicando la formula:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\frac{3}{4} + \left(\frac{c}{a}\right)^2}{3 + \left(\frac{c}{a}\right)^2}}$$

I valori dei rapporti assiali dei cloruri ferroso e manganoso risultano maggiori di quelli calcolati precedentemente dai fotogrammi di Laue, che erano rispettivamente 2.40 e 2.33. Tuttavia si mantiene ancora esatta la proprietà già osservata che il rapporto assiale diminuisce con l'aumentare del raggio dell'ione positivo.

Volendo dare alla cella elementare dei tre cloruri la rappresentazione esagonale come già è stato fatto per i cloruri di magnesio, cobalto e nichelio si hanno i valori:

CoCl ₂	$a = 7.050 \text{ \AA}$	$c = 17.27 \text{ \AA}$	$c/a = 2.45$
FeCl ₂	$a = 7.155 \text{ »}$	$c = 17.52 \text{ »}$	$c/a = 2.45$
MnCl ₂	$a = 7.350 \text{ »}$	$c = 17.45 \text{ »}$	$c/a = 2.37.$

Per i cloruri di ferro e di cobalto si possono dare anche le dimensioni della cella pseudocubica:

CoCl ₂	$a = 9.98 \text{ \AA}$
FeCl ₂	$a = 10.12 \text{ »}$

Il lato a del romboedro varia regolarmente coll'aumentare del contenuto in ferro come si vede dai seguenti dati.

CoCl_2	$a = 7.05 \text{ \AA}$
$8 \text{ CoCl}_2 - 2 \text{ FeCl}_2$	$a = 7.075 \text{ »}$
$6 \text{ CoCl}_2 - 4 \text{ FeCl}_2$	$a = 7.095 \text{ »}$
$4 \text{ CoCl}_2 - 6 \text{ FeCl}_2$	$a = 7.115 \text{ »}$
$2 \text{ CoCl}_2 - 8 \text{ FeCl}_2$	$a = 7.135 \text{ »}$
FeCl_2	$a = 7.155 \text{ »}$

Nelle miscele di cloruro ferroso e di cloruro manganoso, oltre allo spostamento delle linee, si osserva per molte di esse, fin dalla prima miscela esaminata, uno sdoppiamento. Questo è dovuto come abbiamo detto al fatto che la cella elementare di queste soluzioni solide, come quella del cloruro manganoso puro, è un romboedro che presenta un angolo diverso da 60° . Lo sdoppiamento delle linee cresce col contenuto in manganese come era facile intuire. Le celle elementari delle miscele fatte nelle proporzioni del sistema precedente hanno le seguenti caratteristiche:

$8 \text{ FeCl}_2 - 2 \text{ MnCl}_2$	$a = 7.16 \text{ \AA}$	$\alpha = 60^\circ 17'$	$c/a = 2.434$
$6 \text{ FeCl}_2 - 4 \text{ MnCl}_2$	$a = 7.17 \text{ »}$	$\alpha = 60^\circ 34'$	$c/a = 2.419$
$4 \text{ FeCl}_2 - 6 \text{ MnCl}_2$	$a = 7.18 \text{ »}$	$\alpha = 60^\circ 51'$	$c/a = 2.404$
$2 \text{ FeCl}_2 - 8 \text{ MnCl}_2$	$a = 7.19 \text{ »}$	$\alpha = 61^\circ 8'$	$c/a = 2.387$
MnCl_2	$a = 7.20 \text{ »}$	$\alpha = 61^\circ 25'$	$c/a = 2.370$

Le variazioni della cella nei due sistemi conferma nel modo più evidente la completa miscibilità del cloruro ferroso nei cloruri di manganese e di cobalto, essa è quasi lineare e segue abbastanza bene quella dei punti di fusione. Si noti che la temperatura di fusione diminuisce con l'aumentare del volume della cella elementare passando dal cloruro di cobalto a quello di manganese attraverso il cloruro ferroso e le miscele. La cella ha infatti il volume minimo nel cloruro di cobalto e massimo in quello di manganese.

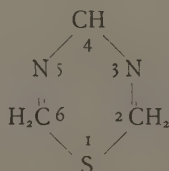
Chimica organica. — *Una nuova classe di basi organiche solforate*⁽¹⁾. Nota di T. G. LEVI, presentata⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

In una precedente Nota sulla 1.3.5 ditioazina pubblicata in questi « Rendiconti »⁽³⁾ è stato riferito sulla reazione delle aldeidi grasse con ammoniaca e idrogeno solforato e delle aldeidi grasse con amine grasse e idrogeno solforato; si formano rispettivamente le tialdine e le tialdine alchilate (metilformotialdina, metilacetotialdina, ecc.).

In questo caso cioè il prodotto di condensazione contiene una molecola di base per due atomi di zolfo.

Con amine aromatiche, formaldeide e idrogeno solforato la reazione procede in modo diverso e che non era stato prima d'ora segnalato ma in un certo senso parallelo al precedente. Sia facendo gorgogliare idrogeno solforato in aldeide formica in soluzione idroalcoolica e aggiungendovi le amine pure diluite con alcool, sia saturando le amine in soluzione alcoolica di idrogeno solforato e trattando poi con formaldeide idroalcoolica, si ottengono delle basi che contengono due molecole di base per un atomo di zolfo.

Dato il parallelismo della reazione con quelle delle ammine grasse la spiegazione più plausibile sembrerebbe quella che si trattasse anche in questo caso della formazione di un anello eterociclico esaatomico; i nuovi composti costituirebbero così una nuova classe di basi eterocicliche per le quali si può ritenere che il termine fondamentale, che non è noto, sia la tiodiazina 1.3.5 che avrebbe la seguente formula:

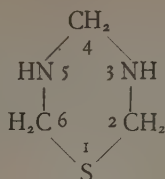


(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio Ricerche Chimiche e Chimico-Fisiche della Società Italiana Pirelli.

(2) Nella seduta del 7 aprile 1929.

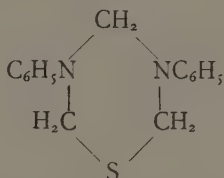
(3) Questi « Rendiconti », vol. IX, fasc. 5, ser. 6^a, pp. 424 e segg.

o il suo derivato idrogenato 3.5-diidro-1.3.5 tiodiazina:



Alle basi ora isolate spetterebbero in tal caso le seguenti formule di struttura:

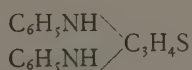
3.5-difenil-1.3.5 diidrotiodiazina



per la base che si ottiene dall'anilina ed analogamente per le basi derivate da altre amine aromatiche.

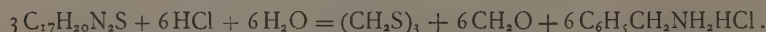
Sta però il fatto che non ho riscontrato in queste basi i caratteri di azoto terziario che sono invece assai netti nella metilformotialdina e nella metilacetotialdina che danno jodometilati caratteristici. — Non ho difatti potuto ottenere i corrispondenti jodometilati delle sopradette nuove basi epperò le ho esaminate per le reazioni caratteristiche dei NH. — Esse reagiscono con acido nitroso dando degli olii rossi, nel caso delle basi dall'anilina e dalla paratoluidina e un prodotto solido bianco paglierino a p. f. 75° nel caso della base dalla benzilamina. — Quest'ultimo prodotto è un nitrosoderivato doppiamente nitrosilico come risulta dall'analisi, nè siamo d'altra parte in presenza di un paranitrosoderivato dato il colore bianco del nitroso composto ottenuto che permane anche allo stato fuso e di soluzione. Altre prove tendenti a confermare il carattere di azoto secondario di queste basi non hanno dato ulteriori risultati in quanto la base dalla benzilamina con anidride acetica o cloruri di acidi resinifica assai rapidamente a prodotti estremamente solubili nei solventi, mentre le altre basi danno prodotti di alterazione non ossigenati che sono gli stessi di quelli che si ottengono trattando con acidi le basi dalla anilina e dalla paratoluidina, prodotti dei quali viene riferito più avanti.

Riassumendo, non appaiono probabili le formule delle tiodiazine e l'unico schema accettabile sembra per ora essere il seguente :

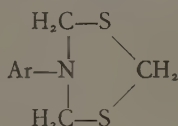


Mi riservo frattanto di approfondire ulteriormente la struttura di queste basi e di riferirne in una prossima Nota.

Scaldando a ricadere con acido cloridrico concentrato le basi sopradette, per es. quella derivata dalla benzilamina, ha luogo formazione di tritioformaldeide, formaldeide e cloridrato di benzilamina secondo la seguente:

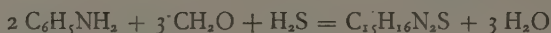


Con questo non è da escludere che contemporaneamente alle basi suaccennate si formino in particolari condizioni di reazione le rispettive formotialdine arilate (come fenilformotialdina) del tipo

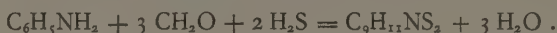


che non sono note, ma sta il fatto che salvo che con il 2-amino-1.4-xilolo (paraxilidina) io non le ho trovate presenti nei prodotti di reazione.

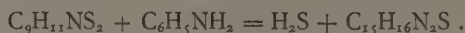
Le reazioni di formazione delle nuove basi sono del tipo della seguente:



quelle di formazione delle arilformotialdine sono del tipo:



Le prime si possono anche considerare ottenute dalle seconde per perdita di idrogeno solforato mentre si fissa una nuova molecola di base e cioè:



Le nuove basi ottenute sono le seguenti qui sotto descritte:

Base $\text{C}_{17}\text{H}_{16}\text{N}_2\text{S}$ *dall'anilina*

La ho preparata aggiungendo a freddo una soluzione alcoolica di anilina ad una soluzione idroalcoolica di aldeide formica al 20 % in cui era stato fatto passare idrogeno solforato. La reazione ha luogo con riscaldamento e si separa quasi subito un prodotto pecioso che lasciato a sè 24 ore passa a poltiglia cristallina. Il prodotto greggio di reazione si purifica cristallizzando ripetutamente dall'alcool. Dopo 2 o 3 cristallizzazioni il prodotto è puro e fonde a 107°; la base è solubile nei comuni solventi organici ed estremamente solubile già a freddo in cloroformio e in piridina.

All'analisi:

Trovato:	Calcolato per $C_{15}H_{16}N_2S$:
C = 70.12 %	C = 70.35 %
H = 6.29 %	H = 6.25 %
N = 11.48 %; 11.37 %	N = 10.97 %

il peso molecolare per crioscopia in benzolo ha dato:

peso molecolare: trovato: 252.8 calcolato: 256.

Base $G_7H_{20}N_2S$ dalla paratoluidina

Si prepara in modo del tutto analogo alla base precedente da aldeide formica in soluzione idroalcoolica contenente idrogeno solforato e soluzione alcoolica di paratoluidina; si separa come poltiglia cristallina che dopo molte cristallizzazioni dall'alcool fonde a 103° .

La base è solubile nei solventi ordinari; solubilissima in cloroformio e in piridina già a freddo.

All'analisi:

Trovato:	Calcolato per $C_{17}H_{20}N_2S$:
C = 71.51 %	C = 71.80 %
H = 7.30 %	H = 7.00 %
N = 10.20 %	N = 9.94 %

La determinazione del peso molecolare per crioscopia in benzolo ha dato:

peso molecolare: trovato: 280 calcolato: 284.

Base $G_7H_{20}N_2S$ dalla benzilamina

Si prepara in modo analogo alle precedenti da aldeide formica, idrogeno solforato e benzilamina. Dopo cristallizzazione più volte ripetuta dall'alcool fonde a 93° ; è solubile nei solventi ordinari e solubilissima in cloroformio e in piridina già a freddo.

All'analisi:

Trovato:	Calcolato per $C_{17}H_{20}N_2S$:
C = 71.50 %	C = 71.80 %
H = 7.11 %	H = 7.00 %
N = 9.98 %	N = 9.94 %
S = 11.86 %	S = 11.26 %

La determinazione del peso molecolare ha dato:

peso molecolare: trovato: 274; 280 calcolato: 284.

Il cloridrato della base ottenuto sia da soluzione eterea della base e acido cloridrico gassoso, sia da soluzione alcoolica della base e acido cloridrico concentrato acquoso, è stabile e fonde dopo cristallizzazione dall'alcool a 144°. Le basi precedentemente descritte non danno invece cloridrati ma dei prodotti di alterazione, uno per la base dall'anilina ed uno per la base dalla paratoluidina, che sono gli stessi qualunque sia l'acido adoperato.

All'analisi:

Cloro trovato: 20.22 %; 19.78 %.

Calcolato per $C_{17}H_{26}N_2S \cdot 2HCl$: Cl = 19.9 %.

Nitrosoderivato della base della benzilamina: Trattando la base pura a p. f. 93° C. disciolta in acido cloridrico diluito con nitrito sodico in soluzione acquosa ho ottenuto un nitrosoderivato che dopo 3 a 4 cristallizzazioni dall'etere etilico e decolorazione con nero fonde a 75°, 5 e si presenta come prodotto bianco leggermente paglierino solubile in alcool poco solubile in etere etilico. — All'analisi ha dato:

C = 59.53 ; 59.64 ; 59.31 %
H = 5.26 ; 5.35 ; 5.39 %
N = 16.83 %

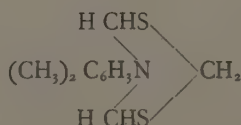
calcolato per $C_{17}H_{18}N_4O_2S$

C = 59.65 %
H = 5.27 %
N = 16.37 %
S = 9.37 %

peso molecolare trovato per crioscopia in benzolo 335

peso molecolare calcolato: = 342

Colle xilidine, mentre dal 4 amino 1.3 xilolo (metaxilidina asimmetrica) ho ottenuto un prodotto pecioso dal quale non ho potuto separare prodotti solidi, dal 2 amino 1.4 xilolo (paraxilidina) ho ottenuto la 1.4 xililformotialdina. Ciò confermerebbe il fatto che seppure colle altre basi non sono riuscito ad ottenere le formotialdine arilate pur tuttavia è prevedibile che esse possano formarsi in particolari condizioni di reazione. Dalla paraxilidina non ho dunque ottenuto una base $C_{19}H_{24}N_2Se$ ma un prodotto della formula:



La 1.4 xililformotialdina dalla paraxilidina si separa dalla pece di reazione per trattamento con etere; si purifica per cristallizzazione dall'etere e fonde a 89-90°.

All'analisi:

Trovato:	Calcolato per $C_{11}H_{15}NS_2$:
C = 58.12 %; 58.65 %	C = 58.67 %
H = 6.60 %; 6.61 %	H = 6.66 %

La determinazione di peso molecolare per crioscopia in benzolo ha dato:

peso molecolare: trovato: 220.5 calcolato: 225.

La determinazione di peso molecolare per ebullioscopia in benzolo ha dato:

peso molecolare trovato: 229.

Ho anche preparato alcune delle corrispondenti basi seleniate che sono in tutto analoghe alle corrispondenti solforate precedentemente descritte; esse sono state ottenute da soluzione idroalcoolica di formaldeide in cui era stato fatto gorgogliare idrogeno seleniato e addizionata alla soluzione alcoolica dell'ammina. Come per le corrispondenti basi solforate, coi derivati seleniati a seconda della quantità di idrogeno seleniato che si fa passare nella formaldeide, si formano le nuove basi seleniate o altri prodotti che non sono però le rispettive formoselenaldine arilate, le nuove basi sia solforate che seleniate si ottengono non insistendo troppo a lungo nel passaggio di idrogeno seleniato o solforato; continuando a far passare idrogeno seleniato o solforato si ottengono altri prodotti sui quali ritornerò in altro lavoro.

Le basi seleniate che ho ottenuto sono le seguenti qui sotto descritte:

Base $C_{15}H_{16}N_2Se$ dall'anilina: si ottiene da soluzione alcoolica di anilina nella soluzione idroalcoolica di formaldeide in cui è stato fatto passare idrogeno seleniato. La base è solubile in alcool e solubilissima in etere; fonde dopo purificazione a 116° ed all'analisi ha dato:

Trovato:	Calcolato per $C_{15}H_{16}N_2Se$:
C = 59.29 %	C = 59.37 %
H = 5.23 %	H = 5.27 %

Il peso molecolare determinato per crioscopia in benzolo ha dato:

peso molecolare: trovato: 303.8 calcolato: 303.2.

Base $C_{17}H_{20}N_2Se$ dalla paratoluidina: si ottiene in modo perfettamente analogo alla precedente; fonde a 114°, è poco solubile in etere, solubile in alcool.

All'analisi:

Trovato:	Calcolato per $C_{17}H_{20}N_2Se$:
C = 61.25 %	C = 61.60 %
H = 6.16 %	H = 6.04 %

Il peso molecolare determinato per crioscopia in benzolo ha dato:

peso molecolare: trovato: 327 calcolato: 331.2.

Base $C_{17}H_{20}N_2Se$ dalla *benzilamina*: analogamente alle precedenti; fonde a 123° , poco solubile in alcool e solubile in etere.

All'analisi:

Trovato:	Calcolato per $C_{17}H_{20}N_2Se$:
C = 61.31 %	C = 61.60 %
H = 5.95 %	H = 6.04 %

Base $C_{19}H_{24}N_2Se$ dalla *paraxilidina*:

Dalla paraxilidina ho ottenuto la base $C_{19}H_{24}N_2Se$ mentre dalla stessa xilidina para con idrogeno solforato e formaldeide avevo ottenuto la 1.4 xilil formotialdina.

Questa base fonde a 100° dopo ripetuta cristallizzazione dall'acetone.

All'analisi:

Trovato:	Calcolato per $C_{19}H_{24}N_2Se$:
C = 62.85 %; 62.64 %	C = 63.47 %
H = 6.49 %	H = 6.68 %
N = 7.73 %	N = 7.79 %

In una prossima Nota mi riservo di riesaminare la struttura di queste basi, nonchè i prodotti di condensazione delle diammine con aldeide formica di idrogeno solforato.

Chimica. — *Triseleniuro, solfodiseleniuro e selendisolfuro dietilici.* Nota di G. R. LEVI e A. BARONI, presentata dal Socio G. BRUNI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia. — *Nuove osservazioni sull' Oligocene italiano.* Nota di G. DAL PIAZ, presentata dal Socio C. F. PARONA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Cristallografia. — *La struttura cristallina dei bromuri di metalli bivalenti,* Nota di A. FERRARI e F. GIORGI, presentata dal Socio G. BRUNI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *Osservazioni sui processi regolativi in relazione allo sviluppo degli emisferi cerebrali negli embrioni di Anuri*⁽¹⁾.
Nota II di ALDO SPIRITO, presentata⁽²⁾ dal Socio F. SILVESTRI.

Facendo seguito a un mio lavoro precedente⁽³⁾ intendo esporre in questa Nota alcuni risultati di tutta una serie di operazioni eseguite su embrioni di *Rana esculenta* e di *Bufo vulgaris* allo stadio di bottone codale e di vescicola prosencefalica. Il tipo d'operazione, consistente nel togliere in un primo tempo la regione destra dell'encefalo precordale (vescicola ottica inclusa), era stato per me oggetto di particolare attenzione allo scopo di ottenere determinati processi, primo tra i quali la formazione di una nuova parete cerebrale, senza che la parete rimasta alterasse la sua forma e la sua posizione. Con l'operazione da me ideata (vedi Nota precedente) mi è stato possibile ottenere la formazione della sopraddetta parete, che, per le nuove condizioni derivate dalla tecnica seguita, si presenta, allo studio delle sezioni, ampiamente estroflessa.

Avendo fissati gli embrioni in vari stadi di sviluppo ho potuto coordinare le diverse fasi dei processi rigenerativi e regolativi avvenuti nella zona operata, e fra essi, in particolar modo, di quelli verificatisi nella regione anteriore del prosencefalo.

La fig. 1 rappresenta una sezione trasversale interessante la parte anteriore di un embrione di *Rana esculenta*, fissato due giorni dopo l'operazione. La parete cerebrale residua di sinistra (nella microfotografia, a destra) è affatto normale per la posizione e per la forma: vi si scorgono già le due aree di fibre, la più cospicua in prossimità dell'organo olfattorio. Dal lato operato, invece, oltre alla mancanza del sopraddetto organo si può notare la parete destra rigenerata e fortemente estroflessa, sì che, pur nella deficienza di alcune parti, non vi è evidente asimmetria esterna nella regione in questione.

La parete rigenerata dell'encefalo si differenzia nettamente dalla parete residua per la diversità di spessore: in essa si possono osservare cellule affatto normali a caratteri eguali a quelli della parete non lesa. Le sezioni anteriori a quella descritta presentano le stesse disposizioni, le quali

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 21 aprile 1929.

(3) «Rend. R. Acc. dei Lincei», 1928, vol. 8, pp. 429-430.

a loro volta si riscontrano in molti altri embrioni fissati allo stesso stadio di sviluppo. Tuttavia qualche caso mostra particolarità completamente differenti, poichè se la parete residua è rimasta normale per forma e posizione, la parete rigenerata, non sottile come nei casi suddetti, è piatta e posta su di un piano longitudinale mediano. Ciò è derivato, evidentemente, da un riassorbimento non adeguato del tuorlo apposto sulla ferita, in relazione ai vari momenti del processo rigenerativo. Molte operazioni eseguite su embrioni di *Bufo vulgaris*, in uno stadio un po' anteriore a quello usato per gli embrioni di *Rana esculenta*, hanno confermato queste casuali divergenze dall'andamento predominante.

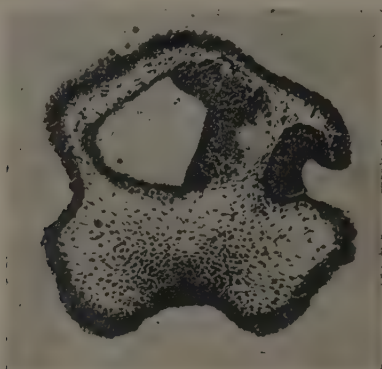


Fig. 1.

Microfotografia di una sezione trasversale interessante la parte anteriore dell'encefalo in un embrione di *Rana esculenta*. (Obiettivo Zeiss, 8 mm. apocr.).

La figura 2 rappresenta una sezione trasversale cefalica, interessante la zona degli emisferi cerebrali, di un embrione di *Rana esculenta*, fissato quattro giorni dopo l'operazione. L'emisfero sinistro (nella microfotografia, a destra), in quanto derivato dalla parte anteriore della parete residua, si presenta normale per forma e costituzione. A questo emisfero fa riscontro sul lato operato una formazione evidentemente derivata dalla nuova parete, e regolatasi in tal maniera da poter essere paragonata a un emisfero cerebrale. L'apice di essa giunge alla stessa altezza dell'emisfero normale sinistro.

L'esame delle sezioni fa rilevare numerosi cariocinesi nella parte neoformata.

Il caso descritto è simile ad altri, tuttavia la serie dei preparati ne comprende qualcuno che mostra la parte anteriore dell'encefalo affatto simile per forma e costituzione a un unico emisfero cerebrale. A destra, nessuna traccia di neoformazioni simili a quelle sopradescritte (ciò è avvenuto con la massima fre-

quenza negli embrioni di *Bufo vulgaris*)⁽¹⁾. Simili casi si possono spiegare facilmente quando si pensi che a volte, come ho notato sopra, la parete rigenerata non si estroflette lateralmente, ma viene a formare una chiusura perpendicolare, senza una superficie rostrale tale da permettere, in un secondo tempo, una qualsiasi formazione in quel senso. Così la parte anteriore progredisce a guisa di un tutto unico regolantesi successivamente come un solo e perfetto emisfero.

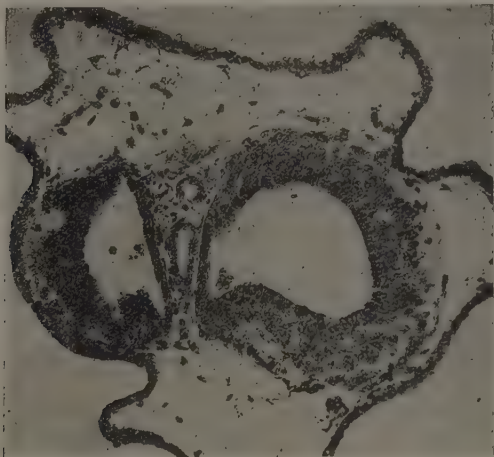


Fig. 2.

Microfotografia di una sezione trasversale interessante la zona degli emisferi cerebrali in un embrione di *Rana esculenta*. (Obiettivo Leitz, 6a),

In conclusione, da quanto ho sopra esposto risulta che in *Rana esculenta* allo stadio di vescicola prosencefalica, si può ottenere, mediante speciali condizioni realizzate dal mio nuovo tipo di operazione, una parete cerebrale più o meno cospicua con successive regolazioni di essa.

Queste regolazioni possono essere tali da indurre la formazione di parti encefaliche paragonabili agli emisferi, a spese delle pareti rigenerate e quindi non predeterminate a dare tali parti.

Si è anche accennato a risultati negativi ottenuti nella serie delle esperienze di fronte a quelli ormai assolutamente positivi, ma le mie ricerche hanno dato la possibilità di spiegarli logicamente insieme a quelli ottenuti dagli autori che mi hanno preceduto.

Le mie ricerche lasciano inoltre pensare che nella genesi degli emisferi cerebrali intervengano determinate complesse azioni biologico-meccaniche anche indipendentemente da determinazioni troppo precoci.

(1) Noto che in *Bufo vulgaris* i processi rigenerativi sono di minore entità che in *Rana esculenta*, almeno nello stadio e nella regione da me operata.

Fisiologia. — *Ulteriori ricerche sull'azione di alcuni alcaloidi sui leucociti isolati dall'organismo.* Nota di C. FORTI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Per vedere come agissero su singole cellule isolate dal corpo di animali superiori sostanze che manifestano la loro azione sul complessivo organismo mediante fenomeni di eccitamento e di depressione dei centri nervosi, iniziai tre anni fa ricerche sull'azione esercitata in vitro sui leucociti dal cloridrato di morfina e dal nitrato di stricnina. Nessuna ricerca avevo trovato in proposito nella letteratura ed i fenomeni di paralisi delle cellule seguiti per adatte concentrazioni della sostanza da un ritorno dell'attività ameboide, non appena si allontanava il veleno, furono così netti, specialmente per l'ultima sostanza, che mi indussero a studiare la questione più particolarmente e ad estendere le osservazioni ad altri alcaloidi ed ai loro sali solubili ⁽²⁾.

Da tali ricerche risultò che le sostanze studiate, a dosi opportune, agivano da prima, per un periodo sempre molto breve, eccitando l'attività dei leucociti, in secondo tempo paralizzandola, e provocando solo più tardi la morte della cellula. L'intensità e la durata dell'eccitamento, che per tutti gli alcaloidi è assai breve, e la possibilità del ritorno all'attività dopo un tempo più o meno lungo di immobilizzazione, variava assai non solo con la dose impiegata, ma più ancora da sostanza a sostanza. Usai in tutti questi esperimenti soluzioni a reazione neutra o debolmente alcalina in modo da escludere azioni dannose derivanti dalla reazione del mezzo. Era inoltre sufficiente far agire i veleni in concentrazioni assai deboli per ottenere gli effetti accennati, e poichè in altre ricerche ⁽³⁾ ho dimostrato come i leucociti sopravvivenuti in sangue diluito con soluzioni di NaCl non risentano di variazioni non molto forti della concentrazione molecolare delle soluzioni stesse, si può escludere ogni influenza anche di questo fattore e concludere per un'azione propria degli alcaloidi e dei loro sali. È presumibile che queste sostanze anche in vivo, come in vitro, si comportino in modo diverso non solo per quanto riguarda i loro effetti di eccitamento e di paralisi, ma anche per quanto riguarda la scomparsa delle lesioni prodotte negli elementi cellulari su cui agiscono elettivamente.

(1) Nella seduta del 7 aprile 1929.

(2) C. FORTI, *L'azione dei sali di chinina, stricnina, morfina e della caffeina sui leucociti.* « Archivio di Farmacologia Sperimentale e Scienze Affini », anno XXVI, 1926; *L'azione eccitante degli alcool e degli alcaloidi sull'attività ameboide.* « Bollettino della Soc. Ital. di Biol. Sper. », vol. II, 1927.

(3) Sulla resistenza dei leucociti dell'uomo fatti sopravvivere nel sangue puro o diluito con soluzioni ipo ed ipertoniche di NaCl. « Bollettino della Società Italiana di Biologia Sperimentale », vol. IV, 1929.

Nelle presenti ricerche ⁽¹⁾ si studiò prima di tutto l'azione esplicata sui leucociti dalle soluzioni a varia concentrazione di cocaina, cloridrato di cocaina, novocaina, tutocaina e nicotina. A queste sostanze diluite in una soluzione isotonica di NaCl e opportunamente sterilizzate si aggiungeva sangue di *Bufo vulgaris*, nella proporzione di una parte di questo su dieci di soluzione; i preparati si allestivano nelle pipette da leucociti, col metodo già adoperato nelle ricerche precedenti. Per ogni gruppo di osservazioni, cioè ad ogni prelevamento di sangue si eseguiva un controllo aggiungendo ad una parte del sangue stesso dieci parti della soluzione fisiologica isotonica. L'azione esplicata sull'attività ameboide dei leucociti dalle sostanze studiate si può desumere dalla Tabella I.

Osservazioni eseguite con soluzioni di queste cinque sostanze aggiunte al sangue appena prelevato da un unico animale, dettero risultati identici a quelli suesposti, si deve dunque escludere che la diversa rapidità con cui avvenne l'arresto dei movimenti ameboidi per le varie sostanze fosse in rapporto con condizioni individuali dei leucociti.

La cocaina, il cloridrato di cocaina, la novocaina, la tutocaina, e la nicotina, aggiunte alla soluzione fisiologica in cui si fanno sopravvivere i leucociti, ne fanno dunque diminuire più o meno rapidamente l'attività ameboide, fino a produrre a dosi sufficienti l'arresto completo dei movimenti, e più tardi, come dimostrano le modificazioni morfologiche già evidenti anche nei preparati a fresco, la necrosi della cellula. Anche tenendo conto della concentrazione molecolare che questi veleni avevano nelle soluzioni studiate (essendo il peso molecolare per la cocaina 303.3, per il cloridrato di cocaina 339.6, per la novocaina 272.6, per la tutocaina 286.6 e per la nicotina 162.2), si può affermare che il cloridrato di cocaina e la tutocaina sono assai più tossiche, per i leucociti, della nicotina e della novocaina, quest'ultima parrebbe la meno tossica fra le sostanze studiate. Il cloridrato di cocaina avrebbe una tossicità maggiore della cocaina (base).

Per il cloridrato di cocaina, per la novocaina e per la tutocaina si cercò pure di ottenere un ritorno dell'attività ameboide dei corpuscoli bianchi, completamente immobilizzati dall'azione del veleno, diluendo un centimetro cubico della sospensione di sangue nella soluzione contenente l'alcaloide in esame, con sei centimetri cubici di cloruro di sodio a 0.7 %. Nonostante l'azione nociva che anche quest'ultima soluzione esplica sul protoplasma cellulare i risultati ottenuti furono i seguenti:

I leucociti immobilizzati al secondo giorno dalla soluzione di cloridrato di cocaina 1:250 presentarono nei preparati diluiti con NaCl al 0.7 %, al 3° giorno, movimenti ameboidi lenti del 30 % delle forme, al 4° nel 70 %, ed al 5° ancora nel 10 %; mentre nella soluzione di cloridrato di cocaina 1:250, se non si eseguiva la diluizione, già al 4°

(1) In alcune delle osservazioni fui coadiuvata dai sigg. Simeoni P. e Batolomucci D. che svolsero sull'argomento la loro tesi di laurea.

TABELLA I.

Soluzioni aggiunte al sangue	Percentuale approssimativa dei leucociti con movimenti anebdoli al giorno:														Temperatura a cui furono tenuti ed osservati i preparati
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	
Cocaina 1:1000	—	90 % 66 %	88 % 60 %	82 % 50 %	67 % 40 %	50 % 25 % 95 %	34 % 20 % 76 %	50 % 0 70 %	35 % — 84 %	18 %	14 %	10 % — 30 %	0 —	— 25 %	10°-12° C.
» 1:700	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	9°-12° C.
Na Cl 0,7 % (Controllo) .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	13°-15° C.
Cloridrato di cocaina 1:1000	—	98 % 30 % 70 %	87 % 20 % 40 %	50 % 0 0	45 % — —	40 % — —	42 % — —	0 — —	— — —	— — —	— — —	— — —	— — —	— — —	13°-15° C.
» » 1:500	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	15°-18° C.
» » 1:400	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
» » 1:250	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Na Cl 0,7 % (Controllo) .	75 %	78 %	85 %	80 %	90 %	—	—	70 %	—	—	—	—	—	—	
Novocaina 1:500	—	97 % 75 %	75 % 50 %	66 % 30 %	85 % 0	82 % —	60 % —	33 % —	20 % —	10 %	0 — 20 %	— — —	— — —	— — —	
» » 1:250	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Na Cl 0,7 % (Controllo) .	—	60 %	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Tutocaina 1:1000	65 % 54 %	55 % 25 %	48 % 0	0 —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	
» » 1:500	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
» » 1:300	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
» » 1:250	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Na Cl 0,7 % (Controllo) .	—	—	—	—	85 %	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Nicotina 1:4000	—	95 % 72 % 61 %	— 70 % 20 %	71 % 63 % 23 %	56 % 49 % 19 %	34 % 30 % 4 %	27 % 18 % 0	9 % 0 —	0 — —	— — —	— — —	— — —	— — —	— — —	
» » 1:2000	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
» » 1:1000	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
» » 1:500	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Controllo	—	95 %	87 %	78 %	7 %	—	60 %	51 %	—	—	14 %	—	—	—	

giorno tutti i corpuscoli bianchi mostravano alterazioni morfologiche così profonde da permettere di considerarli come cellule morte ed in via di degenerazione.

Diluendo la sospensione in novocaina all' 1:150 alla 9^a ora, cioè dopo l'arresto completo dei movimenti ameboidi, si osservarono movimenti lenti al 2° giorno nel 40% dei leucociti, ed al 3° nel 60%.

Diluendo la sospensione in tutocaina all' 1:300 al 2° giorno, anche in questo caso, cioè dopo l'arresto completo dei movimenti, poche ore dopo la diluizione i leucociti tornarono a mostrare movimenti ameboidi nel 20% delle forme, al 3° giorno nel 58% e al 4° nel 22.5%. La soluzione all' 1:100, che aveva provocato l'arresto dell'attività dopo 6 ore e mezzo, diluita 7 ore dopo che era stata posta a contatto con i leucociti, permise pure un ritorno dei movimenti, che al 2° giorno si poterono constatare nel 33% dei corpuscoli bianchi.

In base a queste osservazioni si può affermare che anche il cloridrato di cocaina, la novocaina e la tutocaina, prima di produrre la morte della cellula, provocano un arresto della sua attività, cioè una sospensione ancora riparabile delle funzioni cellulari.

In un secondo gruppo di ricerche, si è studiata più particolarmente la scomparsa delle alterazioni prodotte sul protoplasma dai diversi alcaloidi, e si sono confrontate fra loro sotto questo punto di vista alcune delle sostanze prese in esame per vedere se fosse possibile stabilire differenze in proposito. Cercai per questo di usare quelle concentrazioni di veleni che si dimostrarono fisiologicamente equivalenti cioè capaci di produrre l'arresto dell'attività ameboide presso a poco nello stesso lasso di tempo. Ritenni anche opportuno adoperare concentrazioni piuttosto forti, perchè le precedenti ricerche mi avevano dimostrato che meglio si poteva mettere in rilievo il ritorno della attività ameboide per i leucociti paralizzati da forti dosi di veleno in un tempo breve, che non per quelli immobilizzati dall'azione protratta di dosi piccole; ciò appare assai logico quando si pensa che gli esperimenti erano eseguiti con leucociti fatti sopravvivere in sangue diluito con soluzioni fisiologiche, cioè con cellule poste in condizioni sfavorevoli di vita e per conseguenza soggette a graduali alterazioni.

Le soluzioni di alcaloide si aggiungevano in provette da centrifuga a sangue appena prelevato dall'uomo o dal *Bufo vulgaris*, nella proporzione di cinque parti di soluzione per una di sangue. Per allontanare la sostanza tossica si decantava la soluzione di alcaloide, previa centrifugazione, e si sottoponeva quindi il sangue a cinque lavaggi successivi con soluzione isotonica di NaCl adoperando sempre soluzioni e recipienti sterili.

I risultati ottenuti sono riassunti nella seguente tabella:

TABELLA II.

Sangue prelevato dal	Soluzioni aggiunte al sangue	Tempo trascorso fra l'aggiunta delle soluzioni e l'osserva- zione	Percentuale approssimativa del leucociti con movimenti ameboidi	Tempo trascorso fra l'aggiunta delle soluzioni ed il lavaggio	Tempo trascorso fra il lavaggio e l'osserva- zione	Percentuale dei leucociti in cui tornano i movimenti ameboidi
<i>Bufo Vulgaris</i> .	Nicotina 0.5:100	20'	20 %	20'	15' h. 5 h. 24	65 % 80 % 66 %
» » .	» 0.75:100	15'	0	15'	30' h. 3	0 20 %
» » .	» 0.37:100	h. 4.32	30 %	h. 4.48	30' h. 24	0 0
» » .	» 0.25:100	giorni 5 » 6	30 % 0	giorni 6 » 6	h. 6 h. 24	0 0
» » .	Cloridrato di chinina . 1:100	10'	0	15'	h. 1 h. 24	36 % 10 %
» » .	» » . 1:150	15'	0	35'	30' h. 34	43 % 15 %
» » .	» » . 0.5:100	20'	0	25'	h. 12	50 %
<i>Homo</i>	» » . 0.375:100	10'	0	20'	15'	50 %
»	» » . 0.25:100	h. 1	20 %	h. 2	30' h. 2.30	0 25 %
»	» » . 0.05:100	h. 39	0	h. 39	h. 2.30	24 %
<i>Bufo Vulgaris</i> .	Novocaina 1:100	5'	0	—	30' h. 3 h. 36	0 36 % 40 %
» » .	» 1:175	h. 4	10 %	h. 4	h. 1 h. 2.30 h. 24	42 % 44 % 36 %
» » .	» 0.5:100	h. 1.30	20 %	h. 1.30	h. 12 h. 48 h. 32	60 % 40 % 10 %
» » .	» 1:250	h. 2.30	15 %	h. 2.30	h. 13	85 %
<i>Homo</i>	Cloridrato di morfina 1:150	40'	0	h. 1	h. 2.30	25 %
<i>Bufo Vulgaris</i> .	Caffeina 1:75	10'	0	15'	15' h. 24	10 % 39 %
» » .	» 1:100	10'	10 %	15'	15' h. 5.30	13 % 76 %
<i>Homo</i>	» 0.5:100	15'	0	20 %	30' giorni 2	0 30 %

Segue TABELLA II.

Sangue prelevato dal	Soluzioni aggiunte al sangue		Tempo trascorso fra l'aggiunta delle soluzioni e l'osserva- zione	Percentuale approssimativa del leucociti con movimenti ameboidi	Tempo trascorso fra l'aggiunta delle soluzioni ed il lavaggio	Tempo trascorso fra il lavaggio e l'osserva- zione	Percentuale dei leucociti in cui tornano i movimenti ameboidi
<i>Bufo Vulgaris</i> .	Nitrato di stricnina .	1:100	5'	0	10'	20' giorni 4	54 % 80 %
» » .	» » .	1:100	giorni 4	0	giorni 4	15'	36 %
» » .	» » .	1:150	55'	18 %	h. 1	40'	70 %
» » .	» » .	1:500	giorni 4	0	giorni 4	15'	62 %
<i>Homo</i>	» » .	1:140	5'	0	30'	30' h. 3 h. 8	0 20 % 57 %
»	» » .	1:200	h. 1	0	h. 1	h. 4 giorni 3	55 % 10 %

Questi risultati confermano che gli alcaloidi ed i loro sali arrestano completamente l'attività ameboide delle cellule prima di produrne la morte. È evidente inoltre che il ritorno dell'attività si ottiene più facilmente per i leucociti paralizzati da soluzioni di nitrato di stricnina, meno facilmente per quelli trattati con caffeina (base), novocaina, e cloridrato di morfina. Più limitato ancora fu il ritorno dei movimenti nei corpuscoli bianchi del sangue a cui furono aggiunte soluzioni di nicotina e di cloridrato di chinina. Infatti una soluzione di nicotina al 0.5 %, che immobilizza in un'ora tutti i leucociti, permise il ritorno dei movimenti ameboidi 15' dopo il lavaggio solo del 15 % di essi, movimenti che tornarono però a scomparire completamente già dopo 24 h. La soluzione all'1 %, che ne arresta rapidamente l'attività (5'), allontanata dalle cellule non permise alcun ritorno di questa. Anche per il cloridrato di chinina all'1 %, che produsse completa immobilizzazione in circa 10', non si ebbe il ritorno dell'attività che nel 36 % dei corpuscoli e già dopo 24 h. la motilità era limitata al 10 % delle cellule. Per il nitrato di stricnina invece, non solo il numero delle forme che tornarono a mostrare movimenti fu notevole, ma questi si protrassero per più giorni, e si poté perfino osservare un ritorno di essi allontanando il veleno solo 4 giorni dopo avvenuto l'arresto dell'attività ameboide.

Che questa diversità di risultati non si possa mettere in rapporto con la diversa concentrazione molecolare delle soluzioni adoperate, appare evi-

dente quando si considerano i risultati ottenuti con la soluzione di nitrato di stricnina all'1 % e con quella di cloridrato di chinina all'1 % che, pur avendo concentrazioni molecolari quasi eguali, (l'una circa $\frac{M}{40}$, l'altra circa $\frac{M}{36}$), producono nelle cellule alterazioni funzionali così diversamente riparabili; come pure quando si considerano quelli che si ottennero con le soluzioni di caffeina 1:75 (circa $\frac{M}{16}$) e di nicotina all'1 % (circa $\frac{M}{14}$).

Si deve dunque ammettere che alcune delle sostanze studiate possano con più facilità di altre, essere eliminate o distrutte dal protoplasma cellulare, e che, le alterazioni prodotte da alcune di esse, siano meno riparabili di quelle prodotte dalle altre.

Fisiologia. — *Alcoolemia normale negli esercizi fisici* ⁽¹⁾. Nota I di U. CASSINIS e L. BRACALONI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Molti fisiologi hanno posto in questi ultimi anni la domanda se le piccole quantità di alcool che si mettono in evidenza nel sangue di un soggetto a riposo subiscano variazioni col lavoro muscolare.

Che l'alcool provenga dalla disintegrazione del glicosio attraverso l'acido piruvico e l'acetaldeide è molto probabile, ma non esattamente dimostrato. La conoscenza del meccanismo di questo processo rivelerebbe, come dice il Mathews, la maniera del come sia spezzata la molecola del glicosio nel corso del suo metabolismo e la determinazione, di questo fatto è uno dei più fondamentali problemi del metabolismo e della nutrizione ⁽³⁾.

Se in effetti dal glicosio avvenisse formazione di alcool sarebbe possibile, essendo la contrazione muscolare fatta a spese del glicosio, trovare un aumento di alcool durante il lavoro muscolare.

Abbiamo voluto fare questa osservazione prima di intraprendere lo studio della curva alcoolemica alimentare provocata con l'ingestione di soluzione a titolo noto di alcool, sia a riposo che durante il lavoro muscolare, anche per assicurarci se l'eventuale formazione di alcool da parte dell'organismo influisse su detta curva.

(1) Dal Laboratorio di Fisiologia applicata della Scuola Centrale Militare di Educazione Fisica, Farnesina, Roma.

(2) Nella seduta del 7 aprile 1929.

(3) A. P. MATHEWS, *Physiological Chemistry*, fourth ed., p. 55, 1925.

Soggetto	Quote alcoolemiche normali a digiuno (1)		Descrizione dell'esercizio	Durata dell'esercizio (2)	Quote alcoolemiche durante e dopo l'esercizio					
I Brigenti S.	—	0.038	19' (3) 0.033	20-VI-28 boxe coll' ombra in quattro riprese di 4' ognuna, da 24' a 54'	16'	29' 0.033 (4)	38' 0.022	44' 0.027	54' 0.027	69' 0.044
II Ercolani T.	—	0.028	13' 0.050	23-VI-28 corsa m. 2400 * da 18' a 36'	11'	25' 0.105	36' 0.055	62' 0.077	85' 0.028	106' 0.039
III Lucarelli L.	—	0.044	12' 0.066	6-VII-28 corsa m. 3600 * da 16' a 39'	16'	24' 0.033	32' 0.083	39' 0.100	51' 0.072	65' 0.111
IV Ianucci T.	0.000	8' 0.000	18' 0.000	12-VII-28 corsa m. 3600 * da 22' a 43'	18'	28' 0.000	37' 0.028	45' 0.000	63' 0.000	—
V Perilli F.	—	0.000	11' 0.011	18-VII-28 corsa m. 3600 * da 13' a 39'	21'	19' 0.000	30' 0.003	39' 0.022	49' 0.028	59' 0.034
VI B. L.	—	0.006	5' 0.017	28-VII-28 corsa m. 1500 ** da 7' a 21'	7'	11' 0.017	17' 0.000	21' 0.017	28' 0.011	34' 0.017
VII Renna A.	—	0.000	7' 0.011	4-VIII-28 corsa m. 3600 * da 10' a 40'	24'	17' 0.000	30' 0.017	43' 0.017	50' 0.039	55' 0.023
VIII Renzi E.	—	0.006	12' 0.006	8-VIII-28 corsa m. 3600 * da 17' a 47'	17'	25' 0.023	32' 0.000	48' 0.017	57' 0.017	37' 0.040

(1) La quota alcoolemica normale rappresenta la quantità totale delle sostanze volatili riducenti espressa in grammi per 1000 cnc. di sangue.

(2) Tempo effettivo di durata dell'esercizio, nel quale non è compreso il tempo di sosta per il prelevamento dei campioni di sangue.

(3) Il tempo è contato per tutte le esperienze dal prelevamento del primo campione di sangue.

(4) I numeri in grassetto rappresentano le quote durante e al termine dell'esercizio.

(*) I campioni di sangue sono prelevati ogni 1200 m.

(**) I campioni di sangue sono prelevati ogni 500 m.

Trattandosi di determinazioni in serie da eseguire sull'uomo abbiamo fatto uso del micrometodo di Widmark ⁽¹⁾ nella sua forma modificata ⁽²⁾. S'intende che il metodo dà il valore complessivo delle sostanze volatili riducenti del sangue (alcool, corpi chetonici).

Le ricerche furono condotte su otto soggetti sani, tra i 20-21 anni, in prevalenza agricoltori, tenuti a digiuno da circa 12 ore. Come esercizio fisico fu scelta la corsa di varia lunghezza (1500, 2400, 3600 m.) alla velocità oraria di 9-13 km.; un solo soggetto eseguì delle riprese di boxe a vuoto.

Dall'esposta tabella è evidente che nel periodo lavorativo, per quanto intenso, come nel periodo post-lavorativo la quota alcoolemica aumenta in modo sensibile soltanto nei soggetti II e III con valori rispettivamente 0.055 ‰ e 0.045 superiori all'ultima quota di riposo; mentre nel soggetto I l'aumento è di 0.011 ‰, nel IV di 0.028, nel V di 0.023, nullo nel VI, nel VII di 0.028, nell'VIII di 0.034.

Variazioni di simile entità (circa 0.03 ‰) si sono riscontrate anche nel sangue dell'individuo tenuto a riposo ⁽³⁾.

	0'	20'	40'	60'	80'	100'	120'
Sogg. VI B. L.:	0.006	0.034	0.034	0.034	0.039	0.034	0.045

Tuttavia le variazioni della quota alcoolemica normale nell'individuo a riposo si presentano più irregolarmente, mentre nell'individuo sottoposto, come nel caso presente, ad una corsa hanno luogo sotto forma di aumenti in prevalenza nel periodo post-lavorativo (5 sopra 8 soggetti). Questo fatto non costituisce pertanto una prova sufficiente per dimostrare la produzione di alcool, sia pure in minime quantità, nel lavoro muscolare.

(1) E. M. P. WIDMARK, *Eine Mikromethode zur Bestimmung von Aethylalkohol im Blut*. «Biochem. Zeitschr.», Bd. 131, Heft 5/6, S. 475, 1922.

(2) A. GALAMINI e L. BRACALONI, *Modificazione al micrometodo di Widmark per il dosaggio dell'alcool nel sangue*. «Archivio di Farmacologia sperimentale e Scienze affini», anno 1928, Roma.

(3) V. anche BAGLIONI e BRACALONI, GALAMINI, *Ricerche sull'azione fisiologica dell'alcool*. «Rend. R. Accad. dei Lincei», Classe Sc. fis. e nat., vol. IV., serie 6ª, 2º sem., fasc. 12, 1926.

Fisiologia. — *Sul valore alimentare dei legumi studiato nei ratti albini*⁽¹⁾. Nota di A. GALAMINI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Con la presente Nota si comunicano i dati di ratti albini, alimentati con fagioli bianchi cotti o crudi e con fave cotte. L'alimento era somministrato a volontà. I fagioli secchi erano macinati, salati convenientemente e impastati con acqua. Anche i fagioli e le fave cotte erano ridotti in poltiglia e salati.

I fagioli secchi hanno la seguente composizione: acqua 11.24 %, sostanze azotate 23.66 %, grassi 1.56 %, idrati di carbonio 55.6 %, cellulosa 3.88 %, ceneri 3.66 %. Le sostanze azotate, secondo Collier, rappresenterebbero il 24.28 %; di esse: legumina 20.47 %, albumina 0.71 %, altre sostanze 3.10 %. Le ceneri rappresenterebbero il 3.22 % della sostanza secca e sarebbero così composte: potassio 44.01 %, sodio 1.49 %, calcio 6.38 %, manganese 7.62 %, ferro 0.32 %, acido fosforico 35.52 %, acido solforico 4.05 %, acido salicilico 0.57 %, cloro 0.86 %.

La miscela di fagioli cotti, usata nelle ricerche presenti, risulta così composta (Settimi): acqua 65 %, sostanze azotate 9.20 %, sostanze grasse 0.56 %, carboidrati 21.70 %, cellulosa 2 %, ceneri 1.54 %. Quella delle fave conteneva acqua 63.5 %, sostanze azotate 10.48 %, sostanze grasse 0.83 %, carboidrati 20.95 %, cellulosa 2.92 %, ceneri 1.32 %. Le ceneri delle fave rappresentano circa il 3.63 % della sostanza totale e sono così composte: potassio 41.48 %, sodio 1.06 %, calcio 4.99 %, manganese 7.15 %, ossido di ferro 0.46 %, acido fosforico 38.86 %, acido solforico 3.39 %, acido silicico 0.65 %, fluoro 1.68 %. Le sostanze proteiche dei fagioli contengono faseolina, faselina e proteosi; quelle della fava: legumina, vicilina, legumelina e proteosi. La faseolina contiene (Osborne e Clapp), %: glicocollo 0.55, alanina 1.80, valina 1.04, leucina 9.65, prolina 2.77, fenilalanina 3.25, acido asparaginic 5.24, acido glutaminico 14.54, serina 0.38, tirosina 2.84, istidina 2.62, arginina 4.87, lisina 4.58, ammoniaca 2.06; il triptofano è presente. La legumina, vicilina e la legumelina contengono: lisina, tirosina, triptofano.

La legumina e la faseolina, secondo Osborne (1) e collaboratori, sono proteine inadeguate per l'accrescimento. McCollum, Simmond e Pitz giudicano basso il valore biologico delle proteine dei fagioli (2). Gli autori osservarono forte mortalità e accrescimento stentato in giovani ratti alimentati con miscela contenente solo proteine di fagiolo nella proporzione del 19.8 %. Snyder (3) trovò che le proteine dei fagioli erano utilizzate nella proporzione dell'80 %. Secondo Wait (3) lo sarebbero nella proporzione del 77-78 %; secondo Lafayette B. Mendel e Morris Fine (3) nella proporzione del 77.9 % nell'uomo. Parson, McCollum, Simmonds ottennero l'accrescimento dei ratti, somministrando loro fagioli, completati dal lato alimentare con proteine e vitamine e con aggiunta di carbonato e cloruro di sodio. I fagioli bianchi secchi conterebbero in quantità notevole la vitamina

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Fisiologia Umana della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 7 aprile 1929.

dello sviluppo sessuale *D*, in quantità sufficiente l'antitiberiberica *B*, in piccola quantità la vitamina *A* e in tracce la *C*.

I risultati delle ricerche furono i seguenti:

Alimentazione con fagioli cotti: ratti *I* e *O*; un grammo della miscela usata poteva svolgere ca. cal. 1.44. Di esse il 32% derivavano dalle sostanze azotate, il 3,5% dai grassi, il 63,5% dai carboidrati. Al ratto *I* per tre mesi si aggiunsero alla miscela cavolo gr. 1, burro gr. 0,2, lievito di birra gr. 0,2.

RATTO *I* ♂ in esperimento dal 4-12-27 al 31-3-29. Le vitamine furono aggiunte alla delta dall'11-12-28 al 12-3-28. Dal 4-12-28 al 9-12-28 diminuì da gr. 199,5 a 163. I valori medi furono: orine cc. 1, feci gr. 0,4, acqua cc. 5, cibo in calorie 17,2. Le sostanze proteiche furono ingerite in proporzione di gr. 362,6 per 60 kg.

Dal 9 al 15-12-28 il ratto variò da gr. 163 a 164. Orine cc. 15 feci gr. 2,3; acqua cc. 3,5, cibi in calorie 64; proteine gr. 1491. per 60 kg.

Dal 15-12-28 al 17-1-29 da gr. 164 a 167. Orine cc. 12, feci gr. 3,8; acqua cc. 4, cibo in calorie 71; proteine gr. 1577 per 60 kg.

Dal 17-1-29 al 16-3-29 da gr. 167 a 176. Orine cc. 12, feci gr. 3,7; acqua cc. 9, cibo in calorie 57; proteine gr. 1848 per 60 kg.

Dal 16-3-29 al 21-3-29 da gr. 176 a 153. Orine cc. 12, feci gr. 0,2; acqua cc. 3,5, cibi in calorie 51,8; proteine 1201 per 60 kg.

Il ratto morì e presentò broncopolmonite e otite media a destra.

RATTO *O* ♀. Dal 27-3 al 4-4-28 variò da gr. 170 a 154. Orine cc. 11, feci gr. 2; acqua cc. 10, cibo in calorie 67,5; proteine gr. 1566 per 60 kg.

Dal 4-4 al 17-4-28 da gr. 154 a 173. Orine cc. 10, feci gr. 2,9; acqua cc. 11, cibo in calorie 86,4; proteine 2032 gr. per 60 kg.

Dal 17-4 al 30-4-28 il ratto non variò di peso, Orine cc. 7,7, feci gr. 3,1; acqua cc. 9, cibo in calorie 74,5; proteine gr. 1660 per 60 kg.

Dal 30-4 al 15-5-28 da gr. 172 a 186. Orine cc. 7, feci gr. 3-4; acqua cc. 10,5, cibo in calorie 93,6; proteine 1999 per 60 kg.

Dal 15-5 a 27-5-28 il ratto non variò di peso: orine cc. 9,2, feci gr. 3,3; acqua cc. 9, cibi in calorie 92.

Il 27-5-1928 il ratto fu posto a digiuno fino al 2-5-1928; diminuì da gr. 187 a 115, del 38,5%. Le diminuzioni di peso furono, nei giorni successivi 17%, 22,5%, 26,6%, 31%, 34,8%, 38,5%.

All'autopsia il ratto mostrò broncopolmonite purulenta.

Alimentazione con fagioli crudi: Ratti *W*₁, *W*₂, *W*₃. Ai ratti *W*₂ e *W*₃ si aggiunsero alla miscela vitamine.

RATTO *W*₁: Adulto ingerì solo gr. 2,5-4,5 di cibi. In 4 giorni diminuì del 20% e morì, mostrando congestione renale, dilatazione del colon e ristagno fecale.

RATTO *W*₂: In due giorni diminuì da gr. 121 a 102 e morì. All'autopsia mostrò broncopolmonite destra e coprostasi.

RATTO *W*₃: In 4 giorni diminuì da gr. 185 a 139,5, del 24%, e morì. Mostrò congestione renale e coprostasi.

Alimentazione con fave cotte: Un grammo della miscela dava ca. calorie 1,98; di esse il 31,7% da sostanze azotate, il 5,1% da grassi, il 63,2% da carboidrati.

RATTO *M* ♀: In accrescimento nei primi due mesi di esperimento si aggiunsero alla miscela le vitamine nelle proporzioni sudette.

Dal 18-1-28 al 27-1-28 diminuì da gr. 124 a 105. Orine cc. 8,5, feci gr. 2,6; acqua cc. 6, cibo in calorie 61,5; proteine gr. 2206 per 60 kg.

Dal 27-1-28 al 2-3-28 da gr. 105 a 156. Orine cc. 21, feci gr. 5.2; acqua cc. 17; cibo in calorie 101; proteine gr. 3243 per 60 kg.

Dal 2-3-28 al 19-3-28 da gr. 156 a 148. Orine cc. 15, feci gr. 5.1; acqua cc. 14, cibo in calorie 103.

Dal 19-3-28 al 30-3-28 da gr. 148-161. Orina cc. 11, feci gr. 4.6; acqua cc. 16, cibi in calorie 119.8; proteine gr. 3303 per 60 kg.

Dal 30-3-28 al 12-4-28 da gr. 161 a 156. Orine cc. 11.5, feci gr. 3.8; acqua cc. 13, cibo in calorie 99; proteine gr. 2665 per 60 kg.

Dal 12-4-28 al 21-4-28 da gr. 156 a 171. Orine cc. 13, feci gr. 3.6; acqua cc. 10, cibo in calorie 103.5; proteine gr. 2665 per 60 kg.

Dal 21-4-28 al 6-5-28 da gr. 161 a 166. Orine cc. 13, feci gr. 4.6; acqua cc. 13, cibi in calorie 108; proteine gr. 2519 per 60 kg.

Dal 6-5-28 a 17-5-28 da gr. 166 a 182. Orine cc. 13.5, feci gr. 4.5; acqua cc. 16, cibo in calorie 108; proteine gr. 2600 per 60 kg.

Dal 17-5-28 al 27-5-28 da gr. 182 a 168. Orine cc. 9.9, feci gr. 4.1; acqua cc. 12, cibo in calorie 97.5; proteine gr. 2306 per 60 kg.

Il 27-5 il ratto fu posto a digiuno e diminuì nei giorni successivi del 14.6 %, 18.5 %, 23.5 %, 26.7 %, 29.2 %, 32.8 %.

Il 2-5-28 il ratto fu rialimentato con bianco d'uovo, che fu ingerito nella proporzione giornaliera di gr. 80-100. Il ratto aumenta di peso stentatamente; dopo 31 giorni di rialimentazione l'animale era aumentato solo da gr. 120.5 a gr. 158. Al 2° giorno di rialimentazione comparve nelle urine il pigmento verde.

Esaminando i dati su esposti si osserva che i ratti *I*, *O*, *S*, quando da un alimentazione completa passarono ad una alimentazione di soli legumi cotti, diminuirono di peso rispettivamente per 5, 8, 6 giorni del 18, 9.8, 22.8 %. Le urine da acide divennero neutre e poi alcaline, e tali si mantennero durante tutta la durata degli esperimenti.

I ratti *W*₁, *W*₂, *W*₃ in 8, 2, 4 giorni diminuirono rispettivamente del 20.5, 15, 24.0 % del peso e morirono. Anche le loro urine da acide divennero alcaline. Si trattava di due animali adulti e di uno in accrescimento. Generalmente gli adulti a digiuno muoiono dopo la perdita del 40 % del peso iniziale; gli animali in accrescimento dopo essere diminuiti del 27 %. Nel caso presente la morte è avvenuta prima che nel digiuno completo. Le perdite successive del peso furono: *W*₁ 7.2, 11.1, 15.4, 20.5 %; *W*₂ 8.6, 15 %; *W*₃ 8.5, 15.1, 21, 24 %; ratto al digiuno dopo alimentazione mista completa 6.6, 9.8, 11.8, 14.5, 16.5, 18.5, 20.4 %. A provocare la morte precoce degli animali deve aver contribuito l'intossicazione alcalotica che, in due casi, fu accompagnata da congestione renale e coprostasi con dilatazione del tratto ileo-cecale.

Il comportamento dei ratti alimentati con legumi cotti fu migliore: il ratto *I* resistette al trattamento, ingerendo cibo pari a calorie 0.3-0.4 per grammo di peso e per giorno, 108 giorni. A provocarne la morte contribuì verosimilmente l'infezione, dalla quale era colpito. Il ratto *O*, alimentato con fagioli cotti senza vitamine, sebbene affetto da broncopolmonite, resistette per 61 giorni all'alimentazione monotona senza manifestazioni patolo-

giche visibili. Posto a digiuno diminuì di peso più rapidamente di un ratto controllo, alimentato con dieta mista completa e anch'esso affetto da bronco-polmonite. Le diminuzioni successive di peso di questo ratto furono: 5.4, 7.3, 10.3, 15, 17.7, 18.4, 22.7, 27.7, 31 %.

Anche con le fave cotte un ratto albino ha potuto mantenere a lungo il proprio peso. Il suo accrescimento fu però stentato. Esso crebbe di gr. 0.0047 per giorno e per grammi di peso; altri 3 ratti, della stessa età e di presso a poco uguale peso iniziale, alimentati con diete miste complete crebbero di gr. 0.1 per grammo di peso e per giorno. Dopo 135 giorni di esperimento il ratto fu posto a digiuno fino alla perdita del 32.8 % del peso. Dopo il digiuno fu rialimentato con bianco d'uovo. Con ricerche precedenti eseguite su un ratto albino in accrescimento si era osservato che, rialimentato con albume d'uovo, dopo un digiuno spinto fino alla perdita del 32 %, era ulteriormente diminuito di peso fino al 40 % ed era morto. Prima del digiuno il ratto si era cibato con una miscela mista nella quale le proteine figuravano dal lato energetico nella proporzione del 15 %. Il contegno del ratto *M*, che con le fave era abituato a ingerire quantità maggiori di proteine, fu diverso, essendo riuscito l'animale non solo ad arrestare col bianco d'uovo la perdita del peso, ma anche ad aumentare, sebbene lentamente.

BIBLIOGRAFIA

1. T. B. OSBORNE, MENDEL, FERRY, « Zeitschr. physiol. Chem. », 80, 307; « Journ. Biol. Chem. », 20, 351.
2. MC. COLLUM, SIMMONDS e PITZ, « Journ. Biol. Chem. », 29, 521.
3. LAFAYETTE B. MENDEL and FINE, « Journ. Biol. Chem. », 10, 433.

Fisiologia. — *L'azione del pH sui muscoli striati*⁽¹⁾. Nota preventiva di S. GOLDBERGER, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. A. HERLITZKA.

Ho studiato, nelle ricerche sulle quali qui brevemente riferisco, l'azione del pH sui muscoli striati quando il suo valore sia mantenuto in limiti tali da non produrre ancora una contrattura.

A questo scopo feci una serie di esperimenti su muscoli isolati di rana immersi nel liquido con diverso pH e un'altra serie perfondendo il treno posteriore della rana secondo il metodo di Trendelenburg.

In questa mia nota mi limiterò di riportare solo gli esperimenti fatti con la perfusione alla Trendelenburg, essendo i risultati così ottenuti più

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia della R. Università di Torino.

(2) Nella seduta del 7 aprile 1929.

costanti e più dimostrativi, e riguardanti anche dei fatti che non potevano essere messi in evidenza con la semplice immersione del muscolo.

Per ottenere la soluzione di diverso pH, si aggiunse al Ringer per rane una soluzione 1/10 N di HCl, oppure una soluzione di NaOH 1/10 N; si dovette adottare questo sistema perchè i diversi liquidi equilibratori precipitano il calcio, e perchè solo in tal guisa si può saggiare direttamente il potere equilibratore del muscolo stesso.

La concentrazione degli idrogenioni fu determinata col colorimetro di Hellige.

Il preparato si perfondeva per 5' col liquido in esame, dopo di che si determinava lo stimolo limite, quello ottimo, il tempo latente e l'altezza della contrazione. A tal fine una delle zampe era congiunta a una leva scrivente, mentre, con il secondario di una slitta di Du Bois Reymond si eccitava il nervo sciatico.

Nel primario della slitta stessa (privato del nucleo di ferro dolce) era intercalato, oltre al segnale Desprez, uno sceglstimoli descritto dall'Aggazzotti ed un reocordo che permetteva di modificare la resistenza del primario in modo da determinare quantitativamente l'eccitabilità del preparato, senza spostare il secondario dopo che era stata determinata la soglia al principio dell'esperimento. Facendo il rapporto tra le resistenze del circuito primario (dedotta dalla posizione del corsoio del reocordo) nei singoli momenti dell'esperimento, avremo il valore dell'eccitabilità.

Eseguite le determinazioni accennate, perfondevo il muscolo per due ore, facendo ogni mezz'ora una nuova serie di determinazioni uguali alle precedenti. Oltre a questo, esaminavo continuamente il pH del liquido perfuso, per poter osservare una possibile variazione degli idrogenioni che avveniva durante la perfusione. Misuravo la velocità della perfusione, registrando il numero delle gocce uscite per mezzo di due tamburi di Marey accoppiati, e la grandezza dell'edema prodottosi pesando il preparato prima e dopo l'esperimento.

Gli esperimenti furono fatti con liquidi con pH fra 3,2 e 12.

I risultati sono riportati nella tabella, dalla quale risulta anzitutto che il tempo latente non subisce alcuna modificazione per effetto della variazione del pH. Variando il pH del liquido fra 5,8 e 9,0, il valore della soglia, dello stimolo ottimo e l'altezza della contrazione si modificano pochissimo, e, anche se esiste qualche leggera diminuzione, questo avviene gradualmente. Adoperando un liquido con pH inferiore a 5,8 o superiore a 9, si poteva osservare una leggiera variazione della soglia nella prima mezz'ora, mentre nella seconda si ebbe una forte diminuzione, che era tanto più spiccata, quanto più acido o basico era il liquido, con questa sola differenza che per lievi gradi di alcalinità l'azione è maggiore che per i corrispondenti gradi di acidità (pH 9,8 e 4,7). La diminuzione dell'eccitabilità per un determinato liquido, si verifica nella prima ora di perfusione,

TABELLA

pH	T. in min.	Eccitabilità massima $\left[\frac{1}{\text{soglia dello}} \right]$ stimolo	Eccitabilità minima $\left[\frac{1}{\text{stimolo}} \right]$ ottimo	Tempo latente	Altezza della contra- zione	Velocità della perfusione N. di gocce per min.	Osservazioni
3.2	5	1	1	4/100 sec.	1	—	Il peso della rana prima dell'esperimento era di gr. 35, dopo di gr. 71.
	30	0.8	0.75	»	0.88	18	
	60	0.35	0.30	»	0.60	18	
	90	0.30	0.20	»	0.55	18	
	120	0.28	0.20	»	0.50	18	
3.7	5	1	1	4/100 sec.	1	—	
	30	0.75	0.68	»	0.93	—	
	60	0.49	0.37	»	0.68	—	
	90	0.45	0.39	»	0.63	—	
	120	0.37	0.29	»	0.60	—	
4.7	5	1	1	4/100 sec.	1	—	Il peso della rana prima dell'esperimento era di gr. 25, dopo di gr. 49.
	30	0.92	0.93	»	0.83	20	
	60	0.67	0.72	»	0.58	20	
	90	0.72	0.65	»	0.60	20	
	120	0.70	0.68	»	0.60	20	
5.8	5	1	1	4/100 sec.	1	—	Il peso della rana prima dell'esperimento era di gr. 29, dopo di gr. 60.
	30	0.95	0.94	»	1	28	
	60	0.93	0.94	»	1	28	
	90	0.90	0.91	»	1	28	
	120	0.92	0.89	»	1	28	
7.2	5	1	1	4/100 sec.	1	—	Il peso delle rana prima dell'esperimento era di gr. 20, dopo di gr. 39.
	30	1	1	»	1	34	
	60	0.98	1	»	1	34	
	90	0.96	1	»	1	34	
	120	0.96	1	»	1	34	

Segue TABELLA

pH	T. in min.	Eccitabilità massima $\left[\frac{1}{\text{soglia dello}} \right]$ stimolo	Eccitabilità minima $\left[\frac{1}{\text{stimolo}} \right]$ ottimo	Tempo latente	Altezza della contra- zione	Velocità della perfusion N. di gocce per min.	Osservazioni
8.1	5	1	1	4/100 sec.	1	—	Il peso della rana prima dell'esperimento era di gr. 24, dopo di gr. 50.
	30	0.98	1	»	1	—	
	60	0.96	0.97	»	1	—	
	90	0.94	0.95	»	1	—	
	120	0.93	0.94	»	1	—	
9.0	5	1	1	4/100 sec.	1	—	
	30	0.98	1	»	1	—	
	60	0.89	0.82	»	1	—	
	90	0.89	0.85	»	0.91	—	
	120	0.92	0.85	»	0.91	—	
9.8	5	1	1	4/100 sec.	1	—	
	30	0.98	0.96	»	0.93	14	
	60	0.36	0.23	»	0.83	14	
	90	0.30	0.20	»	0.75	14	
	120	0.28	0.20	»	0.70	14	
10.5	5	1	1	4/100 sec.	1	—	Il peso della rana prima dell'esperimento era di gr. 27, dopo di gr. 52.
	30	0.95	0.92	»	0.96	12	
	60	0.26	0.17	»	0.23	12	
	90	0.25	0.15	»	0.20	12	
	120	0.20	0.14	»	0.18	12	
11.5	5	1	1	4/100 sec.	1	—	
	30	0.94	0.76	»	0.91	—	
	60	0.45	0.31	»	0.72	—	
	90	0.39	0.21	»	0.64	—	
	120	0.30	0.14	»	0.64	—	

dopo di che si mantiene relativamente costante. Il comportamento dello stimolo ottimo è parallelo a quello della soglia, con l'unica differenza, che la modificazione del valore dello stimolo ottimo è leggermente più forte; anche l'altezza della contrazione risente l'azione delle stesse concentrazioni di idrogenioni che influiscono sull'eccitabilità; ma l'altezza della contrazione subisce diminuzioni che non scendono sotto il 50 % dell'altezza primitiva.

Per quello che riguarda il comportamento del pH nel liquido dopo la perfusione, si è osservato che, con valori iniziali di pH tra 3,2 e 10,8, il muscolo presenta un potere equilibratore perfetto, cioè il liquido di Ringer adoperato presenta sempre dopo la perfusione un $\text{pH} = 6,7$, anche prolungando la durata dell'esperimento per ventiquattr'ore. Invece con pH inferiore a 3,2, si ha la perdita di tale capacità dopo 45' circa, e con pH superiore a 10,8 ciò avviene già dopo 20 minuti, ossia il liquido dopo la perfusione si mantiene uguale a quello prima della perfusione. Nel primo caso tale perdita dell'azione equilibratrice si accompagna alla abolizione completa dell'eccitabilità, nel secondo caso invece l'eccitabilità si conserva perfino con $\text{pH} = 12$.

La velocità della perfusione per le soluzioni con $\text{pH} =$ fra 6 e 8, dopo due ore di esperimento si manteneva uguale a quella iniziale; per i liquidi più acidi o più alcalini si poteva osservare invece un'azione vasocostrittrice abbastanza forte, e più spiccata con i liquidi alcalini.

Adoperando una soluzione con $\text{pH} = 3,2$, la velocità della perfusione dopo due ore scende da 30 a 18 gocce al minuto, e dopo ventiquattr'ore a 14 gocce, mentre con $\text{pH} 10,6$ dopo tempi uguali il numero delle gocce era disceso da 30 rispettivamente a 12 e a 10 per minuto.

Per la produzione dell'edema non si poté osservare nessuna differenza, e in tutti i casi dopo due ore di perfusione il peso del preparato era press'a poco raddoppiato.

Fisiologia. — *La riserva alcalina dell'acqua di mare* ⁽¹⁾. Nota di R. MARGARIA, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. A. HERLITZKA.

Per integrare le ricerche che fanno oggetto della precedente Nota, ho voluto studiare anche la capacità dell'acqua di mare a fissare anidride carbonica.

Poichè mi pare molto interessante vedere, non solo come varia il pH dell'acqua di mare per aggiunta di acidi o di alcali forti, ma anche come varia il pH quando la si metta in equilibrio con anidride carbonica a varia tensione, come si verifica ad esempio quando perfondiamo un preparato con acqua di mare o quando iniettiamo acqua di mare in un animale.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia della R. Università di Torino - Sezione Marina di Trieste.

(2) Nella seduta del 21 aprile 1929.

Ricerche che presentano una certa analogia con quelle attuali, sono state per l'addietro compiute da alcuni Autori ⁽³⁾, i quali, mossi da criteri geologici più che biologici e fisiologici, studiarono le variazioni del pH dell'acqua di mare in equilibrio con aria a varia concentrazione di CO_2 , sì che venne trascurata quella regione che maggiormente ci interessa.

METODO.

L'acqua di mare è la stessa che ho usato negli esperimenti di cui ho esposto nella precedente Nota.

Le prove sulla capacità dell'acqua di mare a legare anidride carbonica, vennero eseguite mettendo in equilibrio, a temperatura ambiente (13°), in un tubo tonometrico, l'acqua di mare con aria a vario contenuto di CO_2 : prima di eseguire il prelievo dell'acqua dal tubo tonometrico, si esaminava la composizione dell'aria prelevandone un campione e dosandone l'anidride carbonica con l'apparecchio di Haldane. L'analisi del contenuto totale in CO_2 dell'acqua di mare venne eseguita su due cc. di liquido con l'apparecchio di V. Slyke e Neill ⁽⁴⁾, estraendo il CO_2 nel vuoto dopo aggiunta di acido lattico all'acqua in esame, e misurando la differenza di pressione dei gas estratti, mantenuti a volume costante tra prima e dopo aver introdotto nell'apparecchio una soluzione di idrossido sodico per l'assorbimento del CO_2 .

TABELLA.

mm. CO_2	CO_2 totale cc. per cento cc. di acqua di mare
0.774	6.52
2.98	6.9
3.63	7.19
8.22	7.79
10.7	8.24
15.6	8.85
19.3	9.08
21.7	9.23
32.4	10.69
36	11.14
42.8	12.15
51.6	13.3

Nel diagramma della fig. 1 è riportata la variazione del contenuto totale del CO_2 nell'acqua di mare in funzione della tensione del CO_2 . Da questo dato, venne dedotta la quantità di CO_2 che si trova allo stato di semplice soluzione nell'acqua, e che corrisponde, come potei calcolare dai dati di coefficiente di assorbimento di gas in liquidi aventi una salinità corrispondente a quella dell'acqua di mare da me adoperata e ad una temperatura di $13^\circ(3)$, a cc. 1,12 di CO_2 , a 0° e 760 mm, per ogni 100 cc. di liquido e per ogni millimetro di CO_2 di pressione. Per differenza tra la quantità di CO_2 totale e quella semplicemente disciolta, avevo la quantità di CO_2 combinata sotto forma di bicarbonato, e da questi valori potevo

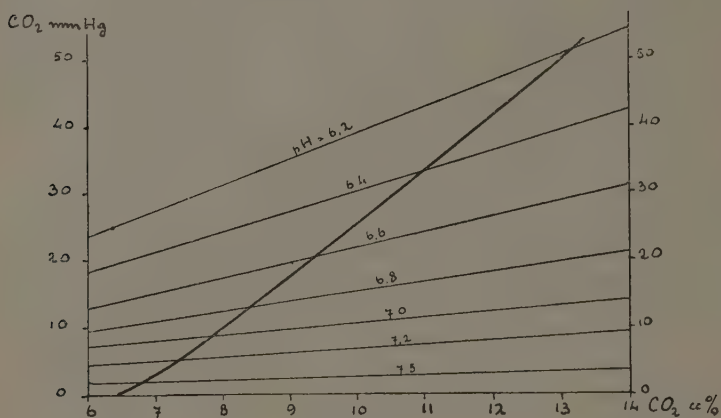


Fig. 1.

Anidride carbonica totale dell'acqua di mare (cc. CO_2 %) a varie tensioni di CO_2 , e pH corrispondente.

facilmente calcolare il pH mediante la nota formula di Henderson modificata da Hasselbach⁽⁶⁾

$$\text{pH} = \text{pK}' + \log \frac{[\text{Ba}]}{[\text{Ha}]}$$

ove $\text{pK}' = -\log K'$ e K' è il rapporto fra la costante di dissociazione ed il grado di dissociazione, K/α ; $[\text{Ba}]$ esprime la concentrazione totale in sale e $[\text{Ha}]$ la concentrazione dell'acido. pK' venne da Henderson e Haggard riscontrata per il CO_2 uguale a 7.12 per soluzioni aventi $\text{pH} = 7.4$. Nei valori da me riportati nella tabella e nella figura, questo valore pK' venne corretto per la variazione che subisce il grado di dissociazione variando il pH, particolarmente verso la zona acida, in prossimità di un valore uguale a quello della costante di dissociazione dell'acido carbonico.

Il diagramma della fig. 1, costruito coi dati della tabella I, ci mette in evidenza la bassissima resistenza dell'acqua di mare a mantenere il suo valore di pH anche di fronte ad un acido così debole qual'è l'acido carbonico, tanto che è sufficiente già una tensione di 8 mm di CO₂ per portare il pH a 7.0, e per una tensione di CO₂ di 40-50 mm, quale è approssimativamente quella che si ha nei tessuti dei mammiferi, il pH scende 6.2-6.3: in corrispondenza di questi valori, il pH si sposta di poco anche per aumenti molto rilevanti della tensione del CO₂, perchè ci troviamo in prossimità del valore corrispondente a quello del rapporto fra la costante di dissociazione dell'acido carbonico ed il suo grado di dissociazione.

L'acqua di mare dunque, pur avendo una reazione nettamente alcalina, non giunge a contatto dei tessuti con la reazione sua propria, ma anzi vi giunge con una reazione acida per l'assorbimento del CO₂.

Dai valori riportati si può calcolare anche il potere regolatore dovuto al sistema acido carbonico-bicarbonato ai vari pH, valendosi della formula seguente, ottenata da V. Slyke ⁽⁷⁾ derivando l'equazione di Henderson, formula che vale per gli acidi deboli:

$$\frac{dB}{d\text{pH}} = \frac{2,3 \times K' \times C \times [H]}{(K' + [H])^2}$$

ove con C si intende la concentrazione molare dell'acido prima dell'aggiunta della base forte e che è espresso, nel caso nostro, dalla concentrazione del CO₂ totale.

La quota di potere regolatore dovuta al sistema acido carbonico-bicarbonati nell'acqua di mare a pH = 7.4 sostituendo nella suddetta formula ai simboli i valori reali, sarà:

$$\frac{dB}{d\text{pH}} = 2,3 \times \frac{8 \times 10^{-7} \times 2,9 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^{-8}}{[(8 \times 10^{-7}) + (4 \times 10^{-8})]^2} = 0.000302,$$

e cioè un quinto soltanto del potere regolatore totale è dovuto ai bicarbonati. Aumentando la tensione del CO₂ dell'aria in equilibrio con l'acqua di mare, aumenta il potere regolatore, tanto che a 50 mm. di tensione del CO₂ e ad un pH di 6.25, il potere stesso dovuto ai bicarbonati sale a 0.001865, valore superiore al potere totale dell'acqua di mare a pH = 7.4.

Viceversa il potere regolatore dovuto ai bicarbonati dell'acqua, ad una tensione di 0.77 mm. di tensione di CO₂ e a pH = 7.99 in condizioni cioè molto vicine a quelle in cui si trova l'acqua ordinariamente, non è che di 8.03.10⁻⁵.

Vediamo da questi dati che, per quanto la reazione dell'acqua di mare sia notevolmente alcalina, questa viene spostata, nella perfusione di organi sopravvivenenti, verso la parte acida per la sola presenza dell'anidride carbonica prodotta dai tessuti e che, in considerazione della tensione dell'ani-

dride carbonica esistente nei tessuti, tale spostamento potrebbe essere di tale entità da portare il pH ad un valore alquanto inferiore al pH dei liquidi organici. In realtà, non è presumibile che questo fatto si verifichi, poichè i tessuti hanno un proprio potere regolatore abbastanza accentuato, da conferire la loro reazione caratteristica ai liquidi di perfusione, quando questi non siano equilibrati: in ricerche recentissime compiute in questo Istituto, tuttora in corso di pubblicazione, il Golderger⁽⁸⁾ ha dimostrato che la reazione del liquido, che ha perfuso un preparato di rana alla Trendelenburg, ha sempre lo stesso pH (6.7), qualunque fosse stato il pH del liquido non equilibrato prima della perfusione, entro i limiti di pH 3.2-10.8, e ciò anche dopo un tempo lunghissimo di perfusione.

Se teniamo conto ancora della diluizione alla quale si sottopone generalmente l'acqua di mare per portarla ad un valore di pressione osmotica uguale a quello dei liquidi dell'organismo, vediamo che il potere regolatore della reazione si riduce a valori così piccoli, che, per la massima parte dei casi, non possono venir presi in considerazione.

BIBLIOGRAFIA

(3) Vedi in: LEGENDRE R., *La concentration en ions Hydrogène de l'eau de mer*. « Presses Univers. de France ». Paris, 1925.

(4) V. SLYKE e NEILL, *The determination of gases in blood and other solutions by vacuum extraction and manometric measurement*. « Journ. of biol. Chemistry », 61, p. 523, 1924.

(5) LANDOLT, BÖRNSTEIN u. ROTH, *Physikalisch-chemische Tabellen*. IV. Aufl. Springer, Berlin, 1912.

(6) HASSELBACH K. A., *Die Berechnung der Wasserstoffzahl des Blutes aus der freien und gebundenen Kohlensäure desselben, und die Sauerstoffbindung des Blutes als Funktion der Wasserstoffzahl*. « Biochem. Zeitschr. », 78, p. 112, 1917.

(7) V. SLYKE D., *On the measurement of buffer values and on the relationship of buffer value to the dissociation constant of the buffer and the concentration and reaction of the buffer solution*. « Journ. of Biol. Chemistry », 52, p. 525, 1922.

(8) GOLDBERGER S., *L'azione del pH nei muscoli striati*. « Atti R. Acc. Lincei », 1929.

Fisiologia. — *Inanizione parziale dei ratti albini alimentati con olio di oliva con o senza aggiunta di vitamine*. Nota di A. GALAMINI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Corrispondente FUBINI commemora il defunto Socio L. BIANCHI.

Il Presidente on. GARBASSO ringrazia il Prof. FUBINI per la bella Commemorazione e si associa a lui, a nome dell'Accademia, nell'esprimere il più vivo rimpianto per la scomparsa dell'insigne Socio di cui tutti ricordano i grandi meriti di scienziato e di uomo.

PRESENTAZIONE DI MEMORIE E NOTE

Il Socio G. CASTELNUOVO presenta per l'inserzione negli Atti una Memoria del prof. Comessatti dal titolo « Le involuzioni sulle curve algebriche ed il teorema generale di diramazione per le funzioni fuchsiane ».

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci BAGLIONI, BORDONI, BRUNI, CORBINO, FOÀ, GIORGI, LEVI-CIVITA, NASINI, PETRI, SCORZA.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio LEVI-CIVITA, illustra i due volumi degli « Scritti Scientifici di Francesco Siacci » pubblicati sotto gli auspici del Governo Nazionale, giunti in dono all'Accademia, e pone in rilievo l'alta importanza della pubblicazione.

L'Accademico Segretario Prof. PARRAVANO presenta i libri giunti in dono all'Accademia e fra essi segnala due pubblicazioni del Socio Straniero P. LENARD: « Grosse Naturforscher » e « Uber Kathodenstrahlen. Nobel-Vortrag ».

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 5 maggio 1929

- ACQUA C. — Les maladies du ver à soie (grasserie et dysenteries) per A. Paillot e i nostri studi sullo stesso argomento con un'appendice sulla flaccidezza e sulla poliedria. (Estr. dal « Bollettino della Stazione di Gelsicoltura e Bachicoltura di Ascoli Piceno » Vol. VIII). Ascoli Piceno, 1929. 8°, pp. 1-63.
- ALDRICH J. M. — New Diptera or Two-Winged Flies from South America. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 74). Washington, 1928. 8°, pp. 1-25.
- BATTAGLIA M. — Le vecchie culture del bacillo tubercolare e l'antracosi polmonare (Estr. dalla « Riforma Medica » N. VI 1929). Napoli, 1929. 8°, pp. 1-5.
- BRIAN A. — Descrizione di un nuovo genere di isopodo terrestre troglobio raccolto dal Prof. Silvestri in una grotta di Cuba (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario ». Vol. XXII, pp. 188-197). Portici, 1929. 8°.
- Boletín de la Asociación Argentina de Electrotécnicos. Número extraordinario. (Alessandro Volta 1827-1927). s. note tip. 8°, pp. 1-192.
- DENIS J. R. — Notes sur les Gollemboles récoltés dans ses voyages par le Prof. F. Silvestri. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario ». Vol. XXII, pp. 166-180) Portici, 1929. 8°.
- FACE L. — Sur quelques Araignées des grottes de l'Amérique du Nord et de Cuba. (Estr. dal « Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario ». Vol. XXII, pp. 181-187). Portici, 1929. 8°.
- Interim Report of the Proceedings of the First General Assembly of the International Union for the Scientific Investigation of Population Problems. (Reprint from the « Journal of the American Statistical Association ». 1928, pp. 305-317). S. 1, s. d. 8°.
- LENARD F. — Grosse Naturforscher. Eine Geschichte Naturforschungen. Lebensbeschreibungen. München, 1929. 8°, pp. 1-324.
- LENARD P. — Ueber Kathodenstrahlen. Nobelvortrag gehalten in öffentlicher Sitzung der Königl. Schwedischen Akademie der Wissenschaften zu Stockholm. Auflage. II. Berlin, 1920. 8°, pp. 1-120.
- PASSERINI N. — Di una mutilazione atta ad aumentare il prodotto del Porrando. (Estr. dal « Bollettino del R. Istituto Superiore Agrario di Pisa ». Vol. IV). Pisa, 1928. 8°, pp. 1-5.
- PASSERINI N. — Sulle specie di « Brassica » cui corrispondono i nomi volgari di « Ravizzone » e di « Colza ». (Estr. dal « Bollettino del R. Istituto Superiore Agrario di Pisa ». Vol. IV). Pisa, 1928, 8°, pp. 1-8.
- PEARL R. — Experiments on Longevity. (Reprint from the « Quarterly Review of Biology ». Vol. III, pp. 391-407). S. 1, 1928. 8°.
- PEARL RAUD LATIMER BACON A. — Biometrical Studies in Pathology VI. The Primary Site of Cancer and of other Malignant Tumors. (Reprint. from the « Archives of Pathology ». Vol. VI, pagine 67-89). Chicago, 1928. 8°.
- PEARL R. — Evolution and Mortality. (Reprint. from the « Quarterly Review of Biology ». Vol. III, pp. 271-280). S. 1, 1928. 8°.
- PEARL R. — Alcohol and Life Duration. (Reprint. from « International Clinics ».

- Vol. III, pagine 27-51). Philadelphia, 1928. 8°.
- PEARL R. — Cancer from the Viewpoint of the Human Biologist. (Reprint. from « International Clinics ». Vol. III, pagine 53-77). Philadelphia, 1928. 8°.
- PEARL R. — On the Pathological Relations between Cancer and Tuberculosis. (Reprint from the « Proceedings of the Society for Experimental Biology and Medicine ». 1928, pp. 73-75). S. l., 1928. 8°.
- PLATANIA G. — Commemorazione di *Ciro Chistoni*. (Estr. dal « Bollettino della Società dei Naturalisti in Napoli ». Volume XI. pp. 113-121). Napoli, 1929. 8°.
- SCHWARTZ B. — A New Species of *Trichostangylyd* Worm of the Genus *Cooperia* from the Carabao in the Philippine Islands, With a Review of the Genus. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 74). Washington, 1928. 8°, pp. 1-5.
- SIACCI F. — Scritti scientifici di Francesco Siacci pubblicati sotto gli auspici del Governo Nazianale. Vol. I. Parte I, II, vol. II. Roma, 1928. 4°, pp. 1-IX, 1-492, 1-VI, 1-749; 1-XIII, 1-614.
- SILVESTRI F. — Descrizione di un nuovo Diplopodo della famiglia Glomeridae della California. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario ». Vol. XXII, pp. 198-203). Portici, 1929. 8°.
- TAYLOR E. L. — *Moniezia*, a Genus of Cestode Worms, and the proposed Reduction of its Species to Three. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 74). Washington, 1928. 8°, pp. 1-5.
- VASCO F. — Relatorio da missão vacinica ao planalto de Benguela em 1914. Lisboa, 1914. 8°, pp. 1-36.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 19 maggio 1929 (anno VII)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Chimica-fisica. — *Joni, numero elettronico e simmetria.* Nota ⁽¹⁾
del Corrisp. P. VINASSA.

Se, come mi pare di aver ormai dimostrato, ogni entità chimica tende ad assumere uno stato di equilibrio, e, ad eccezione dello stadio mono-elettronico, sempre persiste una simmetria: binaria, ternaria, quaternaria o senaria, la legge deve applicarsi non solo agli elettronili e quindi alle molecole, ma altresì agli joni.

In base a questa considerazione ho voluto sottoporre ad esame gli joni meglio individuati, dal punto di vista del loro numero elettronico e della simmetria degli elettroni che son disposti attorno al nucleo; che, per me, come ho già fatto osservare ⁽²⁾, è il solo che possa a buon diritto chiamarsi *atomo*.

Poichè dovrò sempre riferirmi alla classificazione degli elettronili e questa ha subito qualche modificazione dopo la sua prima comparsa ⁽³⁾ così riporto qui la tabella degli elettronili, classificati secondo il loro numero elettronico.

(1) Presentata nella seduta del 5 maggio 1929.

(2) *Su talune leggi geochimiche.* « Boll. Soc. Geol. Ital. », 47, p. 149.

(3) *Elettroni e simmetria.* « Nuovo Cimento », IV, p. 384.

TABELLA I.

N. elettronico	METALLOIDI				Zerovalenti	METALLI							
0						H ^I							
1	—	—	—	—		—	—	—	—	—	—	—	
2					He	Li ^I	Be ^{II}	B ^{III}	C ^{IV}	N ^V			
3	—	—	—	—		—	—	—	—	—	—	—	
4							C ^{II}	N ^{III}					
5							(? N ^{II})						
6													
7	—	—	—	—		—	—	—	—	—	—	—	
8	—	—	—	—		—	—	—	—	—	—	—	
9	—	—	—	—		—	—	—	—	—	—	—	
10	IVC	IN	IIO	IF	Ne	Na ^I	Mg ^{II}	Al ^{III}	Si ^{IV}	P ^V	S ^{VI}	Cl ^{VII}	
11	—	—	—	—		—	—	—	—	—	—	—	
12							(Si ^{II})	P ^{III}	S ^{IV}	Cl ^{IV}			
13									(? Cl ^{IV})				
14							S ^{II}	(Cl ^{III})					
15	—	—	—	—		—	—	—	—	—	—	—	
16	—	—	—	—		—	—	—	—	—	—	—	
17	—	—	—	—		—	—	—	—	—	—	—	
18	IVSi	IIIP	IIIS	ICl	Ar	K ^I	Ca ^{II}	Sc ^{III}	Ti ^{IV}	V ^V	Cr ^{VI}	Mn ^{VII}	
19								Ti ^{III}	V ^{IV}		Mn ^{VI}		
20							(Ti ^{II})	V ^{III}			(Fe ^{VI})		
21							(V ^{II})	Cr ^{III}	(Mn ^{IV})				
22							Cr ^{II}	Mn ^{III}					
23							Mn ^{II}	Fe ^{III}					
24							Fe ^{II}	Co ^{III}	Ni ^{IV}				
25							Co ^{II}	(? Ni ^{III})					
26							Ni ^{II}						
27	—	—	—	—		—	[Cu ^{II}]	—	—	—	—	—	
28					[Ni]	Cu ^I	Zn ^{II}	Ga ^{III}	Ge ^{IV}	As ^V	Se ^{VI}	(Br ^{VII})	
29							(Ga ^{II})						
30							Ge ^{II}	As ^{III}	Se ^{IV}	(Br ^V)			
31													
32							(? Se ^{II})	Br ^{III}					
33	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
34	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
35	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
36		IIIAs	IISe	IBr	Kr	Rb ^I	Sr ^{II}	Y ^{III}	Zr ^{IV}	Nb ^V	Mo ^{VI}	43 ^{VII}	Ru ^{VIII}

Segue: TABELLA I.

N. elettronico	METALLOIDI				Zerovalenti	METALLI						
36	III ^{As}	II ^{Se}	I ^{Br}	Kr	Rb ^I	Sr ^{II}	Y ^{III}	Zr ^{IV}	Nb ^V	Mo ^{VI}	43 ^{VII}	Ru ^{VIII}
37								(Nb ^{IV})	Mo ^V	(43 ^{VI})	(Ru ^{VII})	
38							Nb ^{III}	Mo ^{IV}		Ru ^{VI}		
39						(?Nb ^{II})	Mo ^{III}	(43 ^{IV})				
40						(Mo ^{II})	(43 ^{III})	Ru ^{IV}				
41						(43 ^{II})	Ru ^{III}					
42						Ru ^{II}	Rh ^{III}	Pd ^{IV}				
43						(Rh ^{II})						
44						Pd ^{II}						
45	—	—	—		—	—	—	—	—	—	—	—
46				[Pd]	Ag ^I	Cd ^{II}	In ^{III}	Sn ^{IV}	Sb ^V	Te ^{VI}	IV ^{VII}	
47					—	(In ^{II})		(?Sb ^{IV})				
48					(In ^I)	Sn ^{II}	Sb ^{III}	Te ^{IV}	IV			
49												
50						Te ^{II}	III					
51	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
52	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
53	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
54-68	III ^{Sb}	II ^{Te}	I	X	Cs ^I	Ba ^{II}	La ^{III}	Hf ^{IV}	Ta ^V	W ^{VI}	75 ^{VII}	Os ^{VIII}
69							(Hf ^{III})	(Ta ^{IV})	W ^V	75 ^{VI}		
70								(?W ^{IV})		Os ^{VI}		
71								(75 ^{IV})				
72						(?W ^{II})	(75 ^{III})	Os ^{IV}				
73						(75 ^{II})	Os ^{III}	Ir ^{IV}				
74						(Os ^{II})	Ir ^{III}	Pt ^{IV}				
75						(Ir ^{II})	(Pt ^{III})					
76						Pt ^{II}	[Au ^{III}]					
77	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
78				[Pt]	Au ^I	Hg ^{II}	Tl ^{III}	Pb ^{IV}	Bi ^V	Po ^{VI}	85 ^{VII}	
79						(?Tl ^{II})						
80					Tl ^{II}	Pb ^{II}	Bi ^{III}					
81												
82												
83	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
84	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
85	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
86				Em	87I	Ra ^{II}	Ac ^{III}	Th ^{IV}	Pa ^V	U ^{VI}	?	
87	—	—	—		—	—	—	—	—	—	—	—
88	—	—	—		—	Th ^{II}	—	U ^{IV}	—	—	—	—

È perfettamente inutile riportare una tabella degli joni semplici. Non tutti gli elettronili sono anche joni, ma tutti gli joni semplici sono elettronili.

Anche tra gli joni semplici possiamo notare la grande prevalenza di essi in corrispondenza degli equilibri nobili quaternari: 2, 10, 18, 36, 54, 68, 86 e di quelli senari: 28, 46, 78. Quasi due terzi degli joni semplici conosciuti appartengono a simmetrie nobili. I rimanenti sono tutti compresi entro numeri che comportano una simmetria inferiore; nessuno però appartiene ad un numero corrispondente ad una disposizione asimmetrica.

Di maggiore interesse sono gli joni complessi, di cui nella tabella seguente riporto i più noti e i più sicuri.

TABELLA II.

Num. elettronici	Joni binari	Num. elettronici	Joni binari
m 0 + n 10	H ₄ N'; HO', H ₂ N', HN''.	m 37 + n 10	RuO' ₄
m 0 + n 18	HS'	m 38 + n 10	RuO'' ₄
m 4 + n 10	CN', NO' ₂	m 40 + n 18	Mo ₃ Cl' ₄
m 10 + n 10	AlO''' ₃ , AlF'' ₆ , SiF'' ₆ , SiO'' ₃ , PO''' ₄ , SO'' ₄ , ClO' ₄	m 46 + n 10	SnF'' ₆ , TeO'' ₄ , JO' ₄
m 12 + n 10	SO'' ₃ , ClO' ₃	m 47 + n 18	SbCl'' ₆
m 14 + n 10	S ₂ O'' ₃ , ClO' ₂	m 48 + n 10	TeO'' ₃ , TeF'' ₆ , JO' ₃
m 18 + n 10	TiF'' ₆ , CrO'' ₄ , Cr ₂ O'' ₇ , MnO' ₄	m 48 + n 18	TeCl'' ₆
m 19 + n 10	VO''; MnO'' ₄	m 48 + n 36	TeBr'' ₆
m 21 + n 10	CrF'' ₆	m 48 + n 54	TeJ'' ₆
m 23 + n 10	FeF'' ₆	m 50 + n 10	JO' ₂
m 25 + n 10	CoF'' ₄	m 70 + n 10	OsO'' ₄
m 26 + n 10	NiF'' ₄	m 72 + n 18	OsCl'' ₆
m 28 + n 10	ZnO'' ₂ , AsO''' ₄ , SeO'' ₄	m 73 + n 18	IrCl'' ₆
m 28 + n (2+10)	Zn(CN)'' ₄	m 74 + n 18	IrCl'' ₆
m 30 + n 10	SeO'' ₃ , BrO' ₃	m 75 + n 18	PtCl'' ₅
m 36 + n 10	NbO''' ₅ , ZrF'' ₆ , MoO'' ₄ , Mo ₂ O'' ₇ , Mo ₃ O'' ₁₀ , Mo ₄ O'' ₁₃	m 76 + n 18	PtCl'' ₄
m 36 + n 18	MoCl'' ₄	m 78 + n 10	TiF'' ₆
		m 80 + n 10	BiO'
		m 80 + n 18	PtCl'

Segue: TABELLA II.

Numeri elettronici	Joni ternari	Numeri elettronici	Joni ternari
m 0 + n 2 + p 10	HBeO ₂ ', HCO ₃ '	m 18 + n 18 + p 10	CrSO ₃ "
m 0 + n 4 + p 10	HCO ₂ '	m 22 + n (4 + 10) + p 18	Cr(CN)S'
m 0 + n 10 + p 10	H ₄ NO'	m 24 + n 10 + p 10	Co(NO ₂) ₆ '''
m 0 + n 10 + p 10	HPO ₄ ", HCO ₃ '	m 75 + n 18 + p 10	PtCl ₃ O"
m 0 + n 12 + p 10	HPO ₃ "	m 76 + n 18 + p 10	PtCl ₂ O"
m 0 + n 18 + p 10	HCrO ₄ '	m (0+10) + n 2 + p 10	(CH ₃) CO ₂ '
m 18 + n 10 + p 10	CrCN'		

Anche qui risulta la grande prevalenza degli equilibri nobili. Ma notevole è il fatto che anche in quelli joni, in cui uno dei componenti ha simmetria inferiore, questo è sempre accompagnato da *uno* che ha simmetria nobile negli joni binari e da *due* che hanno entrambi simmetria nobile nei ternari.

Possiamo dunque concludere che: *ogni entità chimica idrolizzabile si scinde in joni simmetrici*, i quali generalmente sono equilibri nobili quaternari o senari. Joni corrispondenti ad aggruppamenti asimmetrici non sussistono ⁽¹⁾.

A confermare quanto sopra ho detto possiamo notare che esistono, anche tra gli joni, le stesse condizioni già notate per gli elettronili, quando questi abbiano valenze corrispondenti ad uno stadio asimmetrico e cioè il raddoppiamento. Come non sussiste un SBr ma si ha invece S₂Br₂ ecc.⁽²⁾, così non sussiste Hg ma si ha invece Hg₂ e nei binari: C₂O₄", N₂O₂", Si₄O₆" ecc.

Questo fatto accertato della simmetria degli joni, simmetria anche maggiore di quella notata negli elettronili, dovrebbe avere, con molta probabilità, una certa importanza per lo studio dei reticolati cristallini.

(1) Sole eccezioni: ClO' ed JO' corrispondenti a ClI e JI, i quali non compaiono nella tabella degli elettronili perchè asimmetrici. Questi joni son rari e forse il loro studio ulteriore potrà essere interessante.

(2) La simmetria negli elettroni. Questi «Rendiconti», 6, VI, 2° sem., fasc. 11, p. 457.

*
**

La constatazione che negli joni complessi esiste sempre almeno un componente a simmetria di gaz nobile, mi ha spinto allo studio di varî composti dal punto di vista della simmetria dei loro costituenti.

Non sto qui a riportare le varie migliaia di corpi considerati da questo punto di vista. Moltissimi sono i composti che hanno tutti quanti i componenti con simmetria di gaz nobile. E sono, come già ho dimostrato ⁽¹⁾, quelli a molecola più stabile. Ma, in ogni caso, si può esprimere la regola seguente, che, per la sua generalità, può ritenersi una vera e propria legge statistica: « *In tutti quanti i corpi composti almeno uno dei costituenti ha numero elettronico corrispondente a quello di un gaz nobile* ».

Questo del resto si può anche rilevare *a priori* dalla tabella degli elettronili, in quanto che nessun metalloide esiste, come elettronile, se non in corrispondenza dei numeri: 2, 10, 18, 36 e 54.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DAI SOCI

Matematica. — *Sur les formes générales de la loi des grands nombres dans les espaces fonctionnels.* Nota di V. GLIVENKO, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. CASTELNUOVO.

Dans une Note récente ⁽³⁾ j'ai montré comment la loi des grands nombres s'étend à certains espaces fonctionnels. Ici, je vais généraliser ce résultat, et cela dans les deux directions à la fois.

D'une part, je m'occuperai non pas de la loi classique des grands nombres mais d'une loi beaucoup plus générale, indiquée, pour le cas ordinaire numérique, par M. A. Kolmogoroff. Celles des propositions concernant la loi de Kolmogoroff que je veux étendre aux espaces fonctionnels ont été établies dans ma Note précédente ⁽⁴⁾.

D'autre part, je ferai l'étude non pas de l'espace que j'avais étudié dans la Note ci-dessus mentionnée, mais d'une catégorie bien plus vaste d'espaces abstraits. Les espaces que je considérerai ici seront des espaces

(1) *Su talune leggi geochimiche.* Loc. cit., p. 158.

(2) Nella seduta del 3 marzo 1929.

(3) *Sur la loi des grands nombres dans les espaces fonctionnels*, ces « Rendiconti », vol. VIII, fasc. 12, 1928, pp. 673-676.

(4) *Sur quelques formes générales de la loi des grands nombres*, ces « Rendiconti », vol. IX, fasc. 6, 1929, pp. 466-469.

vectoriels généraux, c'est-à-dire des systèmes formés chacun par: 1^{er} un ensemble d'éléments ξ, η, \dots de nature quelconque que l'on peut appeler *points* de l'espace considéré, et 2^{me} les deux opérations, l'une portant sur deux points quelconques ξ, η et désignée par $\xi + \eta$, l'autre portant sur un point quelconque ξ et sur n'importe quel nombre réel a , et désignée par $a\xi$, ces opérations possédant respectivement les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication des vecteurs ordinaires⁽¹⁾. On supposera de plus que, dans l'espace considéré, une définition du point limite est adoptée, et que l'addition et la multiplication y sont des opérations continues, ce qui permettra d'étendre automatiquement à cet espace l'intégration par rapport à un paramètre numérique, donc aussi la définition de la « valeur probable », c'est-à-dire de la position probable, d'un point susceptible d'une infinité de positions dans l'espace.

Ceux de ces espaces dont je m'occuperai ici seront les espaces où tout couple de points ξ, η définit d'une manière univoque et continue un nombre $Q(\xi, \eta)$ qui est, en fonction de ces deux points, une forme bilinéaire symétrique et telle que la forme quadratique correspondante $Q(\xi, \xi)$ est une forme définie positive, et j'appellerai *norme* d'un point ξ le nombre $\|\xi\| = \sqrt{Q(\xi, \xi)}$.

1. Soit donné maintenant une suite de quantités éventuelles indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, et soit défini une suite de points $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$, de notre espace, le n -ième de ces points ξ dépendant des valeurs que prennent les n premières quantités x , et cela de la manière que tous les intégrales qui servent à définir les « valeurs probables » de nos points, existent. Les notations qui se rattachent au calcul des probabilités seront ici les mêmes que dans ma Note précédente.

Nous allons démontrer le théorème suivant:

Proposons-nous de choisir successivement, au hasard, les valeurs des quantités $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$; alors, si l'on a, pour une certaine fonction des entiers $v(n)$,

$$\frac{1}{v^2(n)} \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{N} [\|\xi_n - \mathfrak{N}[\xi_n]\|^2] \rightarrow 0,$$

on a aussi, quel que soit le nombre positif ε ,

$$\mathfrak{B} [\|\xi_n - \mathfrak{N}[\xi_n]\| \geq \varepsilon | v(n) |] \rightarrow 0.$$

En vertu de l'inégalité de Tchebichef et de la définition de la norme, on a:

$$\mathfrak{B} [\|\xi_n - \mathfrak{N}[\xi_n]\| \geq \varepsilon | v(n) |] \leq \frac{1}{\varepsilon^2 v^2(n)} \mathfrak{N} [Q(\xi_n - \mathfrak{N}[\xi_n], \xi_n - \mathfrak{N}[\xi_n])].$$

(1) On trouvera la liste de ces propriétés, par exemple, chez M. H. WEYL, *Raum. Zeit. Materie*, 5^e éd., p. 15.

La dernière partie de cette inégalité peut s'écrire:

$$\mathfrak{M} \left[Q \left(\sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{U}_{i-1} [\xi_n] - \mathfrak{U}_i [\xi_n], \sum_{k=1}^{k=n} \mathfrak{U}_{k-1} [\xi_n] - \mathfrak{U}_k [\xi_n] \right) \right],$$

ou encore:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \mathfrak{M} [Q (\mathfrak{U}_{i-1} [\xi_n] - \mathfrak{U}_i [\xi_n], \mathfrak{U}_{k-1} [\xi_n] - \mathfrak{U}_k [\xi_n])].$$

Examinons d'abord les termes de cette double somme dans lesquels $i \neq k$, et soit, pour fixer les idées, $i > k$. Pareillement à ce que nous avons eu dans la Note précédente, un tel terme pourra s'écrire:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{M} [\mathfrak{U}_{i-1}, [Q (\mathfrak{U}_{i-1} [\xi_n], \mathfrak{U}_{k-1} [\xi_n])]] - \mathfrak{M} [\mathfrak{U}_{i-1}, [Q (\mathfrak{U}_{i-1} [\xi_n], \mathfrak{U}_k [\xi_n])]] \\ & - \mathfrak{M} [\mathfrak{U}_i [Q (\mathfrak{U}_i [\xi_n], \mathfrak{U}_{k-1} [\xi_n])]] + \mathfrak{M} [\mathfrak{U}_i [Q (\mathfrak{U}_i [\xi_n], \mathfrak{U}_k [\xi_n])]] = \\ & = \mathfrak{M} [Q (\mathfrak{U}_{i-1} [\xi_n], \mathfrak{U}_{i-1} [\xi_n])] - \mathfrak{M} [Q (\mathfrak{U}_{i-1} [\xi_n], \mathfrak{U}_{i-1} [\xi_n])] - \\ & - \mathfrak{M} [Q (\mathfrak{U}_i [\xi_n], \mathfrak{U}_i [\xi_n])] + \mathfrak{M} [Q (\mathfrak{U}_i [\xi_n], \mathfrak{U}_i [\xi_n])] = 0. \end{aligned}$$

Quant aux termes dans lesquels $i = k$, chacun d'eux pourra s'écrire:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{M} [Q (\mathfrak{U}_{i-1} [\xi_n - \mathfrak{M}_i [\xi_n]], \mathfrak{U}_{i-1} [\xi_n - \mathfrak{M}_i [\xi_n]])] \leq^{(1)} \\ & \leq \mathfrak{M} [\mathfrak{U}_{i-1} [Q (\xi_n - \mathfrak{M}_i [\xi_n], \xi_n - \mathfrak{M}_i [\xi_n])]]. \end{aligned}$$

Il en résulte que la dernière partie de notre première inégalité ne dépasse pas la somme

$$\sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{M} [Q (\xi_n - \mathfrak{M}_i [\xi_n], \xi_n - \mathfrak{M}_i [\xi_n])] = \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{M} [\|\xi_n - \mathfrak{M}_i [\xi_n]\|^2],$$

ce qui confirme notre assertion.

2. Dans l'énoncé du théorème qui vient d'être démontré, les expressions $\|\xi_n - \mathfrak{M}_i [\xi_n]\|$ et $\|\xi_n - \mathfrak{M} [\xi_n]\|$ peuvent être remplacées respectivement par les expressions $F (\xi_n, \mathfrak{M}_i [\xi_n])$ et $F (\xi_n, \mathfrak{M} [\xi_n])$, où $F (\xi, \eta)$ est une fonction non négative possédant les propriétés suivantes: 1^{er} $F (\xi, \xi) = 0$ et, quel que soit le nombre positif ε , il lui correspond un nombre positif ε' tel que, toutes les fois où l'on a $\|\xi - \eta\| < \varepsilon'$, où a aussi $F (\xi, \eta) \leq \varepsilon$; et 2^{me} il existe un nombre M tel que l'on a toujours $\|\xi - \eta\| \leq M F (\xi, \eta)$.

3. Parmi les espaces satisfaisant à nos conditions se trouvent, par exemple, les suivants:

A) L'espace fonctionnel où les ξ sont des fonctions de carrés sommables d'une variable réelle, $\xi \equiv f(t)$, définies dans l'intervalle $0 \leq t \leq 1$,

(1) Cette inégalité, de même que celle de Schwarz, résulte de la convexité de la forme $Q (\xi, \xi)$ comme fonction de ξ .

et où la convergence vers une limite qui figure dans la définition de la « valeur probable » est définie comme la convergence uniforme de fonctions, et l'on pose, $p(t)$ étant une fonction positive de carré sommable fixée à l'avance:

$$Q(\xi, \eta) = \int_0^1 p(t) f(t) g(t) dt,$$

de sorte qu'on a:

$$\|\xi - \eta\| = \sqrt{\int_0^1 p(t) (f(t) - g(t))^2 dt}.$$

Le cas où $p(t) \equiv 1$ est celui qui a été considéré dans ma Note antérieure.

B) L'espace de Hilbert où les ξ sont des suites infinies de nombres réels, $\xi \equiv (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, tels que les séries $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + \dots$ sont convergentes. Dans cet espace, le passage à la limite qui sert à définir la « valeur probable » est défini comme dans le cas des vecteurs ordinaires, et l'on pose:

$$Q(\xi, \eta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n + \dots,$$

de sorte qu'on a:

$$\|\xi - \eta\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2 + \dots}.$$

Bien entendu, les espaces euclidiens n -dimensionnels s'y rattachent eux-aussi.

4. Ici, comme dans la Note antérieure, nous avons nous borné aux cas où les points ξ d'un espace fonctionnel dépendent des valeurs de variables éventuelles numériques x . Cela nous a permis de se servir partout des intégrales de Stieltjes. Mais, au fond, cette restriction n'est point essentielle: on retrouverait des propositions entièrement analogues si l'on supposait que nos points dépendent des résultats d'épreuves quelconques. Pour cela, il suffirait de se servir des intégrales de M. M. Fréchet étendues aux ensembles abstraits⁽¹⁾, en modifiant convenablement leur définition.

(1) M. FRÉCHET, *Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait*, « Bull. de la Soc. Mathém. de France », t. 43, 1925, pp. 248-265.

Matematica. — *Sulla rappresentazione parzialmente intrinseca dei tensori.* Nota di MARIA PASTORI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

Nel calcolo differenziale assoluto di Ricci e Levi-Civita i tensori vengono rappresentati mediante le loro componenti covarianti, contravarianti o miste (introdotte, queste ultime dal prof. Palatini) ⁽²⁾, o infine mediante le loro componenti intrinseche (chiamate anche invarianti o ortogonali).

Queste ultime si ottengono, come è noto, saturando gli indici delle componenti covarianti mediante i parametri di n congruenze ortogonali e sono invarianti rispetto alle trasformazioni di coordinate, mentre si comportano, di fronte alla trasformazione dell'ennupla di congruenze in un'altra, secondo una legge analoga a quella di covarianza.

Ora, partendo dalle componenti covarianti, si costruiscono le componenti miste trasformando soltanto alcuni degli indici di covarianza in indici di contravarianza mediante opportuna composizione col tensore fondamentale. Analogamente, partendo dalle componenti covarianti si possono costruire delle componenti parzialmente intrinseche, saturando soltanto alcuni degli indici mediante i parametri di un'ennupla di congruenze (ortogonale o no).

La considerazione delle componenti parzialmente intrinseche non mi pare priva di interesse, per se stessa, e perchè serve a lumeggiare relazioni note (come il legame tra il tensore fondamentale e quello di curvatura ⁽³⁾, il modo di trasformarsi dei parametri e dei momenti delle linee coordinate per una trasformazione di queste ultime).

Considero dapprima le componenti parzialmente intrinseche costruite con l'ausilio di un'ennupla di congruenze ortogonali, e dò le formole di trasformazione di tali componenti, e per un cambiamento delle sole coordinate, e per un cambiamento delle sole congruenze, e per un cambiamento simultaneo delle coordinate e delle congruenze.

Passo poi a considerare le componenti parzialmente intrinseche costruite con l'ausilio di un'ennupla qualunque di congruenze, per fermarmi infine sul caso particolare in cui le congruenze dell'ennupla coincidono con quelle delle linee coordinate.

In questo caso non è possibile considerare altro che una trasformazione simultanea delle coordinate e delle congruenze, e la rappresentazione

(1) Nella seduta del 21 aprile 1929.

(2) A. PALATINI, *Sui fondamenti del calcolo differenziale assoluto*. «Rend.» del Circ. Mat. di Palermo, to. XLIII, 1919, pp. 192-202.

(3) Cfr. nota 1 a p. 837.

(totalmente) intrinseca è quella usata dal prof. Cisotti nelle sue *Lezioni di calcolo tensoriale*⁽¹⁾ e in alcune Note recenti⁽²⁾.

1. *Caso in cui l'ennupla di congruenze è ortogonale.* — Siano $T_{jk}(j, k = 1, 2 \dots n)$ le componenti covarianti di un tensore doppio \mathbf{T} , e $\lambda_i(i, j = 1, 2 \dots n)$ i parametri, λ_i i momenti di un'ennupla di congruenze ortogonali (componenti contravarianti e covarianti degli n versori che individuano le congruenze dell'ennupla). Essi soddisfano alle condizioni di ortogonalità:

$$(1) \quad \sum_i \lambda_i \lambda_j = \sum_i \lambda_i^2 \lambda_k = \epsilon_k^i \quad (1 \text{ per } i=k, 0 \text{ per } i \neq k).$$

Le componenti parzialmente intrinseche di \mathbf{T} saranno della forma:

$$(2) \quad T_{i \cdot k} = \sum_j T_{jk} \lambda_j.$$

Esse evidentemente differiscono, se \mathbf{T} non è simmetrico, da quelle che si ottengono saturando il secondo indice invece del primo.

Dovendo ora considerare, relativamente alle componenti parzialmente intrinseche, diversi tipi di trasformazioni, introduco le seguenti notazioni:

a) sopralineo gli indici di covarianza quando opero un cambiamento di coordinate lasciando fisse le congruenze;

b) sopralineo gli indici di invarianza quando opero un cambiamento di congruenze lasciando fisse le coordinate;

c) sopralineo le componenti quando opero un cambiamento simultaneo delle coordinate e delle congruenze. La sopralineatura delle componenti equivale, secondo le convenzioni precedenti, alla sopralineatura di tutti gli indici di cui le componenti medesime sono affette.

Per un cambiamento di coordinate, le componenti (2) si trasformano secondo la nota legge di covarianza:

$$(3) \quad T_{i \cdot k} = \sum_j T_{i \cdot j} \frac{\partial x_j}{\partial x_k}.$$

Per un cambiamento di congruenze si hanno fra gli antichi e i nuovi parametri le relazioni:

$$(4) \quad \lambda_j = \sum_i \lambda_i^j c_{ih}$$

(1) Milano, Tamburini, 1928, p. 83.

(2) U. CISOTTI, *Il tensore triplo di Christoffel*. Questi «Rendiconti», vol. IX, ser. 6^a, fasc. 2^o, gennaio 1929; *Il secondo tensore triplo di Christoffel e la derivazione intrinseca* (in corso di pubblicazione presso questi «Rendiconti»).

dove c sono invarianti per un cambiamento di coordinate, ed hanno il significato geometrico di coseni degli angoli che le linee della i -esima congruenza della nuova ennupla formano con quelle della congruenza h -esima dell'antica (come si deduce immediatamente da (4)).

Le (4), stabilite per i parametri, valgono anche per i momenti ⁽¹⁾.

Da (2) e da (4) discende la seguente legge di trasformazione delle componenti parzialmente intrinseche di \mathbf{T} per un cambiamento delle congruenze

$$(5) \quad \bar{T}_{\cdot k} = \sum_i^n T_{\cdot k} c_{ib}.$$

Finalmente da (3) e da (5) discende la seguente legge di trasformazione delle componenti parzialmente intrinseche di \mathbf{T} , per un cambiamento simultaneo delle coordinate e delle congruenze:

$$(6) \quad \bar{T}_{\cdot k} = \sum_i^n T_{\cdot j} c_{ib} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_k}.$$

Viceversa, n^2 funzioni T_k delle coordinate, legate all'ennupla di congruenze così, che di fronte a un cambiamento simultaneo delle coordinate e delle congruenze, si trasformano secondo la legge (6), saranno le componenti parzialmente intrinseche di un tensore doppio, le cui componenti covarianti si otterranno nel modo seguente:

$$(7) \quad T_{kh} = \sum_i^n T_{ij} \lambda_{ih} \lambda_{kj}$$

e le cui componenti (totalmente) intrinseche si otterranno nel modo seguente:

$$(8) \quad T = \sum_{ib}^n T_{\cdot k} \lambda_{\cdot i}^k \lambda_{\cdot b}^k.$$

Infatti da (6) discendono, in virtù delle formole: $\bar{\lambda}_b = \sum_j^n \lambda_{uj} \frac{\partial x_u}{\partial \bar{x}_b}$, e delle analoghe per $\bar{\lambda}^k$, le seguenti:

$$\begin{aligned} \sum_i^n \bar{T}_{ij} \bar{\lambda}_{\cdot j}^k &= \sum_i^n T_{ij} \lambda_{\cdot j}^k \lambda_{\cdot i}^k \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_k} \\ \sum_i^n \bar{T}_{\cdot i} \bar{\lambda}_{\cdot b}^k &= \sum_i^n T_{\cdot j} \lambda_{\cdot i}^k \lambda_{\cdot b}^k c_{il} \end{aligned}$$

(1) Cfr. a proposito delle formole relative alle trasformazioni delle congruenze, G. VRANCEANU, *Studio geometrico di sistemi anolonomi*. « Annali di Matematica », ser. IV, to. VI, fasc. I e II (novembre 1928-febbraio 1929) pp. 9-43.

di cui le prime assicurano che le (7) non sono più legate all'ennupla, ma solo alle coordinate, secondo la legge di covarianza; e le altre che le (8) non sono più legate alle coordinate, ma solo all'ennupla di congruenze secondo una legge analoga.

È interessante osservare che la saturazione parziale (2) permette di scomporre il tensore doppio \mathbf{T} in n tensori semplici, per ciascuno dei quali le componenti covarianti si hanno facendo variare k da 1 a n (e considerando i come indice ordinale), le componenti intrinseche facendo variare i da 1 a n (e considerando k come indice ordinale).

Tale scomposizione richiede però che non si considerino trasformazioni contemporanee delle coordinate e delle congruenze.

Caso particolare delle (2) sono gli stessi parametri λ_k , componenti parzialmente intrinseche del tensore fondamentale $a_{ik}^{(1)}$.

Le considerazioni fatte per semplicità per un tensore doppio, si estendono immediatamente a un tensore qualunque. In particolare, la (6) viene sostituita da:

$$(6') \quad T_{i \dots i_p} \dots i_p \dots i_p \dots i_m = \sum_{i_1 \dots i_m} T_{j_1 \dots j_m} \dots j_p \dots j_p \dots j_m \frac{\partial x_{j_p+1}}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial x_{j_m}}{\partial x_{i_m}} \quad (2)$$

che per $p=0$ diventa la solita legge di trasformazione delle componenti covarianti, e per $p=m$ diventa legge di trasformazione delle componenti intrinseche per la trasformazione (4) dell'ennupla.

2. *Caso in cui l'ennupla di congruenze non è ortogonale.* — Le componenti parzialmente intrinseche di un tensore si possono anche costruire saturando alcuni degli indici delle sue componenti covarianti mediante i parametri di n congruenze non ortogonali (tali cioè che le (1) non siano soddisfatte per $i \neq k$). Esse saranno prese però tra loro indipendenti (tali cioè che il determinante delle λ_i sia diverso da zero).

Le formole di trasformazione dell'ennupla di congruenze considerata in una nuova ennupla di congruenze (ancora tra loro indipendenti) conser-

(1) La derivazione covariante degli n tensori semplici a cui dà luogo il tensore fondamentale, è legata, come è noto, ai coefficienti di rotazione di Ricci e quindi al tensore di Riemann; ma le considerazioni relative alla derivazione dei tensori, rappresentati sotto forma parzialmente intrinseca, formerà oggetto di una prossima comunicazione.

(2) Per semplicità di scrittura ho immaginato di saturare i primi p indici. Le componenti così ottenute differiscono, se \mathbf{T} non è simmetrico, da quelle che si otterrebbero saturando p indici in posizione diversa. Di componenti parzialmente intrinseche, per un generico tensore m^{plo} , ce ne sono di $\binom{m}{p}$ specie. se p è il numero degli indici che si vogliono saturare. Per $p=m$ si hanno le componenti totalmente intrinseche, o invarianti, le quali, qualunque sia l'ordine con cui si sono saturati gli indici, danno, complessivamente, lo stesso tensore.

veranno la forma (4) dove le c_{ib} (a determinante non nullo) saranno invarianti di fronte alle trasformazioni di coordinate, definiti dalle formole:

$$(9) \quad c_{ib} = \sum_j \lambda_j^i l_j^b$$

essendo $l_j^{(i)}$ l'elemento reciproco di λ_j^i nel determinante formato dai parametri delle congruenze primitive (complemento algebrico di λ_j^i diviso per il determinante stesso).

Le considerazioni del numero precedente si potranno ripetere anche in questo caso, in particolare varrà la legge (6) (o più in generale (6')) di trasformazione delle componenti parzialmente intrinseche di un tensore per un cambiamento contemporaneo delle coordinate e delle congruenze.

Date poi n^2 funzioni che si trasformano secondo la legge (6), esse si potranno considerare come le componenti parzialmente intrinseche di un tensore doppio le cui componenti (totalmente) intrinseche si avranno ancora dalle (7), mentre le componenti covarianti si avranno dalle seguenti:

$$(8') \quad T_{kb} = \sum_j T_k^j l_j^b.$$

3. *Caso in cui le congruenze dell'ennupla coincidono con quelle delle linee coordinate.* — Particolarmente notevole è il caso in cui si imponga alle congruenze dell'ennupla di coincidere con quelle delle linee coordinate, qualunque sia il sistema di queste ultime.

È noto che per i parametri delle linee coordinate si hanno le formole:

$$\lambda_j^i = \frac{e_j^i}{\sqrt{d_{ii}}}.$$

(1) Per la loro covarianza, relativamente all'indice j , cfr. T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, Roma, Stock, 1925, pp. 88-89.

Si vede poi facilmente che, per un cambiamento dell'ennupla, le l si trasformano secondo una legge che si deduce dalla (4) sostituendo a c il suo elemento reciproco C nel determinante delle c_{ib} medesime. Basta infatti partire dalla relazione

$$\sum_k \lambda_k^r l_j^k = e_j^r$$

e moltiplicare i due membri, prima per l_r^h e sommare rispetto ad r , poi per C e sommare rispetto ad h . (Cfr. L. P. EISENHART, *Non-riemannian geometry*, « Amer. Math. Soc. Coll. Publications », New York, 1927, p. 46).

Le componenti parzialmente intrinseche di \mathbf{T} hanno in questo caso la forma:

$$(2') \quad T_{i \cdot k} = \frac{T_{ik}}{\sqrt{a_{ii}}}$$

E, poichè $l_j = \varepsilon_j^b \sqrt{a_{bh}}$, si ha:

$$(9') \quad c = \sum_{ib}^n j_u \bar{\lambda}_i^u \frac{\partial x_j}{\partial x_u} l_j = \frac{\sqrt{a_{bh}} \partial x_h}{\sqrt{a_{ii}} \partial x_i}.$$

La (6) dà quindi

$$(6'') \quad \bar{T}_{i \cdot b} = \frac{\bar{T}_{ib}}{\sqrt{a_{ii}}}.$$

Caso particolare delle (2') sono gli stessi parametri $\lambda_j = \frac{a_{ij}}{\sqrt{a_{ii}}}$ delle linee coordinate, componenti parzialmente intrinseche del tensore fondamentale rispetto all'ennupla delle coordinate medesime.

La scomposizione così fatta del tensore doppio a_{ij} in n tensori semplici non risponde però alla condizione indicata nel n. 1, perchè in questo caso un generico cambiamento di coordinate implica un cambiamento anche delle congruenze e reciprocamente.

D'altra parte si vede subito che, per un valore fisso di i , la legge (6'') di passaggio dagli antichi ai nuovi parametri delle linee coordinate *iesime* coincide con la legge di covarianza (3) soltanto per una trasformazione di coordinate che lasci invariate le *iesime*.

Dunque la legge di trasformazione dei parametri delle linee coordinate di fronte a una generica trasformazione di queste ultime, è un caso particolare della (6).

Le componenti (totalmente) intrinseche di un tensore m^{plo} sono, in questo caso:

$$(2'') \quad \frac{T_{i_1 \dots i_m}}{\sqrt{a_{i_1 i_1}} \dots \sqrt{a_{i_m i_m}}} \quad (1).$$

La legge di trasformazione delle (2'') per un cambiamento di coordinate sarà la (6') ove si ponga $p = m$ e, per le c , i valori (9'). Si ottiene, in tal modo, una formola del tipo (6'').

(1) Cfr. nota 1 a p. 835.

Matematica. — *Sopra certi problemi di equivalenza.* Nota di G. VRANCEANU, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

È ben noto come il problema dell'equivalenza di due varietà riemanniane, si riconduce ad un sistema di equazioni a differenziali totali misto, sopra i quali sistemi, esiste un teorema classico, il quale afferma che se tutte le relazioni in termini finiti che se ne ottengono ⁽²⁾ (sia scrivendo che le derivate seconde delle incognite sono simmetriche, sia derivando le relazioni finite già esistenti), sono compatibili, il sistema ammette delle soluzioni, che possono dipendere da costanti arbitrarie, ma non da funzioni arbitrarie. Ora, il prof. O. Veblen mi ha gentilmente suggerito l'idea di considerare il problema di equivalenza di due varietà anolonomie, varietà delle quali io mi sono occupato ⁽³⁾, come varietà nate dalla interpretazione geometrica dei sistemi anolonomi della Meccanica. Il metodo che io ho adoperato per trattare questo problema, permette una veduta d'insieme anche su altri problemi di equivalenza, come farò vedere in questa Nota, ma devo avvertire, fin dal principio, che una parte di questi problemi, tra i quali entra anche il problema di equivalenza delle varietà anolonomie, conducono ad un sistema a derivate parziali, di una forma specifica che io chiamo *a differenze*, e non ad un sistema a differenziali totali. Siccome non esiste per questi sistemi un teorema di esistenza analogo a quello sopra ricordato ⁽⁴⁾, possiamo affermare solamente, che le condizioni in termini finiti, che noi indicheremo, sono necessarie, ma data l'interpretazione geometrica di queste condizioni, io non dubito che esse sono anche sufficienti e, quanto alla soluzione, essa potrà dipendere anche da funzioni arbitrarie.

Supponiamo che abbiamo in ogni punto di uno spazio a n dimensioni $X_n(x^1, x^2, \dots, x^n)$, un sistema di n vettori controvarianti ed indipendenti, e siano $\lambda_b^i (i = 1, 2, \dots, n)$ le componenti del vettore $(b) (b = 1, 2, \dots, n)$. Le λ_b^i sono a considerarsi come funzioni continue e de-

(1) Nella seduta del 21 aprile 1929.

(2) Vedi O. VEBLEN, *Invariants of quadratic differential Forms* (Cambridge, 1927), chapitre V, p. 67. Vedi anche G. RICCI, *Delle trasformazioni delle forme quadratiche*, « Rendiconti Acc. dei Lincei », (5), vol. XXI, 1902, pp. 527-532.

(3) Vedi in particolare, *Studio geometrico dei sistemi anolonomi*, « Annali di Matematica », serie IV, t. VI, 1929.

(4) Almeno, io non sono riuscito a ridurre questo problema ad uno dei problemi di esistenza, dei sistemi di equazioni a derivate parziali, già noti. Cfr. G. RIQUIER, *Le Méthode des Fonctions majorantes et les systèmes d'Equations aux dérivées partielles*, « Mémoires des Sciences Mathématiques », fasc. XXXII.

rivabili delle x , a determinante diverso da zero. Le curve tangenti in qualunque punto di X_n a questi vettori costituiscono delle congruenze che chiameremo λ e, come al solito, le λ_b^i saranno i loro parametri, e i reciproci delle λ_b^i , nel determinante da esse costituito, che indicheremo con $\lambda_{b/i}$ saranno i momenti delle congruenze λ . Sia poi un altro spazio ad n dimensioni $Y_n(y_1, y_2, \dots, y_n)$, nel quale abbiamo un altro sistema di n congruenze indipendenti $\bar{\lambda}$, aventi come parametri e momenti le quantità $\bar{\lambda}_b^i, \bar{\lambda}_{b/i}$ funzioni delle y .

Supponiamo adesso di eseguire una trasformazione di variabili invertibile

$$(1) \quad y^r = y^r(x^1, x^2, \dots, x^n),$$

che fa passare dalle coordinate y del secondo spazio, alle coordinate x del primo spazio. Indicando con $\bar{\lambda}_{b/i}$ i momenti delle congruenze $\bar{\lambda}$, dopo questa trasformazione, possiamo esprimere le derivate della (1) sotto la forma

$$(1') \quad \frac{\partial y^r}{\partial x^i} = \sum_b^n \bar{\lambda}_b^r \bar{\lambda}_{b/i}.$$

Osserviamo adesso che i $\bar{\lambda}_{b/i}$, che sono funzioni delle x , si possono esprimere linearmente in funzione dei momenti delle congruenze λ

$$(2) \quad \bar{\lambda}_{b/i} = \sum_k^n c_b^k \lambda_{k/i},$$

dove i coefficienti c_b^k sono funzioni delle x , a determinante diverso da zero, le loro espressioni essendo date dalle formule

$$c_b^k = \sum_i^n \bar{\lambda}_{b/i} \lambda_k^i.$$

Perciò a qualunque trasformazione di variabili (1), corrisponde una trasformazione (2), e cioè dei valori ben determinati dei coefficienti c_b^k . La reciproca non è sempre vera. Infatti, dati i coefficienti c_b^k come funzioni delle x a determinante diverso da zero, le eventuali funzioni y delle x sono a determinarsi come soluzioni del sistema a differenziali totali

$$(3) \quad \frac{\partial y^r}{\partial x^i} = \sum_{b,k}^n c_b^k \lambda_{k/i} \bar{\lambda}_b^r,$$

che non è altro che il sistema (1') dove al posto di $\bar{\lambda}_{b/i}$ sono stati introdotti i loro valori (2). Le condizioni di integrabilità del sistema (3), che

esprimano che le derivate seconde delle y sono simmetriche, si possono scrivere

$$B_{h,kl} = \sum_i^n \left(\frac{\partial^2 y^r}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 y^r}{\partial x^j \partial x^i} \right) \bar{\lambda}_{h/r} \lambda_k^i \lambda_l^j = 0$$

le quali a calcoli fatti assumono la forma

$$(4) \quad \frac{dc_b^k}{ds_1} - \frac{dc_b^i}{ds_k} = \sum_{\alpha\beta}^n \bar{w}_{\alpha\beta} c_\alpha^k c_\beta^i - \sum_\alpha^n w_{kl}^\alpha c_b^\alpha,$$

dove le $\frac{dc_b^k}{ds_1}$ stanno a indicare le derivate intrinseche dei c_b^k , rispetto alle congruenze λ , le w essendo date dalle espressioni

$$(2') \quad w_{kl}^h = \sum_j^n \left(\frac{d\lambda_{h/j}}{dx^j} - \frac{d\lambda_{h/l}}{dx^i} \right) \lambda_h^i \lambda_j^l,$$

e le \bar{w} da espressioni analoghe, ma relative alle congruenze $\bar{\lambda}$. Le (4) rappresentano (tanto che i c_b^k sono funzioni note delle x), delle relazioni in termini finiti cui devono soddisfare le incognite y , che entrano nelle \bar{w} .

Da queste relazioni se ne possono dedurre delle altre per derivazione e così via, e il sistema (3) avrà delle soluzioni, solo nel caso in cui queste relazioni sono compatibili, circostanza che non si presenterà in generale, per il fatto che il numero delle equazioni è maggiore di n , numero delle incognite.

Se invece di fissare *a priori* i valori di c_b^k , si lasciano arbitrari, le equazioni (3) insieme alle (4) formano un sistema di equazioni a derivate parziali nelle incognite y e c_b^k , a determinarsi in funzioni delle x , e sappiamo già che questo sistema ammette come soluzioni tutte le trasformazioni del gruppo puntuale (1). Importa osservare che il sistema (3), (4) non si può risolvere rispetto alle derivate prime di c_b^k , ma solamente in rapporto alle differenze delle derivate intrinseche, le quali, come stanno a provare le (4), si esprimono per una funzione lineare nei c_b^k a coefficienti dipendenti dalle x , e per una forma quadratica a coefficienti dipendenti dalle incognite y . (Tali sistemi a differenze si presentano anche in altri problemi, come per esempio nella teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni)⁽¹⁾. Tenendo conto della formula nota

$$(3') \quad \frac{d^2 c_b^k}{ds_r ds_1} - \frac{d^2 c_b^k}{ds_1 ds_r} = - \sum_\alpha^n \frac{dc_b^k}{ds_r} w_{1r}^\alpha$$

(1) Vedi L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni*, p. 110.

che esprime la differenza delle derivate seconde intrinseche di una funzione del posto, le condizioni di integrabilità delle equazioni (4) assumono la forma

$$(4') \quad \frac{d}{ds_r} \left(\frac{dc_b^k}{ds_l} - \frac{dc_b^l}{ds_k} \right) + \frac{d}{ds_l} \left(\frac{dc_b^r}{ds_k} - \frac{dc_b^k}{ds_r} \right) + \frac{d}{ds_k} \left(\frac{dc_b^l}{ds_r} - \frac{dc_b^r}{ds_l} \right) = - \\ - \sum_{\alpha}^n \left(\frac{dc_b^k}{ds_{\alpha}} w_{ir}^{\alpha} + \frac{dc_b^r}{ds_l} w_{kl}^{\alpha} + \frac{dc_b^l}{ds_{\alpha}} w_{rk}^{\alpha} \right),$$

dove nelle parentesi si devono mettere i secondi membri delle (4). Queste condizioni sono *identicamente soddisfatte*, in virtù delle identità a cui soddisfano le w

$$(5) \quad \frac{dw_{kl}^h}{ds_r} + \frac{dw_{rk}^h}{ds_l} + \frac{dw_{rl}^h}{ds_k} + \sum_{\alpha}^n (w_{r\alpha}^h w_{kl}^{\alpha} + w_{l\alpha}^h w_{rk}^{\alpha} + w_{k\alpha}^h w_{rl}^{\alpha}) = 0,$$

che non sono, che un'altra forma delle identità cicliche a cui soddisfano i coefficienti a quattro indici di Ricci.

Prescindendo da questi casi estremi, in cui i coefficienti c_b^k sono funzioni note delle x , o sono completamente arbitrari, possiamo considerare dei problemi intermedi, e cioè di vedere se il sistema (3), (4) ammette delle soluzioni, quando i coefficienti c_b^k sono sottoposti a certe condizioni, le quali non li determina completamente, i casi più interessanti essendo quelli in cui i c_b^k devono appartenere ad un dato gruppo, come faremo vedere nel seguito.

1. - *Gruppo ortogonale ed il problema di equivalenza di due varietà riemanniane.* Supponiamo in primo luogo che i c_b^k debbano soddisfare alle condizioni di ortogonalità

$$(5') \quad \sum_{\beta}^n c_b^k c_{\beta}^l = \delta_k^l \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}.$$

Le prime derivate intrinseche di queste equazioni, associate alle (4), permettono di risolvere rispetto alle derivate prime di c_b^k

$$(6) \quad \frac{dc_b^k}{ds_l} = \sum_{\alpha\beta}^n \bar{\gamma}_{b\alpha\beta} c_{\alpha}^k c_{\beta}^l - \sum_{\alpha}^n \gamma_{\alpha kl} c_{\alpha}^{\alpha},$$

dove γ_{bkl} , $\bar{\gamma}_{bkl}$, sono i coefficienti di rotazione di Ricci, relativi alle λ e $\bar{\lambda}$ le loro espressioni in funzioni delle w essendo date dalle formule

$$\gamma_{bkl} = \frac{1}{2} (w_{kl}^b + w_{lh}^k + w_{kh}^l).$$

Ne risulta che le congruenze λ e $\bar{\lambda}$ sono equivalenti di fronte alle trasformazioni del gruppo ortogonale, se il sistema ai differenziali totali (4), (6)

con le condizioni in termini finiti (5'), ammette delle soluzioni. Troviamo altre condizioni finite se facciamo uso della (3') e arriviamo alle formule

$$(7) \quad \sum_{\alpha\beta\gamma} \bar{\gamma}_{h\alpha,\beta\gamma} c_{\alpha}^k c_{\beta}^l c_{\gamma}^r - \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha k,lr} c_h^{\alpha} = 0$$

$\bar{\gamma}_{hk,lr}, \bar{\gamma}_{hk,lr}$ essendo i coefficienti a quattro indici di Ricci delle congruenze λ e $\bar{\lambda}$. Dalle (7) se ne trovano delle altre per derivazione e così via. Ora, dire che le congruenze λ e $\bar{\lambda}$ sono equivalenti entro il gruppo ortogonale, è lo stesso che dire che la varietà di Riemann V_n , nella quale le congruenze λ sono ortogonali e la V_n nella quale sono ortogonali le $\bar{\lambda}$, sono equivalenti.

Gruppo anolonomo metrico ed il problema di equivalenza di due varietà anolome. Chiamiamo gruppo anolonomo G_n^m (m essendo un intero minore di n), quel gruppo per cui i coefficienti c_h^k soddisfano alle equazioni

$$(7') \quad c_{k'}^{k'} = c_k^{k'} = 0 \quad (k \leq m, k' > m).$$

Il gruppo anolonomo si dirà metrico se le $m^2 c_h^k$ ($h, k \leq m$), soddisfanno alle condizioni di ortogonalità

$$(7'') \quad \sum_i^m c_h^k c_i^l = \delta_{kl}.$$

le $c_{k'}^{k'}$ ($k', k' > m$) essendo qualunque, perchè a determinante diverso da zero.

In virtù delle condizioni (7') e delle (7'') derivate rispetto a s_r ($r \leq m$), le equazioni (4) si dividono in 6 gruppi

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dc_h^k}{ds_1} &= \sum_{\alpha\beta}^m \bar{\gamma}_{\alpha\beta}^k c_{\alpha}^k c_{\beta}^l - \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha k,l} c_h^{\alpha}, \\ \frac{dc_h^k}{ds_1} &= \sum_{\alpha}^m \sum_{m+1}^n \bar{w}_{\alpha\beta'}^k c_{\alpha}^k c_{\beta'}^l - \sum_{\alpha}^m w_{h\alpha}^k c_h^{\alpha}, \\ \frac{dc_{k'}^{k'}}{ds_1} - \frac{dc_{k'}^{k'}}{ds_{k'}} &= \sum_{m+1}^n \gamma_{\alpha\beta'}^k c_{\alpha'}^{k'} c_{\beta'}^l - \sum_{m+1}^n \gamma_{k'l}^{\alpha'} w_{h\alpha'}^{\alpha'}, \\ 0 &= \sum_{m+1}^n \gamma_{\alpha\beta'}^k c_{\alpha'}^{k'} c_{\beta'}^l - \sum_{\alpha}^m w_{h\alpha}^k c_h^{\alpha}, \end{aligned} \right.$$

e due altri, che per semplicità non scriviamo, i quali si ottengono uno dal secondo e l'altro dal quarto, cambiando gli indici non accentati che variano da 1 a m in indici accentati che variano da $m+1$ a n , e viceversa.

Si tratta adesso di vedere in che condizioni il sistema a differenze (3), (8) e (7''), nelle n incognite y , nelle $m^2 c_h^k$ e nelle $(n-m)^2 c_{k'}^{k'}$, può ammettere delle soluzioni, il che equivale a vedere in che condizioni le varietà anolome V_n^m e V_n^m , formate colle λ e $\bar{\lambda}$ possono essere equivalenti.

Per questo, serviamoci in primo luogo delle condizioni (3'), nelle quali si è posto una volta $h, k, l, r \leq m$ ed un'altra volta $h, k, l \leq m, r' > m$. Queste sono le sole combinazioni che si possono calcolare pel tramite delle (8), e sono nello stesso tempo indipendenti dalle (4'). Esse conducono a due sistemi di relazioni in termini finiti analoghi al (7') e che legano i tensori principali $\lambda_{hkl,lr}, \bar{\lambda}_{hkl,lr}$ e $V_{hkl,r'}, \bar{V}_{hkl,r'}$, delle V_n^m e \bar{V}_n^m . Da queste relazioni in termini finiti, dalle (7'') e dalle ultime (8), possiamo poi per derivazione tensoriale⁽¹⁾ trovare delle altre e così via, e le congruenze λ e $\bar{\lambda}$ non saranno equivalenti sotto il gruppo anolonomo metrico, se tutte queste relazioni in termini finiti non saranno compatibili.

Problemi di equivalenza di due sistemi di Pfaff⁽²⁾. Consideriamo i due sistemi di Pfaff

$$(9) \quad \varphi_h = \sum_i \lambda_{h/i} dx^i = 0, \quad \bar{\varphi}_h = \sum_i \bar{\lambda}_{h/i} dx^i = 0, \quad (h = 1, 2, \dots, m)$$

si domanda quando questi due sistemi sono equivalenti, e cioè quando esiste una trasformazione di variabili (1), per passare dal secondo sistema al primo. Per ridurre questo problema, ad un sistema a differenze, prendiamo altre $n - m$ forme di Pfaff

$$\varphi_{h'} = \sum_i \lambda_{h'/i} dx^i \quad (h' = m + 1, \dots, n),$$

in modo che le n forme $\varphi_h, \varphi_{h'}$ siano indipendenti e facciano lo stesso per le variabili y . Questo fatto, il problema si riduce al problema di equivalenza delle n congruenze λ e $\bar{\lambda}$, per cui i coefficienti $c_k^{h'}$ ($h \leq m, k' > m$) sono zero, nel quale caso il sistema (3), (4) assume la forma di un sistema a differenze, avente come sole relazioni in termini finiti, le ultime (8), che esprimano le relazioni che devono passare tra le condizioni di integrabilità $w_{k'l'}^h, \bar{w}_{k'l'}^h$ dei due sistemi (9).

Il problema di equivalenza degli spazi a connessione affine. Vogliamo indicare come si può trattare col nostro metodo il problema di equivalenza di due varietà a connessione affine⁽³⁾. Per questo supponiamo che gli spazi X_n e Y_n , nei quali sono definite le congruenze λ e $\bar{\lambda}$ sono a connessione affine $\Gamma_{ij}^r(x), \bar{\Gamma}_{ij}^r(y)$, e formiamo i coefficienti di Ricci generalizzati relativi alle congruenze λ

$$(9') \quad \gamma_{hkl}^* = \sum_{i,j} \left(\frac{d\lambda_{h/i}}{dx_j} - \sum_{\alpha} \Gamma_{ij}^{\alpha} \lambda_{h/\alpha} \right) \lambda_k^i \lambda_l^j$$

(1) Nel senso chiarito nel mio lavoro già citato.

(2) Questo problema è stato considerato dal prof. Y. W. Alexander in un corso fatto all'Università di Princeton nel 1928, secondo semestre, e risolto nel caso dei sistemi ad una sola equazione e nel caso dei sistemi completamente integrabili.

(3) Vedi L. P. EISENHART, *Non riemannian geometry*, (New-York, 1927), pp. 74-78.

e analogamente i $\bar{\gamma}_{hkl}^*$ relativi alle congruenze $\bar{\lambda}$. Si trova allora, senza difficoltà, che i coefficienti c_b^k devono soddisfare alle equazioni

$$(10) \quad \frac{dc_b^k}{ds_l} = \sum_{\alpha\beta}^n \bar{\gamma}_{b\alpha\beta}^* c_\alpha^k c_\beta^l - \sum_{\alpha}^n \gamma_{\alpha kl} c_b^\alpha,$$

in virtù delle quali, le equazioni (4) si scrivano

$$(10') \quad \sum_{\alpha\beta}^n (\bar{\gamma}_{b\alpha\beta}^* - \bar{\gamma}_{b\beta\alpha}^* - \bar{w}_{\alpha\beta}^b) c_\alpha^k c_\beta^l - \sum_{\alpha}^n (\gamma_{\alpha kl}^* - \gamma_{\alpha lk}^* - w_{kl}^\alpha) c_b^\alpha = 0.$$

Le quantità entro parentesi sono nulle, se le connessioni sono simmetriche, nel caso contrario, esse rappresentano le componenti delle torsioni dei due spazi. Ne risulta che il nostro problema si riduce a vedere se il sistema a differenziali totali (3), (10) (e (10')) se gli spazi sono con torsioni), ammette delle soluzioni.

Gruppo affine delle congruenze ed il relativo problema di equivalenza. Chiamiamo gruppo affine delle congruenze, quel gruppo per cui i coefficienti c_b^k sono costanti. In questo caso le equazioni (4) si scrivano

$$(11) \quad \sum_{\alpha\beta}^n \bar{w}_{\alpha\beta}^b c_\alpha^k c_\beta^l - \sum_{\alpha}^n w_{kl}^\alpha c_b^\alpha = 0.$$

Ora, se chiamiamo spazio affine delle congruenze λ , lo spazio le cui proprietà definite con referenza alle λ , sono degli invarianti per tutte le congruenze $\bar{\lambda}$, che se ne ottengano da λ , con delle trasformazioni (1) a coefficienti costanti c_b^k , questo spazio ammette una connessione affine i cui coefficienti γ_{hk}^* sono identicamente zero. Perciò, esso è uno spazio senza curvatura, ma con la torsione w_k^h . Ne risulta che due spazi affini delle congruenze λ e $\bar{\lambda}$, sono equivalenti, se per una scelta conveniente delle costanti c_b^k , se ne trovano delle funzioni y da soddisfare alle equazioni (11) e alle loro conseguenze che si formano in virtù delle equazioni (3).

Possiamo anche supporre che i coefficienti c_b^k sono sottoposti alle condizioni di ortogonalità, nel quale caso abbiamo il problema di equivalenza di due spazi di Einstein⁽¹⁾. Questi spazi si possono anche chiamare spazi euclidei di congruenze, perchè essi corrispondono al gruppo a coefficienti costanti ed ortogonali delle trasformazioni di congruenze.

(1) *Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus*, « Sitzungsberichte der Preussischen Ak. der Wissenschaften », (1928), s. 217.

Matematica. — *Le superficie iperspaziali con un doppio sistema coniugato.* Nota I di E. BOMPIANI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. SCORZA.

1. Le superficie iperspaziali che contengono un doppio sistema coniugato di curve o *reticolo* posseggono due gruppi distinti di proprietà (proiettive):

- a) quelle dipendenti dall'esistenza del reticolo ⁽²⁾;
- b) quelle dipendenti dall'ambiente in cui si trovano ⁽³⁾.

L'equivalente analitico delle prime è lo studio dell'equazione di Laplace

$$(1) \quad x_{11} = ax_{10} + bx_{01} + cx \quad \left(x_{rs} = \frac{\partial^{r+s} x}{\partial u_r \partial u_s} \right)$$

soddisfatta dalle coordinate omogenee (proiettive) dei punti della superficie riferita alle linee del reticolo ($du = 0, dv = 0$).

Proprietà generali del secondo gruppo non sono state studiate sebbene non manchino risultati particolari ⁽⁴⁾: ad esse è dedicata questa Nota. Ne risulta la distribuzione di dette superficie in tre categorie ben distinte, in relazione a tre tipi di sistemi di equazioni a derivate parziali; inizio poi lo studio della prima categoria.

2. In conseguenza della (1) lo spazio 2-oscultore, $S(2)$, in un punto generico x della superficie ⁽⁵⁾ è un S_4 ; lo spazio oscultore successivo $S(3)$ è al più un S_6 ; o in particolare un S_5 o un S_4 . Così seguitando, risulta $S(i)$ di dimensione $\geq 2i$; sia v il massimo valore di i per cui $S(v) \equiv S_{2v}$; sicchè $S(v+1)$ sarà un S_{2v} o un S_{2v+1} ma non un S_{2v+2} .

Nel primo caso la superficie *appartiene* ad un S_{2v} .

(1) Nella seduta del 5 maggio 1929.

(2) O proprietà del 2° ordine.

(3) O meglio proprietà di ordine > 2 non conseguenze delle precedenti.

(4) Vedansi per es. le mie Note: *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero* «Atti Acc. di Torino», 1912, n. 7; *Sullo spazio d'immersione di superficie ecc.* «Rend. Ist. Lombardo», 1914; *Sistemi coniugati sulle superficie degli iperspazi* «Rend. Circ. di Palermo», 1922; e per S_4 le ricerche di FUBINI nella *Geometria Proiettiva Differenziale* di Fubini e Čech (Zanichelli, 1927), t. II, § 103-111, ove sono ritrovate le 5 tangenti principali già introdotte da C. Segre e da me.

(5) Chiamo spazio v -oscultore ad una superficie in suo punto x , e l'indico con $S(v)$, lo spazio minimo contenente x e i punti derivati d'ordine $\leq v$, cioè gli S_v osculatori alle curve della superficie in x . Cfr. le mie Note *Sopra alcune estensioni ecc.* (già citata), ov'è data pure una nozione più generale; *Determinazione delle superficie integrali ecc.* «Rend. Istit. Lombardo», 1919.

Nel secondo caso possono presentarsi due eventualità⁽¹⁾: o la superficie appartiene ad un S_{2v+1} , oppure possiede ∞^1 curve appartenenti agli S_v osculatori ad un curva (coi possibili casi degeneri).

Il primo caso è caratterizzato da ciò che

1) tutte le equazioni a derivate parziali, soddisfatte dalle coordinate x dei punti della superficie d'ordine $\leq v$ sono conseguenze differenziali della (1);

2) esistono due equazioni differenziali d'ordine $v+1$, non conseguenze di (1), necessariamente del tipo

$$x_{v+1,0} = [S(v)] \quad , \quad x_{0,v+1} = [S(v)]. \quad (2)$$

3. Delle due eventualità che si presentano quando $S(v) \equiv S_{2v}$, $S(v+1) \equiv S_{2v+1}$ discutiamo la prima.

Il fatto relativo ad $S(v+1)$ porta l'esistenza di un'equazione differenziale d'ordine $v+1$ non conseguenza di (1) quindi del tipo

$$\lambda x_{v+1,0} + \mu x_{0,v+1} = [S(v)]; \quad (\lambda, \mu \text{ funzioni di } u, v).$$

Altre equazioni d'ordine $v+1$ non conseguenze di questa e di (1) non possono esistere. Sicchè l'appartenenza della superficie ad S_{2v+1} dipende dall'intorno d'ordine $v+2$. Se $\lambda \neq 0$ e $\mu \neq 0$ le conseguenze differenziali dell'ultima equazione e di (1) determinano effettivamente tutte le derivate d'ordine $v+2$ e la superficie sta in S_{2v+1} .

Se invece p. es. $\mu = 0$ non può determinarsi $x_{0,v+2}$ dalle precedenti; quindi in generale $S(v+2) \equiv S_{2v+2}$: solo un'ulteriore equazione, necessariamente del tipo

$$x_{0,v+2} = [S(v+1)] = [x_{0,v+1}, S(v)]$$

può portare l'appartenenza della superficie ad S_{2v+1} .

4. La discussione così esaurita della prima eventualità ci porta innanzi nella discussione della seconda; perchè ci risulta già che l'eq. d'ordine $v+1$, non conseguenza di (1), dev'essere del tipo $x_{v+1,0} = [S(v)]$ (o nell'analogo ottenuto scambiando u con v). D'altra parte un'equazione d'ordine $v+1$ deve esistere in relazione all'esistenza di ∞^1 linee in S_v : e deve perciò esser la precedente, cioè le linee ora ricordate fanno parte del doppio sistema coniugato (nel nostro caso sono le linee $u, dv = 0$).

Si ha poi in generale $S(v+i) \equiv S_{2v+i}$ fino ad un valore di i , che dirò v' , per il quale $S(v+v') \equiv S_{2v+v'}$ ma $S(v+v'+1) \equiv S_{2v+v'+1}$:

(1) V. *Determinazione delle superficie integrali* (ora citata); § 3.

(2) Con la notazione $[S(v)]$ intendo una combinazione lineare omogenea dei punti che individuano lo spazio $S(v)$; essa può adoperarsi con vantaggio tutte le volte che non occorra mettere in evidenza i coefficienti dei vari termini dell'equazione, ma solo il tipo di essa.

questo è lo spazio d'appartenenza della superficie. Esiste quindi, in relazione a questo v' , un'equazione del tipo

$$x_{0, v+v'+1} = [S(v + v')].$$

Se $v' = 1$ si ha una superficie di $S_{2, v+1}$ sulla quale le linee u ($dv = 0$) appartengono ad S_v : questo tipo è comune alle due ultime sottoclassi.

Riassumendo:

Le superficie in esame si dividono in tre categorie rappresentate analiticamente dai seguenti tre tipi di sistemi di equazioni (essendo v il massimo intero per cui $S(v) \equiv S_{2, v}$):

- I) $x_{11} = [S(1)]$; $x_{v+1,0} = [S(v)]$; $x_{0, v+1} = [S(v)]$ superficie di $S_{2, v}$;
 II) $x_{11} = [S(1)]$; $\lambda x_{v+1,0} + \mu x_{0, v+1} = [S(v)]$, ($\lambda \mu \neq 0$) » » $S_{2, v+1}$;
 III) $x_{11} = [S(1)]$; $x_{v+1,0} = [S(v)]$; $x_{0, v+v'+1} = [S(v + v')]$ » » $S_{2, v+v'}$.

SUPERFICIE DEL TIPO I.

5. Scriviamo esplicitamente le equazioni di questo tipo, oltre la (1), così

$$(2) \quad x_{v+1,0} = \alpha^{v_0} x_{v,0} + \alpha^{0v} x_{0v} + \alpha^{v-1,0} x_{v-1,0} + \alpha^{0, v-1} x_{0, v-1} + \dots + \alpha x$$

$$(3) \quad x_{0, v+1} = \beta^{v_0} x_{1,0} + \beta^{0v} x_{0v} + \beta^{v-1,0} x_{v-1,0} + \beta^{0, v-1} x_{0, v-1} + \dots + \beta x.$$

Lo studio dell'attuale categoria di superficie equivale alla teoria invariante del sistema scritto rispetto al gruppo di trasformazioni

$$(4) \quad x = \rho(u, v) \bar{x} ; \quad (5) \quad \bar{u} = \varphi(u), \quad \bar{v} = \psi(v)$$

con le (5) invertibili e $\rho \neq 0$ nel campo che si considera.

Per esse rimangono invariate le forme differenziali associate alla (1), cioè $h du dv$ e $k du dv$ (ove h e k sono gli invarianti relativi di Darboux) il cui significato geometrico è noto ⁽¹⁾. Indicando poi con $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ i coefficienti delle equazioni trasformate di (2) e (3) si ha per effetto della (4)

$$(6) \quad \bar{\alpha}^{v_0} = \alpha^{v_0} - (v + 1) \frac{\rho_{10}}{\rho}, \quad \bar{\alpha}^{0v} = \alpha^{0v}$$

e per effetto della (5)

$$(7) \quad \bar{\alpha}^{v_0} = \frac{\alpha^{v_0}}{\varphi'} - \left(\frac{v+1}{2} \right) \frac{\varphi''}{\varphi'^2}, \quad \bar{\alpha}^{0v} = \alpha^{0v} \frac{\psi'^v}{\varphi'^{v+1}}$$

e analogamente per i coefficienti di (3).

(1) V. le mie Note: *Ricerche analitiche e geometriche sull'equazione di Laplace* « Rend. Lincei », 1927; *Postilla sull'equazione di Laplace* « Boll. Un. Mat. Ital », 1927.

6. Si deduce da esse che sono invarianti le due forme elementari ⁽¹⁾

$$(8) \quad \alpha^{ov} \frac{du^{v+1}}{dv^v}, \quad \beta^{vo} \frac{dv^{v+1}}{du^v};$$

e di conseguenza l'invarianza delle altre forme

$$(9) \quad \alpha^{ov} \beta^{vo} du dv; \frac{\alpha^{2v} du^{2v+1} \pm \beta^{2v} dv^{2v+1}}{(du dv)}; (\alpha^{ov} \beta^{vo})^v (\alpha^{ov} du^{2v-1} \pm \beta^{vo} dv^{2v+1}).$$

Ciascuna delle due ultime forme uguagliata a zero fornisce in ciascun punto un gruppo di $2v + 1$ direzioni apolare alla coppia delle tangenti coniugate; e quindi due sistemi ∞^1 , di grado $2v + 1$, di linee invarianti sulla superficie.

Se poi si tien conto delle forme associate alla (1) ne risultano i due invarianti finiti

$$(10) \quad \alpha^{ov} \beta^{vo} / h, \quad \alpha^{ov} \beta^{vo} / k \quad (\text{se } h \text{ e } k \neq 0).$$

Si hanno anche le forme differenziali invarianti in un solo differenziale

$$(11) \quad d\sigma_1^{2v+1} = (\alpha^{ov} \beta^{vo}) \alpha^{ov} du^{2v+1}, \quad d\sigma_2^{2v+1} = (\alpha^{ov} \beta^{vo})^v \beta^{vo} dv^{2v+1};$$

$d\sigma_1$ e $d\sigma_2$, quando non siano nulli, possono chiamarsi archi proiettivi relativi alle curve del doppio sistema coniugato.

Se p. es. $\alpha^{ov} = 0$ la (2) e le sue conseguenze differenziali mostrano che tutti i punti $x_{v+t,0}$ ($t > 0$ qualsiasi) stanno nello S_{2v+1} che congiunge lo $S(v-1)$ osculatore in x alla superficie con lo S_v osculatore alla curva u ($dv = 0$) che vi passa; sicchè se $\alpha^{ov} = 0$ le linee u stanno in S_{2v-1} .

Non è escluso che queste linee appartengano a spazi S_{2v-1} ($t > 1$): per ciò occorre e basta che $\alpha^{ov} = \alpha^{o,v-1} = \dots = \alpha^{o,v-t+1} = 0$ ma $\alpha^{o,v-t} \neq 0$.

7. Le forme elementari (8) hanno un significato geometrico (proiettivo) semplice, come birapporti infinitesimi che mi limito ad enunciare.

Si considerino due punti della superficie O, O' e la maglia di linee u e v da essi individuata, e sia O'_1 il vertice di essa situato sulla linea u uscente da O (e sulla v uscente da O') e O'_2 l'altro vertice (sulla linea v per O e sulla u per O'). Si costruisca lo S_{2v-1} congiungente lo $S(v-1)$ osculatore in O alla superficie con lo S_v osculatore in O alla curva u e sia T_1 il punto comune alla retta $O'O'_1$ e allo S_{2v-1} , ed M un punto generico di $O'O'_1$.

(1) Questo metodo è del tutto analogo a quello da me tenuto per trovare le forme invarianti per le superficie di S_3 : *Le forme elementari e la teoria proiettiva delle superficie* « Boll. Un. Mat. Ital. » 1926; altrettanto dicasi per il loro significato geometrico, v. appresso n. 7.

Si faccia poi tendere O' ad O sopra una qualsiasi curva C (non tangente alla linea u per O); e quando $O' \rightarrow O$ il punto M tenda ad una posizione limite $\neq O$.

Il termine principale del birapporto $(O'_1 O'_1 T_1 M)$ quando $O' \rightarrow O$ su C dipende soltanto dalla tangente in O a C e vale

$$\frac{1}{v+1} \alpha^{0v} du^{v+1} / dv^v.$$

Analogamente (scambiando u con v , O'_1 con O'_2) si ha il significato dell'altra forma elementare.

Se si considerano invece la retta $O'_1 O'_2$ e i punti $X'_1 X'_2$ ove essa incontra i due S_{2v-1} costruiti come sopra per le linee u e v uscenti da O , poi si fa tendere O' ad O su C , il termine principale del birapporto $(X'_1 X'_2 O'_1 O'_2)$ vale

$$\frac{1}{(v+1)^2} \alpha^{0v} \beta^{v0} du dv$$

e fornisce pertanto il significato geometrico della forma quadratica invariante (9).

Si può osservare ancora che col birapporto $(O'_1 O'_2 X'_1 M)$, ove M è un punto arbitrario di $O'_1 O'_2$ non tendente ad O con O' , si può pure definire la prima forma elementare.

8. Se si tiene conto delle prime relazioni (6) e (7) e del modo di trasformarsi dei coefficienti di (1) risulta l'invarianza delle due forme differenziali del 2° ordine

$$(12) \{ \alpha^{v0} - (v+1)b \} du + \left(\frac{v+1}{2} \right) \frac{d^2u}{du} ; \{ \beta^{0v} - (v+1)\alpha \} dv + \left(\frac{v+1}{2} \right) \frac{d^2v}{dv}.$$

Se ne trae, per differenza, l'invarianza di

$$\left(\frac{v+1}{2} \right) \frac{dv d^2u - du d^2v}{du dv} + \{ \alpha^{v0} - (v+1)b \} du - \{ \beta^{0v} - (v+1)\alpha \} dv$$

che, diviso per la radice quadrata di una delle forme quadratiche invarianti, dà un invariante proiettivo del 2° ordine, o *curvatura proiettiva*, di qualsiasi curva tracciata sulla superficie.

Le linee a curvatura proiettiva nulla della superficie, definite da

$$du d^2v - dv d^2u = \frac{2}{v(v+1)} \{ \alpha^{v0} - (v+1)b \} du^2 dv - \frac{2}{v(v+1)} \{ \beta^{0v} - (v+1)\alpha \} du dv^2$$

costituiscono un sistema (∞^2) planare o 2-assiale, cioè tale che i piani ad

osculatori in un punto x incidono in rette uno stesso piano d'appoggio⁽¹⁾, individuato nel nostro caso da x e dai punti

$$2 \{ \alpha^{v_0} + (v^2 - 1) b \} x_{10} - v(v+1) x_{20} ; \quad 2 \{ \beta^{0v} + (v^2 - 1) a \} x_{01} - v(v+1) x_{02} ;$$

quindi secante in rette i piani osculatori in x alle linee del reticolo.

Ma questo definisce già, in ciascuno di detti piani, due rette invarianti (relative alle estremali di $h du dv$ e di $k du dv$);⁽²⁾ il birapporto delle tre rette invarianti di ciascun piano e della tangente al reticolo in esso dà un'invariante finito che vale

$$\frac{\alpha^{v_0} - (v+1)b - \binom{v+1}{2} \frac{\partial \log h}{\partial u}}{\alpha^{v_0} - (v+1)b - \binom{v+1}{2} \frac{\partial \log k}{\partial u}} \quad {}^0 \quad \frac{\beta^{0v} - (v+1)a - \binom{v+1}{2} \frac{\partial \log h}{\partial v}}{\beta^{0v} - (v+1)a - \binom{v+1}{2} \frac{\partial \log k}{\partial v}}$$

Se invece si sommano le (12) e poi si elimina la parte differenziale del 2° ordine tenendo conto dell'invarianza di $d \log(h du dv)$ ⁽³⁾ si trova facilmente la forma differenziale invariante del 1° ordine

$$\left\{ \alpha^{v_0} - (v+1)b - \binom{v+1}{2} \frac{\partial \log h}{\partial u} \right\} du + \left\{ \beta^{0v} - (v+1)a - \binom{v+1}{2} \frac{\partial \log h}{\partial v} \right\} dv$$

e l'analogia ottenuta scambiando h con k .

Uguagliando a zero queste due forme si hanno due sistemi ∞^1 di linee invarianti sulla superficie.

(1) Ho definito questi sistemi nella Nota: *Sulla corrispondenza puntuale fra due superficie a punti planari* «Boll. Un. Mat. Ital.», 1926, e se ne trovano esplicitamente le equazioni nella Memoria: *L'intorno dell'2° ordine e i sistemi pluriassiali sopra una superficie qualsiasi* «Accad. d. Scienze di Bologna», 1927.

(2) V. le mie Note: *Ricerche analitiche* etc. (già citata) e *Sulla geometria dell'equazione di Laplace* «Rend. Lincei», 1927.

(3) Ciò equivale a introdurre i differenziali secondi contravarianti rispetto ad $h du dv$ e ad applicare il cosiddetto Lemma del Ricci.

Matematica. — *Classificazione delle superficie dello spazio hilbertiano il cui spazio 2-tangente è a quattro dimensioni.* Nota III di A. TONOLO presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

10. Esistenza di una ellisse del piano normale per le superficie delle classi A) e B). Al punto f di V_2 - superficie della classe A) o B) - associamo il punto F del piano normale che si ottiene ponendo

$$(35) \quad F = f + \frac{\sum_{r,s} f_{r,s} du_r du_s}{\sum_{r,s} a_{r,s} du_r du_s}.$$

Al variare della direzione $\frac{du_2}{du_1}$ attorno al punto f nel piano tangente, il punto F genera nel piano normale la conica ⁽²⁾

$(\alpha) (\bar{y}, \bar{y}) \xi^2 + (\bar{x}, \bar{x}) \eta^2 - 2(\bar{x}, \bar{y}) \xi \eta + 2(\bar{a}, \bar{y}) \xi - 2(\bar{a}, \bar{x}) \eta + (\bar{a}, \bar{a}) = 0$, avendo indicato con ξ, η le coordinate cartesiane del punto F rispetto al sistema formato dalla coppia X, Y , ed avendo posto:

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{vmatrix} x_{1,2} & x_{1,1} \\ a_{1,2} & a_{1,1} \end{vmatrix}, \bar{x}_{1,2} = \bar{x}_{2,1} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \begin{vmatrix} x_{2,2} & x_{1,1} \\ a_{2,2} & a_{1,1} \end{vmatrix}, \bar{x}_{2,2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{vmatrix} x_{2,2} & x_{1,2} \\ a_{2,2} & a_{1,2} \end{vmatrix}; \\ \bar{y}_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{vmatrix} y_{1,2} & y_{1,1} \\ a_{1,2} & a_{1,1} \end{vmatrix}, \bar{y}_{1,2} = \bar{y}_{2,1} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \begin{vmatrix} y_{2,2} & y_{1,1} \\ a_{2,2} & a_{1,1} \end{vmatrix}, \bar{y}_{2,2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{vmatrix} y_{2,2} & y_{1,2} \\ a_{2,2} & a_{1,2} \end{vmatrix}; \end{array} \right.$$

le $\bar{a}_{r,s}$ - per simmetria di notazione - essendo date dalle posizioni (8). I tre sistemi $\bar{x}_{r,s}, \bar{y}_{r,s}, \bar{a}_{r,s}$ formano tre sistemi a due indici covarianti simmetrici di classe 1, cosicchè, se dividiamo ogni coefficiente dell'equazione (α) per a , i nuovi coefficienti diventano altrettanti invarianti.

Dimostriamo che nell'ipotesi $D \neq 0$, la conica (α) non è degenera. Essendo $D \neq 0$, anche il suo complementare D_1 è tale: ora abbiamo, a meno del fattore $a\sqrt{a}$,

$$(37) \quad D_1 = \begin{vmatrix} -\bar{a}_{2,2} & 2\bar{a}_{1,2} & -\bar{a}_{1,1} \\ -\bar{y}_{2,2} & 2\bar{y}_{1,2} & -\bar{y}_{1,1} \\ \bar{x}_{2,2} & -2\bar{x}_{1,2} & \bar{x}_{1,1} \end{vmatrix}.$$

(1) Nella seduta del 5 maggio 1929.

(2) Cfr. A. TONOLO, *Relazioni geometriche fra due sistemi di normali delle superficie dello spazio hilbertiano*, « Annales de la Société Polonaise de Mathématique », t. VIII (1929).

Formiamo $\frac{1}{2} D_1^2$: si ha:

$$\frac{1}{2} D_1^2 = D_1 \cdot \frac{1}{2} D_1 = \begin{vmatrix} -\bar{a}_{2,2} & 2\bar{a}_{1,2} & -\bar{a}_{1,1} \\ -\bar{y}_{2,2} & 2\bar{y}_{1,2} & -\bar{y}_{1,1} \\ \bar{x}_{2,2} & -2\bar{x}_{1,2} & \bar{x}_{1,1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\bar{a}_{1,1} & -\bar{a}_{1,2} & -\bar{a}_{2,2} \\ -\bar{y}_{1,1} & -\bar{y}_{1,2} & -\bar{y}_{2,2} \\ \bar{x}_{1,1} & \bar{x}_{1,2} & \bar{x}_{2,2} \end{vmatrix}.$$

Eseguiamo il prodotto per righe dei due determinanti del secondo membro: si ricava:

$$\frac{1}{2} D_1^2 = \begin{vmatrix} (\bar{a}, \bar{a}) & (\bar{a}, \bar{y}) & -(\bar{a}, \bar{x}) \\ (\bar{a}, \bar{y}) & (\bar{y}, \bar{y}) & -(\bar{x}, \bar{y}) \\ -(\bar{a}, \bar{x}) & -(\bar{x}, \bar{y}) & (\bar{x}, \bar{x}) \end{vmatrix},$$

e infine:

$$\frac{1}{2} D_1^2 = \begin{vmatrix} (\bar{y}, \bar{y}) & -(\bar{x}, \bar{y}) & (\bar{a}, \bar{y}) \\ -(\bar{x}, \bar{y}) & (\bar{x}, \bar{x}) & -(\bar{a}, \bar{x}) \\ (\bar{a}, \bar{y}) & -(\bar{a}, \bar{x}) & (\bar{a}, \bar{a}) \end{vmatrix}.$$

Il determinante del secondo membro è il discriminante dell'equazione (α) . Poichè D_1 non è nullo, questo discriminante sarà pure tale. Ora noi diciamo che la conica (α) è una ellisse. A questo scopo proviamo che si ha:

$$(38) \quad \begin{vmatrix} (\bar{y}, \bar{y}) & (\bar{x}, \bar{y}) \\ (\bar{x}, \bar{y}) & (\bar{x}, \bar{x}) \end{vmatrix} > 0.$$

Eseguiamo allora il prodotto delle due matrici

$$\bar{M} = \begin{vmatrix} \bar{x}_{1,1} & -2\bar{x}_{1,2} & \bar{x}_{2,2} \\ \bar{y}_{1,1} & -2\bar{y}_{1,2} & \bar{y}_{2,2} \end{vmatrix}, \quad \bar{N} = \begin{vmatrix} \bar{x}_{2,2} & \bar{x}_{1,2} & \bar{x}_{1,1} \\ \bar{y}_{2,2} & \bar{y}_{1,2} & \bar{y}_{1,1} \end{vmatrix}.$$

È:

$$(39) \quad \bar{M} \bar{N} = \begin{vmatrix} (\bar{x}, \bar{x}) & (\bar{x}, \bar{y}) \\ (\bar{x}, \bar{y}) & (\bar{y}, \bar{y}) \end{vmatrix},$$

ed anche:

$$(40) \quad \bar{M} \bar{N} = -2 \begin{vmatrix} \bar{x}_{1,1} & \bar{x}_{1,2} \\ \bar{y}_{1,1} & \bar{y}_{1,2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{x}_{2,2} & \bar{x}_{1,2} \\ \bar{y}_{2,2} & \bar{y}_{1,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{x}_{1,1} & \bar{x}_{2,2} \\ \bar{y}_{1,1} & \bar{y}_{2,2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{x}_{2,2} & \bar{x}_{1,1} \\ \bar{y}_{2,2} & \bar{y}_{1,1} \end{vmatrix} \\ - 2 \begin{vmatrix} \bar{x}_{1,2} & \bar{x}_{2,2} \\ \bar{y}_{1,2} & \bar{y}_{2,2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{x}_{1,2} & \bar{x}_{1,1} \\ \bar{y}_{1,2} & \bar{y}_{1,1} \end{vmatrix}.$$

Ora nel determinante D_1 , nel quale ogni elemento venga moltiplicato per \sqrt{a} , ogni minore del secondo ordine è uguale al prodotto del determinante D per il complemento algebrico del corrispondente minore di D . Ne viene che:

$$2a \begin{vmatrix} \bar{y}_{2,2} & \bar{y}_{1,2} \\ \bar{x}_{2,2} & \bar{x}_{1,2} \end{vmatrix} = Da_{2,2}, a \begin{vmatrix} \bar{y}_{2,2} & \bar{y}_{1,1} \\ \bar{x}_{2,2} & \bar{x}_{1,1} \end{vmatrix} = Da_{1,2}, 2a \begin{vmatrix} \bar{y}_{1,2} & \bar{y}_{1,1} \\ \bar{x}_{1,2} & \bar{x}_{1,1} \end{vmatrix} = Da_{1,1}.$$

Perciò dalla (40) si ottiene:

$$(41) \quad \bar{M} \bar{N} = \frac{2D^2}{(a, a)}.$$

Uguagliando i secondi membri delle (39), (41) si ricava l'identità:

$$\begin{vmatrix} (\bar{x}, \bar{x}) & (\bar{x}, \bar{y}) \\ (\bar{x}, \bar{y}) & (\bar{y}, \bar{y}) \end{vmatrix} = \frac{2D^2}{(a, a)}.$$

Il determinante D per le superficie delle classi A) e B) è diverso dallo zero, perciò, essendo positiva la combinazione (a, a) , il primo membro è certamente positivo, c. d. d.

11. *Riduzione della ellisse (α) ad un segmento per le superficie della classe C).* Per tali superficie, essendo $D = 0$, e le $x_{r,s}$ non potendo essere proporzionali alle $y_{r,s}$, dovrà aversi

$$(42) \quad y_{r,s} = \rho a_{r,s} + \sigma x_{r,s} \quad (\rho \neq 0).$$

Poniamo:

$$m = \sum_1^2 x_{r,s} du_r du_s,$$

$$n = \sum_1^2 a_{r,s} du_r du_s.$$

L'equazione (35) diventa:

$$F = j + \frac{m}{n} X + \frac{\rho n + \sigma m}{n} Y,$$

e le coordinate ξ, η del punto F sono quindi

$$(43) \quad \xi = \frac{m}{n}, \quad \eta = \rho + \sigma \frac{m}{n}.$$

Il luogo del punto F nel piano normale alla superficie al variare della direzione $\frac{du_2}{du_1}$ nel piano tangente, è situato sulla retta

$$(\beta) \quad \eta = \rho + \sigma \xi.$$

Vogliamo ora vedere quali punti di questa retta corrispondono alle direzioni $\frac{du_2}{du_1}$ reali del piano tangente: consideriamo perciò la prima delle (43), che scriviamo così:

$$n\xi - m = 0,$$

cioè:

$$\sum_{r,s}^2 (a_{r,s} \xi - x_{r,s}) dn_r du_s = 0.$$

Le ascisse ξ dei punti suddetti devono essere tali per cui l'espressione

$$f(\xi) = \begin{vmatrix} a_{1,1} \xi - x_{1,1} & a_{1,2} \xi - x_{1,2} \\ a_{2,1} \xi - x_{2,1} & a_{2,2} \xi - x_{2,2} \end{vmatrix}$$

deve risultare negativa o nulla. Ora abbiamo:

$$2f(\xi) = (a, a) \xi^2 - 2(a, x) \xi + (x, x);$$

e poichè (a, a) è positivo, ciò accadrà tutte le volte che ξ varierà nell'intervallo definito dalle radici reali ⁽¹⁾ dell'equazione $f(\xi) = 0$. Concludiamo che al variare della direzione $\frac{du_2}{du_1}$ nel piano tangente, il punto F descrive un segmento di retta nel piano normale, i cui estremi hanno per ascisse le radici dell'equazione $f(\xi) = 0$.

12. *Relazioni geometriche caratteristiche fra le superficie delle classi A), B) e l'ellisse (α), e fra quelle della classe C) e la retta β).*

Dimostriamo il seguente

LEMMA IV: *Ha luogo l'identità:*

$$(44) \quad (\bar{x}, \bar{y}) \Delta = \frac{\Delta_x \Delta_y}{\sqrt{a}}.$$

Dalla seconda e terza identità del Lemma III della Nota I, si ha:

$$(45) \quad \Delta_x \Delta_y = -\Delta \frac{(a, x)(a, y)}{2\sqrt{a}}$$

(1) Che le radici dell'equazione $f(\xi) = 0$ siano reali, risulta subito dall'osservare che questa equazione è

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} \xi - x_{1,1} & a_{1,2} \xi - x_{1,2} \\ a_{2,1} \xi - x_{2,1} & a_{2,2} \xi - x_{2,2} \end{vmatrix} = 0$$

nella quale la forma

$$\sum_{r,s}^2 a_{r,s} \xi_r \xi_s$$

è definita (positiva).

Moltiplichiamo fra loro le due matrici

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & -2 a_{1,2} & a_{2,2} \\ \gamma_{1,1} & -2 \gamma_{1,2} & \gamma_{2,2} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_{2,2} & x_{1,2} & x_{1,1} \\ a_{2,2} & a_{1,2} & a_{1,1} \end{vmatrix},$$

e procediamo nel solido modo: qui si trova:

$$(a, x)(a, y) = -2 a(\bar{x}, \bar{y}).$$

Sostituendo nella (45), si ottiene l'identità che si voleva provare.

Osserviamo ancora che, essendo

$$\Delta = -\sqrt{a}(\bar{a}, \bar{a}), \Delta_x = \sqrt{a}(\bar{a}, \bar{x}), \Delta_y = \sqrt{a}(\bar{a}, \bar{y}),$$

possiamo scrivere nella forma seguente l'equazione della ellisse (α):

$$(\alpha_1) \quad (\bar{y}, \bar{y}) \xi^2 + (\bar{x}, \bar{x}) \eta^2 + 2(\bar{x}, \bar{y}) \xi \eta + 2 \frac{\Delta_y}{\sqrt{a}} \xi - 2 \frac{\Delta_x}{\sqrt{a}} \eta - \frac{\Delta}{\sqrt{a}} = 0.$$

Ciò premesso, vediamo quali sono le proprietà geometriche caratteristiche della nostra ellisse per ogni tipo di superficie della classi A) e B), e quali proprietà caratteristiche ha la retta (β) per quelle della classe C).

Classe A), categ. a_1 . Poichè $\Delta \neq 0$, la ellisse non passa per l'origine degli assi: essendo $\Delta_x \neq 0, \Delta_y \neq 0$, per l'identità (44) anche (\bar{x}, \bar{y}) sarà diverso da zero; perciò i suoi assi non sono paralleli agli assi coordinati. Per noti canoni di geometria analitica, e per l'identità (44), vale manifestamente la proposizione reciproca.

Notiamo che dal fatto che l'ellisse (α) non è degenerare, segue che il determinante D , dato dalla (37) non è nullo, perchè uguale, a meno d'un fattore, al discriminante della equazione dell'ellisse, e perciò anche D è diverso dallo zero.

Classe A), categ. a_2 . L'ellisse non passa per l'origine degli assi, uno ed uno solo di questi coincide con un asse coordinato. Sussiste la proposizione inversa.

Classe A), categ. a_3 . Gli assi della ellisse coincidono con gli assi coordinati. Vale la reciproca.

Classe B). L'ellisse passa per l'origine degli assi, uno di questi, ed uno solo, coincide con un asse coordinato. L'inversa è pure vera.

Classe C) categ. c_1 . La retta (β) non è parallela all'asse ξ : infatti nel caso opposto sarebbe $\sigma = 0$, cioè per le (42) $y_{r,s} = \rho a_{r,s}$, perciò $\Delta_y = 0$, il che non è. Inversamente se la retta (β) non è parallela a nessun asse coordinato, i due minori Δ_x, Δ_y sono entrambi non nulli. Invero, se uno di essi fosse zero, ad esempio Δ_y , non potendo essere le $c_{r,s}$ una combinazione lineare delle $a_{r,s}$ e $y_{r,s}$ per quanto vedemmo al n. 5 della Nota II, dovrà aversi proporzionalità fra le $y_{r,s}$ e le $a_{r,s}$, e perciò $\sigma = 0$. La retta (β) sarebbe allora parallela all'asse ξ . Vale la reciproca.

Classe C), categ. c_2 . La retta (β) è parallela ad un asse coordinato. La reciproca è vera.

Matematica. — *Tensori associati ad un'ennupla vettoriale.*
 Nota di A. DE MIRA FERNANDES, presentata ⁽¹⁾ dal Corrispondente
 U. CISOTTI.

Un articolo del prof. Cisotti, pubblicato in questi « Rendiconti » ⁽²⁾ sul
 tensore triplo di Christoffel, suggerisce la costruzione di un sistema curioso di
 tensori (nel senso di M. Cisotti) associati ad un ennupla vettoriale qualunque.

Siano (α_i) le componenti (covarianti) degli n vettori di tale ennupla,
 definita in una molteplicità $V_n(x^1, x^2 \dots x^n)$ la cui forma fondamentale è

$$ds^2 = \sum_{ik} a_{ik} dx^i dx^k.$$

L'indice $h (= 1, 2 \dots n)$ è un indice d'ordine.

Per un teorema di Cisotti ⁽³⁾, le formazioni

$$(1) \quad \frac{T_{ijk\dots}}{\sqrt{a_{ii} a_{jj} a_{kk} \dots}} = \Gamma_{ijk\dots}$$

dove $T_{ijk\dots}$ sono le componenti d'un tensore covariante qualunque (nel senso
 di Cisotti), sono *invarianti*. Perciò

$$(2) \quad \frac{\alpha_i}{\sqrt{a_{ii}}} = \Gamma_{hi}$$

è un invariante, come lo è

$$(3) \quad \frac{\sqrt{a_{hh}} \alpha_i}{\sqrt{a_{ii} a_{hh}}} = \Gamma_{hi}.$$

Siccome il reciproco del teorema di Cisotti è vero,

$$(4) \quad D_{hi} = \sqrt{a_{hh}} \alpha_i$$

sono componenti di un tensore doppio covariante. Se l'ennupla vettoriale
 covariante (α_i) è quella dei *momenti* delle linee coordinate, $D_{hi} = a_{hi}$, perchè

è $\alpha_i = \frac{a_{hi}}{\sqrt{a_{hh}}}$; ed il tensore (D_{hi}) è il tensore fondamentale.

(1) Nella seduta del 19 maggio 1929.

(2) « Rendiconti », vol. IX, fasc. 2, 1929, p. 128.

(3) *Lezioni di Calcolo Tensoriale* (1928), p. 82.

Allo stesso modo, essendo

$$(5) \quad \frac{\alpha_{i,k}}{\sqrt{a_{ii} a_{kk}}} = \Gamma_{ik}$$

un invariante, saranno

$$(6) \quad D_{hik} = \sqrt{a_{hh}} \alpha_{i/k}$$

le componenti d'un tensore triplo associato all'ennupla vettoriale (α_i) .

Se l'ennupla (α_i) è quella dei momenti delle linee coordinate,

$$(7) \quad \alpha_{i/k} = \left(\frac{a_{hi}}{\sqrt{a_{hh}}} \right)_{|k}$$

dove h è appena un indice di ordine, e, perciò $\sqrt{a_{hh}}$ uno scalare e $a_{hi} = a_i$ le componenti covarianti di un vettore.

Cioè,

$$(8) \quad \alpha_{i/k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{a_{hi}}{\sqrt{a_{hh}}} \right) - \sum_l \left\{ \begin{matrix} i & k \\ l & l \end{matrix} \right\} \frac{a_{hl}}{\sqrt{a_{hh}}} = \frac{\frac{\partial a_{hi}}{\partial x^k} \sqrt{a_{hh}} - a_{hi} \frac{\partial \sqrt{a_{hh}}}{\partial x^k}}{a_{hh}} - \frac{1}{\sqrt{a_{hh}}} \left[\begin{matrix} i & k \\ h & h \end{matrix} \right] =$$

$$= \frac{\left\{ \left[\begin{matrix} h & k \\ i & i \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} i & k \\ h & h \end{matrix} \right] \right\} \sqrt{a_{hh}} - a_{hi} \left[\begin{matrix} h & k \\ h & h \end{matrix} \right]}{a_{hh}} - \frac{\left[\begin{matrix} i & k \\ h & h \end{matrix} \right]}{\sqrt{a_{hh}}} = \frac{\left[\begin{matrix} h & k \\ i & i \end{matrix} \right] - \frac{a_{hi}}{a_{hh}} \left[\begin{matrix} h & k \\ h & h \end{matrix} \right]}{\sqrt{a_{hh}}}.$$

E perciò

$$(9) \quad D_{hik} = \left[\begin{matrix} h & k \\ i & i \end{matrix} \right] - \frac{a_{hi}}{a_{hh}} \left[\begin{matrix} h & k \\ h & h \end{matrix} \right]$$

che è il tensore triplo di Christoffel di U. Cisotti.

Dalla equazione (4), considerando h come un indice di ordine, risulta

$$D_{hi/k} = D_{i/k} = \sqrt{a_{hh}} \alpha_{i/k} + \alpha_i \frac{\left[\begin{matrix} h & k \\ h & h \end{matrix} \right]}{\sqrt{a_{hh}}} = D_{hik} - \alpha_i \frac{\left[\begin{matrix} h & k \\ h & h \end{matrix} \right]}{\sqrt{a_{hh}}},$$

e perciò

$$(10) \quad D_{hik} = D_{i/k} - D_{hi} \frac{\left[\begin{matrix} h & k \\ h & h \end{matrix} \right]}{a_{hh}}.$$

Sostituendo in questa eguaglianza D_{hi} con a_{hi} , si ottengono egualmente le componenti del tensore triplo di Christoffel. Le espressioni

$$(11) \quad D_{hikl} = \sqrt{a_{hh}} \alpha_{ijk/l}$$

saranno anch'esse, pel teorema di Cisotti, le componenti di un tensore quadriplo. Ora derivando la (6) risulta (considerando h come indice di ordine)

$$D_{hik/l} = \sqrt{a_{hh}} \alpha_{ijk/l} + \alpha_{ijk/h} \frac{\left[\begin{smallmatrix} h & l \\ h \end{smallmatrix} \right]}{\sqrt{a_{hh}}} = D_{hikl} + D_{hik} \frac{\left[\begin{smallmatrix} h & l \\ h \end{smallmatrix} \right]}{a_{hh}}.$$

Cioè

$$(12) \quad D_{hikl} = D_{hik/l} - D_{hik} \frac{\left[\begin{smallmatrix} h & l \\ h \end{smallmatrix} \right]}{a_{hh}}.$$

Confrontando le formole (10) e (12) si vede come i successivi tensori associati dell'ennupla si formano dal precedente con legge semplice. Se, per esempio, (α_i) fosse costituito dai momenti delle linee coordinate e perciò se fosse D_{hik} il tensore triplo di Christoffel, potremo chiamare il tensore (12) *tensore quadriplo di Christoffel*, e così via.

Matematica. — *Sul concetto di vettore.* Nota di U. CASSINA, presentata dal Corrisp. G. PEANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sopra uno spostamento generalizzato negli spazi di Riemann.* Nota di P. NALLI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Elementi ellittici del sistema di « W Ursae majoris ».* Nota di G. VIOLA⁽¹⁾, presentata dal Corrisp. A. BEMPORAD.

Dei vari autori che si sono occupati, sotto l'aspetto teorico, del sistema della variabile « W Ursae Majoris », come Müller, Kempf, Shapley, Van Der Bilt, Russell, Fowler, Borton, Campbell, nessuno finora ha mai accennato alla ellitticità del sistema. Gli elementi orbitali fin qui dedotti valgono tutti nell'ipotesi di un'orbita circolare.

Intanto l'asimmetria della curva di luce notata per la prima volta da Müller e Kempf e confermata da Baldwin, Lazzarino, Bemporad, la differenza di massima luce raggiunta tra i minimi, il ritardo di circa 7 minuti

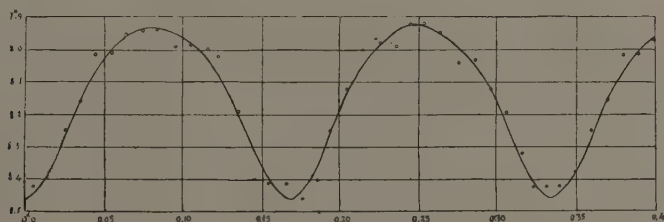


Fig. 2. — Curva di luce osservata: Baldwin (1908).

del minimo secondario rispetto alla metà del periodo, rilevati dalla curva di luce del Bemporad ci inducono ad ammettere il sistema come ellittico.

Ciò che abbiamo ammesso è pienamente confermato dai risultati delle nuove riduzioni da noi fatte delle osservazioni fotometriche di Baldwin, di Aurino, e delle osservazioni fotografiche di Russell, Fowler, Borton.

Le 260 osservazioni fotometriche eseguite da Baldwin furono ridotte tutte all'intervallo 2417955-2417955.33364044; ordinate secondo la fase e distribuite in gruppi di 9 danno un'ottima curva di luce (fig. 2) la quale presenta buon accordo con la curva del Bemporad⁽²⁾.

Dalla curva del Baldwin abbiamo dedotto con il metodo delle differenze finite le epoche dei minimi:

$$\text{Min. Princ.} = \text{D. J. } 2417955.0456$$

$$\text{Min. Sec.} = \text{D. J. } 2417955.2057$$

(1) Nella seduta del 19 maggio. 1929.

(2) Cfr. *Curva di luce e periodo di « W Ursae Majoris »*, questi « Rendiconti », 1929, serie 6^a, fasc. n. 9, p. 743.

quindi

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= 0^d.1061 \\ \frac{P}{2} &= 0^d.1668 \\ t_2 - t_1 - \frac{P}{2} &= 0^d.0067 \end{aligned}$$

Cioè: il minimo secondario è in anticipo rispetto a $\frac{P}{2}$ di circa 10 minuti.

Il dott. Aurino, occupandosi del sistema di « W Ursae Majoris », ha eseguito all'Osservatorio di Capodimonte durante gli anni 1921 e 1922 una serie di 242 osservazioni le quali, ridotte all'intervallo 2423367-2423367.3336404 ordinate secondo la fase e distribuite in gruppi di 9 danno una curva di luce incompleta (fig. 3), dalla quale abbiamo dedotto per i minimi:

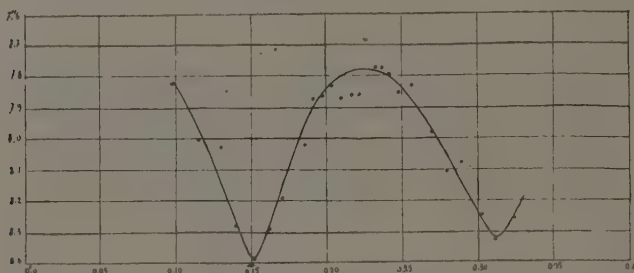


Fig. 3. — Curva di luce osservata: Aurino (1922).

$$\begin{aligned} \text{Min. Princ.} &= \text{D. J. } 2423367.1530. \\ \text{Min. Sec.} &= \text{D. J. } 2423367.3136 \\ t_2 - t_1 &= 0^d.1606 \\ t_2 - t_1 - \frac{P}{2} &= 0^d.0062 \end{aligned}$$

vale a dire circa 9 minuti di anticipo.

Riportiamo fedelmente la curva di luce fotografica (fig. 4) costruita da Russell, Fowler e Borton, in base a 367 osservazioni. Essa è incompleta e non presenta buon accordo con la curva dal Bemporad, sia perchè le grandezze sono state ripartite in gruppi in modo irregolare, sia perchè i minimi non sono ben determinati.

Con analogo procedimento abbiamo determinato le epoche dei minimi dalle quali si ha:

$$t_2 - t_1 - \frac{P}{2} = + 0^d.0027 \text{ ossia circa 4 minuti di ritardo.}$$

Nella risoluzione del problema trascuriamo la correzione dovuta all'effetto del periastro. Le grandezze sono state corrette dell'effetto dovuto alla ellitticità delle componenti, il quale, come si sa, è il più comune ed il più frequente.

Dalla curva di luce del Bemporad ricavando le grandezze ad intervalli di 0^d.005 e calcolando secondo il metodo di H. N. Russell (« A. J. », vol. 35,

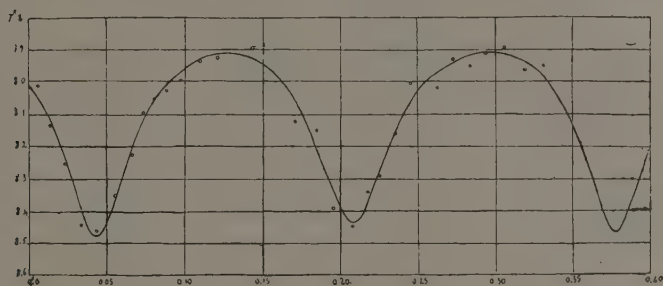


Fig. 4 — Curva di luce fotografica: Russell, Fowler, Borton (1917).

p. 339) i valori di $1 - l^2$ e di $\cos^2 \theta$ si ha, considerando i punti in prossimità del punto medio (0^d.0856) tra i minimi.

Fase	Grandezza	$m - m_0$	$1 - l^2$	θ	$\cos^2 \theta$
0.0856	7.790	0.000	0.0000	92°.36	0.0017
0806	792	002	0036	86.97	0028
0756	797	007	0128	81.57	0210
0706	805	015	0273	76.18	0570
0656	821	031	0555	70.78	1083
0606	835	045	0795	66.36	1735

Portando su due assi ortogonali i valori di $\cos^2 \theta$ presi come ascisse, ed i valori di $1 - l^2$ come ordinate, i punti ottenuti risultano quasi su una linea retta la cui equazione è data da: $1 - l^2 = 0.454 \cos^2 \theta$.

La costante $\chi = 0.454$ è la tangente dell'angolo d'inclinazione di detta retta. Nella precedente tabella i valori di $1 - l^2$ sono stati ricavati dalla tavola A (« A. J. », vol. 35, pag. 399) con argomento $2(m - m_0)$ essendo m_0 la grandezza al massimo di luce. Apportando ad ogni grandezza la correzione dovuta alla ellitticità delle componenti ($\chi \cos^2 \theta$), abbiamo il materiale per costruire la curva di luce rettificata della « W Ursae Majoris ».

Dalla curva di luce rettificata si ricava:

$$\begin{array}{lll} \text{Min. Princ.} & \Delta G = 0^{\text{M}}.38 & 1 - \lambda_p = 0.2953 \\ \text{Min. Sec.} & \Delta G = 0^{\text{M}}.23 & 1 - \lambda_s = 0.1009 \end{array}$$

n	$1 - l$	Grandezze	Fase	θ	$\text{sen}^2 \theta$	$0.1340 \omega_1(n)$	$C \omega_2(n)$	C
0.00	0.00000	7.820	0 ^d .0480	50°.79	0.61740	0.52796	1.14536	0.2793
10	02953	7.850	0365	39.39	40270	19430	0.59700	2701
20	05906	7.886	0305	32.91	29520	05347	34867	2621
25	07383	7.903	0290	31.29	26970	—	—	2697
30	08859	7.921	0270	29.13	23690	04234	19456	2701
40	11812	7.956	0230	24.82	17620	10157	07473	2533
50	14765	7.993	0199	21.47	13400	13400	—	—
60	17718	8.032	0170	18.34	09900	14673	04773	2512
70	20671	8.071	0139	15.00	06699	14016	07015	2566
75	22147	8.092	0120	12.95	05022	12958	07936	2672
80	23624	8.112	0100	10.79	03505	11336	07831	2747
85	25100	8.146	0084	9.64	02804	09286	06482	2592
90	26577	8.165	0064	6.91	01448	06740	05292	2770
95	28056	8.171	0049	5.29	00850	03658	02788	2581
98	28939	8.191	0029	3.13	00298	01528	01118	2617
99	29234	8.195	0019	1.29	00128	00777	00649	2617
1.00	29530	8.200	0000	0.00	00000	—	—	—

$$C \text{ medio} = 0.2654$$

Nella tabella sono calcolati i valori di $\text{sen}^2 \theta$ corrispondenti a determinati valori di n (essendo n la frazione di area eclissata nella fase massima), nella settima colonna sono riportati i valori dei prodotti $\omega_1(0) \text{sen}^2 \theta_{\left(\frac{1}{n}\right)}$ i quali sottratti dai valori di $\text{sen}^2 \theta$ danno $\omega_2(0) C$ dove

$$C = \text{sen}^2 \theta_{\left(\frac{1}{4}\right)}.$$

L'ultima colonna porta i valori di C , i quali sono in buon accordo, noi assumeremo come valore di C il valore medio 0.2654.

Abbiamo quindi:

$$C = \text{sen}^2 \theta_{\left(\frac{1}{4}\right)} = 0.2654 \quad (\text{corrispondente all'ipotesi: area eclissata} = \frac{1}{4} \text{ di quella eclissata nella fase massima}).$$

$D = \sin^2 \theta \left(\frac{1}{a} \right) = 0.1340$ (corrispondente all'ipotesi: area eclissata = $\frac{1}{2}$ di quella eclissata nella fase massima).

Otteniamo per la funzione $\chi(k, \alpha_0, \frac{1}{4})$ il valore

$$\frac{C \left[1 - \chi \cos^2 \theta \left(\frac{1}{4} \right) \right]}{D \left[1 - \chi \cos^2 \theta \left(\frac{1}{2} \right) \right]}$$

Calcolando i valori di $\alpha_0 = 1 - \lambda_p + \frac{1 - \lambda_s}{k^2}$ per determinati valori di k si ha:

$k = 0.88$	$\alpha_0 = 0.5418$	Tab. III $\chi = 1.8032$
$= 0.89$	$= 0.5369$	$= 1.8037$
$= 0.90$	$= 0.5311$	$= 1.8042$

Dalla tavola III (l.c.) si deduce che il valore della funzione $\chi(k, \alpha_0, \frac{1}{4})$ è meglio soddisfatto per i valori di $k = 0.88$, $\alpha_0 = 0.5418$. Questo ci dice che il rapporto dei raggi delle componenti è 0.88, e la frazione di area eclissata al minimo principale è i 542 millesimi dell'area totale della componente più piccola.

Con questi valori ricaviamo dalla tavola I, per la funzione $p(k, \alpha_{op})$

$$p(k, \alpha_{op}) = -0.231.$$

Indicando con θ' la longitudine all'inizio o alla fine dell'eclisse si ha:

$$\sin^2 \theta' = 0.6803 \quad \cos^2 \theta' = 0.3197.$$

Il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} \cos^2 i \cdot \cos^2 \theta' + \sin^2 \theta' &= a_1^2 (1 - \chi \cos^2 \theta') (1 + k)^2 \\ \cos^2 i &= a_1^2 (1 - \chi) [1 + kp(k, \alpha_{op})]^2 \end{aligned}$$

risolto rispetto alle incognite a_1^2 , $\cos^2 i$ dà:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.483 \\ \cos i &= 0.278 \\ i &= 73^\circ.5 \end{aligned}$$

La componente $b = e \cos \omega$ dell'eccentricità in direzione normale alla visuale è data dall'equazione

$$e \cos \omega = \frac{t_2 - t_1 - \frac{P}{2}}{P(1 + \cos^2 i)}$$

nella quale t_1 e t_2 indicano le fasi corrispondenti ai minimi principale e secondario, espresse nella stessa unità di misure adottata per il periodo, si ha quindi:

$$(1) \quad e \cos \omega = + 0.0064 \dots$$

Per determinare dalla curva di luce l'altra componente dell'eccentricità

$$g = e \sin \omega = \frac{(p_s - p_p)k}{2 + (p_p + p_s)k}$$

ove p_p e p_s sono rispettivamente i valori delle funzioni $p(k, \alpha_{op})$, $p(k, \alpha_{os})$ occorre determinare il valore dell'oscuramento massimo α_{os} al minimo secondario.

A tal fine serviamoci della nota relazione che passa fra le massime perdite di luce e gli oscuramenti massimi:

$$\alpha_{os} = \frac{\alpha_{op}(1 - \lambda_s)}{[\alpha_{op} - (1 - \lambda_p)]k^2}$$

$\alpha_{os} = 0.5339$ cioè: nel minimo secondario la frazione di area eclissata è i 534 millesimi dell'area totale della componente più grande.

Per la funzione $p(k, \alpha_{os})$ otteniamo:

$$p(k, \alpha_{os}) = - 0.218.$$

Per la componente g si ha:

$$(2) \quad g = e \sin \omega = + 0.0081 \dots$$

Dividendo fra loro le precedenti equazioni (2) e (1).

$$\begin{aligned} \omega &= 51^\circ.7 \text{ longitudine del periastro} \\ \tan \omega &= 1.265 \\ e &= 0.0103 \text{ eccentricità dell'orbita.} \end{aligned}$$

Nell'ipotesi dell'orbita ellittica si ottiene dunque:

$$\begin{aligned} a'_1 &= 0.479 \text{ raggio della stella più grande} \\ a'_2 &= 0.422 \text{ raggio della stella più piccola} \\ \cos i &= 0.281 \text{ distanza apparente dei centri} \\ i &= 73^\circ.7 \text{ inclinazione del piano dell'orbita} \\ L_b &= 0.546 \text{ luce della stella più luminosa} \\ L_f &= 0.454 \text{ luce della stella meno luminosa} \\ \frac{J_b}{J_f} &= 1.20 \text{ densità superficiale} \end{aligned}$$

$$\frac{b}{a} = 0.520 \text{ rapporto dei raggi equatoriali}$$

$$\frac{c}{a} = 0.567 \text{ rapporto del raggio polare al raggio equatoriale maggiore.}$$

Nell'ipotesi di componenti di massa uguale, la densità di ognuna di esse riferita alla densità del Sole è data da:

$$\bar{\rho}_1 = 0.607$$

$$\bar{\rho}_2 = 0.888.$$

I raggi delle componenti (in funzione del raggio del Sole) sono:

$$\bar{r}_1 = 1.211$$

$$\bar{r}_2 = 1.077.$$

Gli elementi suddetti, dedotti dalla curva di luce costruita in base alle osservazioni del Bemporad, nell'ipotesi di dischi uniformemente illuminati, paragonati con gli elementi ricavati recentemente da Walter ⁽¹⁾ mostrano un accordo molto soddisfacente.

Astronomia. — *Oscillazioni pendolari negli elementi ellittici della variabile di « W Ursae majoris ».* Nota di G. VIOLA, presentata dal Corrisp. A. BEMPORAD.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica-Matematica. — *Alcune applicazioni degli invarianti adiabatici alla elettricità.* Nota di D. GRAFFI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. P. BURGATTI.

È noto come nella teoria classica dei quanta si sia fatto intervenire il concetto di invariante adiabatico quale proprietà dei sistemi meccanici ⁽³⁾.

Per quanto ci consta di tale concetto sono state fatte applicazioni solo alla fisica atomica, se si eccettua una recente comunicazione del prof. Levi-Civita tenuta all'ultimo Congresso dei Matematici, in cui l'Illustre Autore ha fatto applicazioni degli invarianti adiabatici a problemi di meccanica celeste.

Mostreremo in questa Nota con qualche esempio come gli invarianti adiabatici, che sono, come abbiamo detto, proprietà dei sistemi meccanici

(1) *Der Veränderliche W Ursae majoris*, Königsberg 1929.

(2) Nella seduta del 19 maggio 1929.

(3) Vedi in proposito i classici trattati dei quanta quali quelli del SOMMERFELD, vol. 1°, p. 374 e vol. 2°, p. 697, oppure quello del BORN, pp. 59 e 119. Vedi anche la recente Nota di T. LEVI-CIVITA, *Sugli invarianti adiabatici*, negli « Atti del Congresso di Como 1927 ».

si prestino, almeno come metodo d'indagine, a trattare questioni relative ai circuiti elettrici che sono in vari casi retti da equazioni differenziali analoghe a quelle della meccanica.

Per semplicità limiteremo le nostre considerazioni a sistemi con un solo grado di libertà.

Si consideri per esempio un circuito senza resistenza con capacità C variabile col tempo e con autoinduzione L costante. L'equazione delle oscillazioni di tale circuito è la seguente:

$$(1) \quad \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{LC} = 0$$

in cui Q è la carica delle armature del condensatore.

Notiamo incidentalmente che se nell'equazione vi fosse un termine in $\frac{dQ}{dt}$ (il che accade per esempio se la resistenza non è trascurabile), cioè l'equazione fosse del tipo seguente:

$$a \frac{d^2 Q}{dt^2} + b \frac{dQ}{dt} + cQ,$$

si potrebbe ridurre tale equazione a un'altra del tipo (1) colla sostituzione ben nota:

$$Q = e^{-\int \frac{b}{2a} dt} Q'.$$

Ora se poniamo nella (1) $i = \frac{dQ}{dt}$ l'equazione si riduce al sistema Hamiltoniano:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q}, \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial H}{\partial i}.$$

Essendo

$$H = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{LC} + \frac{1}{2} i^2.$$

Infine mediante la nota trasformazione:

$$Q = \sqrt{\frac{2J}{\omega}} \sin \theta \quad i = \sqrt{2J\omega} \cos \theta \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{4C}}$$

il sistema diventa:

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{J}{\omega} \cos 2\theta \frac{d\omega}{dt}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega + \frac{1}{2\omega} \sin 2\theta \frac{d\omega}{dt}.$$

Ora se noi ammettiamo che la capacità vari nel tempo nel modo che in meccanica viene detto adiabatico, cioè sostanzialmente in modo così lento

che durante una variazione anche elementare di essa il sistema abbia fatto almeno un'oscillazione, la teoria degli invarianti adiabatici ci dice che possiamo riguardare J come costante. Perciò determinato J con le condizioni iniziali, potremo conoscere le ampiezze massime di oscillazione del sistema. Si vede allora che al crescere di ω , ossia al diminuire di C , l'intensità della corrente nel circuito aumenta e il contrario avviene per la carica delle armature del condensatore.

Notiamo a questo punto che non si ha però esattamente $i = \frac{dQ}{dt}$, ma che ciò si ottiene approssimativamente trascurando nella derivazione i termini in $\frac{d\omega}{dt}$ com'è implicito nell'ipotesi adiabatica.

Osserviamo pure che se invece della variazione di capacità vi fossero state variazioni di altri parametri del circuito si avrebbe potuto ottenere risultati del genere riducendo l'equazione a un sistema Hamiltoniano.

Applicazioni di tali risultati possono aver luogo in varie questioni pratiche e più particolarmente in problemi di radiotelegrafia. In tali problemi si ha un circuito che oscilla con periodo da 10^{-6} a 10^{-7} secondi, mentre la variazione di alcuni parametri del circuito viene fatta (esclusi gli armonici che hanno poco interesse) con frequenza acustica, cioè al minimo con periodo di un $\frac{1}{300} \frac{1}{1000}$ di secondo. In questo caso potremo applicare almeno per l'intervallo di una oscillazione acustica la teoria degli invarianti adiabatici perchè le variazioni dei parametri del circuito sono lenti rispetto alla frequenza propria del circuito stesso.

Ci occuperemo appunto di una questione di radiotelegrafia che si era presentata alcuni anni fa e che fu studiata dal Carson ⁽¹⁾ introducendo però funzioni poco usate.

È noto come la modulazione di un'onda radiotelefonica di frequenza $\frac{\omega}{2\pi}$ rappresentata da:

$$A \cos(\omega t + \varphi)$$

viene fatta modulando con frequenza acustica $\frac{\omega_0}{2\pi}$ l'ampiezza A , cioè ponendo

$$A = H_0 + f(t).$$

Si ottiene così che l'onda è rappresentata dall'equazione:

$$(H_0 + f(t)) \cos(\omega t + \varphi).$$

Se si suppone $f(t)$ sinusoidale cioè:

$$f(t) = h \cos(pt + \varphi)$$

(1) CARSON, *Note on theory of modulation*, «Proceedings of Radio Engineers», 1922.

facili considerazioni trigonometriche ci conducono a concludere che la nostra onda equivale a tre onde sinusoidali di pulsazione ω , $\omega + p$, $\omega - p$. Ora interessa nel punto di vista pratico ridurre al minimo di differenza di frequenza fra queste tre onde.

Perciò era stato proposto da alcuni di agire non sull'ampiezza dell'onda ma sui parametri del circuito emittente, cioè sulla sua capacità e autoinduzione. È noto che l'equazione differenziale delle oscillazioni di un circuito emittente a valvola a tre elettrodi è molto complicata; ma qui seguendo il Carson lo idealizzeremo mediante un circuito senza resistenza con capacità C e autoinduzione L ⁽¹⁾ per modo che sia valida la (1)

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{LC} = 0.$$

Ora se C fosse costante la frequenza di oscillazione ν di tale circuito sarebbe:

$$(2) \quad \nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Supponendo la capacità variabile col tempo con la legge:

$$C = C_0(1 + f(t)) = C_0(1 + 2h \sin pt),$$

ne risulterebbe al contrario (ammessa ancora valida la (2), il che non è esatto):

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0(1 + 2h \sin pt)}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}(1 - h \sin pt)$$

avendo naturalmente supposto h molto piccolo rispetto all'unità.

Ora si credeva che l'onda emessa dall'oscillatore variasse con la legge

$$A \cos(2\pi\nu t + \varphi) = A \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC_0}}(1 - h \sin pt) + \varphi\right).$$

Si riteneva poi che la pulsazione sarebbe variata al massimo fra:

$$\omega_0(1 + h) \quad \omega_0(1 - h).$$

E preso h sufficientemente piccolo si poteva ridurre la differenza fra la frequenza delle due onde minore di quella che si aveva per una variazione di ampiezza.

(1) Il Carson ha ammesso valida la (1) sostituendo alla Q la i (1) il che non sembra lecito. A tutto rigore anche ammettere valida la (1) è un'ipotesi ma data la lentezza delle variazioni di capacità tale ipotesi ci sembra conforme alle teorie generali dell'elettromagnetismo ed è già stata fatta da qualche autore. Vedi, per esempio, *La teoria del microfono a condensatore* di G. GREEN («Phil. Mag.», settembre 1926 e gennaio 1929). Del resto i nostri risultati sono sostanzialmente identici a quelli del Carson.

Il Carson nel suo lavoro confuta tale ragionamento osservando che il problema si deve trattare anzitutto integrando la (1) equazione caratteristica del circuito.

Ora noi avevamo trovato :

$$i = \sqrt{2J\omega} \sin \theta$$

$$\theta = \int_0^t \omega dt + \int_0^t \frac{1}{2\omega} \sin 2\theta \frac{d\omega}{dt} dt + \psi_0.$$

Si ottiene perciò per i l'espressione

$$i = \sqrt{\frac{2J}{LC_0(1 + 2hf(t))}} \sin \theta = \sqrt{\frac{2J}{LC_0}} (1 - hf(t)) \sin \theta.$$

Supponendo ora: $f(t) = \sin(pt + \varphi_0)$, si ha

$$i = \sqrt{\frac{2J}{LC_0}} (1 - h \sin(pt + \varphi_0)) \sin \theta.$$

Ma l'espressione di θ si può semplificare osservando che il secondo integrale può ricondursi a meno del fattore $\frac{1}{2}$ a quello che dà la variazione relativa di J nell'intervallo considerato, cambiando di $\frac{\Gamma}{4}$ la costante iniziale in θ e tale integrale è per ipotesi trascurabile. Rimane allora

$$\sin \theta = \sin \left(\omega_0 t + \frac{h\omega_0}{p} \cos(pt + \varphi_0) + \psi_0 \right)$$

$$= \sin(\omega_0 t + \psi_0) \cos \frac{h\omega_0}{p} \cos(pt + \varphi_0) + \cos(\omega_0 t + \psi_0) \sin \frac{h\omega_0}{p} \cos(pt + \varphi_0).$$

Sviluppando i termini

$$\cos \frac{h\omega_0}{p} \cos(pt + \varphi_0) \quad , \quad \sin \frac{h\omega_0}{p} \cos(pt + \varphi_0)$$

in serie di potenze si ottengono alla fine per i dei termini sinusoidali di pulsazione ω_0 , $\omega_0 - p$, $\omega_0 + p$, $2\omega_0 - np$, $\omega_0 + np$, cioè si ha ancora una banda di larghezza almeno $2p$.

Tali risultati sono già stati ottenuti dal Carson, ma, come si vede la teoria degli invarianti adiabatici permette di ottenerli in modo più semplice e completo.

Fisica. — *Sulla emissione elettronica in un tubo a vuoto.* Nota II di L. TIERI e V. RICCA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio A. LO SURDO.

In un precedente studio ⁽²⁾ sulla variazione della corrente che alimenta un filamento incandescente nel vuoto col variare della corrente elettronica fra filamento e placca (il negativo della batteria di placca essendo collegato con l'estremo negativo del filamento incandescente), si trovò che a differenti potenziali di placca, superiori ad un certo valore V , a incrementi costanti della corrente elettronica corrispondono variazioni uguali della corrente I di filamento; mentre per valori del potenziale decrescenti a partire da V , la variazione δI diminuisce, finchè si annulla e poi si inverte. Le esperienze furono eseguite con un triodo Philipps Miniwatt C. 509; sorse pertanto il dubbio che questo comportamento dipendesse dal modo speciale di preparazione dei filamenti dei suddetti triodi. In questo lavoro si estende la ricerca a un filamento di tungsteno puro di un triodo Philipps E e si conferma la inversione di δI . In una Nota successiva daremo la interpretazione di tale comportamento e preciseremo le condizioni alle quali l'inversione avviene.

I tentativi fatti per aumentare la sensibilità del metodo, adoperato nel citato lavoro, furono infruttuosi; però siamo riusciti a ottenere i valori della funzione $\delta I = I'(V)$ per $\delta i = \text{costante}$ anche in prossimità di $V = 0$, nel seguente modo:

Si portava la placca allo stesso potenziale dell'estremo negativo del filamento, che si assumeva come potenziale zero, e si misuravano I (corrente di filamento) e i (corrente di placca). Quindi si portava la placca a diversi potenziali V , in corrispondenza di ciascuno dei quali si determinavano le variazioni ΔI e Δi e perciò erano note le funzioni $\Delta I = F(V)$ e $\Delta I = f(i)$, dalle quali era possibile dedurre le altre $\delta I = F'(V)$ e $\delta I = f'(i)$. In queste condizioni, la sensibilità del metodo permise di arrivare anche a valori negativi di V .

Il dispositivo sperimentale è schematicamente riportato nella fig. 1, e le misure venivano eseguite nel modo seguente:

Si chiudeva l'interruttore T_3 per portare il filamento all'incandescenza, tenendo aperto il tasto T_1 fino a che la corrente di accensione I non avesse raggiunto un valore rigorosamente costante; poi si regolava il ponte M

(1) Nella seduta del 7 aprile 1929.

(2) L. TIERI e V. RICCA, « Rendiconti » R. Acc. Lincei, vol. VII, 1928, p. 720.

(del cui funzionamento si è parlato nel lavoro precedentemente citato) in modo che fosse in equilibrio e al massimo di sensibilità. Si chiudeva allora l'interruttore T_1 in modo da portare la placca ad un determinato potenziale V , in corrispondenza del quale si leggevano le deviazioni nei galvanometri G_1 e G_3 . Da queste (corrette di un eventuale spostamento dello zero), mediante le tarature, si deducevano i valori di ΔI e i . Riportando i risultati ottenuti sopra un sistema di assi cartesiani si ottengono per le funzioni $\Delta I = F(V)$ e $\Delta I = f(i)$ delle curve che incontrano due volte l'asse

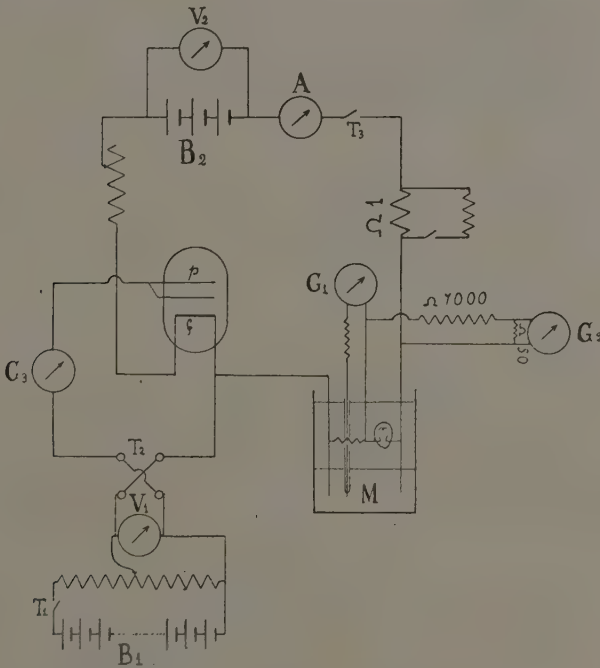


Fig. I.

- V_1, V_2 voltmetri
 A amperometro
 T_1, T_2, T_3 interruttori
 M ponte per la determinazione di ΔI
 G_1 galvanometro relativo
 G_2 galvanometro adoperato come voltmetro per trovare le condizioni di massima sensibilità di M
 B_1 batteria di placca
 B_2 batteria di accensione
 G_3 galvanometro per la misura della corrente di placca.

delle ascisse. La prima nei punti $V = 0$ e $V = V_s$; la seconda nei punti corrispondenti ai valori della corrente di placca che si hanno rispettivamente per $V = 0$ e $V = V_s$. Si può osservare però che l'inversione nel punto $V = 0$ è dovuta al fatto che per tale potenziale la corrente di

placca non si annulla, e quindi chiudendo il tasto T_1 (essendo $V > 0$), la corrente di placca subisce un aumento, mentre per $V < 0$ una diminuzione; quindi i valori di ΔI sono di segno opposto. Se prendiamo però come potenziale zero di placca quello ($-V_0$) per il quale $i = 0$ allora il potenziale dell'estremo negativo del filamento sarà V_0 e la curva presenterà una sola intersezione con l'asse delle V . Analogo ragionamento si potrebbe ripetere per la funzione $\Delta I = f(i)$.

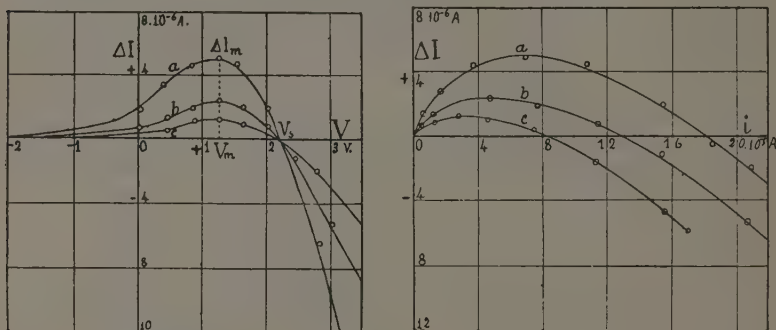


Fig. 2.

Nella fig. 2 sono riportati i valori delle funzioni $\Delta I = F(V)$ e $\Delta I = f(i)$ ottenuti con diversi valori della corrente I di accensione del filamento. I

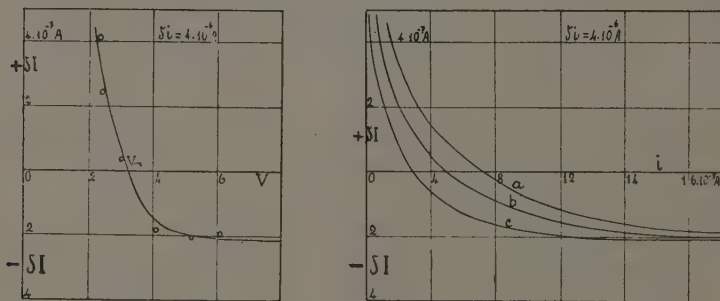


Fig. 3.

potenziali di placca corrispondono ai valori letti sul voltmetro, però le esperienze sono state eseguite a partire dal potenziale $-V_0$, in modo che la corrente di placca fosse sempre crescente. I valori della intensità della corrente sono rispettivamente per le curve a, b, c : 0,7; 0,6285; 0,5282 amp.

Dai diagrammi della fig. 2 si possono dedurre i valori delle funzioni $\delta I = F'(V)$ e $\delta I = f'(i)$ per $\delta i = \text{cost.}$ (δI essendo la variazione che subisce la corrente di filamento quando la corrente di placca varia di δi).

Queste funzioni sono rappresentate dai diagrammi della fig. 3; le lettere a, b, c , stanno a rappresentare la corrispondenza con le curve della fig. 2. Per la funzione $\delta I = F'(V)$ le curve corrispondenti ai diversi valori di I risultano quasi coincidenti, in figura è riportato perciò soltanto il diagramma relativo a $I = 0,7$ amp.

Dall'esame delle figg. 2 e 3 risultano confermati l'annullamento e l'inversione di δI per un determinato valore del potenziale di placca, e corrispondentemente della corrente di placca. Inoltre, a meno degli eventuali errori sperimentali, il valore V_m del potenziale di placca, per il quale si ha $\delta I = 0$, è indipendente da I . Esiste ancora un valore V_s del potenziale di placca per il quale $\Delta I = 0$; anche questo potenziale V_s risulta indipendente dalla corrente di accensione e quindi dalla temperatura del filamento.

Molto interessante, per le conclusioni che se ne potrebbero trarre in confronto con i risultati su esposti, è lo studio delle variazioni della differenza di potenziale agli estremi del filamento col variare del potenziale di placca. Per brevità riferiamo soltanto i risultati a cui si pervenne:

L'andamento delle funzioni $\Delta E = \varphi(V)$ e $\delta E = \varphi'(V)$ è perfettamente identico a quello delle due funzioni ΔI e δI , salvo che a valori positivi di ΔI e δI corrispondono valori negativi di ΔE e δE e viceversa.

Le funzioni ΔE e δE si annullano rispettivamente per gli stessi valori V_s e V_m del potenziale di placca per i quali si annullano le corrispondenti funzioni ΔI e δI .

I valori di V_s e V_m sono indipendenti dalla corrente di accensione del filamento.

I precedenti risultati si ottennero collegando, come già si è detto, il negativo della batteria di placca con l'estremo negativo di filamento. Nel caso in cui il negativo della batteria di placca è collegato con l'estremo positivo del filamento si ottengono risultati completamente diversi, anche dal punto di vista qualitativo.

Su queste esperienze sarà però riferito nella prossima Nota dove, come si è detto, si darà una interpretazione dei risultati.

Fisica. — *Sulla teoria quantistica dell'effetto Raman.* Nota di E. AMALDI, presentata⁽¹⁾ dal Socio O. M. CORBINO.

La teoria quantistica di Schrödinger fornisce uno schema matematico a mezzo del quale si può trattare il problema di un sistema dinamico costituito da un numero qualunque di particelle agenti fra loro con forze istantanee, purchè tale sistema sia descrivibile con una hamiltoniana. Molto spesso però, si presentano dei problemi che non sono di natura puramente meccanica in quanto essi si riferiscono a scambi di energia fra atomi e radiazione. Per trattare tali problemi nella teoria di Schrödinger si procedeva nel modo seguente: si calcolava il momento elettrico del sistema a mezzo della meccanica quantistica ed ottenuto questo si introduceva l'elettrodinamica classica. Ora è evidente come tale procedimento sia tutt'altro che logico; inoltre esso non portava ad alcun risultato ogni qual volta la reazione di radiazione aveva un'importanza non trascurabile nel fenomeno studiato come p. es. nella risonanza ottica, poichè per trattare simili problemi è essenziale che la radiazione sia quantizzata.

P. A. M. Dirac⁽²⁾ è stato il primo che è riuscito a stabilire le basi dell'elettrodinamica quantistica, a mezzo della quale si possono trattare in modo strettamente logico e conseguente tutti i problemi dell'irraggiamento.

Nella presente Nota viene mostrato come si possono applicare i metodi di Dirac alla teoria dell'effetto Raman; a tale scopo viene posto a base della teoria il meccanismo proposto in una Nota precedente⁽³⁾: vengono così ottenute le intensità delle righe di Raman e della luce di Tyndall ed i loro rapporti. Tali formule sono in accordo con l'esperienza con che rimane confermato il meccanismo proposto. Per la parte che è stata calcolata con la teoria di Schrödinger i risultati sono formalmente coincidenti.

L'elettrodinamica quantistica di Dirac conduce al calcolo di certe funzioni del tempo $a_{n_1} \dots n_N$ il cui modulo al quadrato esprime la probabilità che l'atomo si trovi nello stato quantico n , ed i vari oscillatori, che rappresentano il campo di radiazione rispettivamente negli stati di energia $n_1 h\nu_1, n_2 h\nu_2, \dots, n_N h\nu_N$.

(1) Nella seduta del 5 maggio 1929.

(2) «Proc. Roy. Soc.», vol. CXIV, p. 710.

(3) AMALDI e SEGRÉ, «Rend. Linc.», vol. IX, 1929, p. 407.

Le equazioni differenziali a cui soddisfano le $a_{nn_1} \dots n_N$ sono le seguenti

$$(1) \quad \dot{a}_{nn_1 \dots n_N} = -\frac{4\pi^{1/2}e}{\sqrt{\Omega h}} \sum_{m,s} \frac{v(mn)}{\sqrt{v_s}} B_s \times \\ \times Q(mn) \{ a_{mn_1 \dots n_s+1 \dots n_N} \sqrt{n_s+1} e^{2\pi i \{ v(mn)+v_s \} t} + \\ + a_{mn_1 \dots n_s-1 \dots n_N} \sqrt{n_s} e^{2\pi i \{ v(mn)-v_s \} t} \}$$

come viene mostrato in un lavoro del prof. Fermi che verrà presto pubblicato.

Nella (1) e è la carica dell'elettrone, Ω il volume dello spazio entro cui si immagina rinchiuso il sistema, $Q(mn)$ la componente (mn) della matrice Q , essendo Q il vettore di componenti x, y, z ; $B_s = -A_s \sin \delta_s$ dove A_s è un vettore unitario che indica lo stato di polarizzazione dell' s -esimo oscillatore e δ_s è la fase corrispondente.

Nello scrivere la (1) si sono fatte però delle approssimazioni e precisamente si è supposto che le dimensioni dell'atomo siano trascurabili di fronte alla lunghezza d'onda della luce usata ed inoltre si sono trascurati i termini contenenti il potenziale vettore al quadrato, termini che interessano solo per la diffusione pura e che non hanno alcuna importanza per la presente applicazione.

TEORIA DELL'EFFETTO RAMAN. — In una Nota precedente⁽¹⁾ è stato rilevato come il meccanismo dell'effetto Raman vada inteso nel modo seguente: si consideri un atomo in uno stato m ; sotto l'azione della radiazione incidente di frequenza ν_a esso viene eccitato ad uno stato n tale che $h\nu_a > E_n - E_m$; in un secondo tempo l'atomo passa dallo stato n allo stato l più basso irradiando luce di frequenza $\nu_a - \nu(lm)$.

In tutto ciò che segue faremo l'ipotesi che la frequenza ν_a della luce incidente sia diversa dalla frequenza propria $\nu(nm)$ dell'atomo; in questo caso limite, che noi però escludiamo, si ha il fenomeno della fluorescenza, la cui teoria è stata svolta, applicando gli stessi metodi generali da Segré.

Per ottenere una teoria completa dell'effetto Raman noi supporremo che gli atomi si trovino nell'istante iniziale nei due stati, m ed l ; poichè se si suppone che tutti gli atomi siano nello stato m la teoria fornisce solo le righe Stokes. Entro al volume Ω supporremo inoltre che abbia energia diversa da zero solo l'oscillatore a -esimo e precisamente gli attribuiremo l'energia $n_a h\nu_a$. Vogliamo qui ricordare che allorquando si fissa un oscillatore, che rappresenta una certa componente della radiazione, non si fissa solo la frequenza di quest'ultima, ma anche la direzione di propagazione e lo stato di polarizzazione. Si vede così che le nostre ipotesi relative

(1) AMALDI e SEGRÉ, loc. cit.

all'istante iniziale equivalgono a dire che noi illuminiamo con luce monocromatica polarizzata le nostre molecole le quali si trovano in due livelli energetici, lo stato m , che per fissare le idee supporremo più basso e lo stato l . Ricordando il significato delle $a_{n n_1 \dots n_N}$ si vede subito che le nostre ipotesi si esprimono dicendo che per $t = 0$ tutte le $a_{n n_1 \dots n_N}$ sono nulle tranne $a_{m 0 \dots n_a \dots 0}$, $a_{l 0 \dots n_a \dots 0}$ le quali soddisfano alla relazione

$$|a_{m 0 \dots n_a \dots 0}|^2 + |a_{l 0 \dots n_a \dots 0}|^2 = 1 \quad \text{per} \quad t = 0.$$

Rimane ancora in nostro arbitrio fissare il rapporto per $t = 0$ fra le probabilità che una molecola si trovi nello stato m oppure nello stato l . Tale rapporto lo fisseremo in base alla nota formula $\frac{n_1}{n_2} = e^{\frac{h\nu}{kT}}$ dove n_1 , ed n_2 sono i numeri di atomi che si trovano rispettivamente in due stati le cui energie differiscono di $h\nu$. Ossia porremo

$$(2) \quad \frac{|a_{m 0 \dots n_a \dots 0}|^2}{|a_{l 0 \dots n_a \dots 0}|^2} = e^{\frac{h\nu(lm)}{kT}}.$$

La presente teoria si riferisce al caso in cui la intensità della luce incidente è piccola per modo che nei primi istanti di illuminazione il numero di atomi che dagli stati m ed l vengono portati in uno stato n generico è piccolo di fronte al numero totale di atomi il quale coincide praticamente col numero di atomi che si trovano in m ed l . Con tale intesa potremo considerare come costanti ed eguali al loro valore iniziale $a_{m 0 \dots n_a \dots 0}$ ed $a_{l 0 \dots n_a \dots 0}$ che indicheremo brevemente con a_m ed a_l . Dopo aver stabilito i vari punti in base ai quali sono state fatte le approssimazioni nel seguito, osserviamo che per fare la teoria dell'effetto Raman, in base al meccanismo sopra esposto, è necessario cominciare col calcolare la probabilità che un atomo venga eccitato sotto l'azione della radiazione, dallo stato m od l ad uno stato n generico. In tale passaggio l'atomo avrà assorbito energia a scapito di quella della luce incidente. Quest'atomo, che è giunto così nello stato n , potrà ricadere irradiando luce di una certa frequenza ν_b nello stato m oppure nello stato l : giunti a questo punto dovremo quindi calcolare indipendentemente la probabilità che cada in m oppure in l .

Rappresentando schematicamente i vari passaggi della teoria che ci proponiamo di svolgere, otteniamo

$$\begin{array}{c} a_{m 0 \dots n_a \dots 0} \\ a_{l 0 \dots n_a \dots 0} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a'_{n 0 \dots n_a - 1 \dots 0} \\ a'_{m 0 \dots n_a - 1 \dots 0} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a'_{l 0 \dots n_a - 1 \dots 0} \\ a'_{m 0 \dots n_a - 1 \dots 0} \end{array} \right.$$

Con questo però non si è tenuto conto di tutti i modi possibili con cui un atomo può passare dallo stato m allo stato l e viceversa: infatti il

processo sopra indicato corrisponde a questo: l'atomo in un primo tempo assorbe ed in un secondo tempo emette: la transizione, per così dire indiretta, $m \rightarrow l$ che interessa per questa teoria, può però avvenire anche in seguito ad un processo di questo tipo: l'atomo prima emette e poi assorbe: schematicamente questo secondo processo è rappresentato dai seguenti passaggi

$$\begin{array}{c} a_{m0} \dots n_a \dots 0 \\ a_{l0} \dots n_a \dots 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{c} a''_{n0} \dots n_a \dots 1 \dots 0 \\ a''_{m0} \dots n_a - 1 \dots 1 \dots 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{c} a'_{l0} \dots n_a - 1 \dots 1 \dots 0 \\ a'_{m0} \dots n_a - 1 \dots 1 \dots 0 \end{array} \right.$$

Una volta calcolate le

$$a'_{m0} \dots n_a - 1 \dots 1 \dots 0, a'_{l0} \dots n_a - 1 \dots 1 \dots 0, a''_{m0} \dots n_a - 1 \dots 1 \dots 0, a''_{l0} \dots n_a - 1 \dots 1 \dots 0,$$

sarà necessario sommarle nel modo seguente:

$$\begin{array}{l} a'_{m0} \dots n_a - 1 \dots 1 \dots 0 + a''_{m0} \dots n_a - 1 \dots 1 \dots 0 = a_{m0} \dots n_a - 1 \dots 1 \dots 0 \\ a'_{l0} \dots n_a - 1 \dots 1 \dots 0 + a''_{l0} \dots n_a - 1 \dots 1 \dots 0 = a_{l0} \dots n_a - 1 \dots 1 \dots 0 \end{array}$$

e facendo il quadrato del modulo delle somme si otterranno infine le probabilità rispettivamente che un atomo al tempo t sia giunto in m od l assorbendo radiazione di tipo a ed emettendo un quanto di tipo b . Attraverso a sviluppi di calcolo un po' laboriosi ma che non presentano alcuna difficoltà si ottiene

$$(3) \quad |a_{l0} \dots n_a - 1 \dots 1 \dots 0|^2 = \frac{e^4}{\pi^2 \Omega^2 \hbar^2} \frac{n_a}{v_a v_b} \left[\frac{4 \sin^2 \pi \{v(ml) + v_a - v_b\} t}{\{v(ml) + v_a - v_b\}^2} |a_m|^2 \left\{ \sum_n A_{lma} \right\}^2 + \right. \\ \left. + \frac{4 \sin^2 \pi \{v_a - v_b\} t}{\{v_a - v_b\}^2} |a_l|^2 \left\{ \sum_n A_{lmb} \right\}^2 + \text{termini periodici aventi valor medio nullo} \right]$$

$$(4) \quad |a_{m0} \dots n_a - 1 \dots 1 \dots 0|^2 = \frac{e^4}{\pi^2 \Omega^2 \hbar^2} \frac{n_a}{v_a v_b} \left[\frac{4 \sin^2 \pi \{v(lm) + v_a - v_b\} t}{\{v(lm) + v_a - v_b\}^2} |a_l|^2 \left\{ \sum_n A_{mla} \right\}^2 + \right. \\ \left. + \frac{4 \sin^2 \pi \{v_a - v_b\} t}{\{v_a - v_b\}^2} |a_m|^2 \left\{ \sum_n A_{mmb} \right\}^2 + \text{termini periodici aventi valor medio nullo} \right]$$

dove per brevità si è posto

$$(5) \quad A_{\alpha\beta\gamma} = \frac{B_b \times \dot{Q}(\alpha\gamma) \cdot B_a \times \dot{Q}(\beta\gamma)}{v(\beta\gamma) + v_a} + \frac{B_a \times \dot{Q}(\alpha\gamma) \cdot B_b \times \dot{Q}(\beta\gamma)}{v(\beta\gamma) - v_\gamma}.$$

Ora a noi interessa l'intensità delle righe dello spettro diffuso in una certa direzione. Per ottenere questo, sommiamo (3) e (4) e consideriamo tale somma come funzione di v_b ; si vede subito che trascurando i termini che in media sono nulli a causa della loro periodicità, tale funzione per t molto

grande presenta tre massimi notevolmente pronunciati per $\nu_s = \nu_a - \nu(lm)$ (riga Stokes), $\nu_b = \nu_a$ (luce di Tyndall), e $\nu_b = \nu_a + \nu(lm)$ (riga antistokes).

Dal significato delle $|a_{nn_1} \dots n_N|^2$ segue subito che per avere l'intensità di una di queste righe basta integrare la funzione sopra considerata alla larghezza della riga stessa; moltiplicando tale integrale per l'energia di un singolo quanto si ottiene l'intensità cercata. Eseguito le integrazioni al solito modo⁽¹⁾ si ottiene: per la riga di Raman Stokes

$$(6) \quad I_{R-} = \frac{8e^4}{h^2 c^4} |a_m|^2 I_a \left\{ \frac{\nu_a - \nu(lm)}{\nu_a} \right\}^2 \left\{ \sum_n A_{lma} \right\}^2$$

per la luce di Tyndall

$$(7) \quad I_T = \frac{8e^4}{h^2 c^4} I_a \left\{ |a_l|^2 \left\{ \sum_n A_{lnb} \right\}^2 + |a_m|^2 \left\{ \sum_n A_{mmb} \right\}^2 \right\}$$

per la luce antistokes

$$(8) \quad I_{R+} = \frac{8e^4}{h^2 c^4} |a_l|^2 I_a \left\{ \sum_n A_{mla} \right\}^2$$

dove I_a è l'intensità della luce incidente.

I valori medi dei sommatori vanno eseguiti tenendo conto di tutte le orientazioni possibili di A_b e di tutti i valori di δ_b .

Per semplicità supponiamo che vi sia un solo stato n in modo che i sommatori si riducono ad un unico termine. Dalle loro espressioni si vede subito che per $\nu_a = \nu(nm)$ la luce Stokes è estremamente intensa: il fenomeno che si presenta in tale caso non è altro che la fluorescenza: la presente teoria non si può applicare a questo caso poichè si è trascurata la reazione di radiazione.

Analogamente la luce antistokes è particolarmente intensa per $\nu_a = \nu(nl)$. Facciamo ora l'ipotesi che $Q(mn)$, $Q(ln)$ e B_a siano fra loro paralleli ed immaginiamo di eseguire le osservazioni in una direzione che faccia un angolo di 90° con la direzione del vettore elettrico della luce incidente, ossia con B_a . Se allora si calcolano i rapporti delle intensità $\frac{I_{R+}}{I_{R-}}$, $\frac{I_{R-}}{I_T}$ considerando come piccola $\nu(lm)$ rispetto a $\nu(mn)$, il che si può sempre fare in pratica, si ha

$$(9) \quad \frac{I_{R+}}{I_{R-}} = e^{-\frac{h\nu(lm)}{kT}} \quad (10) \quad \frac{I_{R-}}{I_T} = \frac{\left\{ \frac{Q(ln)}{Q(mn)} \right\}^2}{\left\{ \frac{Q(ln)}{Q(mn)} \right\}^4 e^{-\frac{h\nu(lm)}{kT}} + 1}.$$

(1) WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, p. 93.

Siccome $\nu(lm)$ è una frequenza piccola (infrarossa) si vede subito dalla (9) che l'intensità delle righe antistokes è piccolissima rispetto all'intensità delle righe Stokes. Nella (10) il denominatore differisce di poco da 1 alla temperatura ordinaria, per modo che se $Q(ln)$ e $Q(mn)$ sono dello stesso ordine di grandezza tali sono anche I_{R-} ed I_T . In realtà $Q(ln)$ è minore di $Q(mn)$. Si noti però che I_{R-} è minore di I_T anche per un'altra ragione: una stessa frequenza ν_a della luce incidente eccita varie righe di Raman di modo che se si suppone che le varie $Q(ik)$ che intervengano nel fenomeno siano tutte dello stesso ordine di grandezza, I_T risulta dello stesso ordine della somma delle intensità delle varie righe di Raman.

Fisica. — *Sopra l'elettrodinamica quantistica.* Nota di E. FERMI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio O. M. CORBINO.

In questa Nota vengono scritte le equazioni della elettrodinamica in forma quantistica anche per il caso che nel campo vi siano dei corpuscoli elettrici. Viene data per il momento soltanto la forma che corrisponde a corpuscoli di piccola velocità. In alcune Note seguenti verranno mostrate le applicazioni principali.

1. L'elettrodinamica quantistica, per il caso dell'assenza di cariche elettriche, è stata trattata in una forma presso ché definitiva in un recente lavoro di Pauli e Jordan ⁽²⁾. Questi autori decompongono il campo di radiazione nelle sue componenti armoniche ed applicano, per ciascuna componente, delle condizioni di quantizzazione simili a quelle valide per un oscillatore; essi riescono anche a dedurre delle leggi sulla non commutatività del prodotto delle componenti del campo elettrico e di quello magnetico che, anche nel loro aspetto esterno, soddisfano alla condizione di invarianza relativistica.

Più complicato è il problema della costruzione di una elettrodinamica quantistica per il caso, che praticamente è il più importante, in cui nel campo vi sono anche delle cariche elettriche. Una soluzione parziale di questo problema è stata data da Dirac ⁽³⁾ nel suo fondamentale lavoro sopra la teoria dell'irraggiamento. La elettrodinamica di Dirac è però incompleta per il fatto che essa considera soltanto il campo elettromagnetico di radiazione, e cioè un campo che si possa rappresentare come somma di onde

(1) Nella seduta del 5 maggio 1929.

(2) W. PAULI e P. JORDAN, « Zschr. f. Phys. », 47, p. 151, 1928.

(3) P. A. M. DIRAC, « Proc. Roy. Soc. », 114, p. 243, 1927.

elettromagnetiche piane. In realtà il campo elettromagnetico che si produce in vicinanza di un corpuscolo elettrico in movimento è alquanto più complicato, per modo che la teoria di Dirac corrisponde alla realtà soltanto per quanto riguarda le regioni dello spazio abbastanza lontane dai corpuscoli elettrici che generano il campo. P. e. non si potrebbe trattare, per mezzo di essa, il problema dell'interazione tra due elettroni dello stesso atomo o di atomi vicini tenendo conto che il campo si propaga da uno all'altro per potenziali ritardati; similmente non si può trattare, con la teoria di Dirac, il problema della teoria quantistica della massa elettromagnetica, ecc. ...

In questa Nota mostrerò una via che può condurre alla costruzione di una elettrodinamica quantistica completa; per il momento scriveremo le equazioni soltanto per il caso che la velocità dei corpuscoli elettrici che generano il campo sia piccola a confronto della velocità della luce, e, in alcune Note seguenti, mostreremo le applicazioni di esse alla teoria quantistica delle masse elettromagnetiche e ad alcuni altri fenomeni.

Nel caso che le particelle elettriche abbiano grandi velocità si può applicare la teoria relativistica di Dirac dell'elettrone rotante; si riesce così a scrivere le equazioni dell'elettrodinamica in forma che soddisfa alla condizione di invarianza relativistica, benchè non mi riesca ancora di vedere completamente le conseguenze delle equazioni così ottenute.

2. Per scrivere le equazioni dell'elettrodinamica quantistica, dobbiamo cercare dapprima di porre le equazioni dell'elettrodinamica classica in una forma che si presti ad essere tradotta in forma quantistica. Per fare questo, invece di prendere come variabili che descrivono il campo elettromagnetico i valori dei potenziali scalare e vettore in ogni punto dello spazio, noi prenderemo i coefficienti dello sviluppo di essi in integrale di Fourier. Questi coefficienti, che sono naturalmente delle funzioni del tempo soltanto, ci descrivono il potenziale scalare e quello vettoriale per ogni istante in tutto il campo che si considera.

Per semplificare la considerazione conviene supporre che il campo elettromagnetico che si considera sia racchiuso entro una cavità di volume finito Ω . Facendo poi allontanare le sue pareti a distanza infinita, ci si riconduce al caso della radiazione libera in tutto lo spazio.

Siano V ed U il potenziale scalare e il potenziale vettore che soddisfano alle equazioni:

$$(1) \quad \Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -4\pi\rho$$

$$(2) \quad \Delta U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -4\pi\rho \frac{v}{c}$$

in cui ρ e v rappresentano rispettivamente la densità delle cariche elettriche e la loro velocità.

Potremo supporre che U e V , entro lo spazio Ω , possano rappresentarsi nel modo seguente, come somma di componenti sinusoidali nelle coordinate x, y, z :

$$(3) \quad V = \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} c \sum_s Q_s \cos\left(\frac{2\pi\alpha_s \times X}{\lambda_s} + \beta_s\right)$$

$$(4) \quad U = \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} c \sum_s q_s \sin\left(\frac{2\pi\alpha_s \times X}{\lambda_s} + \beta_s\right)$$

in cui Q_s e q_s sono rispettivamente uno scalare e un vettore che dipendono unicamente dal tempo. α_s è un vettore che dà la direzione dell'onda s -esima, X è un vettore che ha per componenti le tre coordinate x, y, z del punto generico dello spazio, β_s è una costante di fase; infine il fattore di normalizzazione $\sqrt{\frac{2\pi}{\Omega}} c$ è stato scelto in modo da semplificare il più possibile le formule che incontreremo nel seguito.

È noto che, al limite per Ω molto grande, il numero delle componenti armoniche del tipo precedente che ha lunghezza d'onda compresa tra λ e $\lambda + d\lambda$, è dato da

$$(5) \quad \frac{4\pi\Omega}{\lambda^4} d\lambda$$

o, introducendo al posto della lunghezza d'onda la frequenza corrispondente,

$$(6) \quad \nu = \frac{c}{\lambda}$$

si può scrivere la (5) nella forma equivalente

$$(7) \quad \frac{4\pi\Omega}{c^3} \nu^2 d\nu.$$

Le (3) e (4) possono risolversi, nel modo consueto, rispetto ai coefficienti Q_s e q_s dello sviluppo; e si trova

$$(8) \quad c\sqrt{2\pi\Omega} Q_s = \int V \cos \Gamma_s d\tau$$

$$(9) \quad c\sqrt{2\pi\Omega} q_s = \int U \sin \Gamma_s d\tau$$

dove si è posto per brevità

$$(10) \quad \Gamma_s = \frac{2\pi\alpha_s \times X}{\lambda_s} + \beta_s,$$

e

$$(11) \quad d\tau = dx dy dz.$$

Vogliamo ora stabilire una equazione differenziale a cui soddisfano le Q_s e le q_s e che equivale alle equazioni di Maxwell (1) e (2).

Per far questo moltiplichiamo i due membri di (1) per $\cos \Gamma_s d\tau$ ed integriamo a tutto il volume Ω . Con ovvie trasformazioni si trova, supponendo che sulla superficie che limita Ω il potenziale si annulli, il campo elettromagnetico si annulli in modo tale che si possano omettere certi integrali estesi a tale superficie

$$\begin{aligned} -4\pi \int \rho \cos \Gamma_s d\tau &= \int \Delta V \cdot \cos \Gamma_s d\tau - \frac{1}{c^2} \int \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \cos \Gamma_s d\tau = \\ &= + \int V \cdot \Delta \cos \Gamma_s \cdot d\tau - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int V \cos \Gamma_s d\tau \end{aligned}$$

e siccome da (10) risulta

$$\Delta \cos \Gamma_s = -\frac{4\pi^2}{\lambda_s^2} \cos \Gamma_s$$

si ricava, tenendo presente la (8) e la (6)

$$(12) \quad \ddot{Q}_s + 4\pi^2 \nu_s^2 Q_s = \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} c \int \rho \cos \Gamma_s d\tau.$$

Se supponiamo che le cariche elettriche siano concentrate in punti di cariche e_1, e_2, e_3, \dots aventi coordinate X_1, X_2, X_3, \dots l'integrale del secondo membro di (12) può senz'altro effettuarsi, e l'equazione (12) diventa

$$(13) \quad \ddot{Q}_s + 4\pi^2 \nu_s^2 Q_s = \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} c \sum_i e_i \cos \left(\frac{2\pi \alpha_s \times X_i}{\lambda_s} + \beta_s \right) = \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} c \sum_i e_i \cos \Gamma_{si}$$

dove la somma deve essere estesa a tutte le cariche elettriche del campo.

Operando in modo simile sopra le componenti q_s dello sviluppo del potenziale vettore si trova per esse l'equazione

$$(14) \quad \ddot{q}_s + 4\pi^2 \nu_s^2 q_s = \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_i e_i \dot{X}_i \sin \Gamma_{si}.$$

Indicando con χ_s, w_{s1}, w_{s2} le componenti del vettore q_s rispettivamente nella direzione α_s e in due altre direzioni A_{s1} ed A_{s2} perpendicolari tra di loro e perpendicolari alla direzione α_s , possiamo scrivere

$$(15) \quad q_s = \alpha_s \chi_s + A_{s1} w_{s1} + A_{s2} w_{s2}$$

dove con A_{s1} ed A_{s2} si sono indicati i versori delle due direzioni corrispondenti. L'equazione (14) si può ora sostituire con le tre equazioni scalari equivalenti:

$$(16) \quad \ddot{\chi}_s + 4\pi^2 \nu_s^2 \chi_s = \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_i e_i (\alpha_s \times \dot{X}_i) \sin \Gamma_{si}$$

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \ddot{w}_{s_1} + 4\pi^2 \nu_s^2 w_{s_1} &= \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_i e_i (A_{s_1} \times \dot{X}_i) \sin \Gamma_{s_1} \\ \ddot{w}_{s_2} + 4\pi^2 \nu_s^2 w_{s_2} &= \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_i e_i (A_{s_2} \times \dot{X}_i) \sin \Gamma_{s_2} \end{aligned} \right.$$

Dalle equazioni (13) e (16) si deduce subito una relazione tra Q_s e χ_s . Basta per questo derivare la (13) rispetto al tempo e sommarla poi membro a membro con la (16) moltiplicata per $2\pi\nu_s$. Si trova così

$$(18) \quad \left(\frac{d^2}{dt^2} + 4\pi^2 \nu_s^2 \right) (2\pi \nu_s \chi_s + \dot{Q}_s) = 0.$$

Questa equazione è evidentemente soddisfatta se si pone

$$(19) \quad 2\pi \nu_s \chi_s + \dot{Q}_s = 0.$$

Questa equazione, come immediatamente si verifica, è identica alla nota relazione

$$(20) \quad \operatorname{div} \mathbf{U} + \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

che lega tra di loro il potenziale scalare e il potenziale vettore; in virtù di (18) tale relazione, pur non essendo una conseguenza delle equazioni differenziali, resta tuttavia verificata per tutti i valori del tempo a condizione che, all'istante iniziale, essa sia verificata insieme alla sua derivata prima.

3. Siamo ora in grado di scrivere le equazioni del movimento delle cariche elettriche e le equazioni del campo elettromagnetico in una forma che consente la loro immediata traduzione nelle equazioni della meccanica quantistica. In questa Nota ci limiteremo, come si è detto, a svolgere la teoria non relativisticamente; vale a dire, supporremo che le velocità delle cariche elettriche siano sempre piccole a confronto della velocità della luce.

Come coordinate per determinare le posizioni delle cariche prenderemo

$$X_1, X_2, \dots, X_i, \dots$$

E come coordinate che determinano il campo elettromagnetico

$$Q_s, \chi_s, w_{s_1}, w_{s_2}.$$

Queste ultime, per mezzo delle equazioni (3), (4), (15) determinano in tutti i punti del campo i potenziali scalare e vettore. Tra le coordinate Q_s e χ_s passa la relazione (19). Possiamo tuttavia considerare queste due va-

riabili come indipendenti, poichè abbiamo visto che l'equazione (19) è una conseguenza delle equazioni differenziali, quando almeno si ammetta, come vogliamo fare, che essa sia verificata, insieme alla sua derivata, all'istante iniziale. La (19) si riduce dunque soltanto a una condizione da imporre alle costanti di integrazione.

Accanto alle coordinate

$$X_i, Q_s, \chi_s, w_{s1}, w_{s2}$$

considereremo anche altre variabili

$$p_i, P_s, \tilde{\omega}_s, \omega_{s1}, \omega_{s2}$$

che rappresenteranno i momenti coniugati ad esse.

Possiamo ora verificare che, nella nostra approssimazione non relativistica, le equazioni del movimento e dell'elettrodinamica si possono derivare dalla seguente funzione Hamiltoniana

$$(21) \quad H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_s \left[\frac{1}{2} \{ \omega_{s1}^2 + \omega_{s2}^2 + \tilde{\omega}_s^2 - P_s^2 \} + 2\pi^2 v_s^2 \{ w_{s1}^2 + w_{s2}^2 + \chi_s^2 - Q_s^2 \} + \right. \\ \left. + c \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_{is} e_i Q_s \cos \Gamma_{si} - \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_{is} \frac{e_i}{m_i} [(\alpha_s \chi_s + A_{s1} w_{s1} + A_{s2} w_{s2}) \times p_i] \sin \Gamma_{si} \right].$$

Ciò si verifica immediatamente per quanto riguarda le equazioni del movimento; infatti la parte che contiene le coordinate X_i delle cariche elettriche e i loro momenti p_i , in virtù delle (3) e delle (4) si riduce a

$$\sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_i e_i V_i - \sum_i \frac{e_i}{c} \frac{p_i}{m_i} \times U_i + (\text{parte indipendente da } p_i \text{ e } X_i)$$

che non è altro che la consueta Hamiltoniana di un sistema di punti materiali carichi elettricamente e posti in un campo elettromagnetico.

Per verificare che dalla Hamiltoniana (21) seguono anche le equazioni dell'elettromagnetismo, formiamoci ad esempio le equazioni canoniche per la coppia di variabili coniugate Q_s, P_s . Tali equazioni risultano

$$\frac{dQ_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_s} = -P_s; \quad \frac{dP_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q_s} = +4\pi^2 v_s^2 Q_s - c \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_i e_i \cos \Gamma_{si}.$$

Eliminando da queste due equazioni il momento P_s ritroviamo la (13); in modo simile, tenendo conto che, in prima approssimazione, i momenti p_i coniugati alle coordinate X_i delle cariche, sono le quantità di moto $m \dot{X}_i$, si verificherebbe che, dalla nostra Hamiltoniana, seguono anche le (16) e (17). Siccome le equazioni (13), (16) e (17) sono equivalenti alle equazioni dell'elettrodinamica (1) e (2), resta dimostrato che anche tali equazioni possono dedursi dalla Hamiltoniana (21).

5. Avendo così scritto le equazioni dell'elettrodinamica e del movimento delle cariche sotto forma canonica, resta immediata la loro traduzione in equazioni di meccanica quantistica. Basta per questo considerare l'espressione H come un operatore, in cui i momenti, secondo l'ordinaria regola, siano equivalenti all'operazione di derivazione rispetto alla coordinata corrispondente e di moltiplicazione per $-\frac{h}{2\pi i}$. L'equazione di Schroedinger sarà allora la seguente

$$(22) \quad H\psi = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Mostreremo nelle Note seguenti l'applicazione di questa equazione.

Fisica. — *Sulla teoria quantistica della fluorescenza.* Nota di E. SEGRÉ, presentata ⁽¹⁾ dal Socio O. M. CORBINO.

La teoria di Schrödinger della dispersione permette di ottenere formule che corrispondono esattamente all'osservazione finchè la frequenza della luce incidente non coincide con una frequenza di assorbimento della sostanza disperdente. In quest'ultimo caso si ha il noto fenomeno della risonanza ottica, la cui trattazione diretta però sfugge ai metodi di Schrödinger per l'annullarsi di denominatori nelle formule; ciò è dovuto al fatto che in questo caso limite è essenziale l'influenza della reazione di radiazione che non può trattarsi senza un metodo di quantizzare, oltre agli atomi, anche la radiazione.

L'effetto Raman che è previsto e descritto esattamente dalla teoria di Schrödinger ammette anch'esso un caso limite ⁽²⁾ quando la frequenza incidente coincide con una frequenza di assorbimento e questo fenomeno è la fluorescenza, alla quale non è però applicabile la teoria di Schrödinger.

Dirac ⁽³⁾ gettando le fondamenta della nuova elettrodinamica quantistica che toglie alcune intime contraddizioni della teoria di Schrödinger, è riuscito a calcolare con metodi generali e pienamente conseguenti la formula della dispersione, ma i suoi metodi gli hanno anche permesso di calcolare il fenomeno della risonanza. Per la dispersione i suoi risultati coincidono con quelli di Schrödinger.

In questa Nota ci proponiamo di applicare i metodi di Dirac, sebbene in forma un po' modificata, alla fluorescenza.

(1) Nella seduta del 5 maggio 1929.

(2) AMALDI e SEGRÉ, « Rend. Linçei », vol. IX, p. 407, 1929.

(3) DIRAC, « Proc. Roy. Soc. », vol. CXIV, p. 710.

La distribuzione della intensità delle righe risulta dalla solita forma $\frac{1}{a^2 + (\Delta\nu)^2}$ e la larghezza delle righe stesse inversamente proporzionale alla vita media dello stato eccitato. Inoltre il rapporto tra il numero dei quanti diffusi per fluorescenza e risonanza risulta eguale a quello fra le rispettive probabilità di transizione.

Si studia infine il caso delle righe antistokes di fluorescenza. Il significato delle notazioni usate è lo stesso di quelle dell'Amaldi in una Nota in corso di pubblicazione su questi « Rendiconti » e per brevità omettiamo di ripeterne la spiegazione.

Per non complicare eccessivamente i calcoli supporremo che l'atomo abbia tre soli stati quantici m, n, l e che sia m lo stato fondamentale e che i passaggi $m \rightarrow l$ siano proibiti. Inoltre supporremo che nell'istante iniziale tutti gli atomi siano nello stato fondamentale, la quale ipotesi non è verificata altro che in prima approssimazione, trovandosi sempre un certo numero di atomi negli stati eccitati, per equilibrio statistico.

Alla fine sarà accennata l'influenza di tali atomi.

Il nostro sistema è descritto per $t = 0$ dal simbolo

$$|a_{m0} \dots a_n \dots 0|^2 = 1.$$

Lo illuminiamo con luce di frequenza $\nu_a = \nu(nm)$.

Il processo che si deve studiare è il seguente

$$a_{m0} \dots a_n \dots 0 \rightarrow a_{n0} \dots a_n \dots 1 \dots 0 \begin{cases} a_{l0} \dots a_n \dots 1 \dots 1 \dots 0 \\ a_{m0} \dots a_n \dots 1 \dots 1 \dots 0 \end{cases}$$

In questo caso non si può però trascurare la reazione degli atomi che si trovano negli stati l ed m , come ha fatto l'Amaldi per l'effetto Raman⁽¹⁾, poichè sebbene essi siano in numero esiguo, fanno sentire notevolmente il loro peso nel fenomeno a causa della condizione di risonanza $\nu_a = \nu(nm)$.

La formula fondamentale di Dirac ci dà nel nostro caso

$$\begin{aligned} (1) \dot{a}_{n0} \dots a_n \dots 1 \dots 0 = & -\frac{4\pi^{3/2}e}{\sqrt{\Omega h}} \left[\frac{\nu(nm)}{\sqrt{\nu_a}} B_a \times Q(nm) \sqrt{n_a} e^{2\pi i \{ \nu(nm) + \nu_a \} t} a_{m0} \dots a_n \dots 0 + \right. \\ & + \sum_b \frac{\nu(l n)}{\sqrt{\nu_b}} B_b \times Q(ln) e^{2\pi i \{ \nu(ln) + \nu_b \} t} a_{l0} \dots a_n \dots 1 \dots 1_b \dots 0 + \sum_c \frac{\nu(m n)}{\sqrt{\nu_c}} B_c \times \\ & \left. \times Q(mn) e^{2\pi i \{ \nu(mn) + \nu_c \} t} a_{m0} \dots a_n \dots 1 \dots 1_c \dots 0 \right] \end{aligned}$$

(1) AMALDI, « Rend. Acc. Lincei », in stampa.

dove il primo termine corrisponde all'azione degli atomi nello stato fondamentale, il secondo ed il terzo rispettivamente a quella degli atomi negli stati l ed m .

Il passaggio successivo dà luogo alle equazioni

$$(2) \quad \dot{a}_{l_0 \dots n_a - 1 \dots l_b \dots 0} = - \frac{4 \pi^{3/2} e}{\sqrt{\Omega h}} \frac{v(nl)}{\sqrt{v_b}} B_b \times Q(nl) a_{n_0 \dots n_a - 1 \dots 0} e^{2 \pi i \{ v(nl) - v_b \} t}$$

$$(2') \quad \dot{a}_{m_0 \dots n_a - 1 \dots l_c \dots 0} = - \frac{4 \pi^{3/2} e}{\sqrt{\Omega h}} \frac{v(nm)}{\sqrt{v_c}} B_c \times Q(nm) a_{n_0 \dots n_a - 1 \dots 0} e^{2 \pi i \{ v(nm) - v_c \} t}$$

per risolvere il sistema (2) (2') poniamo

$$(3) \quad a_{n_0 \dots n_a - 1 \dots 0} = A e^{2 \pi i \{ v(mn) + v_a \} t}.$$

Sostituiamo nelle (2) ed integriamo tenendo presente che per $t = 0$

$$a_{l_0 \dots n_a - 1 \dots l_b} = a_{m_0 \dots n_a - 1 \dots l_c} = 0$$

si otterrà così

$$(4) \quad a_{l_0 \dots n_a - 1 \dots l_b \dots 0} = - \frac{4 \pi^{3/2} l}{\sqrt{\Omega h}} \frac{v(nl)}{\sqrt{v_b}} B_b \times Q(nl) A \frac{e^{2 \pi i \{ v(nl) + v_a - v_b \} t} - 1}{2 \pi i \{ v(nl) + v_a - v_b \}}$$

ed una espressione analoga ove compare m in luogo di l e c in luogo di b .

Si tratta ora di calcolare A ; dalla (1) si ottiene a mezzo di (3) e (4)

$$(5) \quad 2 \pi i \{ v(mn) + v_a \} A e^{2 \pi i \{ v(mn) + v_a \} t} = - \frac{4 \pi^{3/2} e}{\sqrt{\Omega h}} \left[\frac{v(nm)}{\sqrt{v_a}} B_a \times \right. \\ \left. \times Q(nm) \sqrt{n_a} e^{2 \pi i \{ v(mn) + v_a \} t} + \frac{4 \pi^{3/2} e}{\sqrt{\Omega h}} \left\{ \sum_b \frac{v^2(ln)}{v_b} (B_b \times Q(ln))^2 A \frac{e^{2 \pi i \{ v(nl) - v_b + v_a \} t} - 1}{2 \pi i (v(nl) - v_b + v_a)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_c \frac{v^2(nm)}{v_c} (B_c \times Q(mn))^2 A \frac{e^{2 \pi i \{ v(nl) - v_b + v_a \} t} - 1}{2 \pi i (v_a - v_c)} \right\} e^{2 \pi i \{ v(mn) + v_a \} t} \right].$$

Per calcolare A dopo aver diviso ambo i membri per $e^{2 \pi i \{ v(mn) + v_a \} t}$ occorre eseguire i sommatori; per far questo si trasformeranno in integrali ricordando che il numero di oscillatori con frequenza compresa tra v e $v + dv$ è $\frac{8 \pi}{c^3} \Omega v^2 dv$; i valori medi andranno fatti tenendo conto che

$$(\overline{B_s \times Q})^2 = \frac{1}{6} Q^2.$$

Così, per es. si ottiene

$$\sum_b \left\{ \right\} = \frac{v^2(ln)}{2 \pi} \frac{1}{6} Q^2 (ln) \frac{8 \pi}{c^3} \Omega \{ v(nl) + v_a \} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i x t} - 1}{i x} dx$$

dove si è posto $x = 2\pi \{v(ml) - v_b + v_a\}$ e si è tenuto conto del fatto che per t grande

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{e^{i(x-x_0)t} - 1}{i(x-x_0)} dx$$

tende a

$$f(x_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(x-x_0)t} - 1}{i(x-x_0)} dx.$$

Ora si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt} - 1}{ix} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos xt - 1}{ix} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin xt}{x} dx = \pi$$

di modo che

$$\sum_b \left\{ \frac{2}{3} \frac{\pi}{c^3} \Omega \{v(ml) + v_a\} v^2(ln) Q^2(ln) \right\}.$$

Dalla (5) si ottiene così in definitiva

$$(6) \quad A = \frac{-\frac{4\pi^{3/2}e}{\sqrt{\Omega h}} \frac{v(mn)}{\sqrt{v_a}} B_a \times Q(mn) \sqrt{n_a}}{2\pi i \{v(mn) + v_a\} + \frac{32}{3} \frac{\pi^4 e^2}{h^3 c^3} \{v^2(ln) [v(ml) + v_a] Q^2(ln) + v^2(mn) v_a Q^2(mn)\}}$$

Conoscendo A si può senz'altro calcolare $a_{l_0 \dots n_a - 1 \dots \frac{1}{b} \dots 0}$ a mezzo della (4); facendo i calcoli si ottiene per il quadrato del modulo la seguente espressione

$$(7) \quad |a_{l_0 \dots n_a - 1 \dots \frac{1}{b} \dots 0}|^2 = \frac{64\pi^4 e^4}{\Omega^2 h^2} \frac{n_a \frac{v^2(mn) v^2(ln)}{v_a v_b} \{B_b \times Q(nl)\}^2 \{B_a \times Q(nm)\}^2}{\{v(mn) + v_a\}^2 + \left(\frac{16\pi^3 e^2}{3 h^3 c^3}\right)^2 \{v^2(mn) v_a Q^2(nm) + v^2(ln) [v_a + v(ml)] Q^2(nl)\}^2} \frac{\sin^2 \pi \{v(ml) + v_a - v_b\} t}{\pi^3 \{v(ml) + v_a - v_b\}^2}.$$

Tale quantità ci fornisce la probabilità che al tempo t , l'atomo sia passato allo stato l assorbendo la radiazione incidente ed irradiando un quanto di tipo b . Se vogliamo il numero totale di quanti diffusi bisogna sommare la (7) rispetto a b il che si fa sostituendo alla somma un integrale. Dovremo inoltre porre $v_a = v(nm)$ per modo che $v(ml) + v_a - v_b = v(nl) - v_b$.

Tenendo presente che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\sin^2 q(x-x_0)}{(x-x_0)^2} dx$ tende a $f(x_0) \cdot q \cdot \pi$

• per t grande ⁽¹⁾ si ottiene

$$(8) \quad \sum_b |a_{l0 \dots n_a - 1 \dots l \dots 0}|^2 =$$

$$= \frac{64 \pi^4 e^4}{\Omega^2 h^2} \frac{8 \pi \Omega}{c^3} \frac{n_a v(mn) v^3(nl) \frac{1}{6} Q^2(nm) \{B_a \times Q(nm)\}^2 \pi t}{\{v_a - v(nm)\}^2 + \left(\frac{16 \pi^3 e^2}{3 h c^3}\right)^2 \{v^3(nm) Q^2(nm) + v^3(nl) Q^2(nl)\}^2}.$$

In modo analogo si ottiene

$$(9) \quad \sum_c |a_{m0 \dots n_a - 1 \dots 1 \dots 1}|^2 =$$

$$= \frac{64 \pi^4 e^4}{\Omega^2 h^2} \frac{8 \pi \Omega}{c^3} \frac{n_a v^4(mn) \frac{1}{6} Q^2(nm) \{B_a \times Q(nm)\}^2 \pi t}{\{v_a - v(nm)\}^2 + \left(\frac{16 \pi^3 e^2}{3 h c^3}\right)^2 \{v^3(nm) Q^2(nm) + v^3(nl) Q^2(nl)\}^2}.$$

le quali ci danno i numeri di quanti diffusi rispettivamente di frequenza $v(nl)$ e $v(nm)$ ossia di fluorescenza e di risonanza.

Ricordiamo l'espressione della probabilità di transizione $n \rightarrow l$ ⁽²⁾

$$p(nl) = \frac{64 \pi^4 e^2 v^3(nl) Q^2(nl)}{3 h c^3}$$

allora le (8) e (9) si possono scrivere

$$(10) \quad \sum_b |a_{l0 \dots n_a - 1 \dots l \dots 0}|^2 = \frac{4 \pi^2}{\Omega h} e^2 n_a \frac{v(mn) \{B_a \times Q(mn)\}^2 p(nl)}{\{v_a - v(nm)\}^2 + \frac{1}{16 \pi^2} \{p(nm) + p(nl)\}^2} t,$$

$$(11) \quad \sum_c |a_{m0 \dots n_a - 1 \dots 1 \dots 1}|^2 = \frac{4 \pi^2}{\Omega h} e^2 n_a \frac{v(mn) \{B_a \times Q(mn)\}^2 p(nm)}{\{v_a - v(nm)\}^2 + \frac{1}{16 \pi^2} \{p(nm) + p(nl)\}^2} t.$$

Le (10), (11) permettono di calcolare la forma della riga sia di fluorescenza che di risonanza, per far questo bisogna tener conto del fatto che la luce incidente non sarà rigorosamente monocromatica ma che v_a varierà in un piccolo intorno di $v(nm)$.

Le (10) e (11) ci dicono che le righe corrispondenti sono del tipo $\frac{b}{a^2 + x^2}$ e se si definisce come larghezza della riga il Δv per cui il numero

(1) Cfr. WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, p. 93.

(2) BLOCH, *Zur Strahlungsdampfung*, ecc., «Phys. Zeitschr.», XXIX, 1928.

di quanti diffusi è la metà di quelli diffusi colla frequenza con cui si ha il massimo di intensità, si ha

$$\Delta\nu = \frac{1}{4\pi} \{p(nm) + p(nl)\} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\theta}$$

dove θ è la vita media dello stato n .

Siccome la riga incidente non è infinitamente sottile, per avere la intensità delle righe di fluorescenza e risonanza sarà necessario integrare le (10) (11) alla larghezza della riga.

In tal modo si ottiene

$$\frac{N_c}{N_b} = \frac{p(nm)}{p(nl)}.$$

Ossia il rapporto di numeri di quanti diffusi per risonanza e fluorescenza è l'inverso del rapporto delle vite medie.

La presente teoria fornisce uno spettro diffuso con righe del solito tipo campaniforme.

Inoltre poichè si è supposto che per $t = 0$ tutti gli atomi si trovino nello stato m la fluorescenza segue la legge di Stokes. Se si fosse posta come condizione iniziale che sia $a_{m0} \dots a_n \dots 0$ che $a_l \dots 0 \dots a_n \dots 0$ per $t = 0$ fossero diverse da zero, allora si sarebbe ottenuta una terza riga in posizione simmetrica alla riga di fluorescenza rispetto a quella di risonanza e il rapporto fra le intensità $\frac{I_a}{I_s}$ è circa $e^{-\frac{h\nu(lm)}{kT}}$. Questa è la riga di fluorescenza di tipo antistokes che è stata osservata, per es., nello spettro di bande dei vapori di iodio.

Negli spettri di atomi non sono state osservate righe di fluorescenza antistokes, ma un calcolo anche grossolano della loro intensità per gli elementi di cui è stata studiata la fluorescenza fa comprendere come esse debbano essere estremamente poco intese. Per poterle osservare occorrerebbe un elemento che possedesse uno stato eccitato piuttosto vicino allo stato fondamentale ed una tensione di vapore relativamente elevata anche a basse temperature.

Elettrotecnica. — *Sull'impedenza di un trasduttore quadripolare.* Nota di M. FEDERICI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. GIORGI.

Le due equazioni fondamentali di un trasduttore quadripolare (cioè di un sistema elettrico di conduttori, con due morsetti d'entrata, e due morsetti d'uscita, intercalato in una linea bifilare) possono essere scritte brevemente così

$$(1) \quad \begin{aligned} V_a &= aV_b + bI_b \\ I_a &= cV_b + dI_b \end{aligned}$$

dove $V_a I_a$ sono la tensione e la corrente ai morsetti d'entrata del trasduttore, $V_b I_b$ la tensione e la corrente ai morsetti di uscita. Fra i coefficienti a, b, c, d esiste una relazione che si ricava immediatamente dal teorema di reciprocità

$$(2) \quad ad - bc = 1.$$

Possiamo dire anche che la matrice del quadripolo è unimodulare perchè

$$(3) \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1.$$

I quattro coefficienti a, b, c, d individuano completamente il trasduttore, ed hanno note relazioni con le altre terne di parametri caratteristici di un trasduttore.

Se nella (1) poniamo $\frac{V_a}{I_a} = \chi', \frac{V_b}{I_b} = \chi$, abbiamo, dividendo membro a membro

$$(4) \quad \chi' = \frac{a\chi + b}{c\chi + d}.$$

Se il trasduttore è terminato alle estremità bb da una impedenza χ , la impedenza χ' alle estremità aa , cioè ai morsetti d'entrata, sarà espressa dalla (4).

Poichè χ e χ' sono due variabili complesse in due piani τ, x ed τ', x' , l'equazione (4) stabilisce una rappresentazione biunivoca conforme fra i due piani. Quindi χ' può essere considerato come il risultato di una sostituzione lineare eseguita su χ : e questa sostituzione è unimodulare.

(1) Nella seduta del 7 aprile 1929.

I teoremi validi per una sostituzione lineare unimodulare possono essere applicati alla (4): in particolare, quando χ varia lungo un cerchio (od una linea) anche χ' varierà lungo un cerchio (od una linea): ad ogni sistema lineare di cerchi del piano χ corrisponde nel piano χ' un sistema lineare di cerchi di eguale dimensione.

Se due quadripoli vengono collegati in serie e il secondo viene chiuso su un'impedenza χ , l'impedenza χ' che il primo quadripolo presenta sarà il risultato di due sostituzioni lineari successive eseguite su χ , cioè sarà data da una nuova sostituzione lineare che è il prodotto delle due e può essere scritta simbolicamente così

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha\alpha' + \gamma\beta' & \beta\alpha' + \delta\beta' \\ \alpha\gamma' + \gamma\delta' & \beta\gamma' + \delta\delta' \end{vmatrix}.$$

Se S e T sono due sostituzioni lineari, la sostituzione

$$(5) \quad S_1 = T^{-1}ST$$

è la sostituzione trasformata di S attraverso T e tutte le sostituzioni così ottenute si dicono simili ad S. La sostituzione T^{-1} è la inversa di T e può essere espressa così

$$(6) \quad \begin{vmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{vmatrix}.$$

Composta con T essa produce la sostituzione identica

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Ora la sostituzione S_1 definita dalla (5) equivarrebbe alla combinazione di 3 produttori, quello di mezzo qualunque e i due laterali inversi.

Ma in realtà non è possibile, dato un trasduttore T definito dalla matrice (3) formare un altro trasduttore che dia luogo alla sostituzione lineare (6). A causa del segno negativo dei parametri β e γ , l'energia uscente dal trasduttore dovrebbe essere maggiore di quella entrante e quindi il trasduttore non sarebbe più una rete di conduttori passivi, ma conterrebbe delle forze elettromotrici. Con conduttori passivi, ai quali viene in generale limitata l'applicazione della teoria dei trasduttori, è possibile realizzare solo la trasformazione

$$(7) \quad \begin{vmatrix} \delta & \beta \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix}$$

a cui corrisponde un trasduttore identico a quello dato, ma con gli estremi rovesciati. E il prodotto della (3) e della (7) non dà l'identità,

Pure è interessante rilevare che in due sostituzioni lineari simili, la somma $\alpha + \delta$ rimane costante, è un invariante per ogni trasformazione.

Questa somma in un trasduttore ha un significato molto importante, è il doppio del coseno iperbolico della costante di propagazione P .

La costante di propagazione è definita come il logaritmo naturale del rapporto fra la corrente all'entrata e la corrente all'uscita del trasduttore, quando questo è terminato da una catena infinita di trasduttori eguali o dalla sua impedenza iterativa.

Per ogni sostituzione lineare ci sono due punti che rimangono fissi, i due punti che sono le radici dell'equazione

$$(8) \quad \gamma \chi^2 + (\delta - \alpha) \chi - \beta = 0.$$

Analogamente in un trasduttore ci sono due impedenze χ_1 e χ_2 , tali che quando una di esse χ_1 (o χ_2) è collegata ai morsetti di uscita, la impedenza ai morsetti di entrata è eguale a χ_1 (o χ_2). È questa una nota proprietà dell'impedenza iterativa. Ma in generale si definiscono due impedenze iterative χ_{k1} e χ_{k2} che godono della suddetta proprietà, una in una direzione di propagazione dell'energia e l'altra per l'altra. La prima sarebbe relativa al trasduttore rappresentato dalla matrice (3), l'altra al trasduttore rappresentato dalla matrice (7).

La nostra equazione mostra che in realtà per ogni direzione di propagazione esistono non una ma due impedenze; però fra le due impedenze iterative di una direzione χ_1 e χ_2 e le due impedenze χ'_1 e χ'_2 dell'altra direzione esiste una relazione molto semplice

$$(9) \quad \chi_1 = -\chi'_2 = \chi_{k1}$$

$$(10) \quad \chi_2 = -\chi'_1 = -\chi_{k2}$$

esse sono eguali due a due, ma col segno cambiato. Infatti risolvendo la (8) abbiamo

$$(11) \quad \chi_1 = \frac{1}{2\gamma} [\alpha - \delta \pm \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4}]$$

$$(12) \quad \chi_2 = \frac{1}{2\gamma} [\alpha - \delta - \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4}]$$

mentre i valori di χ'_1 e di χ'_2 si ricaverebbero dalla (11) e dalla (12) scambiando fra loro α e δ .

Se le due impedenze iterative hanno la parte reale non nulla, per una di esse questa è negativa e quindi non fisicamente realizzabile. Se il trasduttore è formato di reattanze pure (caso ideale) o di reattanze quasi pure, nei filtri d'onda ben costruiti, tutte e due le impedenze χ_1 e χ_2 possono essere immaginarie e allora sono realizzabili fisicamente ed hanno significato.

Un esempio mostrerà questo più chiaramente: supponiamo di avere un trasluttore formato da una linea artificiale a T, con le 3 braccia eguali fra loro e formate da una selfaduzione pura L. L'impedenza iterativa sarà data da

$$(13) \quad z_0 = \sqrt{z_a z_b \left(1 + \frac{1}{4} \frac{z_a}{z_b} \right)}$$

e poichè qui

$$z_a = z_b = 2wL$$

avremo

$$(14) \quad z_0 = jwL\sqrt{3}.$$

L'altro valore della impedenza iterativa è rappresentato dall'impedenza di un condensatore tale che

$$(15) \quad |X_c| = \frac{1}{wc} = |z_0| = jwL\sqrt{3}$$

e quindi

$$(16) \quad c = \frac{1}{w^2 L \sqrt{3}}.$$

Chiudendo il quadripolo con una capacità che abbia il valore dato dalla (16) la impedenza ai morsetti di entrata sarà capacitiva ed avrà il valore $-z_0$.

Ne segue che, se fosse possibile realizzare una catena infinita di linee artificiali le cui impedenze fossero pure reattanze, la impedenza iterativa sarebbe determinata solo a meno del segno e ci sarebbe ambiguità.

In una catena infinita ma dotata di resistenza, la quale sola sarebbe realizzabile, la dissipazione nelle resistenze risolverebbe il problema e determinerebbe quel valore dell'impedenza iterativa che ha la parte reale positiva.

Ritornando all'equazione (4) notiamo che una sostituzione viene classificata a seconda del valore dell'invariante e le classi di sostituzioni trovano una perfetta corrispondenza in analoghe classi di quadripoli.

Se il quadripolo è un filtro ideale, i due coefficienti α e δ essendo il rapporto di pure reattanze sono ambedue reali e abbiamo allora 3 casi

$$|\alpha + \delta| > 2 \quad (\text{sostituzione iperbolica})$$

$$|\alpha + \delta| < 2 \quad (\text{sostituzione ellittica})$$

$$|\alpha + \delta| = 2 \quad (\text{sostituzione parabolica}).$$

Nel primo caso i due punti fissi della sostituzione sono tutti e due sull'asse reale: le due impedenze iterative sono reali e nella trasformazione restano fissi l'asse τ , e tutti i cerchi del fascio avente per base i due punti

fissi. Una impedenza reale vien trasformata in un'altra impedenza pure reale. È questa la banda non passante di un filtro, dove $|\cosh P| > 1$.

Nel secondo caso i due punti fissi sono sull'asse immaginario, le due impedenze iterative sono pure immaginarie e nella trasformazione resta fisso l'asse x delle reattanze. È questa la banda passante di un filtro, per la quale $|\cosh P| < 1$.

Infine nel terzo caso i due punti fissi coincidono e si ha un solo valore dell'impedenza iterativa. Son questi i due punti di passaggio fra la banda passante e quella non passante, per i quali $\cosh P = \pm 1$.

Se il trasduttore non è formato di reattanze pure o quasi pure, i coefficienti α e δ saranno in generale complessi e anche l'invariante sarà complesso. La sostituzione si chiama lossadromica e in essa restano fissi due punti situati comunque sul piano complesso: le impedenze iterative hanno tanto la parte reale che quella immaginaria diversa da 0. Quando è soddisfatta la condizione

$$\alpha = \delta$$

il trasduttore è simmetrico e

$$z_1 = -z_2.$$

La retta che congiunge i due punti rappresentanti z_1 e z_2 nel piano complesso passa per l'origine ed esiste un cerchio con centro nell'origine che passa anch'esso per z_1 e z_2 . Ora nella sostituzione anche questo cerchio e questa retta rimarranno fissi. Quindi se noi connettiamo alle estremità bb del trasduttore un'impedenza che abbia lo stesso angolo di fase dell'impedenza iterativa, l'impedenza ai morsetti di entrata avrà anch'essa la stessa fase. Così pure se la impedenza connessa a bb ha il modulo dell'impedenza iterativa, la impedenza all'entrata avrà lo stesso modulo.

Meteorologia. — *Sul calcolo della turbolenza nei bassi strati atmosferici* ⁽¹⁾. Nota di M. LOMBARDINI, presentata ⁽²⁾ dal Socio F. ENRIQUES.

In una mia precedente Nota ⁽¹⁾, per consiglio del prof. Eredia, ho posto a confronto le osservazioni anemologiche di Vigna di Valle colla teoria del moto del vento nei bassi strati atmosferici, riferendomi specialmente agli sviluppi di G. I. Taylor e di F. J. W. Whipple; e poichè non ho riscontrata alcuna discordanza fondamentale fra la teoria e le misure a Vigna di Valle, ho potuto considerare queste ultime come una conferma della teoria e ho determinato, per Vigna di Valle, il valore delle due costanti principali che compaiono nelle formule.

Il metodo da me adottato è suggerito dal genere di misure eseguite a Vigna di Valle, si basa unicamente sul valore della velocità del vento alle diverse quote; perciò se è lungi dal costituire una discussione completa della teoria, ha il vantaggio, dal punto di vista pratico, di essere applicabile a molte stazioni aerologiche e di permettere la determinazione di un valore medio della turbolenza disponendo di pochi elementi di misura.

L'unica difficoltà che si opponeva ad una larga ed immediata applicazione del metodo era costituita dalla lunghezza dei calcoli numerici, per ovviare alla quale pubblico ora delle tavole che permettono di ottenere in modo molto spedito la turbolenza alle diverse latitudini italiane. Applicando queste tavole alle misure anemologiche di molti osservatori si potrà ottenere una discussione notevole della teoria e, nello stesso tempo (ammessa l'esattezza della teoria) si avrà una misura della turbolenza per le diverse stazioni, ciò che può costituire un dato di non trascurabile importanza nella navigazione aerea.

§ 1. — Rimandando per i maggiori sviluppi di calcolo alla Nota precedentemente citata richiamiamo soltanto le nozioni essenziali per l'uso delle tavole.

(1) Lavoro eseguito all'Ufficio Presagi.

(2) Nella seduta del 7 aprile 1929.

(3) *L'attrito interno dell'aria e la costante di attrito superficiale alla stazione sperimentale di Vigna di Valle*, «Rend. R. Accad. dei Lincei», 1929, vol. IX, p. 63.

Il valore V della velocità del vento alla quota z è espresso dalla funzione

$$(1) \quad V = G\sqrt{1 - 2(\cos\psi - \sin\psi)e^{-az}\cos(a\bar{z} + \psi) + (\cos\psi - \sin\psi)^2 e^{-2az}}.$$

Tale funzione è crescente da $z = 0$ fino a $z = z_m$, in cui presenta un massimo, poi diminuisce e tende ad assumere un valore pressochè costante al crescere di z ; valore che abbiamo indicato con G e che teoricamente rappresenterebbe il *vento geostrofico*.

Abbiamo dimostrato ⁽¹⁾ che z_m è radice dell'equazione:

$$\cos(a\bar{z}_m + \psi) + \sin(a\bar{z}_m + \psi) - (\cos\psi - \sin\psi)e^{-az_m} = 0.$$

E per comodità di calcolo, in luogo di determinare la radice z_m , abbiamo calcolato, a meno di un decimo, il valore di $a\bar{z}_m + \psi$ che annulla l'equazione e cioè: $a\bar{z}_m + \psi = 2,3$.

Nella quinta colonna della prima tabella qui unita è calcolato il valore di $a\bar{z}_m + \psi$ a meno di un centesimo; e nella sesta il valore Φ del radicale della (1) corrispondentemente alla quota del massimo.

§ 2. - I valori delle costanti ψ ed a che compaiono nella (1) sono legati, il primo al valore del vento superficiale, il secondo al valore della turbolenza.

Occupiamoci anzitutto della costante ψ . Sia V_0 la velocità del vento superficiale e consideriamo il triangolo determinato dai vettori V_0 e G , ove, secondo l'uso, indichiamo in carattere grassetto di vettori corrispondenti a V_0 e G , cioè i vettori che rappresentano in grandezza e direzione la velocità del vento superficiale e del vento geostrofico.

In tale triangolo ψ è l'angolo opposto a V_0 . Se indichiamo con α l'angolo compreso fra V_0 e G per la teoria del Taylor, abbiamo $\alpha + \psi = 45^\circ$, quindi il triangolo è completamente determinato dal valore di V_0 e di G ed è:

$$\sin\psi = \frac{V_0}{G\sqrt{2}} \quad \sin\alpha = \frac{G}{V_0\sqrt{2}}.$$

$$\text{Se poniamo } \frac{V_0}{G} = \sigma \text{ è: } \sin\psi = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}.$$

Nelle prime colonne della tabella I si trovano calcolati i valori di ψ e di α in corrispondenza dei valori di σ presi dallo zero all'uno di ventesimo in ventesimo. L'angolo ψ è espresso in gradi e in radianti.

§ 3. - Come è noto l'*attrito interno* è l'effetto della *turbolenza* sulla variazione della velocità del vento con l'altezza, e può prendersi come misura della turbolenza. Questa diminuisce, in generale con l'altitudine, e conseguente-

(1) Nota citata p. 65.

mente anche l'attrito interno diminuisce; ma se per semplicità di calcolo lo supponiamo costante, nello stato preso in esame, abbiamo una relazione molto semplice fra il valore di a e il valore dell'attrito interno μ tale relazione è: $a = \sqrt{\frac{\rho \omega \sin \varphi}{\mu}}$ dove ρ è la densità dell'aria, ω la velocità angolare della rotazione terrestre, φ la latitudine del luogo di osservazione. Prendendo come zero della (2) $a\bar{\chi}_m + \psi = 2,3$ avevamo trovato, nella Nota citata (p. 66):

$$\mu = \rho \omega \sin \varphi \frac{\bar{\chi}_m^2}{(2,3 - \psi)^2}.$$

Formula che diviene: $\mu = \frac{\rho \omega \sin \varphi}{(m - \psi)^2} \bar{\chi}_m^2$ qualora si indichi con m il valore più esatto dello zero.

Abbiamo

$$\rho = 1,29 \cdot 10^{-3} \qquad \omega = 7,29 \cdot 10^{-5}$$

e quindi

$$\mu = \frac{1,29 \times 7,29}{(m - \psi)^2} \sin \varphi \cdot \bar{\chi}_m^2 = \mu_1 \sin \varphi \cdot 10^{-8} \cdot \bar{\chi}_m^2.$$

Nella tavola abbiamo calcolato i valori di $\mu_1 \sin \varphi$ di grado in grado, da 36 gradi a 46 gradi, limiti entro i quali sono comprese le stazioni italiane.

§ 4. — I risultati dei nostri calcoli li abbiamo raccolti in due tabelle in vista delle diverse applicazioni per cui possono servire. Nella prima tabella abbiamo raccolto gli elementi che sono indipendenti dalla latitudine calcolati principalmente per un controllo della teoria. Nella seconda tavola abbiamo raccolto i dati che si riferiscono direttamente al calcolo della turbolenza e che sono variabili con la latitudine. Per l'uso pratico delle tavole occorre conoscere:

- 1) Il valore medio V_0 della velocità del vento superficiale;
- 2) Il valore medio G della velocità del vento ad una quota in cui si mantenga quasi costante al crescere dell'altezza;
- 3) La quota $\bar{\chi}_m$ del massimo.

Calcolato $\sigma = \frac{V_0}{G}$ si legge sulla tabella II, in corrispondenza della latitudine del luogo di osservazione, un numero che moltiplicato per $\bar{\chi}_m^2$ dà senz'altro la misura della turbolenza. Se $\bar{\chi}_m$ è espresso in ettometri la misura così trovata è riferita al sistema (C. G. S.)

TABELLE PER IL CALCOLO DELLA TURBOLENZA.

TABELLA I. — *Valori indipendenti dalla latitudine.*

σ	ϕ		α	$az_m + \phi$	Φ	μ
0	0°	0	45°	2.28	1.07	1.81
0.05	2° 2'	0.04	42° 58'	2.29	1.07	1.85
0.10	4 3	0.07	40 57	2.29	1.07	1.91
0.15	6 5	0.11	38 55	2.29	1.07	1.97
0.20	8 8	0.14	36 52	2.29	1.07	2.04
0.25	10 11	0.18	34 49	2.29	1.07	2.11
0.30	12 15	0.21	32 45	2.29	1.07	2.18
0.35	14 20	0.25	30 40	2.29	1.06	2.26
0.40	16 26	0.29	28 34	2.29	1.06	2.34
0.45	18 33	0.32	26 27	2.29	1.06	2.43
0.50	20 42	0.36	24 18	2.30	1.06	2.50
0.55	22 53	0.40	22 7	2.30	1.06	2.60
0.60	25 6	0.44	19 54	2.30	1.05	2.71
0.65	27 22	0.48	17 38	2.31	1.05	2.80
0.70	29 40	0.52	15 20	2.31	1.04	2.92
0.75	32 2	0.56	12 58	2.32	1.04	3.03
0.80	34 27	0.60	10 33	2.32	1.03	3.18
0.85	36 57	0.64	8 3	2.33	1.03	3.31
0.90	39 31	0.69	5 29	2.34	1.02	3.45
0.95	42 12	0.74	2 49	2.35	1.01	3.61
1.00	45°	0.79	0°	2.36	1.00	3.79

TABELLA II. — *Valori per le diverse latitudini.*

α	36°	37°	38°	39°	40°	41°	42°	43°	44°	45°	46°
0	1.06	1.09	1.11	1.14	1.16	1.19	1.21	1.23	1.26	1.28	1.30
0.05	1.09	1.11	1.14	1.16	1.19	1.21	1.24	1.26	1.28	1.31	1.33
0.10	1.12	1.15	1.17	1.20	1.23	1.25	1.28	1.30	1.33	1.35	1.37
0.15	1.16	1.19	1.21	1.24	1.27	1.29	1.32	1.34	1.37	1.39	1.42
0.20	1.20	1.23	1.25	1.28	1.31	1.34	1.36	1.39	1.41	1.44	1.46
0.25	1.24	1.27	1.30	1.33	1.35	1.38	1.41	1.44	1.46	1.49	1.52
0.30	1.28	1.31	1.34	1.37	1.40	1.43	1.46	1.49	1.51	1.54	1.57
0.35	1.33	1.36	1.39	1.42	1.45	1.48	1.51	1.54	1.57	1.60	1.63
0.40	1.38	1.41	1.44	1.48	1.51	1.54	1.57	1.60	1.63	1.66	1.69
0.45	1.43	1.46	1.50	1.53	1.56	1.60	1.63	1.66	1.69	1.72	1.75
0.50	1.47	1.51	1.54	1.57	1.61	1.64	1.67	1.71	1.74	1.77	1.80
0.55	1.53	1.56	1.60	1.64	1.67	1.71	1.74	1.77	1.81	1.84	1.87
0.60	1.59	1.63	1.67	1.71	1.74	1.78	1.82	1.85	1.88	1.92	1.95
0.65	1.64	1.68	1.72	1.76	1.80	1.84	1.87	1.91	1.94	1.98	2.01
0.70	1.72	1.76	1.80	1.84	1.88	1.92	1.96	2.00	2.03	2.07	2.10
0.75	1.78	1.83	1.87	1.91	1.95	1.99	2.03	2.07	2.11	2.14	2.18
0.80	1.87	1.92	1.96	2.00	2.05	2.09	2.13	2.17	2.21	2.25	2.29
0.85	1.94	1.99	2.04	2.08	2.13	2.17	2.21	2.26	2.30	2.34	2.38
0.90	2.03	2.08	2.12	2.17	2.22	2.26	2.31	2.35	2.40	2.44	2.48
0.95	2.12	2.17	2.22	2.27	2.32	2.37	2.42	2.46	2.51	2.55	2.60
1.00	2.23	2.28	2.33	2.39	2.44	2.49	2.54	2.59	2.63	2.68	2.73

Chimica. — *Pentassolfuri dietilici*. Nota II di G. R. LEVI ed A. BARONI ⁽¹⁾ presentata ⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

In una Nota precedente ⁽³⁾ abbiamo dato la preparazione di un pentassolfuro dietilico a punto di ebollizione 119° fissandone anche altre costanti fisiche. Abbiamo allora anche indicato che esiste un altro pentassolfuro dietilico a punto di ebollizione 130° e abbiamo discusso le formole più probabili per questo caso di isomeria.

Nella presente Nota diamo i dati sperimentali che si riferiscono a questo secondo pentassolfuro e ci occupiamo anche della trasformazione di uno degli isomeri nell'altro e della determinazione dei loro pesi molecolari.

Preparazione del pentassolfuro dietilico isomero (II) (p. e. 130° a 26 mm.). Questo prodotto si forma riscaldando rispettivamente il bi-, tri- e tetrasolfuro dietilico con zolfo in tubo chiuso per due ore. Ad operazione finita la massa è rettificata nel vuoto. I risultati ottenuti possono essere così riassunti:

a) *Riscaldamento in bagno d'olio del disolfuro dietilico con zolfo (un atomo) in tubo chiuso a 200° per due ore.* In questa preparazione vennero usati gr. 15 di disolfuro ai quali si aggiunsero gr. 3.5 di zolfo puro. Alla distillazione a 26 mm. si ottennero le seguenti frazioni:

1° fraz.	p. e. da 52° a 85°	$(C_2H_5)_2S_2$ e $(C_2H_5)_2S_3$	gr. 8.6
2° fraz.	p. e. da 109°	$(C_2H_5)_2S_4$	gr. 2.2
3° fraz.	p. e. da 130°	$(C_2H_5)_2S_5$ (II)	gr. 2.5

residuo gr. 1.5; nessun prodotto a punto di ebollizione superiore a 130°; nessun prodotto intermedio fra 119° e 130°.

b) *Riscaldamento in bagno d'olio del trisolfuro dietilico con zolfo (un atomo) in tubo chiuso a 200° per due ore.* Vennero usati gr. 15 di $(C_2H_5)_2S_3$, che furono riscaldati con gr. 3.2 di zolfo. Alla distillazione si ebbero le seguenti frazioni:

1° fraz.	p. e. da 52° a 85°	$(C_2H_5)_2S_2$ e $(C_2H_5)_2S_3$	gr. 10.1
2° fraz.	p. e. 109°	$(C_2H_5)_2S_4$	gr. 2.0
3° fraz.	p. e. 130°	$(C_2H_5)_2S_5$ (II)	gr. 3.3

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Chimica Fisica della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 21 aprile 1929.

(3) Questi « Rendiconti », fasc. 9, 1929, pp. 772-778.

residuo gr. 1.6; nessun prodotto a punto di ebollizione superiore a 130°; nessun prodotto a punto di ebollizione intermedio fra 109° e 130°.

c) *Riscaldamento in bagno d'olio di $(C_2H_5)_2S_4$ con zolfo (un atomo) in tubo chiuso a 200° per due ore.* In questa preparazione si riscaldarono gr. 8.0 di $(C_2H_5)_2S_4$ e gr. 1.6 di zolfo. Alla distillazione si ebbero le seguenti frazioni:

1° fraz.	p. e.	52°	$(C_2H_5)_2S_2$	gr. 0.5
2° fraz.	p. e.	85°	$(C_2H_5)_2S_3$	gr. 0.5
3° fraz.	p. e.	109°	$(C_2H_5)_2S_4$	gr. 3.2
4° fraz.	p. e.	130°	$(C_2H_5)_2S_5$ (II)	gr. 1.5

residuo gr. 1.8; nessun prodotto a punto di ebollizione superiore a 130°; nessun prodotto compreso fra 109° e 130°.

Il prodotto bollente a 130° a 26 mm., proveniente dalle preparazioni a), b), c), venne analizzato nel modo già descritto per il pentasolfuro (I) di cui sopra. Si ebbero i seguenti risultati:

polisolfuro pesato	BaSO ₄ pesato	S %	polisolfuro pesato	BaSO ₄ pesato	S %
gr. 0.006153	gr. 0.0328	73.20	gr. 0.00343	gr. 0.0183	73.28
gr. 0.005485	gr. 0.0293	73.37	gr. 0.002025	gr. 0.0108	73.25
gr. 0.004980	gr. 0.0266	73.36	gr. 0.004145	gr. 0.0221	73.23

calcolato per $(C_2H_5)_2S_5$, 73.43. Il peso specifico determinato col metodo dei liquidi pesanti, usando una soluzione di $CaCl_2$, risultò 1.1620 a 16° ed è un pò inferiore al peso specifico del pentasolfuro (I) che a 16°, risultò essere 1.1642. L'indice di rifrazione come media di due determinazioni è $n_D^{20} = 1.59783$. I solfuri tri e tetra ottenuti in questa preparazione diedero, per tracce di vapori di zolfo trascinati nella distillazione nel vuoto, dei valori leggermente superiori a quelli riportati nella precedente Nota; una successiva distillazione nel vuoto dei singoli prodotti, portò però a valori perfettamente coincidenti con quelli dati per i prodotti ottenuti col cloruro di zolfo.

Abbiamo anche provato a scaldare disolfuro dietilico con zolfo (un atomo) in bagno d'olio a 150°. Alla distillazione si ottiene solo trisolfuro perfettamente puro e nessun prodotto più alto bollente. Riscaldando invece sempre in tubo chiuso e in bagno d'olio a 150° del disolfuro dietilico con con due atomi di zolfo, per raffreddamento il prodotto separa zolfo e cioè la reazione richiede una temperatura superiore come effettivamente è stato detto sopra.

Comportamento dei pentasolfuri (I) e (II) al riscaldamento. I due pentasolfuri vennero riscaldati in tubo chiuso e in bagno d'olio a 200° per

tre ore. Distillando successivamente il pentasolfuro (I) (gr. 3) sottoposto a tale trattamento, si ottennero:

1° fraz. da 52° a 109°	tracce $(C_2H_5)_2S_2$, $(C_2H_5)_2S_3$	
	tracce $(C_2H_5)_2S_4$	gr. 1.9
2° fraz. p. e. 119°	$(C_2H_5)_2S_5$ (I)	gr. 0.5
residuo		gr. 0.4

cioè non si ha nessun prodotto a punto di ebollizione superiore a 119° e la demolizione della molecola avviene specialmente con formazione di trisolfuro dietilico; nel caso invece del pentasolfuro (II) si ottennero per distillazione le seguenti frazioni:

1° fraz. da 52° a 109°	$(C_2H_5)_2S_2$; poco $(C_2H_5)_2S_3$, poco $(C_2H_5)_2S_4$	gr. 1.3
2° fraz. p. e. 119°	$(C_2H_5)_2S_5$ (I)	gr. 1.6
3° fraz. p. e. 130°	$(C_2H_5)_2S_5$ (II)	gr. 1.0

residuo gr. 1.1. La decomposizione avviene cioè con formazione specialmente di disolfuro. In questo caso si ottiene la trasformazione di una parte del pentasolfuro (II) nel pentasolfuro (I), mentre la trasformazione inversa non è stata finora da noi osservata.

Determinazioni crioscopiche di peso molecolare del tetrasolfuro e dei pentasolfuri (I) e (II) in bromoformio.

bromoformio	polisolfuro	Δ trovato	peso molecolare trovato calcolato	
gr. 71.6	gr. 0.5481 $(C_2H_5)_2S_4$	0° 59	186.8	186.3
gr. 59.0	gr. 0.4618 $(C_2H_5)_2S_5$ (I)	0° 51	221.1	218.4
gr. 64.0	gr. 0.6102 $(C_2H_5)_2S_5$ (II)	0° 61	225.0	218.4

I valori risultarono perciò sempre corrispondenti alla molecola semplice.

Riassunto:

Possiamo così riunire i risultati di questo lavoro e di quello precedentemente citato:

a) Viene dimostrato che il preteso pentasolfuro di Thomas e Riding è sostanzialmente una miscela di tetrasolfuro e zolfo.

b) Vengono preparati due pentasolfuri dietilici isomeri rispettivamente a punto di ebollizione 119° e 130° a 26 mm. e dimostrata la trasformabilità del secondo nel primo per riscaldamento sopra 200°.

c) Le rese di preparazione del pentasolfuro (I) eseguite con diversi cloruri politionici sono risultate in accordo con le misure crioscopiche di Bruni e Amadori sugli stessi, con la solubilità di zolfo in cloruro di zolfo di Hammick e Zvegintzov, con le preparazioni di politioderivati organici di Angeli e Magnani.

d) Le determinazioni dei pesi molecolari dei pentasolfuri isomeri in bromoformio, risultarono corrispondenti a molecole semplici.

e) Vengono stabilite le seguenti costanti fisiche dei diversi polisolfuri dietilici preparati liquidi color giallo chiaro i primi tre color arancio scuro il quarto.

	pesi specifici	indici di rifrazione	n_D^{13} p. e. a 26 mm.
$(C_2H_5)_2S_3$	1.1140 a 20°	1.56899	85°
$(C_2H_5)_2S_4$	1.1253 a 20°	1.58436	109°
$(C_2H_5)_2S_5$ (I)	1.1687 a 16°	1.60269	119°
$(C_2H_5)_2S_5$ (II)	1.1620 a 16°	1.59517	130°

Chimica. — *Di un nuovo tipo di sali delle terre rare* ⁽¹⁾. Nota di G. A. BARBIERI, presentata ⁽²⁾ dal Socio R. NASINI.

Nella chimica degli elementi trivalenti delle terre rare che, com'è noto, non danno nè allumi, nè fluosali, nè cianosali, si riscontrano dei tipi salini (nitrati doppi, carbonati doppi, ferri- e cobalti-cianuri cristallizzati, ecc.) che mancano nella chimica degli elementi trivalenti comuni. A questi tipi salini caratteristici delle terre rare sono da aggiungere gli argentocianuri e gli aurocianuri che finora non erano stati descritti, e che io ho avuto occasione di ottenere nel corso di ricerche di tutt'altra natura.

Dovendo preparare, per uno studio sistematico dei composti di addizione dei cianosali con l'esametilentetrammina, quantità notevoli di ferricianuro di bario e di cobalticianuro di bario (che dovevano servirmi come materia prima per ottenere per doppio scambio molti altri ferri- e cobalticianuri) avevo trovato conveniente, invece di passare per gli acidi ferri- e cobalticianidrico o per i loro sali di argento, di preparare i sali delle terre rare che sono bei composti ben cristallizzati poco solubili e quindi facilmente ottenibili e con ottimo rendimento, per doppio scambio dai sali di potassio ⁽³⁾ e poi, approfittando dell'insolubilità degli idrossidi delle terre rare, eliminare queste ultime con barite.

S'intende che nel caso dei ferricianuri impiegavo terre rare miste assolutamente private di cerio perchè nel trattamento con barite l'idrato ceroso avrebbe agito sul jone ferricianidrico riducendolo a ferrocianidrico. Nel caso dei cobalticianuri si poterono impiegare invece terre rare miste

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica del R. Istituto Superiore Agrario di Bologna.

(2) Nella seduta del 19 maggio 1929.

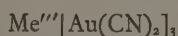
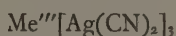
(3) C. JAMES, P. S. WILLAND, « J. Am. Ch. Soc. », 38, 1497 (1916); A. J. GRANT, C. JAMES, « J. Am. Chem. Soc. », 39, 933 (1917).

contenenti cerio perchè il jone cobalticianidrico non viene ridotto dall'idrato ceroso.

In seguito, dovendo preparare alcuni argento- ed auro-cianuri, mi è parso interessante di ricercare se anche per questi composti avessi potuto seguire una via analoga a quella che mi aveva condotto allo scopo per i ferri- e i cobalti-cianuri.

Nessun argentocianuro e nessun aurocianuro di elementi trivalenti si trova descritto nella letteratura chimica. A scopo di orientamento eseguii alcuni tentativi di preparazione degli argentocianuri di alluminio, cromo e ferro trivalente, ma, come era prevedibile, con risultato assolutamente negativo.

Con gli elementi delle terre rare del gruppo del cerio ottenni invece facilmente argentocianuri e aurocianuri cristallizzati, nei quali per un atomo di metallo raro sono contenuti tre atomi di argento o di oro e sei radicali CN. La loro composizione corrisponde quindi alle formule generali:



All'infuori delle terre rare mi fu possibile di ottenere composti di questo tipo soltanto con cationi complessi trivalenti molto stabili, come quelli dei luteosali del cobalto, del cromo, del rodio. Tale analogia di comportamento è giustificata dal fatto che i sali delle metallesammine sono resistenti all'idrolisi come i sali di quasi tutte le terre rare.

In questa Nota mi limiterò a riferire le condizioni di preparazione e i dati analitici riguardanti gli argento- ed auro-cianuri di alcuni elementi del gruppo del cerio, nonchè l'argento-cianuro e l'auro-cianuro di luteo-cobalto. Mi riservo di estendere le indagini anche agli elementi del gruppo dell'ittrio e di verificare se questo nuovo tipo di composti possa venir utilizzato per la determinazione sollecita degli equivalenti delle terre rare nel corso dei frazionamenti.

Il cerio impiegato nelle preparazioni qui sotto descritte era stato estratto dalle sabbie monazitiche e purificato come solfato cerico basico col metodo dell'ossidazione a freddo con persolfato potassico in presenza di sali d'argento, da me descritto nel 1916⁽¹⁾.

Il lantanio e il neodimio provenivano dalla Ditta Dr. P. Drossbach (ora non più esistente) ed avevano già servito per altre mie ricerche sulle terre rare⁽²⁾.

Argentocianuro di cerio $\text{Ce}[\text{Ag}(\text{CN})_2]_3 \cdot 3 \text{H}_2\text{O}$:

A 10 cc. di una soluzione neutra di nitrato ceroso contenente circa gr. 1 di cerio si aggiunge a poco a poco e senza agitare la soluzione di

(1) «Rend. Accad. Lincei», [5] XXV, 1° sem., 42 (1916).

(2) «Rend. Accad. Lincei», [5] XVI, 1° sem., 402 (1907); XX, 1° sem., 18-164 (1911).

gr. 10 di argento-cianuro potassico sciolti a freddo in 50 cc. di acqua. Per qualche istante la miscela delle due soluzioni resta limpida, poi subito intorbida per la formazione di una polvere cristallina che aderisce alle pareti del bicchiere. Agitando il liquido con un bastoncino di vetro e stregando con questo le pareti si facilita la deposizione del prodotto, che dopo circa due ore viene raccolto alla pompa. L'acqua madre contiene, insieme con l'eccesso di argento-cianuro di potassio, appena tracce di cerio: infatti trattata con ammoniaca ed acqua ossigenata dà un lieve precipitato rossastro. La polvere cristallina così ottenuta è bianca e inalterabile alla luce. Venne seccata all'aria fra carta da filtro.

All'analisi diede i seguenti risultati:

Calcolato %	Ag	48.03	Ce	20.81	N	12.47
Trovato %	»	47.98	»	21.06	»	12.29

Argento-cianuro di lantanio $\text{La}[\text{Ag}(\text{CN})_2]_3 \cdot 3 \text{H}_2\text{O}$:

Venne ottenuto nelle stesse condizioni del sale di cerio al quale rassomiglia perfettamente.

Calcolato %	Ag	48.12	La	20.67	N	12.50
Trovato %	»	47.85	»	20.90	»	12.69

Argento-cianuro di neodimio $\text{Nd}[\text{Ag}(\text{CN})_2]_3 \cdot 3 \text{H}_2\text{O}$:

Polvere cristallina lievemente rosea: venne preparata nelle stesse condizioni dei composti precedenti.

Calcolato %	Ag	47.74	N	12.40
Trovato %	»	48.09	»	12.32

Argento-cianuro di luteocobalto $[\text{Co}(\text{NH}_3)_6][\text{Ag}(\text{CN})_2]_3$:

A gr. 2.7 di cloruro di luteocobalto sciolti a freddo nella minor quantità possibile di acqua si aggiunse la soluzione di gr. 9 di argentocianuro potassico sciolti in 40 cc. di acqua. Si formò subito una sostanza cristallina di color giallo-aranciato che esaminata al microscopio risultò costituita da prismi ben formati.

Calcolato %	Co	9.20	Ag	50.52	N	26.24
Trovato %	»	9.31	»	50.75	»	26.34

Auro-cianuro di cerio $\text{Ce}[\text{Au}(\text{CN})_2]_3 \cdot 3 \text{H}_2\text{O}$:

A cc. 10 di una soluzione neutra di nitrato ceroso contenente circa gr. 1 di cerio si aggiunsero gr. 7 di aurocianuro di potassio sciolti nella

minor quantità possibile di acqua. Si formò subito un precipitato cristallino bianco, pesante, che al microscopio risultò costituito da minutissimi cristallini trasparenti. L'acqua madre conteneva appena tracce di cerio. Per dosare l'oro, la sostanza venne calcinata con acido solforico concentrato ed il solfato di cerio venne poi estratto mediante lavaggio con acido cloridrico diluito.

Calcolato	%	Au	62.82	Ce	14.90	N	8.92
Trovato	%	»	62.57	»	14.71	»	9.18

Auro-cianuro di lantanio $\text{La}[\text{Au}(\text{CN})_2]_3 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$:

Venne preparato come il composto di cerio al quale rassomiglia perfettamente

Calcolato	%	Au	62.90	N	8.94
Trovato	%	»	63.10	»	8.88

Auro-cianuro di luteocobalto $[\text{Co}(\text{NH}_3)_6][\text{Au}(\text{CN})_2]_3$:

Alla soluzione di gr. 1 di cloruro di luteocobalto in 10 cc. di acqua si aggiunsero gr. 4 di auro-cianuro di potassio sciolti in cc. 30 di acqua: si formò tosto una bella sostanza giallo-aranciata, cristallizzata in squamette, che spremuta alla pompa, lavata con poca acqua e poi con alcool venne seccata all'aria fra carta da filtro.

Per il dosamento dell'oro la sostanza venne disgregata con acido solforico concentrato; il cobalto venne dosato col metodo volumetrico da me descritto in una Nota precedente ⁽¹⁾.

Calcolato	%	Au	65.11	Co	6.49	N.	18.50
Trovato	%	»	64.98	»	6.44	»	18.61

Chimica. — *Sui ferro-ciano-molibdati e sui composti analoghi del rutenio e dell'osmio.* Nota di G. A. BARBIERI, presentata dal Socio R. NASINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) « Rend. Accad. Lincei » [6] 8, 2° sem., 405 (1928).

Geologia. — *Nuove osservazioni sull'Oligocene italiano* ⁽¹⁾. Nota di GIAMBATTISTA DAL PIAZ, presentata ⁽²⁾ dal Socio C. F. PARONA.

Per l'ampiezza della distribuzione geografica, per la rapidità del processo evolutivo e per la facilità alle grandi migrazioni, i Mammiferi rappresentano, assai meglio dei Molluschi, un mezzo sicuro e preciso per determinare la cronologia dei terreni cenozoici. Questo criterio, applicato su larga scala dai geologi americani, incomincia ora, per merito soprattutto di Stehlin, Depéret, Schlosser ecc., a farsi strada anche fra gli studiosi europei, in generale piuttosto riluttanti a riconoscere il valore del nuovo indirizzo.

Con tale concetto intrapresi recentemente lo studio dei Mammiferi dell'Oligocene italiano, che, sebbene scarsi come specie e rappresentati soltanto in pochi depositi, purtuttavia si prestano molto bene per fissare l'età delle faune a cui appartengono e il loro parallelismo con quelle tipiche europee, fornendoci altresì un punto sicuro di *repère* per la cronologia di tutti gli altri giacimenti oligocenici della Penisola.

Il deposito di Cadibona venne riferito al Tongriano inferiore (Sacco), allo Stampiano (Depéret), all'Oligocene medio (Portis), al Cattiano (Rovereto e Fabiani) e all'Aquitano (Stehlin e Dal Piaz). Come dimostrammo in altra Nota ⁽³⁾, il giacimento savonese diede avanzi di: *Propalaeochoerus-leptodon*, *Anthracotherium magnum*, *Hyracodontherium Filholi* e *Bachitherium insigne*. Il « *Microbunodon* » - *minus* è rappresentato da un resto così meschino da rendere incerto e malsicuro perfino il suo riferimento generico. Infine la notizia che a Cadibona sieno stati scoperti resti di Rinoceronte (*Protaceratherium cadibonense!* ecc.) è destituita di ogni fondamento, basandosi sopra un errore di provenienza. Il deposito ligure non può quindi venir sincronizzato con quello ad *Anthracotherium valdense* e *Microbunodon minus* di Rochette presso Losanna; esso invece è riferibile alla parte media e inferiore dello Stampiano e molto probabilmente appartiene allo stesso orizzonte (Stampiano medio), che diede la fauna di St.-Henry di Marsiglia. Difatti in questa località vennero rinvenute le forme seguenti: *Bachitherium insigne*, *B. curtum*, *Prodremotherium*, *Propalaeochoerus* e un *Anthracotherium* della grandezza di *A. magnum*.

(1) Lavoro eseguito nel Museo di Storia Naturale di Basilea.

(2) Nella seduta del 5 maggio 1929.

(3) DAL PIAZ GB., *Su due piccoli Artiodattili di Cadibona e sulla loro importanza cronologica*, in « Acc. Veneto-Trentino-Istr. », 1929.

Negli strati arenacei di Maccio, intercalati nella Gomfolite o conglomerato comense, fu rinvenuto il canone anteriore di un Ungulato, che il Portis riportò al genere *Prodremotherium*. Purtroppo non potei avere in esame l'interessantissimo avanzo, ma il dott. H. G. Stehlin, che comparò l'accurata illustrazione datane dal Sordelli con i numerosi canoni di Artiodattili conservati nel Museo di Basilea, venne alla conclusione che, per quanto si può comprendere dal disegno, il fossile sembra aver appartenuto ad un *Bachitherium*, essendo troppo poco evoluto per esser riferibile ad un *Prodremotherium*. Come è noto questi due generi sono caratteristici dello Stampiano medio e inferiore; nel Sannoasiano non vennero ancora scoperti e nell'Aquitano sono sostituiti rispettivamente da *Amphytragulus* e *Dremotherium*; il deposito di Maccio non può quindi appartenere all'Oligocene inferiore, come voleva il Portis, ma deve più o meno corrispondere al livello di Cadibona, attuando così quel ringiovanimento del conglomerato comense già preconizzato dal Repossi. È superfluo insistere sull'importanza di questa constatazione, poichè è noto come l'età della Gomfolite sia rimasta sempre molto incerta e approssimativa per la mancanza di dati paleontologici sufficienti. Ancora maggiore è l'interesse dal punto di vista tectonico, poichè la formazione del conglomerato corrisponde ad una fase di poderosa attività orogenetica, che, per quanto si è detto, sembra essersi verificata, almeno in parte, durante lo Stampiano medio e inferiore. Ma questi problemi verranno trattati in maniera esauriente dal prof. Repossi, che ha già raccolto da tempo dati preziosi sulla costituzione litologica della Gomfolite e che spera di poter ancora rintracciare il prezioso fossile di Maccio, nel qual caso si giungerebbe certamente ad una identificazione sicura e precisa dell'avanzo.

Nelle marne di Chiavón (Vicentino) furono scoperti gli avanzi di un Artiodattilo (frammenti di tibia e di canone posteriore), determinato come *Prodremotherium* dal Portis, ma che sembrerebbe riferibile piuttosto a *Bachitherium*. In ogni caso questo rinvenimento attesta che il deposito di Chiavón non può assolutamente appartenere al Miocene inferiore, come credeva il Bassani, ma che deve esser riportato all'Oligocene e più precisamente alla parte media del periodo (Stampiano medio-inferiore). Ciò concorda con quanto venne già stabilito dal Fabiani, per cui il giacimento vicentino corrisponde al Rupeliano.

Monteviale (Vicentino) ha fornito una fauna interessantissima, molto caratteristica per la primitività e la piccolezza dei suoi elementi. Vi abbiamo riscontrato infatti ⁽¹⁾: una forma ancestrale di megachiroterro (*Archaeopterus transiens*); due creodonti (cfr. *Dyspterna*), che appartengono all'antichissima tribù degli Acreodi; un suide (*Propalaeochoerus Paronae*) più piccolo di tutte le altre specie congeneri; l'*Anthracotherium monsvialense* alquanto minore

(1) Le notizie sulla fauna di Monteviale sono estratte da un'apposita monografia, che vedrà quanto prima la luce nelle «Memorie dell'Istituto Geologico di Padova».

dell'*A. magnum*; un nuovo tipo di Artiodattilo, il *Lignitohyus*, di cui una specie è piccolissima (*L. Fabianii*); infine un Rinoceronte (*Trigonias Ombonii*) più piccolo, e, sembra, più primitivo della più semplice forma americana congenere (*T. Osborni*), che appartiene alla parte più bassa dell'Oligocene inferiore (Lower Titanotherium Beds). Questi fatti stanno tutti in favore di un'età relativamente antica del deposito veneto, che senza dubbio è più vecchio di quello di Cadibona e più o meno equivalente ai Titanotherium Beds. A nostro avviso le ligniti di Monteviale, riportate da Fabiani al Rupeliano, vanno ascritte al Sannoasiano e, per le ragioni sovraesposte, ad una fase piuttosto antica di questo sottoperiodo.

Ad Agnana (Calabria) vennero trovati alcuni denti di *Anthracotherium*, che potei esaminare grazie alla cortesia dei professori de Lorenzo e d'Erasmo. Per le dimensioni l'Antracoterio meridionale si accosta agli individui minori della specie ligure, ma se ne distingue per la struttura più delicata dei molari, che, in confronto a quelli di Cadibona, presentano le cuspidi più rilevate e gli spigoli più taglienti. Purtroppo questi miseri resti non ci offrono alcun dato sicuro per determinare l'età del giacimento calabrese, che venne riportato a tutti i sottoperiodi dell'Oligocene; non è escluso, sebbene non esista in proposito certezza alcuna, che l'antracoterio di Agnana sia più primitivo dell'*A. magnum* e il fatto sarebbe in accordo con il riferimento del deposito all'Oligocene inferiore voluto dal Silvestri. In ogni caso questo rinvenimento non è privo di una certa importanza, perchè ci attesta che a quell'epoca il territorio di Agnana presentava una comunicazione più o meno larga con il continente; difatti l'*Anthracotherium* non può esservi stato autoctono dall'Eocene, aparendo per la prima volta in Europa soltanto nel Sannoasiano.

I risultati a cui siamo giunti sembrano talvolta in contrasto con quelli ottenuti recentemente dai migliori terziaristi italiani e ciò soprattutto riguardo l'età di Cadibona e di Monteviale. Non bisogna dimenticare però che tutti questi autori riferiscono l'Aquitaniense al Miocene, separandolo dal Cattiano, di cui fanno il termine più alto dell'Oligocene. Sulla base di tale metodo è praticamente impossibile impennare le correlazioni fra le faune mammo-logiche, e lo scrivente fu quindi costretto a seguire il sistema adottato da Stehlin, Depéret, Rollier, Viret ecc., per cui l'Aquitaniense vien fatto corrispondere all'Oligocene superiore.

D'altra parte, se è innegabile che nel Bordelais le faune marine aquitaniane offrono le maggiori affinità con quelle burdigaliane, nel bacino di Magonza invece il calcare a idrobite di Bundenheim (= *faluns de Bazar*) non mostra alcuna traccia di rinnovamento faunistico. Inoltre la grande trasgressione miocenica non incomincia dappertutto con l'Aquitaniense, che risulta perfino regressivo su aree molto estese (Germania nord-occidentale). Gli esempi si potrebbero moltiplicare, ma per ora è sufficiente far vedere come la paleontologia degli invertebrati e i movimenti del mare offrano dati in-

certi e spesso contraddittori per quella che dev'essere la maggiore suddivisione del Terziario. Un limite di così grande importanza deve essere stabilito sulla base di fenomeni che presentino la maggior estensione possibile e nello stesso tempo comportino i cambiamenti più radicali. Questo doppio requisito è realizzato soltanto dai Mammiferi.

Infatti nel corso del tempo oligocenico vanno via via estinguendosi molti rami filogenetici, già importantissimi; con la fine dello Stampiano medio scompaiono *Methriotherium*, *Lophiomeryx*, *Prodremotherium*, *Bachitherium* ecc.; poi all'inizio dello Stampiano superiore s'estingue *Hyaenodon*, poco dopo spariscono *Anthracootherium*, *Microbunodon* ecc., e con il termine dell'Aquitaniense varie forme di piccoli Carnivori, i Didelfidi e numerosi Roditori (*Archaeomys*, *Eomys*, *Issidoromys*, *Theridomys*) non si riscontrano più sul suolo d'Europa. Comparativamente scarsissime sono invece le forme che si aggiungono alla fauna durante l'Aquitaniense, come *Teleoceras* e *Pseudocyon*; per *Ceratorhinus* e *Haplocyon* si può obiettare ch'essi compaiono già nel Cattiano e che quindi non possono certo servire per una separazione fra questo termine e l'Aquitaniense s. s. Inoltre questi nuovi elementi potrebbero rappresentare in massima parte i ritardatari della grande migrazione stampiana. In conclusione la fauna mammologica aquitaniana rappresenta, come ben dice Viret, un residuo di quella stampiana, collegandosi insensibilmente a quella cattiana, con cui forma un tutto inseparabile.

Col Burdigaliano si verifica un colpo di scena grandioso; compaiono per migrazioni brusche *Anchitherium*, *Dinotherium*, *Mastodon* (due *phylum*), *Dorcatherium*, *Procervulus*, *Dicroceros*, *Lagomeryx*, *Choerotherium*, *Listriodon*, *Amphicyon* (*phylum* d'Avaray) e più tardi *Protragocerus*, *Eocerus*, *Pliopithecus* (ancora incerto per il Burdigaliano) ecc. Formidabile avvenimento, veramente essenziale per la Mammalofauna europea, fenomeno grandioso che attesta considerevoli spostamenti nei limiti dei mari e dei continenti e l'apertura di una porta sino allora chiusa alle correnti faunistiche terrestri.

Il limite fra Paleogene e Neogene deve quindi venir stabilito in corrispondenza di questo brusco rinnovamento biologico, cioè fra il livello aquitaniano di St.-Gérard le Puy e quello burdigaliano delle sabbie orleanesi.

Geologia applicata. — *Risultati geologici dell'attraversamento dell'apennino Tosco-Bolognese colla grande Galleria della Direttissima Bologna-Firenze.* Nota di L. MADDALENA, presentata dal Corrisp. P. VINASSA DE REGNY.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 1° giugno 1929 (Anno VII)

Presidenza del sen. prof. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Analisi. — *Sull'insieme dei punti singolari di una funzione analitica di più variabili.* Nota ⁽¹⁾ del Socio F. SEVERI.

Stabilisco qui la seguente singolare proprietà delle funzioni analitiche di due variabili complesse (d'estensione immediata alle funzioni di più variabili):

*Se una funzione analitica (uniforme) di due variabili complesse x, y è - come funzione delle due variabili **indipendenti** - olomorfa in tutti i punti (al finito e all'infinito) di una **particolare** varietà $ax + by + c = 0$ ⁽²⁾, essa è una costante.*

Questo teorema mostra che - in un campo reale quadrimensionale dove si distendano le x, y - l'insieme dei punti singolari di una funzione analitica (non costante), ha, in un certo senso, natura superficiale. Ciò era noto per l'insieme dei punti singolari inessenziali: poli e punti d'indeterminazione ⁽³⁾. Il teorema estendesì facilmente al caso in cui $f(x, y)$ non possiede singolarità sopra una curva (complessa) algebrica,

(1) Nella seduta del 1° giugno 1929.

(2) Olomorfa, cioè sviluppabile, nell'intorno del punto considerato, che si chiamerà brevemente *punto di olomorfismo*, in serie doppia di TAYLOR-CAUCHY convergente (assolutamente e uniformemente).

(3) Chiamo così i punti che, con WEIERSTRASS, si soglion chiamare punti inessenziali di 2ª specie. Un punto d'indeterminazione (effettiva) è un punto nell'intorno del quale la funzione $f(x, y)$ data può rappresentarsi col quoziente di due funzioni olomorfe e nulle nel punto, prime fra loro « in piccolo ». Per un punto siffatto passano tutte le varietà $f = \text{cost.}$

1. Dovendo studiare la funzione per tutte le coppie di valori, anche non finiti, di x, y , occorre precisare quand'è che una coppia di valori non ambedue finiti di x, y , deve essere considerata come punto di olomorfismo o come punto singolare per la funzione.

Il comportamento all'infinito di una $f(x, y)$ viene variamente definito. La via che a me sembra più opportuna è di fissare il concetto in modo invariante per le più semplici trasformazioni analitiche, che sono le sostituzioni lineari fratte sulle x, y (*punto di vista proiettivo*). Questo è il punto di vista universalmente adottato per le funzioni di una variabile, perchè la sostituzione $x' = 1/x$, colla quale si riporta l'infinito al finito, è un'omografia nella x . Tale convenzione non è invece adottata generalmente per le funzioni di due variabili⁽¹⁾. Si suol infatti portare l'infinito al finito con una delle trasformazioni

$$(1) \quad x' = \frac{1}{x}, y' = y; \quad x' = x, y' = \frac{1}{y}; \quad x' = \frac{1}{x}, y' = -\frac{1}{y}.$$

L'Osgood chiama questo il *punto di vista dell'analisi*: lo considera cioè come il punto di vista più naturale nello studio delle funzioni analitiche. Ed in ciò egli è preceduto e seguito dalla grande maggioranza dei cultori della teoria. Ho altrove⁽²⁾ esposto le ragioni che mi fanno invece considerare inopportuno questo modo di vedere⁽³⁾.

(1) Ved. per un esame dei vari punti di vista circa il modo di definire il campo all'infinito dello spazio (x, y) , OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie* (II Auf., II. Bd., Teubner, 1929), I cap. §§ 17, 18, 19; FORSYTH, *Theory of functions of two complex variables* (Cambridge, 1914), cap. I, II.

(2) *Conferenze di geometria algebrica* (Roma, Tip.-lit. Genio civile, 1927-29) pp. 73, 188. Ved. altresì per talune proprietà della varietà V di C. SEGRE, della quale più sotto si parla, la Nota di B. SEGRE, *Sobre algunas representaciones reales del plano complejo* («*Revista Mat. Hispano-Americana*», 1928) p. 137.

(3) Esse si riassumono così: Le (1) non sono trasformazioni omografiche, ma *quadratiche* nelle x, y . Orbene, ogni trasformazione birazionale (o, più generalmente, analitica, biunivoca) nelle x, y , presenta sempre, se non è un'omografia, coppie (*fondamentali*) di valori, che fanno eccezione alla biunivocità. Le proprietà dell'intorno d'una coppia fondamentale vengono profondamente alterate dalla trasformazione. Ora le (1) presentano coppie fondamentali all'infinito, cioè proprio nei punti dei quali vuolsi considerare l'intorno! Inoltre esse producono strane anomalie (legate al fatto segnalato) nei riguardi dei punti singolari, anche delle più elementari funzioni. Consideriamo p. es. un polinomio di grado n , nella sola x , come funzione delle due variabili complesse x, y . Un'omografia (del piano metrico-proiettivo complesso x, y), che porti la retta all'infinito in una retta al finito a , muta il polinomio in una funzione razionale di x, y , la quale possiede in un punto generico di a un polo d'ordine n e nel corrispondente del punto $x = \cos t, y = \infty$ un punto d'indeterminazione, cioè ancora un punto singolare. Onde par naturale di dire che le analoghe singolarità si hanno all'infinito pel polinomio dato; chè altrimenti bisognerebbe rassegnarsi ad accettare il fatto che proprio una trasformazione omografica (la più innocente, perchè è la sola trasformazione analitica capace di agire su tutto il campo x, y , compreso l'infinito, senza dar luogo ad eccezioni) sia atta a generare singolarità

2. Io considero come modello reale naturale, per rappresentare il campo di variabilità di x, y , un modello i cui punti sieno in corrispondenza biunivoca continua, senza eccezioni, coi punti del piano metrico-proiettivo complesso x, y , cioè colle terne (definite a meno di un fattore complesso arbitrario, ma non nullo) di numeri complessi finiti non simultaneamente nulli. Alla stregua analoga la sfera (o una quadrica a punti ellittici) è il modello naturale del campo di variabilità di una variabile complessa x . Esso è il modello *minimo* (ved. le mie citate « Conferenze ») nel senso che, fra tutte le superficie algebriche reali che possono similmente essere assunte a modelli, ha l'ordine minimo. Il modello *minimo* che rappresenta il campo di variabilità di x, y , dal punto di vista proiettivo, è invece una varietà V , a quattro dimensioni e del 6° ordine, appartenente allo spazio proiettivo reale S_8 . È una *varietà reale* di C. Segre, che già il mio compianto maestro indicò per rappresentare il campo x, y , senza per altro segnalarne la proprietà di minimo, che la impone quasi come modello necessario. La V è priva di punti multipli (è mutata in sé da un gruppo continuo transitivo di omografie), è di *tipo ellittico* (cioè contiene due sistemi di piani complesso-coniugati, tali che per ogni punto di V passa un piano di ciascuno di quei sistemi e i due piani sono coniugati, se il punto è reale). Si può inoltre scegliere V , fra le sue trasformate omografiche reali, in modo che sia *limitata* (assumendo a iperpiano all'infinito di S_8 uno degli iperpiani non seganti V). Come varietà topologica V è chiusa (senza contorni) omogenea e bilatera. Le rette del piano metrico-proiettivo complesso, ivi compresa la retta all'infinito, sono rappresentate da $\infty + 1$ quadriche reali ellittiche di V , formanti un sistema Σ . Ognuna di queste quadriche è, al pari di V , limitata⁽¹⁾.

Iaddove non ne esistono. Invece, dal punto di vista « dell'analisi » il polinomio considerato non presenta in $x = \text{cost.}, y = \infty$ alcuna singolarità, come risulta portando quel punto al finito colla trasformazione $x' = x, y' = 1/y$. Per contro, un punto $x = y = \infty, y/x = \text{costante finita}$, è un polo d'ordine n anche dal punto di vista dell'analisi, come risulta applicando la terza delle (1). Sicché si va incontro alla necessità di ammettere che un punto all'infinito possa essere di accumulazione di punti singolari, senza essere singolare!

(1) Quando si mette la mano sul giusto modello, c'è altresì il vantaggio che le omografie nelle x, y vengono rappresentate da omografie che mutano in sé il modello. Così, quando si distende la x sul piano metrico reale (con ARGAND e GAUSS), le omografie nella x non sono rappresentate da omografie del piano, ma da trasformazioni quadratiche (affinità circolari di MÖBIUS), perchè il modello è inadeguato, in quanto i punti all'infinito fanno eccezione alla biunivocità, rappresentando essi un sol valore $x = \infty$. Se invece si prende, come modello del campo di variabilità di x , la sfera, le omografie nella x sono rappresentate da omografie che mutano in sé il modello. Allo stesso modo, allorchè si distendono le x, y sopra uno spazio metrico reale S_4 , le omografie nelle x, y vengono rappresentate da trasformazioni cremoniane del 6° ordine dell'ambiente; mentre, prendendo il giusto modello V , le omografie nelle x, y vengono rappresentate da omografie trasformanti in sé V . Ricorderò ancora che la V si proietta *biunivocamente* dallo S_4 di una sua quadrica Q , sopra uno S_4 proiettivo reale. Fanno eccezione alla biunivocità

3. Abbiassi una $f(x, y)$ uniforme, analitica - generabile cioè per prolungamento analitico da un suo *qualunque* elemento - la quale non presenti, come funzione delle due variabili *indipendenti*, alcun punto singolare, sopra una *particolare* quadrica Q di Σ . Si conclude allora subito che *ogni* punto di Q è di olomorfismo per f . Ciò è anzitutto chiaro pei punti di accumulazione di punti di olomorfismo appartenenti a Q , perchè punti siffatti, se non fossero di olomorfismo, sarebbero singolari per f . Se poi Q contenesse un punto P , che non fosse di accumulazione pel campo di olomorfismo, congiunto P con un punto O di olomorfismo situato su Q , mediante un arco OP di linea, tracciato su Q , l'estremo superiore μ dei punti di OP che sono di olomorfismo per f , sarebbe di accumulazione tanto per punti di olomorfismo, come per punti esterni al campo di olomorfismo, onde μ riuscirebbe singolare per f ; contrariamente al supposto. Dunque f esiste su tutta la Q ed è ivi una costante.

4. Ciò premesso, non esistendo su Q punti singolari di f , dico che si può determinare un numero fisso $\sigma > 0$ siffatto che nell'intorno (quadrimensionale), di ampiezza σ , di *ogni* punto di Q , non cadano punti singolari di f . Sia I l'insieme dei punti singolari di f . Basta provare che la distanza $[P, I]$ ⁽¹⁾, quando P varia su Q , ha un estremo inferiore $\lambda > 0$. Esiste infatti su Q almeno un punto P_0 tale che, per P variabile in un qualunque intorno di P_0 , *sopra* Q , l'estremo inferiore di $[P, I]$ è ancora λ ⁽²⁾. Ora, essendo P_0 di olomorfismo per f , non può essere di accumulazione per I : cioè esiste un $\sigma' > 0$, tale che in un intorno, di ampiezza σ' , di P_0 , *sopra* V , non cadono punti di I . Considerato un altro

i punti di Q , ognuno dei quali si proietta nei punti di una retta, e l'insieme di queste rette costituisce una congruenza lineare ellittica, in un certo S_3 di S_4 . Mandando questo S_3 all'infinito, in guisa che le due rette direttrici complesso-coniugate della congruenza si mutino in due rette dell'assoluto euclideo, si ottiene la ordinaria rappresentazione delle coppie x, y coi punti di un S_4 euclideo.

(1) Mi giovo qui di un concetto, che ho in altra occasione introdotto (questi « Rendiconti », vol. 5 (6) 1927, p. 476). Avendosi in uno spazio metrico un insieme I di punti, distanza $[P, I]$ di un punto P dello spazio, dall'insieme I , è l'estremo inferiore delle distanze di P dai punti di I . Se I, I' sono due insiemi limitati di punti dello stesso spazio, distanza $\{I, I'\} = [I', I]$ dei due insiemi, è l'estremo superiore delle distanze dei punti di ciascuno dall'altro. Questo concetto di distanza risponde (nello spazio funzionale i cui elementi sono gl'insiemi limitati di punti del dato spazio) al concetto generale di FRÉCHET, relativo a distanze di elementi negli spazi astratti. Se i due insiemi limitati sono perfetti e continui (ed è il caso che c'interessa), la distanza $\{I, I'\}$ si annulla allora e solo allora che i due insiemi coincidono. Di più in tal caso l'estremo inferiore e l'estremo superiore, di cui sopra si parla, sono un massimo ed un minimo.

(2) L'esistenza su Q di un punto di WEIERSTRASS per l'estremo inferiore o superiore di una funzione reale del punto variabile su Q , segue ovviamente dall'ordinario teorema di WEIERSTRASS per funzioni reali di 2 variabili reali, tenuto conto che Q è omomorfa ad una superficie sferica e che la metà di questa è omomorfa ad un rettangolo (o cerchio).

intorno, di ampiezza σ'' , di $P_o(\sigma'' < \sigma')$, la distanza di un punto qualunque di quest'ultimo da I è non minore di $\sigma' - \sigma''$. Onde $\lambda \geq \sigma' - \sigma'' > 0$.

5. Possiamo supporre, senza restrizione, che Q corrisponda alla retta $y = 0$ del piano metrico-proiettivo complesso, e che un punto O , scelto su Q , sia immagine di $x = \infty, y = 0$. La retta $y = a$ è rappresentata da una quadrica Q' di Σ , uscente da O . Siccome la distanza $[Q, Q']$ è manifestamente funzione continua di a , tendente a zero, per $a \rightarrow 0$, si può determinare un $\varepsilon > 0$, siffatto che, per $|a| < \varepsilon$, risulti $[Q, Q'] < \sigma$, ove σ ha il significato del numero precedente. Ciò posto consideriamo un altro punto fisso $M(x = x_o, y = 0)$ di Q e l'intorno $|x - x_o| < \eta$ ($\eta > 0$, arbitrario), $|y| < \varepsilon$ di M sopra V . Per ogni punto di tale intorno passa una retta $y = a$ con $|a| < \varepsilon$; ossia, fissato (comunque) un punto M di Q è possibile determinare un intorno (quadrimensionale) K di M sopra V , in modo che per ogni punto di K passi qualche quadrica di Σ , distante da Q meno di σ .

6. Se P' è un punto d'una quadrica Q' , la quale disti da Q meno di σ , e P è un punto di Q (certo esistente) avente da P' la distanza $[P', Q]$, sarà $PP' \leq [Q, Q'] < \sigma$, epperò P' apparterrà all'intorno di ampiezza σ di P ; onde non potrà essere singolare per f (n. 4). Poichè ciò vale per tutti i punti di Q' , f è costante anche lungo Q' (n. 3). Siccome infine Q, Q' hanno un punto comune, la f assume su Q, Q' lo stesso valore. Ma per ogni punto dell'intorno K del punto M di Q passa qualche quadrica come la Q' ora considerata; dunque f è costante in tutto l'intorno K , e quindi su tutta la V .

7. Si avverta bene che nel precedente ragionamento *giuoca in modo essenziale l'ipotesi che ogni punto di Q sia di olomorfismo per la $f(x, y)$, come funzione delle due variabili indipendenti*. Può, nel fatto, accadere che una $f(x, y)$ sia costante sopra una $ax + by + c = 0$, senza che sia costante in tutto il campo (x, y) ; ma in tal caso sulla $ax + by + c = 0$ cadono certamente punti, che sono singolari per f , come funzione delle due variabili indipendenti. Così p. es. la funzione y/x è costante su $y = 0$, ma questa varietà contiene il punto singolare $x = y = 0$ (punto d'indeterminazione effettivo).

8. Corollari immediati del teorema dimostrato sono i seguenti:

Per una trascendente intera di due variabili ogni punto all'infinito è singolare.

Invero, altrimenti esisterebbero rette al finito $ax + by + c = 0$, non contenenti punti singolari della funzione.

Una funzione analitica uniforme di due variabili, priva di punti singolari all'infinito, è una costante.

Infatti i punti all'infinito appartengono ad una particolare retta. D'altronde è chiaro che, dato il punto di vista proiettivo da cui ci siamo posti nel ragionamento precedente, il corollario *equivale* al teorema.

L'ultimo corollario è identico, nell'espressione verbale, ad una proposizione dimostrata da Osgood (1). Dico nell'« espressione verbale », perchè il contenuto sostanziale ne è profondamente diverso. Invero, a prescindere dalle convenzioni relative all'infinito del campo (x, y) , il significato genuino della proposizione dell'Osgood è dichiarato dal teorema contenuto a pag. 69 dell'opera citata, del quale la proprietà accennata non è che una diversa forma:

« Se una $f(x, y)$ analitica, uniforme, è olomorfa per ogni coppia di valori finiti di x, y soddisfacenti alla $|x| + |y| > G$, ove G è un numero positivo fisso, ed è inoltre, nel campo stesso, limitata, essa è costante ».

L'Osgood deduce questo teorema dallo sviluppo di Laurent per le funzioni analitiche di 2 variabili; ma esso può considerarsi altresì come una facile conseguenza del teorema di Liouville (affermando che un'effettiva trascendente intera non è limitata). Difatti, la condizione dell'enunciato è soddisfatta per $y = y_0$, con $|y_0| > G$, e x arbitrario. Onde la funzione $f(x, y_0)$ è una trascendente intera; e, siccome è limitata, è una costante. Analogamente, scambiando l'ufficio delle due variabili. Pertanto $f(x, y)$ è costante nel campo quadrimensionale $|x| > G, |y| > G$, epperò è costante sempre.

Rappresentate le x, y su due sfere (com'è lecito dal punto di vista « dell'analisi »), la ipotesi dell'Osgood si riduce in sostanza a supporre che $f(x, y)$ sia olomorfa in ogni punto del campo a due dimensioni costituito dalle coppie di punti delle due sfere, che hanno un dato punto fisso su ciascuna ed un punto variabile sull'altra (*omografia degenera* fra le due sfere); mentre la nostra ipotesi equivale a supporre che la $f(x, y)$ sia olomorfa in ogni punto del campo bidimensionale costituito dalle coppie di un'*omografia non degenera* fra le due sfere.

Insomma: nel campo « dell'analisi » l'insieme dei punti all'infinito non è equivalente, rispetto al gruppo di trasformazioni che caratterizzano quel campo, ad una varietà $ax + by + c = 0$, onde l'assenza di singolarità all'infinito non equivale all'assenza di singolarità sopra una tale varietà.

9. Un'altra osservazione. Sia $f(x)$ una funzione analitica uniforme di x , olomorfa nel punto $x = 0$. A prima giunta parrebbe che sulla retta $x = 0$ (del piano metrico-proiettivo complesso x, y) la $f(x)$, considerata come funzione delle variabili indipendenti x, y , non avesse alcuna singolarità e che perciò il teorema da noi dimostrato ne risultasse contraddetto.

Ecco invece come stanno le cose.

Dal punto di vista « dell'analisi » l'elemento $x = 0, y = \infty$ non è singolare per $f(x)$ [cfr. colla nota (3) a pag. 928]; cosicchè, se $f(x)$ è una trascendente intera, la funzione non ha alcun punto singolare sulla retta $x = 0$.

(1) *Topics in the theory of functions of several complex variables* (« Madison Colloquium of the Am. Math. Soc. », 1915, p. 145). Op. cit. pp. 69, 77.

e la proprietà è effettivamente contraddetta. Essa insomma non è vera nel campo « dell'analisi »: il che rende più espressiva la differenza sostanziale fra il nostro ed il teorema di Osgood.

Nel campo proiettivo, invece, $x = 0, y = \infty$ risulta singolare per $f(x)$, sempre che la funzione non riducasi ad una costante. Invero, la serie $a_0 + a_1 x + \dots$, che fornisce $f(x)$ nell'intorno del punto $x = 0$ (il quale può supporre, senza restrizione, di olomorfismo), mediante la trasformazione omografica $x = y' : x', y = 1 : x'$, che porta $x = 0, y = \infty$ in $x' = y' = 0$, si muta in una serie di potenze del rapporto $y' : x'$, il cui valore dipende dal modo come (x', y') tende all'origine. Pertanto se i coefficienti a_n ($n \geq 1$) non sono nulli, il punto $x' = y' = 0$ è singolare ⁽¹⁾.

10. La dimostrazione vera e propria del teorema oggetto della presente Nota è contenuta nei nn. 3-6. L'amico prof. Levi-Civita, al quale ho comunicato il risultato, mi ha osservato quanto segue:

Suppongasì che la retta su cui la data $f(x, y)$ non ha punti singolari sia $x = 0$, rappresentata dalla quadrica Q . Allora ogni punto di Q è altresì di olomorfismo per le successive derivate parziali di $f(x, y)$; onde (n. 3) anch'esse son costanti lungo Q . Sia:

$$(1) \quad f(x, y) = \sum a_{mn} x^m y^n$$

lo sviluppo di f nell'intorno del punto di olomorfismo $x = y = 0$. Poichè per $x = 0$ è $f(0, y) = \text{costante}$, saranno nulli i coefficienti a_{0n} ($n \geq 1$).

Ora per la derivabilità termine a termine di (1) e pel fatto che $\frac{\partial f}{\partial x}$ deve essere costante in $x = 0$, risulta $a_{1n} = 0$ ($n \geq 1$). Similmente, la considerazione di $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ mostra che $a_{2n} = 0$ ($n \geq 1$); ecc. Nello sviluppo (1) sono dunque eventualmente diversi da zero soltanto i coefficienti a_{m0} ($m \geq 0$), epperò $f(x, y)$ riducesi ad una funzione $\varphi(x)$ della sola x .

Questa considerazione può sostituire i nn. 4-6 della mia dimostrazione, perchè da essa, mercè l'osservazione del numero precedente, si deduce di nuovo che $\varphi(x)$ riducesi addirittura ad una costante.

La dimostrazione dei nn. 4-6 ha però una più ampia portata; p. es. essa si applica immutata alla ipotesi in cui $f(x, y)$ sia olomorfa in tutti i punti di una curva algebrica d'ordine qualunque.

(1) Pel punto $x = 0, y = \infty$ passano tutte le varietà $f(x) = \text{cost.}$, sicchè, anche sotto questo aspetto, o trattasi di una singolarità essenziale o di un punto d'indeterminazione.

Geometria. — *Ancora sul fascio canonico.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp.
GUIDO FUBINI.

In una Nota pubblicata testè in questi « Rendiconti » (p. 365) mi sono occupato del problema di riconoscere *a priori* perchè le rette più notevoli, che si sono definite successivamente per l'intorno di un punto *generico* di una superficie *S non rigata*, appartengono *tutte* al fascio che io ho chiamato *canonico*. Il prof. Čech mi fa osservare che la mia Nota può prestarsi a inesatte interpretazioni. Credo quindi opportuno ritornare sull'argomento con metodi leggermente diversi.

Con notazioni analoghe a quelle della Nota citata supponiamo che l'equazione di *S* nell'intorno di un suo punto *generico* $x = y = z = 0$ sia

$$z = P_2 + P_3 + P_4 + (5),$$

ove

$$P_2 = xy; \quad 3P_3 = x^3 + y^3; \quad 12P_4 = Ax^4 + 4Bx^3y + 6Cx^2y^2 + 4Dxy^3 + Ey^4,$$

ove *A, B, C, D, E* sono costanti e (5) indica un'espressione nulla *almeno del quinto ordine* per $x = y = 0$. Si noti che P_3 è *apolare* a P_2 . Vi sono infiniti triedri xyz che fanno assumere alla equazione di *S* la forma precedente, e di questa indeterminazione del triedro coordinato potremo servirci per semplificare P_4 . Sembra conforme ai metodi che si sono dimostrati così fecondi nella geometria proiettiva di cercar di rendere P_4 *apolare* a P_2 (così come P_3 è già *apolare* a P_2). E ciò si riconosce (loc. cit.) sempre possibile, cosicchè potremo supporre $B = C = D = 0$ ⁽²⁾. Usando questa forma canonica, invece di trattare (come in loc. cit.) il caso generale, le seguenti considerazioni appariranno più chiare.

Si noti anzitutto che le precedenti ipotesi non determinano completamente i valori delle costanti *A, E*. Senza mutare la forma dello sviluppo per la z noi possiamo infatti fare i seguenti cambiamenti di coordinate e di coefficienti

$$\begin{aligned} \text{I) } x' &= \epsilon x & y' &= \epsilon^2 y & z' &= z & (\epsilon = \sqrt[3]{1}) \\ A'\epsilon &= A & E'\epsilon^2 &= E. \end{aligned}$$

(1) Nella seduta del 1° giugno 1929.

(2) Le $B = C = D = 0$ dicono che l'asse delle z è la direttrice; la $C = 0$ dice che $2(z - xy) + z^2 = 0$ è la quadrica di Lie.

Questi trasformano le equazioni $\bar{z} = x = 0$ di una tangente asintotica nelle omologhe $\bar{z}' = x' = 0$, e le $\bar{z} = y = 0$ nelle $\bar{z}' = y' = 0$. Gli invarianti per questi cambiamenti di coordinate sono

$$A^3, E^3, AE \quad ; \quad Ax, Ey, z,$$

e le loro funzioni. I primi tre sono *invarianti dell'intorno studiato*, gli ultimi tre sono gli invarianti del sistema formato da tale intorno e dal punto (x, y, z) . Quali sono le più *semplici coordinate invarianti di punto*? Per quanto la semplicità non sia un *quid* di assoluto, ma dipenda dal nostro gusto, mi pare indubbio che (almeno nel caso generale $AE \neq 0$) esse siano le

$$X = Ax \quad , \quad Y = Ey \quad , \quad Z = z.$$

Una retta $X : a = Y : b = Z$ uscente dall'origine ha per coordinate plückeriane $a, b, 1, 0, 0, 0$. Perciò le a, b si potranno considerare come coordinate *non omogenee invarianti* di tale retta, che chiameremo la retta (a, b) .

II) Altri cambiamenti di coordinate che non mutano il tipo del precedente sviluppo si ottengono dal prodotto di uno dei precedenti per la:

$$x' = v, v' = x \text{ (oppure } X' = Y, Y' = X) \quad ; \quad \bar{z}' = \bar{z} \\ A' = E, E' = A.$$

Questi portano le $\bar{z} = x = 0$ nelle $\bar{z}' = y' = 0$, e le $\bar{z} = y = 0$ nelle $\bar{z}' = x' = 0$. Una retta (a, b) nel primitivo sistema di coordinate diventa nel nuovo la retta (b, a) . *Dunque le rette $a = b$, cioè le rette canoniche hanno il comportamento più semplice possibile*; ed è forse questa la ragione per cui esse si presentano nei più semplici e naturali problemi di geometria proiettiva.

Farò ancora l'osservazione che gli invarianti per le trasformazioni (I) e (II) sono soltanto

$$AE, A^3 + E^3 \quad ; \quad X + Y, A^3 X + E^3 Y, Z$$

e le loro funzioni (se $A^3 \neq E^3$)⁽¹⁾. I primi due sono gli invarianti dell'intorno [per lo sviluppo iniziale essi sarebbero: $(A + 2D)(E + 2B)$; $(A + 2D)^3 + (E + 2B)^3$].

Ecco ancora altre due proprietà delle rette canoniche che ne mostrano la singolare importanza. Se p. es. $A = E$ (basterebbe che $A^3 = E^3$) non sono nulli, una retta (a, b) non è determinata dalla conoscenza dell'intorno e dai valori di a, b ; essa non si può razionalmente distinguere dalla retta (b, a) . Solo le rette canoniche, per cui $a = b$, sono in tal caso definite dall'intorno e dalle loro coordinate invarianti. Una tangente $X : a = Y : b, Z = 0$ ha ri-

(1) Così p. es. $E^3 X + A^3 Y = (A^3 + E^3)(X + E) - (A^3 X + E^3 Y)$.

spetto a P_1 , come prima polare $ax^3 + by^3$, che è proporzionale a P_3 , solo se $a = b$, cioè se essa è la tangente canonica. (Notisi che $P_3 = 0$ definisce le direzioni di Darboux).

Osservazioni. — Nel caso $A = E \neq 0$, il prof. Čech mi fa osservare che le rette, per cui $a = -b$, non sono determinate, per quanto sia naturalmente determinato il loro fascio, che incontra il piano tangente nella retta coniugata alla tangente canonica.

Fisica. — *Telefonia ottica mediante radiazioni ultraviolette od ultrasosse.* Nota ⁽¹⁾ del Socio Q. MAJORANA.

Dopo la presentazione di una Nota concernente un nuovo sistema di telefonia ottica, mediante l'uso di un arco a mercurio ⁽²⁾, ho continuato ad occuparmi dello stesso argomento, cercando di rendermi conto: delle condizioni fisiche più opportune per una buona trasmissione della parola; di perfezionare il sistema, rendendolo efficiente anche di giorno; di ricercare (per le ragioni che esporrò in seguito in questa Nota) un sistema di telefonia ottica anche per la regione ultrarossa dello spettro; di stabilire infine un confronto sperimentale, tra i pregi od i difetti dei due sistemi di telecomunicazione così realizzati.

Circa i perfezionamenti apportati agli apparecchi telefonici per luce u. v., dirò che essi riguardano anzitutto lo studio accurato: dell'amplificatore termojonico della corrente microfonica agente sull'arco a mercurio; della qualità di vetro costituente le lenti di trasmissione e di recezione; della apertura e della distanza focale di queste; dell'amplificatore della corrente fotoelettrica di recezione. Con tali perfezionamenti, ho potuto assicurare di notte, la trasmissione praticamente perfetta (salvo quanto sarà detto in seguito) della parola fino a distanze dai 10 ai 15 km. circa, tanto in terra che in mare, mediante l'uso di radiazioni invisibili u. v. e con lenti di solo 30. cm. di apertura.

Per quanto concerne la trasmissione diurna, l'artificio da me adottato è quello di schermare in recezione, mediante un diaframma con un foro di qualche millimetro (posto nel fuoco della lente recettrice), la quasi totalità della luce parassita, che cade sulla cellula fotoelettrica. È vero che, anche così facendo, la portata della trasmissione rimane notevolmente ridotta, ma il metodo può ancora rendere preziosi servizi nella pratica.

Debbo poi avvertire, che particolare attenzione ha avuto la scelta della lampada a mercurio, giacchè non tutte quelle che si trovano in commercio

(1) Presentata nella seduta del 1° giugno 1929.

(2) Vedi questi « Rendiconti », vol. V, p. 726, 1927.

si prestano allo scopo. Sembra che la profonda modulazione della luce di tali lampade, mediante la corrente microfonica, sia intimamente legata all'alta pressione dell'atmosfera in cui l'arco scocca. Tale alta pressione è dovuta al combinato effetto della presenza di un gas inerte, l'argon, e alla elevata temperatura a cui arriva la lampada in funzione; infatti ad arco spento, subito dopo il funzionamento, può sovente scorgersi che l'involucro in quarzo della lampada è quasi al calor rosso. Oltre a ciò, la grande concentrazione della luce negli archi a mercurio, sotto pressione, rende, per conto suo, più efficace il metodo.

I dispositivi così da me realizzati e perfezionati, sono stati sperimentati con successo sia da me che dalle varie autorità militari competenti, in prolungate campagne tanto a Bologna che a Roma od ancora, in mare, sull'Alto Adriatico.

Ora, nel corso di queste varie campagne sperimentali, si è avuta occasione di notare talvolta un affievolimento di recezione, dovuto alle condizioni atmosferiche. Naturalmente prescindo, nel dir ciò, da quel tale affievolimento che è causato dalla luce diurna, la quale può avvicinare la cellula allo stato di saturazione fotoelettrica; e mi riferisco esclusivamente ad esperienze fatte nel corso della notte. Giudicando tale fatto, mediante il solo sussidio dell'orecchio, può forse arriversi alla conclusione che l'affievolimento in parola avvenga all'incirca nella stessa misura, tanto se si sperimenta con la totalità della luce emessa dall'arco a mercurio, quanto se tale luce viene filtrata col vetro all'ossido di nichel, trasformandola nella cosiddetta luce invisibile di Wood. L'orecchio, in altri termini, giudica che l'intensità fonica di recezione è ridotta in certe condizioni, p. es. alla metà del valore primitivo in entrambi i casi predetti. Naturalmente da ciò deriva che la recezione stessa in luce di Wood ossia u. v., possa praticamente mancare del tutto, se essa è già stentata in ottime condizioni atmosferiche, p. es., in causa della eccessiva distanza; parallelamente può essere ancora possibile la recezione in luce totale, cioè senza schermo.

Questo apprezzamento, che ha certamente il suo valore pratico, non può essere, con tutta probabilità, rigoroso. E vien fatto perciò di dimandarsi, come realmente vari l'assorbimento delle radiazioni emesse dal vapor di mercurio al variare della lunghezza d'onda. Al riguardo sono notissimi i risultati secondo cui l'aria appare trasparentissima alle radiazioni comuni per lunghezze d'onda superiori a circa 1900 \AA . Mentre al disotto di tale λ l'opacità è dovuta all'ossigeno, e al vapor d'acqua (restando ancora trasparente l'azoto sino a circa 1250 \AA); per le lunghezze d'onda che interessano l'attuale studio cioè circa 3650 \AA , l'aria è, per parte di tutti i suoi costituenti ordinari, assai trasparente, salvo casi particolari come ho detto più sopra.

Ora, l'affievolimento in parola sembra dovuto ad eccesso di vapor di acqua contenuto nell'atmosfera, specie quando esso si condensa sotto forma di nebbia, più o meno folla, od anche sotto forma di pioggia cadente. A

vero dire, mi si è data l'occasione di constatare talvolta che la pioggia, anche piuttosto violenta, è meno dannosa della nebbia. In ogni caso, però, la recezione cessa del tutto, quando la visibilità delle λ dello spettro, nella parte comunemente visibile, viene a cessare o ad essere notevolmente ridotta per assorbimento dovuto a tali agenti (nebbia, pioggia, od anche foschia).

Negli ultimi anni, è stato da più parti asserito che altre radiazioni, a differenza delle visibili o delle ultraviolette, sieno capaci di traversare anche le nebbie. Forse, l'asserzione ha trovato credito, per il fatto che se si accresce enormemente il valore delle λ , sino ad arrivare quasi a quelle che ordinariamente si chiamano elettromagnetiche, si raggiungano gradi di assoluta trasparenza. Ma non mi risulta che sia stato fatto un preciso studio quantitativo del fenomeno, per le λ ultrasosse, assai prossime a quelle visibili.

Per tali considerazioni, mi sono posto, da circa un anno a questa parte, il quesito di studiare anzitutto un nuovo metodo di telefonia, mediante radiazioni ultrasosse, anzichè ultraviolette, nella speranza che esso potesse offrire un mezzo di telecomunicazione direttiva, più adatto a vincere le avverse condizioni atmosferiche. Mi son riservato, così facendo, di studiare in un secondo tempo la reale maggiore trasparenza della nebbia, per parte delle radiazioni u. r.

Nell'intraprendere la detta ricerca, mi sono subito orientato verso la scelta della sorgente costituita da una lampada elettrica intensiva (qualche centinaio di watt), a filamento luminoso concentrato. Da tale sorgente, è agevolmente filtrata una banda di radiazioni ultrasosse ($\lambda = 1$ micron circa), mediante l'uso, ormai comune, di un vetro all'ossido di manganese. L'arco voltaico nell'aria, funzionante da arco Simon, è stato da me scartato sin dal principio, sia per la sua instabilità, sia, ancor più, perchè le sue radiazioni ultrasosse sono principalmente emesse dagli elettrodi incandescenti (carboni), ed esse non sono perciò modulabili in modo notevole, preciso, e talvolta anche solo apprezzabile.

Circa la modulazione della luce emessa dalla lampada ad incandescenza, non può seriamente pensarsi ad ottenerla con quella della corrente elettrica che la anima: l'inerzia calorifica dei filamenti incandescenti si oppone evidentemente ad una razionale realizzazione di ciò. E se si diminuisce di molto il diametro di tali filamenti, sia pure moltiplicandoli di numero, dev'essere ben difficile lavorare con energia raggiante notevole.

Per tali ragioni, ho fatto ricorso all'artificio di una modulazione indiretta delle radiazioni impiegate. Ho realizzato così tutta una serie *modulatori meccanici od elettromeccanici* che hanno per iscopo di alleviare od accrescere l'intensità delle radiazioni raccolte fra quelle che provengono dalla sorgente e proiettarle in lontananza. Si comprende, *a priori*, quanto debba essere delicato lo studio di tali congegni, che, presentando le caratteristiche di assoluta aperiodicità e di prontezza, che di solito si richiedono in un comune oscillografo, debbono venir colpiti, a differenza di questo, da ingenti quan-

tà di energia raggiante; si tratta infatti precisamente di lunghezze d'onda scelte fra l'ultrarosso, per loro natura eminentemente calorifiche. In questa Nota, mi limito ad accennare, molto sommariamente, ai principii su cui mi sono basato, nella realizzazione di due tipi di congegni del genere.

In un primo tipo, la modulazione è ottenuta mediante la pulsazione di uno schermo, fornito di parecchie fenditure parallele (della larghezza, variabile a seconda dei casi fra mm. 0.25 e 0.50). Le vibrazioni di questo grossolano reticolo sono comandate sia direttamente dai suoni o parole da trasmettere, sia, e meglio, da un congegno elettromagnetico animato da corrente microfonica, eventualmente amplificata. Le vibrazioni stesse si svolgono perpendicolarmente alla direzione delle fenditure, e nel piano del reticolo. Un secondo reticolo, del tutto simile, è affacciato al primo, ed è rigidamente fisso al sostegno dell'apparecchio. Si comprende come un fascio di radiazioni, proveniente dalla lampada ad incandescenza e concentrato sul sistema in parola, esca dalla parte opposta, ricevendo la voluta modulazione. Prescindo dal riferire sulle numerose difficoltà elettro meccaniche, che ho incontrato nel realizzare pulsazioni del reticolo praticamente aperiodiche e pronte, dell'ordine di 2 o 3 decimi di mm. E mi limiterò a dire che dopo aver sperimentato tale dispositivo con buono o discreto successo, ne ho abbandonato l'uso, a causa del forte affievolimento medio di luce a cui esso dà in ogni caso luogo. È facile vedere infatti, che nella migliore delle ipotesi, della energia raggiante impiegata, non passa in media che il 25 %; e tale quantità può pulsare all'uscita, tra i valori 0 e 50 %. Il resto è quasi completamente assorbito dal sistema dei reticoli. Questi inconvenienti, limitano già di molto la portata pratica del congegno.

Ho preferito così ricorrere ad altro artificio, che è poi quello che mi ha dato i migliori risultati pratici. Esso si basa sull'uso di uno o più specchi mobili, di piccola superficie, ed opportunamente imperniati. Essi vengono posti in vibrazione rotatoria, intorno ad assi paralleli al loro piano; e, alla lor volta, essi costringono così per riflessione un fascio di radiazioni, su di essi cadente, a vibrare; tale fascio va, di conseguenza, ad investire variamente la lente o lo specchio che proietta il fascio in lontananza. L'artificio può, a prima vista presentare qualche somiglianza con altri ben conosciuti ed usati in acustica, o nella costruzione di oscillografi, di registratori fotografici, oppure, più recentemente, nella realizzazione della cinematografia parlata. Ma la caratteristica particolare dei congegni da me ideati e tradotti in pratica, consiste nel fatto che la luce modulata raggiunge anche l'intensità di circa duecento lumen, senza pericolo che i piccoli specchi si deteriorino. Ciò corrisponde alla concentrazione su questi della luce emessa da una lampada di un migliaio di candele, mediante una lente di 10 cm. di apertura ed altrettanto di distanza focale.

Dopo di aver detto del *modulatore*, il quale congegno costituisce la parte più delicata della stazione trasmittente, dirò che alla ricevente ho

adoperato delle cellule al tallio, costruite secondo il processo già da me trovato in collaborazione col prof. G. Todesco⁽¹⁾. Tali cellule presentano, come è noto, un massimo di sensibilità abbastanza spiccato per $\lambda = 1$ micron. Una di tali cellule è colpita alla stazione ricevente dalla luce o dalle radiazioni raccolte da una lente; essendo essa in circuito con una f. e. m. variabile tra 10 e 150 volt, si occasionano in tale circuito pulsazioni di corrente che vengono amplificate da un gruppo di valvole termoioniche del tutto analogo a quello impiegato per l'ultravioletto. Le radiazioni agenti possono venir filtrate con il vetro all'ossido di manganese, e si ottiene così il sistema di telefonia con radiazioni ultrarosse.

Circa i risultati ottenuti con tale sistema, benchè esso sia stato realizzato da pochissimo tempo, posso già annunziare di aver potuto stabilire comunicazioni telefoniche in luce ultrarossa filtrata da una lampada ad incandescenza da 500 watt, tra l'Istituto Fisico di Bologna e la località Croara (km. 6.600) e Castel de' Britti (km. 10.200). Le lenti di trasmissione e di recezione adoperate hanno un'apertura di 30 cm. In entrambi i casi, la energia raggiante modulata è stata sufficientissima per lasciar ottenere una ottima riproduzione della parola. Questa arrivava nitida, non deformata e tanto intensa da potersi intendere anche fuori della cuffia telefonica, a luce non filtrata. Con l'uso del vetro all'ossido di manganese, la recezione veniva ridotta di circa il 50 %, il che rappresenta un risultato notevole e più vantaggioso di quanto avviene con l'uso del vetro all'ossido di nichel per l'ultravioletto: qui la riduzione di intensità è ancora maggiore.

Dirò inoltre che i risultati raggiunti sono tali da farmi ritenere che facilmente si possa aumentare la portata della trasmissione senza nulla modificare negli apparecchi impiegati; infatti, da quanto ho detto più sopra si deduce che l'energia sonora di recezione è stata nelle esperienze accennate veramente esuberante. D'altronde nulla vieta di adoperare lenti in recezione di apertura ancora maggiore.

In complesso dunque il funzionamento del nuovo sistema risulta veramente soddisfacente; ed anzi, può affermarsi che in buone condizioni la modulazione meccanica possa ritenersi superiore per qualità e precisione a quella impressa alla luce della lampada a mercurio.

Con il vasto complesso di ricerche da me svolto in questi ultimi due anni, e che avrà certamente ulteriore sviluppo, si può dunque disporre di congegni atti ad inviare radiazioni invisibili ultraviolette od ultrarosse modulate acusticamente, e capaci di trasportare a notevoli distanze dell'ordine di 10 km. e più, la viva parola. Rimane ora da stabilire un confronto tra i due sistemi per quanto concerne il loro comportamento di fronte alle varie condizioni atmosferiche. Ciò formerà l'oggetto di studi ulteriori da mia parte, necessariamente lenti, e sui quali mi riservo di riferire.

(1) V. questi « Rendiconti », vol. VIII, p. 9, 1928.

Fisica. — *Sull'assorbimento delle radiazioni ultraviolette od ultrarosse da parte della nebbia.* Nota del Socio Q. MAJORANA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sul funzionamento del Triodo con forte accoppiamento magnetico a nucleo di ferro fra circuito di placca e circuito di Griglia.* Nota del Socio O. M. CORBINO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Elettrotecnica. — *Comportamento del Trasformatore a spirale mobile nei circuiti per corrente costante.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. L. LOMBARDI e di PAOLO LOMBARDI.

Il trasformatore a spirale mobile, capace di fornire nel circuito secondario corrente costante mentre il primario è alimentato a potenziale costante, trova largo impiego nella pubblica illuminazione con lampade in serie per bassa tensione e forte intensità, le quali offrono singolari vantaggi nei riguardi della economia e della durata. Una teoria esatta dell'apparecchio non venne peraltro ancora data, essendosi i pochi Autori, che ne hanno discusso, limitati a cenni superficiali, o fondati sopra ipotesi preliminari inesatte.

In considerazione della importanza, che tali apparecchi hanno acquistato in Italia, ove molti impianti nelle città più vaste già vennero eseguiti con questo sistema o sono attualmente in corso di trasformazione, abbiamo ritenuto opportuno di assoggettare ad esperienze sistematiche un piccolo trasformatore di questo tipo, fornito pochi anni or sono al nostro Istituto da una delle principali Case Costruttrici Italiane; dei risultati raccolti, che formeranno oggetto di una più ampia Comunicazione al prossimo Congresso d'Ingegneria di Tokyo, non ci sembra fuor di luogo riassumere qui i principali.

Ci asteniamo per ragioni di opportunità dall'esame, che sarà fatto ampiamente in quella sede, dei pochi lavori precedenti, tra i quali occupano il posto più importante la Teoria svolta dall'ing. M. Marchetti nel 1925 ⁽²⁾ e una ricerca sperimentale eseguita dai sigg. H. C. Louis e

(1) Presentata nella seduta del 1° giugno 1929.

(2) « L'Elettrotecnica », 5 dicembre 1925.

A. Albaugh nel 1927 ⁽¹⁾, ove si denunciano risultati poco favorevoli circa il comportamento dei trasformatori americani.

Il nostro apparecchio è costruito per una potenza normale di 5 kW, una tensione primaria di 125 V ed una corrente secondaria di 5 A, alla frequenza di 45 periodi per 1". Il fattore di potenza a carico normale è 0.86; il coefficiente di rendimento 0.94. I nuclei magnetici sono composti di lamierini di ferro tedesco dello spessore di 0.40 mm., in cui la perdita di potenza per ogni cmc. alla induzione massima di 10000 linee per cmq. ed alla frequenza di 50 periodi per 1" è di 1.7 watt.

Poichè l'inconveniente principale, lamentato dai due Autori americani, è l'incremento notevole delle perdite a basso carico, dovuto al flusso di dispersione, noi abbiamo cercato di attenuarlo, facendo costruire dalla *Officina Mater* di Roma due altri nuclei a sezione di croce, da potersi sostituire a quello centrale del trasformatore originario; ognuno di questi è composto di ferro legato, ed uno ha le lamine interrotte mediante sottili fenditure, praticate con la fresa nel senso longitudinale, alla distanza di 15 mm. una dall'altra e dagli orli.

Disgraziatamente l'influenza del ferro legato, che ha più alta resistività, venne in parte paralizzata dal maggior spessore delle lamine (0.55 mm), che intensifica le correnti parassite inerenti alla magnetizzazione longitudinale, onde le perdite a vuoto nel nucleo pieno risultarono dello stesso ordine di quelle del nucleo originario, e quelle del nucleo sfinestrato circa 10% più elevate in causa della sua minore sezione, e della maggiore densità del flusso.

Mentre però le perdite complessive subivano nel trasformatore d'origine un graduale aumento da pieno carico alla condizione di cortocircuito nella misura di 10 a 12%, coi nuclei nuovi la variazione era ridotta a 3 e 5% (la più piccola nel nucleo sfinestrato), con che l'influenza benefica della maggiore resistività e della minor larghezza delle lamine risultava sostanzialmente confermata.

Naturalmente, al diminuire del carico, crescono anche qui le perdite inerenti al flusso disperso, in quanto aumenta la distanza fra la spirale primaria e la secondaria, mentre si conserva praticamente costante la differenza di potenziale magnetico fra le colonne verticali, la quale sola determina la densità del flusso trasversale. A questa è unicamente dovuta la sollecitazione, che si esercita da parte della spirale fissa su la mobile, e che, unitamente al contrappeso esterno, serve ad equilibrare quest'ultima, ed a garantire la costanza della corrente; allo stesso tempo però diminuiscono le perdite inerenti alla magnetizzazione longitudinale del nucleo, atteso che questa nella parte superiore della ossatura magnetica viene ridotta ad una frazione di quella, che corrisponde al funzionamento a vuoto ed a pieno carico.

(1) « Journ. Amer. Inst. Electr. Eng. », maggio 1927.

Ne risulta un bilancio delle perdite parziali, per cui quella totale può a basso carico apparire notevolmente più alta di quella normale, come nei modelli Americani; sensibilmente eguale ad essa, come nel nostro modello italiano, guarnito del nucleo sfinestrato; o per avventura minore, se il nucleo centrale venga costituito con materiale di alta resistività, e così dimensionato, da offrire la sezione più ristretta o frazionata alla dispersione frontale, evitando la presenza di membrature metalliche esterne, in cui possano indursi notevoli correnti parassite. Mantenendo la spirale secondaria in corto circuito a qualunque distanza dalla primaria, e con qualunque intensità di corrente, la magnetizzazione longitudinale nella parte superiore dell'ossatura praticamente si annulla, onde la perdita si localizza nella parte inferiore, ove in gran parte è dovuta all'azione del flusso disperso.

Oltre alle perdite, in sé considerate, in quanto hanno relazione col rendimento dell'apparecchio, assumono particolare importanza le variazioni di temperatura, che hanno attinenza con la conservazione di esso, e dipendono non soltanto dalla entità delle perdite, ma anche dalla posizione relativa delle spirali e dalle condizioni di raffreddamento.

Noi abbiamo perciò eseguito diligenti misure di sovrariscaldamento nei punti più caratteristici dell'apparecchio, e cioè in contatto immediato con le superficie intermedie delle spirali primaria e secondaria, ognuna delle quali è suddivisa in due sezioni, e con la superficie frontale e con quella laterale del nucleo di mezzo; vennero all'uopo predisposte quattro coppie termoelettriche di rame e costantana, accuratamente tarate, e connesse ad un millivoltmetro di conveniente sensibilità, le cui deviazioni, entro all'intervallo considerato, risultavano quasi esattamente proporzionali alle variazioni della temperatura.

Di queste hanno minore importanza i valori assoluti, taluno dei quali di poco eccedette i limiti prescritti dalle convenzioni internazionali, che non l'andamento relativo, il quale dimostra essere la temperatura alla fronte del nucleo centrale di alcuni gradi più elevata che non alla superficie laterale, in conseguenza della scarsa conduttività termica in direzione perpendicolare alle lamine, e dell'effetto prevalente delle correnti parassite indotte nelle membrature superficiali; la temperatura del rame secondario risulta poi di parecchi gradi superiore a quella del primario, in causa della posizione relativa delle spirali, che espone la secondaria a essere lambita dalle correnti d'aria riscaldata dalla primaria.

Nelle condizioni del nostro apparecchio, privo d'involucro esterno, ma avente una struttura relativamente compatta, il fenomeno assume la maggiore importanza sotto pieno carico, nella quale condizione le perdite complessive non appaiono aumentate, ma è sostanzialmente diminuita, con la distanza fra le spirali, la efficacia della refrigerazione naturale. La spirale primaria, dopo essere rimasta parecchie ore in corto circuito sotto corrente normale al punto più alto della sua corsa, assume sensibilmente una tem-

peratura stazionaria, la quale non eccede quella esterna di oltre 52° , ed è perciò compresa nei limiti stabiliti dalla Commissione Elettrotecnica Internazionale per i materiali isolanti della Categoria A (cotone impregnato ed altre sostanze organiche simili). Abbassandosi peraltro al crescere del carico, e portandosi alla posizione più bassa, che corrisponde alla tensione secondaria normale, essa aumenta ulteriormente la sua temperatura, fino a raggiungere una sessantina di gradi di sopraelevazione rispetto all'esterno, ossia 5° di più del valore prescritto.

L'osservazione ha notevole importanza pratica, in quanto molte prove di collaudo, per risparmio di energia e per semplicità di metodo, vengono eseguite con termometri comuni su gli apparecchi in corto circuito, con tensione primaria e corrente secondaria normali, nella quale condizione le dissipazioni di energia sono generalmente più elevate, ma non sono necessariamente tali le sopraelevazioni di temperatura; per la esatta determinazione di queste appaiono perciò indispensabili prove ulteriori a pieno carico, e l'impiego di rivelatori elettrici più sensibili e meglio appropriati allo scopo.

Nella condizione di corto circuito risulta agevole la misura della reattanza complessiva del trasformatore, la quale non dipende sostanzialmente dalla intensità delle correnti, ed è proporzionale alla distanza fra i baricentri delle spirali.

La reattanza cambia però sotto carico, in causa della diversa riluttanza offerta dal circuito magnetico, onde le caratteristiche della tensione esterna e del fattore di potenza, riferite alla distanza predetta, pure approssimandosi nell'andamento generale ad archi di ellisse, come lascia prevedere la teoria dell'ing. Marchetti, se ne discostano praticamente in misura sensibile.

La caratteristica del fattore di potenza primario, riferito alla tensione secondaria, conserva invece con tutta l'approssimazione fra carico nullo e pieno carico, l'andamento rettilineo preveduto dall'ing. Marchetti, e già rilevata da altri sperimentatori; essa può praticamente migliorarsi con opportuni condensatori, inclusi in derivazione.

La differenza di fase tra le due correnti può misurarsi facilmente mediante il wattometro primario, alimentandone il circuito voltometrico con tutta o parte della tensione secondaria, sempre che si impieghi l'apparecchio ad alimentare lampade a incandescenza, od altri apparecchi di piccolissima reattanza.

Tale differenza non suol eccedere pochi gradi, come confermano le nostre misure, e come lascia prevedere la esiguità della forza magnetomotrice occorrente a mantenere il flusso principale, posta a confronto con il numero totale di amperspire primarie, il quale resta a tutti i carichi sostanzialmente invariato.

Ha partecipato a queste esperienze l'ing. A. Asta, al quale dobbiamo un particolare ringraziamento.

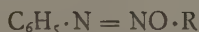
Chimica. — *Sopra la costituzione e le reazioni dei diazoidrati.*
Nota ⁽¹⁾ del Socio A. ANGELI.

In uno degli ultimi fascicoli dei « Berl. Berichte » ⁽²⁾, a proposito delle ricerche sperimentali e considerazioni che io ho pubblicato sopra la struttura dei diazoidrati, il prof. Hantzsch fa alcune osservazioni e muove apprezzamenti che io, per la parte che mi riguardano, non posso lasciar passare sotto silenzio.

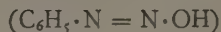
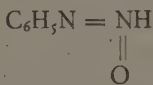
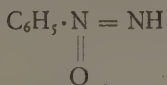
Dopo di avere data la dimostrazione sperimentale che i sali della nitrosofenilidrossilammina e dell'acido diazobenzolico differiscono fra di loro per la posizione di un atomo di ossigeno:



e che in modo analogo gli azossicomposti asimmetrici si presentano nelle due forme:



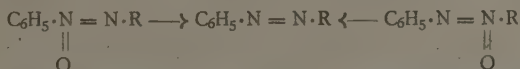
si è presentata logicamente l'idea che anche ai due diazoidrati potessero spettare rispettivamente le strutture ⁽³⁾:



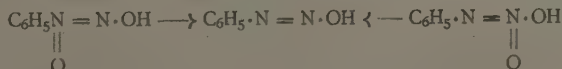
(1) Presentata nella seduta del 1° giugno 1929.

(2) 62 (1929), 1235.

(3) Nello stesso modo che i due azossicomposti per moderata riduzione, come era da aspettarsi, forniscono uno stesso azoderivato:



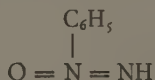
così Hantzsch contrariamente a quanto prima aveva asserito (*Die Diazoverbindungen*, p. 43) dopo di avere ripetute e confermate le mie esperienze, trova che realmente anche i sali della nitrosofenilidrossilammina e dell'acido diazobenzolico, per riduzione conducono entrambi all'isodiazotato:



I due processi si compiono dunque nell'identica maniera.

secondo le quali queste due sostanze sarebbero da considerarsi isomere e non stereoisomere nel senso voluto da Hantzsch. Avverto espressamente che io mi riferisco sempre ai diazoidrati e non già ai loro sali, come spesso confonde Hantzsch. Questo è giustificato anche dal fatto che secondo le interessanti ricerche di H. Goldschmidt, nei loro processi di copulazione, non prendono parte i sali ma bensì i diazoidrati che si sono formati per idrolisi; analogamente nella copulazione dei fenoli e delle ammine, non reagiscono i loro rispettivi sali, ma solamente quella parte di queste sostanze che si è liberata sempre in seguito ai processi di idrolisi: Secondo Hantzsch per un sale $C_6H_5 \cdot N_2 \cdot ONa$, sarebbe possibile una sola forma: $C_6H_5N = N \cdot ONa$; ma Cambi dopo di avere posto in rilievo che negli idrati di diazonio, l'atomo di azoto centrale funziona come quello di un ammonio e l'esterno come quello dell'acido nitroso, nei diazoidrati normali invece l'atomo di azoto centrale è analogo a quello dei nitroderivati e l'esterno a quello dell'ammoniaca, dimostra che per tali sali è possibile anche una forma diversa da quella sostenuta da Hantzsch.

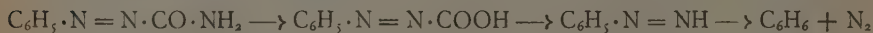
Secondo le mie vedute dunque, nella forma dei diazoidrati normali sarebbe contenuto un sistema di doppi legami gemelli:



e come hanno posto in rilievo le belle ricerche di Staudinger, è ben noto come appunto le sostanze che contengono questo aggruppamento sono caratterizzate per la loro grande facilità di reazione, e ciò sarebbe in pieno accordo con il processo di copulazione.

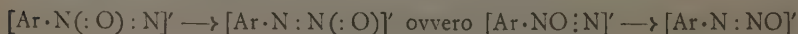
Secondo Hantzsch le sostanze di questa forma non sarebbero più diazoidrati, ma la differenza in questo caso non sta che nei nomi.

Come ho già posto in rilievo ciò è in buon accordo anche con la proprietà dei diazoidrati normali di perdere con la massima facilità l'atomo di ossigeno, con sviluppo di azoto e formazione di idrocarburo ed ho già rimarcata l'analogia di questa reazione con la decomposizione della fenilazocarbonammide di O. Widman:

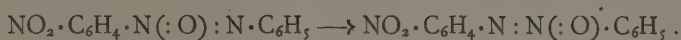


Ciò non fanno gli isodiazoidrati; anche questo sta a provare che, a differenza della forma iso, nei diazoidrati normali l'atomo di ossigeno è nitrico, vale a dire legato ad un atomo di azoto pentavalente.

Secondo Cambi inoltre la trasformazione dei diazoidrati normali, in isodiazoidrati, sotto forma di sali alcalini, può essere riassunta nello schema seguente:

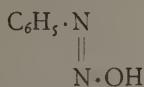


ma Hantzsch fa osservare che tale migrazione dell'atomo di ossigeno ad un altro atomo di azoto è senza precedenti; credo quindi opportuno far presente ad Hantzsch, che ancora molti anni or sono, io ho notato che una tale migrazione si compie facilmente nel caso dei p-nitroazossibenzoli:

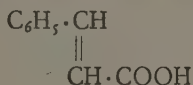
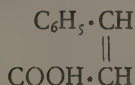


Per altre considerazioni rimando ai miei precedenti lavori; io mi limiterò qui a riferirmi ad alcune di quelle che Hantzsch fa oggetto delle sue critiche.

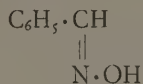
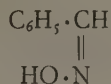
Siccome egli ha asserito che i diazoidrati normali sono acidi più deboli che non gli isodiazoidrati, io ho fatto osservare che, anche prescindendo dal fatto che Hantzsch ammette che i primi hanno un maggiore contenuto di energia, secondo le sue forme steriche:



sarebbe da aspettarsi tutto il contrario, giacchè dei due acidi cinnammici:



in seguito alla maggiore vicinanza del fenile al carbossile, il primo è più forte del secondo; la stessa relazione esiste fra le due benzaldossime,



data la maggiore vicinanza dell'ossidrile al fenile. Hantzsch, dopo di avere fatto alcune considerazioni in cui confronta fra altro, e non so quanto a proposito, la costante di dissociazione del fenolo con quella dell'acido iponitroso, egli viene alla seguente conclusione: perciò anche nell'antidiazoidrato il gruppo NOH, in seguito alla vicinanza all'azoto trivalente, viene reso più acido che non nel sindiazoidrato, dove è prossimo al fenile; aggiunge inoltre che il grado di acidità del diazoidrato normale finora non è stato possibile determinarlo. Devo riconoscere che non sono riuscito ad intendere il senso di questo ragionamento di Hantzsch tanto più per il fatto che, contrariamente a quanto egli dice, in entrambi i diazoidrati, e non già nel derivato sin solamente, il gruppo NOH è congiunto ad un altro atomo di azoto, come chiaramente mostrano le formule.

Tutto ciò è dunque in contraddizione con quanto Hantzsch ha sostenuto altrove, vale a dire che diazoidrati normali ed i loro isomeri, differi-

scono dinamicamente fra di loro nello stesso modo dei composti stereoisomeri e che rassomigliano così agli acidi maleico e fumarico e soprattutto alle ossime.

Inoltre, come sopra ho accennato, i diazoidrati normali possiederebbero secondo Hantzsch un maggiore contenuto in energia, e da ciò deriverebbe anche la loro maggiore facilità di reagire.

Ma anche questa asserzione è contraria ai risultati delle misure recentemente eseguite da W. Swietoslawski, il quale è venuto alle seguenti conclusioni:

1. L'isomerizzazione del diazonio in isodiazoidrato è una reazione endotermica e non esotermica, come suppone Hantzsch;

2. l'isomerizzazione del diazoidrato normale in isodiazoidrato è accompagnata da assorbimento di calore.

Secondo Hantzsch le determinazioni di Swietoslawski non possono essere esatte ed alcune differenze nei valori trovati entrerebbero nei limiti degli errori sperimentali; naturalmente io lascio la responsabilità di questo apprezzamento ad Hantzsch il quale secondo me prova una cosa soltanto, vale a dire che molto probabilmente non ha letti i lavori di Swietoslawski⁽¹⁾.

Inoltre curiosa è la nota a piedipagina 1241; Hantzsch per dimostrare la facilità con cui possono alterarsi le soluzioni acquose dei diazocomposti riferisce la seguente esperienza.

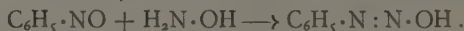
Trattando la soluzione acquosa di un andidiazotato con una quantità insufficiente di acido cloridrico, egli dice che una parte viene trasformata in sindiazotato perchè dopo aggiunta di idrato sodico in eccesso, subito si copula con β -naftolo, con un rendimento di circa il 10%.

A mio modo di vedere invece questa esperienza non dimostra, come vorrebbe Hantzsch, la facile alterabilità delle soluzioni acquose dei diazocomposti, ma ripete una cosa che era ben prevedibile e che perciò tutti conoscevano.

Basta infatti aggiungere alla soluzione di isodiazotato⁽²⁾ un poco di bicarbonato sodico per avere un liquido che subito si copula.

Questo risultato, ripeto, era ben prevedibile e perciò nulla dimostra.

In appoggio alla sua formula dei diazoidrati normali, Hantzsch cita il caso della loro formazione da nitrosobenzolo ed idrossilammina:



Ma a questo proposito io gli faccio osservare che l'esempio non è scelto bene, come altrove ho già accennato⁽³⁾.

(1) «Bulletin Acad. Polonaise des Sciences», 1924, p. 369; cfr. anche quanto lo stesso autore ha scritto in: P. WALDEN e C. DRUCKER, «Handbuch der allgemeinen Chemie», vol. VII, 1928.

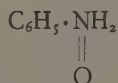
(2) HANTZSCH-REDELLEN, *Die Diazoverbindungen*, p. 53.

(3) «Rendiconti Lincei», vol. 5, 1927, 1° sem., p. 733.

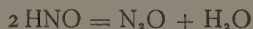
Io pure ho ripetuto queste esperienze ed ho trovato che la reazione non procede in modo netto; la materia colorante che si ottiene, operando in presenza di β -naftolo, non supera il 50 %; contemporaneamente si ha sviluppo di azoto e protossido di azoto e si formano fra altro azossibenzolo, fenilazide e anche difenilammina, assieme ad altre sostanze che ancora non ho identificate. Io ho già dimostrato⁽¹⁾ come nella reazione fra nitrosoderivati ed idrossilammina sia necessario ammettere che avvenga la seguente trasformazione:



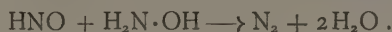
inoltre la fenilidrossilammina nei processi di condensazione coi nitroso derivati, aldeidi, ecc. si comporta sempre nella forma di ossido:



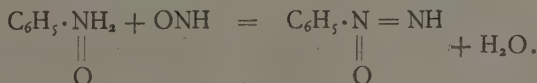
In tal modo il nitrosobenzolo riducendosi a fenilidrossilammina, ossiderebbe una parte dell'idrossilammina a nitrossile NOH; nitrosobenzolo e fenilidrossilammina darebbero azossibenzolo; una parte del nitrossile si trasformerebbe in protossido di azoto



ed un'altra parte reagendo con idrossilammina⁽²⁾ sviluppa azoto:



È quindi molto probabile che un'altra parte del nitrossile possa reagire con altra fenilidrossilammina, secondo una reazione che io ho descritta molti anni or sono⁽³⁾ per dare diazoidrato normale:



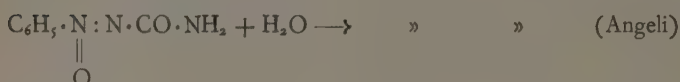
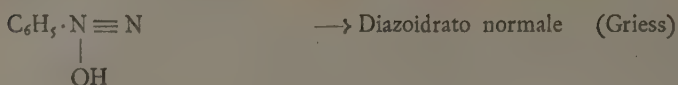
Lo schema proposto da Hantzsch è dunque assai poco probativo.

(1) « Ahrens-Sammlung », vol. 19, 1913, p. 26.

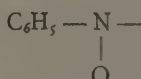
(2) « Ahrens-Sammlung », vol. 13, 1908, p. 44.

(3) « Berliner Berichte », 34, 1904, 2390.

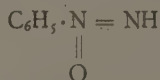
Invece se noi prendiamo in considerazione le reazioni che conducono ai diazoderivati normali:



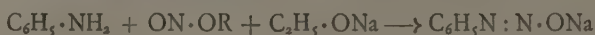
osserviamo che ognuno dei primi termini di questa serie contiene un aggruppamento:



e questo più che un fatto casuale, a me sembra costituisca una ragione di più per ammettere che anche nei diazoidrati normali che in tal modo si formano, l'atomo di ossigeno sia congiunto all'atomo di azoto prossimo all'anello aromatico nel modo più volte indicato:



Se invece il composto aromatico è privo di ossigeno, come nel caso studiato da Bamberger, che pure si compie in mezzo alcalino

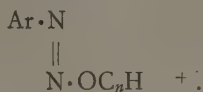


si perviene direttamente all'isomero isodiazotato.

A proposito della facoltà che hanno i diazoeteri di copularsi, io ho posto in rilievo che questo processo si può intendere bene ed anche meglio, senza ricorrere agli artifici che richiedono le forme steriche.

Hantzsch mi fa ora osservare che la reazione di copulazione non è applicabile al caso dei diazoeteri, perchè questa reazione permette di deci-

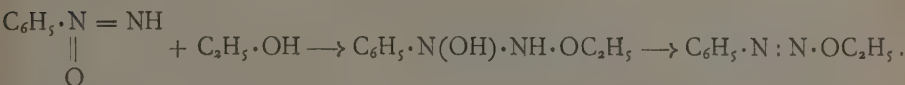
dere solamente nel caso che siano noti tutti e due gli isomeri, di cui uno si copula in modo più rapido dell'altro. I diazoeteri sono noti invece in una forma soltanto. Ma ciò è in piena contraddizione con quanto egli ha asserito precedentemente; a pag. 57 del suo libro egli dice chiaramente: *i diazoeteri sono sicuramente anticorpi*:



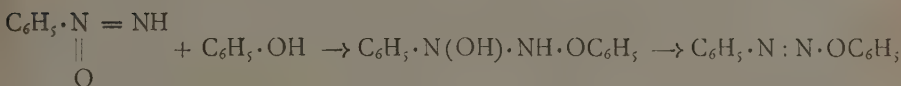
Io ho invece attribuito a queste sostanze la forma non sterica:



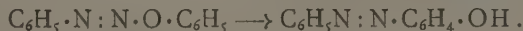
ed ho spiegato il loro modo di formazione dai diazoidrati normali, per semplice azione degli alcool, ammettendo che in una prima fase avvenga addizione dell'alcool ai doppi legami gemelli:



Lo stesso processo si compirebbe nel caso dei fenoli e delle ammine:



il quale ultimo termine, conformemente a quanto hanno insegnato le belle esperienze di Dimroth, con grande facilità si trasforma nel suo isomero:

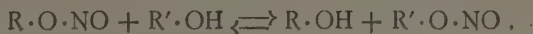


Lo stesso Dimroth ha dimostrato che, come era da aspettarsi, questa trasposizione non è più possibile nel caso del pentametilfenolo. In tal modo gli eteri dei diazoidrati corrisponderebbero agli eteri dell'acido nitroso:

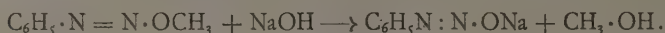


che presentano notevoli analogie nel loro comportamento.

Perciò anche il processo di copulazione dei diazoeteri nonchè quello dei cianuri, ecc. si ridurrebbe ad un semplice scambio di radicali, perfettamente analogo a quello che si compie nel caso dei nitriti alcoolici:



Ciò spiega anche in modo ben chiaro come i diazoeteri per saponificazione forniscano isodiazotati e non i derivati normali:



Come vi vede le esperienze e le considerazioni che ho brevemente esposte sono tutte contrarie a quanto Hantzsch sostiene a secondo il quale per mezzo delle formule contenenti l'azossigruppo da me proposte, il processo di copulazione non si potrebbe formulare nè intendere.

Biologia. — *L'immunità contro il cancro conferita agli animali con autovaccino fenolato* ⁽¹⁾. Nota preventiva ⁽²⁾ del Socio G. TIZZONI e di G. DE ANGELIS.

Con la presente comunicazione intendiamo prender data dei risultati di alcune nostre ricerche concernenti l'immunità sperimentale conferita al topino bianco contro l'adenocarcinoma di Ehrlich mediante la stessa poltiglia cancerosa debitamente trasformata in vaccino per l'aggiunta di fenolo; ricerche che perseguiamo da oltre tre anni e che potremmo continuare anche nell'anno corrente per la cortesia del prof. Centanni succeduto ad uno di noi nella direzione dell'Istituto di Patologia Generale di Bologna.

Le conclusioni che oggi possiamo trarre da numerose esperienze sullo indicato argomento, e sulle quali vogliamo appunto richiamare l'attenzione del pubblico, sono le seguenti:

1. Che il fenolo usato nella dose voluta (gr. 0,5 %) e per il tempo necessario (24-48-72 ore), trasforma il virus della poltiglia cancerosa ottenuta dall'adenocarcinoma del topino in un corrispondente vaccino.

2. Che la soluzione di fenolo possiede invece il potere di attivare la poltiglia cancerosa dopo breve tempo della sua azione (1-3 ore); quindi raggiunge l'effetto opposto a quello desiderato accelerando lo sviluppo del tumore ed affrettando la morte dell'animale ⁽³⁾.

3. Che la stessa soluzione al 0,5 % di fenolo fatta agire sulla poltiglia cancerosa un tempo minore di quello sopra indicato come minimo (24 ore) riesce meno efficace determinando solamente una immunità incompleta con forte ritardo sullo sviluppo del tumore (25-28-35-giorni) e sulla morte dell'animale (50-84-98 giorni).

(1) Dall'Istituto di Patologia generale della R. Università di Bologna.

(2) Presentata nella seduta del 1° giugno 1929.

(3) DE ANGELIS G., *Potere accelerante del fenolo sopra l'adenocarcinoma del topino*. « Bollettino Società Ital. di Biologia Sperimentale », vol. III, 1928.

4. Che il vaccino fenolato al 0,5 % riesce del tutto innocuo agli animali ai quali fu iniettato, tanto per la poltiglia di cui è principalmente costituito, quanto per la piccola dose di acido fenico che contiene (ogni cc. di poltiglia qualcosa meno di gr. 0,005 di fenolo cristallizzato).

5. Che l'immunità da tale vaccino determinata e da noi finora constatata è di assai pronta comparsa (11 giorni) e di lunga durata (oltre quattro mesi).

6. Che l'immunità così conferita si riscontra nel maggior numero dei soggetti vaccinati in modo completo e solo in pochissimi casi si verifica in modo incompleto; per contro i controlli dettero sempre risultato positivo nel 100 % degli esperimenti.

7. Che mentre nella immunità completa l'assenza del tumore e la sopravvivenza dell'animale sono assolute, invece nell'immunità incompleta si ha solamente un ritardo sui controlli nello sviluppo del tumore (oltre 20 giorni) o nella morte dell'animale, oppure l'una e l'altra cosa insieme.

8. Che alcuni inquinamenti accidentali del tumore provenienti con tutta probabilità dall'ambiente esterno (cocchi piccolissimi disposti a grappolo) e capaci di dare una lesione prevalentemente locale, annullano in modo completo l'azione immunizzante del rispettivo vaccino lasciando al topino così vaccinato la stessa sensibilità per la poltiglia virulenta degli animali di controllo.

9. Che la medesima impurità della poltiglia virulenta usata per la iniezione di prova diminuisce, ma non abolisce, gli effetti immunizzanti del vaccino nei confronti dei casi nei quali fu usata poltiglia batteriologicamente pura; con ciò confermando ancora una volta, per quanto in misura minore, il potere immunizzante del nostro vaccino.

10. Che gli effetti disturbatori della infezione complicante si fanno risentire più sulla sopravvivenza dell'animale che sull'impedito sviluppo del tumore.

Rimandiamo ad un prossimo lavoro l'esposizione particolareggiata dei fatti da noi osservati i quali ci hanno permesso di arrivare alle conclusioni sopra riferite; così pure ci asteniamo per ora di trarre da queste tutte le deduzioni di ordine scientifico e tutte le applicazioni di ordine pratico che riteniamo possibili.

Per altro non possiamo fare a meno di rilevare fin d'ora la grande rassomiglianza che passa nel comportamento, di fronte alla immunità provocata a mezzo dei vaccini fenolati, fra il cancro ed altre malattie indubbiamente determinate da virus filtrabili quali la rabbia, come primo fu riconosciuto dal Fermi ⁽¹⁾, e quali il neurovaccino, l'herpes ecc., come recentemente fu dimostrato da Levaditi e Sauchis - Bayarri ⁽²⁾.

(1) FERMI, *Ueber die Immunisierung gegen Wulkrankheit*. «Zeitschr. f. Hygiene etc.», Bd. 58, p. 233.

(2) LEVADITI et SAUCHIS-BAYARRI, *Essai de vaccination au moyen de neurovaccin traité par l'éther, l'acide phénique et le formol*. «Presse méd.», 1928, p. 375.

Biologia. — *Sulla differenziazione delle cellule nervose.* Nota ⁽¹⁾
del Socio GIUSEPPE LEVI.

In una interessante Memoria dedicata allo studio del comportamento degli epiteli coltivati in vitro O. Kapel ⁽²⁾ (1929) ha illustrato il destino di colture di cervello e di cervelletto di embrioni di pollo dal 10° al 15° giorno, dopo trapianti ripetuti. Egli confermò in massima quanto O. Olivo (1926-1927) ⁽³⁾ ha dimostrato: che dopo un certo numero di trapianti l'accrescimento delle fibre nervose cessa e si ha invece una migrazione di epitelio, cosicchè dopo qualche tempo si possono ottenere da espianti di tessuto nervoso colture pure di epitelio.

Olivo ha constatato che la differenziazione di nuove fibre nervose in numero imponente si ripete a ciascun trapianto e, se gli espianti provengono da embrioni al 3°-4° giorno d'incubazione, può proseguire per 2-3 settimane; se invece gli espianti provengono da embrioni più inoltrati (dal 6° al 14° giorno), dopo 4-5 passaggi la formazione di nuove fibre nervose decresce e dopo 2 settimane, e talora prima, si arresta.

Olivo attribuisce tale differenza alla circostanza che nel primo caso si produce una differenziazione di nuove fibre da neuroblasti, nel secondo caso, per la crescente riduzione delle cellule a caratteri indifferenti, i neuriti sono in numero sempre minore ed essi sono in gran prevalenza rigenerati. Kapel invece si occupa solo incidentalmente dell'accrescimento delle fibre nervose e non fa cenno del comportamento di queste durante i trapianti successivi.

L'argomento che è più estesamente trattato nella memoria di Kapel riguarda l'origine dell'epitelio, il quale dopo qualche tempo prevale e finisce col divenire il componente esclusivo della coltura di tessuto nervoso. Mediante l'esame istologico degli espianti in fette seriali, Olivo ha dimostrato che dopo ripetuti trapianti i neuroblasti regrediscono, e che l'epitelio, il quale emigra e prolifera nella coltura, proviene sempre dallo strato ependimale e germinale dell'encefalo; ed è molto importante che tale migrazione si produce dopo un periodo di latenza più lungo, se l'espianto proviene da

(1) Presentata nella seduta del 10 giugno 1929.

(2) KAPEL O. (1927), *Ueber Reinkultur von Epithel in Vitro*. «Arch. f. exper. Zellforschung», Bd. 4; IDEM (1929), *Einige Untersuchungen über das Verhalten des Epithels in Vitro*. «Arch. f. exper. Zellforschung», Bd. 8.

(3) OLIVO O. (1926), *Comportamento del tessuto nervoso embrionale di pollo coltivato per più settimane in vitro*. «Boll. della Soc. di Biol. Speriment.», vol. I, f. 5 (seduta del 5 luglio 1926); IDEM (1927), *Differenziazione e sdifferenziazione del tessuto nervoso embrionale coltivato per più settimane in vitro*. «Arch. f. exper. Zellforschung», Bd. 5.

giovani embrioni anzichè da più inoltrati; evidentemente perchè la migrazione si produce soltanto quando il compito il quale spetta allo strato germinale di differenziarsi in nuovi neuroblasti tende ad esaurirsi. Olivo afferma esplicitamente che nella coltivazione di tessuto nervoso non si ha sdifferenziazione dei neuroblasti; la proliferazione epiteliale proviene da elementi i quali non hanno carattere specifico « aller Wahrscheinlichkeit nach ist der Differenzierungsvorgang bei den nervösen Elementen ein irreversibler, was mit den kontraktilen Elementen nicht der Fall ist ». Sostanzialmente diversi, almeno su questo punto, sono invece i risultati di Kapel; secondo quest'A. nelle colture di tessuto nervoso l'epitelio proviene da sdifferenziazione di cellule gangliari ed egli descrive le singole fasi del processo di sdifferenziazione di questi elementi; del destino dello strato germinativo, da cui secondo Olivo in modo esclusivo deriva l'epitelio il quale emigra nella coltura, Kapel non fa alcun cenno, probabilmente perchè egli trascurò di studiare il destino dell'espianto nelle fette, limitandosi ad esaminare colture *in toto*, nelle quali l'espianto di solito rimane inaccessibile all'indagine microscopica. Ma è singolare che quest'ultimo A., pur ricordando i risultati di Olivo, trascuri di porre in luce questa profonda divergenza fra i suoi risultati e quelli di Olivo. Evidentemente se quest'osservazione di Kapel fosse esatta avrebbe una grande importanza generale. Fino ad oggi non vi è alcuna prova della possibilità di una sdifferenziazione di neuroni; nella rigenerazione di midollo spinale e gangli di Tritone, il rigenerato deriva da elementi rimasti indifferenti, non da cellule nervose sdifferenziate; e neppure nella morfollassi di Clavellina, nè nella rigenerazione delle Planarie è sicuramente dimostrato che si produca una sdifferenziazione di gangli nervosi. Rimane da vedere se Kapel sia riuscito a dimostrarlo.

Dall'accurata descrizione dell'A. dei vari tipi di cellule emigrate nel coagulo emerge che solamente per uno di questi (cellule gangliari grandi caratteristiche), egli fu in grado di seguire nella coltura vivente le tappe del processo di sdifferenziazione; egli vide che il cilindrasse a poco a poco diviene più breve e scompare bruscamente; a questo punto la cellula perde i caratteri specifici, diventa un elemento sdifferenziato, assumendo la forma lamellare ed il contorno poligonale che caratterizza gli epiteli; ed il citoplasma è costituito da un endoplasma granuloso, di un ectoplasma ialino; quando poi oltrepassano il limite del plasma emettono prolungamenti e la loro forma diviene irregolare.

Invero nè la descrizione che l'A. dà di questo processo, nè le ottime microfotografie che egli riproduce nella sua Memoria, mi hanno convinto che gli elementi che egli indica come «grandi cellule gangliari caratteristiche» siano veramente tali; in una sola figura (fig. 30 del suo lavoro) si vede una cellula provvista di un prolungamento, ma questo non ha certo l'aspetto caratteristico di un neurite. Frequentemente nella zona di migrazione di colture attive si vedono fibrociti ed anche cellule epiteliali con lunghi

prolungamenti. I criteri più sicuri per distinguere questi elementi da neuroblasti sono i caratteri ottici del citoplasma e la forma dei prolungamenti. È noto che i neuroni contengono una sostanza specifica, che io chiamai neurofibrillare, dotata di una speciale refrangenza e luminosa in campo oscuro (G. Levi, Mossa) la quale non ha riscontro in altri elementi; Kapel non fa alcun cenno dei caratteri ottici degli elementi da lui descritti. Inoltre i neuriti si distinguono dai prolungamenti dei fibrociti e delle cellule di origine epiteliale per il decorso sinuoso, perchè si ramificano, e perchè terminano con un caratteristico pennello di esilissimi filamenti (Harrison, Burrows, Levi). Di tutti questi particolari Kapel non parla ed ha persino trascurato di stabilire se i neuriti delle cellule da lui studiate, si accrescono.

In breve l'esperienza da me acquistata durante i 13 anni in cui mi occupai di caratteri morfologici dei neuroni coltivati in vitro, mi permette di sollevare dei dubbi sulla natura delle cellule che Kapel interpreta come gangliari; ritengo anzi molto probabile che si tratti piuttosto di elementi indifferenziati provenienti dallo strato germinativo del frammento espiantato.

Non che io intenda di porre in dubbio che i neuroloblasti possano emigrare dall'espianto nel coagulo; io stesso l'ho dimostrato sin dal 1917, ed Olivo (1927) ha minuziosamente descritte le particolarità con cui tale migrazione si produce. Ma, secondo la mia esperienza, i neuroloblasti che si sono allontanati dall'espianto e che sono divenuti liberi hanno vitalità limitata; dopo breve tempo la sostanza neurofibrillare è a poco a poco sostituita da una massa di grossolane granulazioni; ciononostante il neurite continua a crescere in lunghezza per il movimento ameboide del pennacchio terminale del neurite: ma quando la metamorfosi regressiva del neuroblasta emigrato diviene più grande, il neurite diviene varicoso, il suo accrescimento si arresta, ed il neuroblasta si trasforma in un ammasso a forma sferica, zeppo di grossolane granulazioni; son queste, se non erro, le cellule che Kapel descrive come, «grob granulierte Wanderzellen», e che, secondo il mio avviso sono destinate a regredire.

Il problema dell'origine degli elementi indifferenziati nelle colture di tessuto nervoso è ancor meglio illuminato dalle ricerche che Shiro Esaki ha di recente compiute nel mio Istituto e che egli ha riferito in forma preliminare al Congresso di Bordeaux dell'«Association des Anatomistes» (Marzo 1929). Esaki ha coltivato espiantri di varie regioni del sistema nervoso (gangli, midollo, mesencefalo, ecc.), per un periodo da 10 a 15 giorni, senza però ritagliare l'espianto, ma limitandosi a lavare la coltura ed aggiungergli plasma fresco (metodo Maximow); con questo metodo quasi la totalità degli elementi dell'espianto emigra attivamente, cosicchè l'espianto si dissocia, e nelle colture trattate col metodo fotografico (che fu da Esaki opportunamente modificato) è possibile di studiare il nesso genetico fra gli elementi emigrati nel coagulo e quelli dell'espianto. Ebbene Esaki ha dimostrato che nelle colture meglio riuscite di gangli spinali, di mesencefalo e di midollo

spinale, i neuroblasti si differenziano conservando talora la struttura tipica; le cellule dei gangli ad es. crescono di volume e conservano la forma bipolare come nell'embrione.

Ad incominciare dal 3° giorno di vita della coltura ed in numero sempre crescente nei giorni successivi, emigrano dall'espianto cellule senza caratteri specifici a forma in parte affusata, in parte lamellare, le quali si moltiplicano attivamente per mitosi e finiscono col costituire un alone molto esteso; le prime aderiscono intimamente ai plessi di fibre, analogamente a quanto avviene nei nervi dell'embrione. Esse derivano in grande prevalenza dagli elementi indifferenziati dell'abbozzo del ganglio, le quali nello sviluppo normale sono destinate ad evolversi in parte in cellule gangliari, in parte in cellule satelliti di queste (amfociti) in parte in cellule satelliti delle fibre nervose (lemnoblasti), come le ben note ricerche di Harrison hanno dimostrato negli embrioni di Anfibi. Quando l'espianto proviene da embrioni precoci, non vi sono nel gaglio cellule mesenchimali, ed è perciò escluso che questi elementi migranti a carattere indifferente provengano dal mesenchima. Solamente in colture di gangli dall'8° giorno d'incubazione in poi, è presumibile che alcune fra le cellule migranti siano mesenchimali. Ma la circostanza più essenziale che desidero di porre in luce è che nè nelle colture di gangli, nè in quelle di midollo o di mesencefalo fu mai vista da Esaki, una sdifferenziazione di cellule nervose. Le sole metamorfosi di cui sono suscettibili queste ultime sono d'ordine regressivo.

Riassunto. — Gli elementi di apparenza epiteliale che emigrano da espianti di tessuto nervoso di embrioni di pollo non derivano mai, contrariamente a quanto Kapel si propone di dimostrare, da sdifferenziazione di neuroblasti, bensì, come emerge dalle ricerche di Olivo e come quelle più recenti di Esaki confermano, da elementi rimasti indifferenti dell'espianto; i neuroblasti nelle colture in vitro si evolvono ulteriormente oppure regrediscono, mai si sdifferenziano.

Istologia. — *La struttura delle Cellule adipose.* Nota ⁽¹⁾ del Socio G. LEVI e di G. C. DOGLIOTTI.

In questi ultimi anni fu da varie parti supposto che le vescicole del tessuto adiposo maturo non abbiano il valore di cellule ma di gocce di grasso avvolte da membranelle a struttura reticolare. — Queste ultime, secondo Grynfeldt (1922), non debbono essere interpretate come condensazioni del citoplasma della cellula adiposa, ma come membrane precollagene indipendenti, nelle quali decorrono le fibre collagene; le cellule adipose sarebbero immerse in un trabecolato continuo formato da tali membrane.

Ma mentre Grynfeldt ammette che alla superficie delle cellule, in intimo rapporto colle membranelle, persista un citoplasma granuloso, Policard (1922) ritiene che nella cellula adiposa adulta il grasso sia in contatto colla membrana connettiva « La notion d'une mince couche de protoplasma séparant graisse et membrane est purement théorique. Elle ne correspond a rien de réel... On ne rencontre une couche de ce genre que dans les cellules adipeuses non adultes, dans lesquelles la graisse est repandue en plusieurs gouttelettes... »

Secondo Policard la grande solubilità del grasso, come pure la rapida penetrazione nelle cellule adipose dei coloranti specifici, sarebbero inconciliabili coll'esistenza di una membrana citoplasmatica.

Nageotte e Guyon (1923-1924) ottennero col metodo Achucarro una colorazione elettiva della rete fibrillare che avvolge le cellule adipose; rete che dalle figure di quegli Autori appare molto più fina e più complessa di quanto si supponesse, e che si continua nella tramula interstiziale. Ma Nageotte e Guyon sono convinti che un sottile velo citoplasmatico, risparmiato dall'infiltrazione adiposa nel quale risiede il nucleo appiattito, persista anche nelle cellule mature; la rete di fibrille aderirebbe a tale velo come una rete di un pallone all'involucro; nei comuni preparati, involucro citoplasmatico e rete si confondono, in quelli all'argento colloidale l'uno e l'altro si apprezzano chiaramente. Questi A. contestano che la facilità con cui le cellule adipose si colorano con lo Scarlatto dimostri la non esistenza di un involucro citoplasmatico; le cellule del grasso bruno, nelle quali persiste indubbiamente del citoplasma, si colorano altrettanto bene delle cellule del grasso bianco. Parimente Maximow ritiene che un sottile velo di citoplasma persista anche nella cellula adiposa matura.

(1) Presentata nella seduta del 1° giugno 1929.

Volterra (1923) si associa alle vedute di Policard; non esisterebbe negli elementi del grasso bianco, citoplasma di sorta all'interno dell'involucro reticolare; la cellula adiposa è ridotta al nucleo circondato da una piccola quantità di citoplasma, applicato contro la gocciola adiposa in un punto della sua superficie. Più di recente (1927) lo stesso A., pur negando che vi sia un velo citoplasmatico continuo, concede che in singoli casi un involucro sfioracchiato rimanga intorno alla cellula adiposa. Anche Favilli (1928) si esprime contro l'esistenza di un involucro citoplasmatico, senza addurre argomenti nuovi.

Le vedute di Wassermann, secondo le quali il tessuto adiposo deriva da un abbozzo proveniente da proliferazione delle cellule avventiziali dei vasi embrionari, non hanno diretta attinenza colla questione da noi trattata.

Nella rassegna critica di Plenck (1927) la questione della natura delle cellule adipose e dei loro rapporti colle fibrille è estesamente discussa; le membrane delle cellule adipose sono così intimamente connesse colle fibrille, che queste non sono praticamente separabili dalle prime; le fibrille sono incluse nella membrana come in una sostanza cementante, e sono un prodotto dell'attività della cellula adiposa.

M. Clara (1929) ritiene che fra la gocciola adiposa e le fibrille reticolari, sia interposto un velo citoplasmatico; in quanto alla questione dell'origine delle fibrille, toccata da Volterra e da Plenck, esse in parte derivano dal reticolo mesenchimale, in parte sono un prodotto esoplasmatico dell'involucro di citoplasma.

Le osservazioni recenti di uno di noi (Dogliotti) sulle modificazioni del grasso nel dimagrimento, mal si conciliano colla veduta di Grynfelt e Policard; si vede che col diminuire di volume della goccia di grasso l'involucro protoplasmatico diviene gradatamente più distinto e più spesso, finché quando il grasso scompare, la cellula adiposa acquista i caratteri di un comune fibrocita.

L'esistenza di un velo citoplasmatico è difficilmente dimostrabile nei preparati fissati; in quelli col metodo Achucarro non risulta chiaro se la sostanza omogenea alle quali le fibrille aderiscono, è una sostanza cementante, come vuole Plenck, oppure è vero citoplasma; con questo metodo i costituenti che sono attributo costante del citoplasma, i condriosomi, non si colorano. Ed anche i metodi per la colorazione del condrioma danno immagini poco chiare. Secondo Dubreuil, solamente in cellule adipose in via di sviluppo contengono lunghi condrioconti; in quelle vicine a maturità il condrioma nei preparati fissati sembra ridotto a scarsi granuli, i quali prevalentemente sarebbero in via di trasformarsi in goccioline di grasso.

Per risolvere la questione in modo definitivo, ci siamo rivolti al solo metodo il quale possa dare risultati non suscettibili di critiche, il metodo dell'osservazione in vivo.

Abbiamo esaminato frammenti di grasso bianco freschissimo di varie regioni del corpo di ratto, dissociati in soluzione di Nero Janus 1/20.000 in liquido di Ringer (grasso sottocutaneo e retroperitoneale). Il preparato veniva lievemente compresso fra i due vetrini, non però in grado tale da lacerare l'involucro delle cellule adipose; perchè la membrana collabita non si presta ad essere esaminata a fresco. Nella stagione fredda dopo breve tempo dall'allestimento del preparato si formano nella goccia di grasso molti cristalli di oleo-margarina, i quali ostacolano l'osservazione; per ovviare a questo inconveniente talora il preparato fu esaminato al microscopio mantenuto a 37°.

Esaminando il preparato con un buon obiettivo ad immersione ed in condizioni favorevoli di illuminazione, ponendo a fuoco il polo della cellula rivolto verso l'osservatore, vi si distinguono numerosissimi granuli e bastoncini molto brevi, tozzi, disposti in unico strato, coloriti in azzurro chiaro; essi sono immersi in un citoplasma omogeneo. Per la forma e per la tinta che assumono in presenza di Nero Janus, non possono sussistere dubbi sulla loro natura condriosomica.

La distribuzione non è sempre uniforme; specialmente nelle più grandi cellule si scorgono alcune zone con mitocondri addensati, alternate con altre che ne contengono pochi o ne sono del tutto prive.

All'esterno dell'involucro di citoplasma si vedono fibre collagene ed elastiche che s'incrociano in vario senso, appartenenti evidentemente al connettivo interstiziale. La rete fibrillare, che dovrebbe essere aderente all'involucro citoplasmatico — la reticella del pallone, come la definiscono Nageotte e Guyon — non si distingue nelle suddette condizioni di osservazione.

L'esistenza di condriosomi nel velo citoplasmatico che avvolge la cellula adiposa è riconoscibile altrettanto bene nelle più grandi che nelle piccole cellule. Viene così a cadere l'argomento addotto da Policard in favore della sua tesi, che l'involucro citoplasmatico persiste bensì nelle cellule immature, ma scompare quando la quantità di grasso aumenta molto.

Anche col metodo dell'osservazione in campo oscuro ci fu concesso di riconoscere il condrioma nell'involucro della cellula adiposa, in forma di numerosissimi bastoncini corti e tozzi oppure di granuli; gli uni e gli altri risaltano per l'intensa luminosità sovra un fondo grigio-nero; ci fu di grande aiuto per queste osservazioni il condensatore alternativo di Siedentopf, il quale permette di passare rapidamente dall'osservazione a luce ordinaria a quella con illuminazione laterale.

Dalle osservazioni di W. Lewis, di Mossa (1927), di Strangeways e Canti (1927) emerge che la luminosità in campo oscuro è un carattere costante dei condriosomi; riteniamo adunque che anche questo dato di fatto convalidi la natura condriosomica di queste particelle.

I condriosomi appaiono immobili nella sostanza omogenea in cui sono contenuti, mentre sappiamo che in moltissimi elementi a citoplasma molto

fluido, essi sono costantemente mobili; è possibile che i condriosomi delle cellule adipose siano immobilizzati dalla densità della sostanza fondamentale omogenea; ma anche prescindendo da questa circostanza, che non è dimostrabile direttamente, l'estrema sottigliezza del velo citoplasmatico nel quale i condriosomi sono contenuti, è una condizione sufficiente per ostacolarne gli spostamenti.

Il velo citoplasmatico il quale avvolge le cellule adipose ha adunque gli attributi della parte del citoplasma delle cellule animali e vegetali senza differenziazioni specifiche; esso è costituito da una sostanza omogenea e da condriosomi.

Dopo quest'osservazione la questione dell'esistenza di un velo citoplasmatico alla superficie delle cellule adipose ci sembra definitivamente risolta in senso affermativo.

La rete fibrillare alla superficie della cellula adiposa non è visibile a fresco, nè a luce ordinaria, nè in campo oscuro. Se il metodo dell'esame in vivo sia inadeguato a dimostrarne l'esistenza, oppure se esse rappresentino un coagulo di precipitato dei liquidi fissatori non è questo il momento di discutere. La questione non riguarda soltanto l'involucro delle cellule adipose, ma tutto il cosiddetto tessuto reticolare, che fu visto soltanto con speciali tecniche, mai in vivo. Però non abbiamo ragioni per negarne l'esistenza; non è improbabile che le fibrille siano invisibili in vivo perchè molto tenui e poco refrangenti. Ma anche se le ricerche future dimostreranno la reale esistenza di un involucro fibrillare nelle cellule adipose rimane stabilito, che la goccia di grasso non può essere in diretto contatto colla rete fibrillare, bensì ne rimane separata da un velo citoplasmatico.

Riassunto. — Nelle cellule adipose di ratto adulto esaminate a fresco si dimostra l'esistenza di un sottilissimo velo citoplasmatico, contenente un gran numero di condriosomi in forma di granuli e di corti bastoncini, cosicchè la veduta, che le cellule adipose siano costituite da una goccia adiposa contenuta in un involucro reticolare è dimostrata insussistente.

Biologia. — *Sui presunti caratteri citologici specifici del citoplasma delle cellule sessuali.* Nota del Socio G. LEVI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sur l'équation de Riccati.* Nota di M. KOUR-RENSKY, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

I. — A fin qu'une solution particulière de l'équation de Riccati

$$(I) \quad Y' = P_1 Y^2 + Q_1 Y + R_1$$

soit une constante k , il faut et il suffit que l'on ait

$$(2) \quad P_1 k^2 + Q_1 k + R_1 = 0$$

et l'intégrale générale s'écrit:

$$Y = \frac{Ck + e^{\frac{x}{k} \int (P_1 k^2 - R_1) dx} - k_1 \int P_1 e^{\frac{x}{k} \int (P_1 k^2 - R_1) dx} dx}{C - \int P_1 e^{\frac{x}{k} \int (P_1 k^2 - R_1) dx} dx}.$$

En appliquant la condition (2) à l'équation de Darboux

$$\sigma' = \frac{q + ip}{2} \sigma^2 - i r \sigma + \frac{q - ip}{2},$$

à l'intégration de laquelle on peut ramener l'intégration du système fondamental de la mécanique

$$(3) \quad \alpha' = \beta r - \gamma q \quad ; \quad \beta' = \gamma p - \alpha r \quad ; \quad \gamma' = \alpha q - \beta p \quad ; \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

et en posant $k = \alpha + i\beta$ on est conduit aux deux cas d'intégrabilité suivants du système (3):

$$(I) \quad \frac{p}{\omega - r} = \alpha \quad ; \quad \frac{p}{q} = \gamma$$

$$(II) \quad \frac{p}{\omega + r} = -\alpha \quad ; \quad \frac{p}{q} = \gamma$$

où

$$\alpha = \text{const.} \quad , \quad \beta = \text{const.} \quad , \quad \omega^2 = p^2 + q^2 + r^2.$$

L'interprétation cinématique des cas (I) et (II) est assez simple.

(1) Nella seduta del 5 maggio 1929.

II. - Pour l'intégration de l'équation de Riccati quelconque

$$(4) \quad y' = Py^2 + Qy + R,$$

effectuons la substitution

$$(5) \quad y = \frac{\alpha Y + \beta}{Y + \gamma}, \quad (\alpha\gamma - \beta \neq 0),$$

dont des cas particuliers sont les substitutions connues d'Abel⁽¹⁾ $y = \alpha Y$;
 $y = Y + \beta$.

L'application de la condition (2) à l'équation (4) transformée donne

$$(6) \quad (P\alpha^2 + Q\alpha + R - \alpha')k^2 + (2P\alpha\beta + Q\alpha\gamma + Q\beta + 2R\gamma - \beta' - \gamma\alpha' + \alpha\gamma')k + \\ + P\beta^2 + Q\beta\gamma + R\gamma^2 - \gamma\beta' + \beta\gamma' = 0.$$

Deux autres équations pour achever la détermination des α, β, γ peuvent être choisies de plusieurs manières.

Par exemple, la combinaison intégrable suivante :

$$k^2\alpha' + k(\beta' + \gamma\alpha' + \alpha\gamma') + \gamma\beta' + \beta\gamma' = 0 \quad ; \quad 2\gamma' + Q\gamma + kQ = 0$$

conduit à une condition d'intégrabilité de l'équation (4), dépendante des 3 constantes arbitraires : c'est-à-dire à

$$\left[k \left(e^{\frac{1}{2} \int Q dx} - \frac{1}{2} \int Q e^{\frac{1}{2} \int Q dx} dx \right) + C \right]^4 R = a P e^{2 \int Q dx}.$$

Un cas très particulier de cette condition, où $k = 0$, $C = \pm 1$, ramène à la condition d'Abel

$$(7) \quad R = a P e^{2 \int Q dx},$$

pour laquelle, d'après Abel, il existe l'intégrale :

$$(8) \quad y = \sqrt{\frac{R}{P}} \operatorname{tg} \left(\int \sqrt{PR} dx + C \right).$$

Plus particulièrement, quand $k = 0$, $C = \pm 1$, $a = -1$, nous avons la condition d'intégrabilité de Letnikoff; en utilisant cette dernière condition MM. Letnikoff, Alekseevsky et Floroff⁽²⁾ ont intégré les équations

$$y' = Py^2 + Qy - \frac{Pe^{2 \int Q dx}}{(C - \int Pe^{\int Q dx} dx)^{\frac{4i}{2i \pm 1}}} \quad ; \quad \gamma' + P\gamma^2 = P(a + b \int P dx)^{\frac{4k}{2k-1}}$$

(i est un nombre entier positif; k est un nombre entier positif ou négatif).

(1) N. ABEL, *Oeuvres*, t. II, 1881, p. 20; t. II, 1839.

(2) AL. LETNIKOFF, « *Matem. Sbornik* », Moscou, t. I, 1866; V. P. ALEKSEEVSKY, « *Communic. de la Soc. Math. Charkow* », I, 1884; FLOROFF, *ibidem*.

On peut écrire aussi d'autres conditions d'intégrabilité pour (4), dépendantes des 3 constantes.

Par exemple, la combinaison

$$-k\alpha' + \alpha\gamma' - \gamma\alpha' + kP\alpha^2 = 0 \quad ; \quad -k\beta' + \beta\gamma' - \gamma\beta' + P\beta^2 = 0$$

donne

$$R(C_1 - k \int P dx)(C_2 - \int P dx) + Q[(C_1 - k \int P dx) + k(C_2 - \int P dx)] + P \cdot 2k = 0.$$

III. — La forme abélienne (8) de l'intégrale générale se déduisant de la condition (7) peut être généralisée pour toute équation de Riccati (4). En effet, il est aisé de voir que l'intégrale générale pour (4) peut s'écrire sous la forme

$$(9) \quad y = \Omega_1 + \Omega_2 \operatorname{tg}(\Omega_3 + C).$$

Exprimons-y la tangente par sinus et cosinus; d'après les formules d'Euler, nous obtiendrons:

$$y = \frac{e^{\omega_1} + \omega_2 \omega_3}{e + \omega_3},$$

où

$$\omega_1 = \Omega_1 + i\Omega_2 \quad ; \quad \omega_2 = \Omega_1 - i\Omega_2 \quad ; \quad \omega_3 = e^{2i\Omega_3}.$$

Les fonctions $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sont des intégrales particulières de l'équation (4), et ω_3 se détermine moyennant les intégrales particulières y_1, y_2, y_3 de l'équation (4) d'après la formule

$$\omega_3 = \frac{y_3 - y_2}{y_1 - y_3}.$$

L'équation (4) étant réduite à la forme canonique

$$(10) \quad \tilde{\lambda}' = \tilde{\lambda}^2 + J$$

$$\left\{ y = \frac{\tilde{\lambda}}{p} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{p} \right)' - \frac{Q}{p} \right] \quad ; \quad J = \frac{1}{4} \left[4PR - Q^2 + 2 \left(\frac{P'}{p} \right) + 2P \left(\frac{Q}{p} \right)' - \left(\frac{P'}{p} \right)^2 \right] \right\},$$

pour la fonction ω_1 , où $\omega_3 = \frac{\tilde{\lambda}_3 - \tilde{\lambda}_2}{\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_3}$, nous aurons l'équation de Schwarz suivante:

$$\{ \omega_3, x \} = 2 J.$$

Pour l'équation

$$(11) \quad sy' = py^2 + qy + r,$$

où p, q, r, s sont des fonctions quelconques, dérivables et intégrables, l'intégrale particulière ω_1 se détermine soit par la formule

$$(12) \quad \omega_1 = \frac{s' - q}{2p},$$

soit par la formule

$$(13) \quad \omega_1 = \frac{s' - q + st}{2p},$$

où t est une dérivée logarithmique du multiplicateur commun λ des expressions

$$(14) \quad \omega_1' \quad ; \quad \omega_3(\omega_1 - \omega_2) \quad ; \quad \omega_1' \omega_3 - \omega_1 \omega_3' - \omega_2 \omega_3' - \omega_3 \omega_2' ; \\ \omega_2' \omega_1 \omega_2 + \omega_3' \omega_1 \omega_2 - \omega_1' \omega_2 \omega_3,$$

et se détermine par l'équation

$$(15) \quad t' = \frac{1}{2} t^2 + \frac{p'}{p} t + \frac{1}{2s^2} \left[+pr - q^2 + s'^2 - 2ps \left(\frac{s' - q}{p} \right)' \right];$$

L'intégrale particulière ω_2 est une racine commune aux équations algébriques:

$$(16) \quad \omega_2^2 + \left\{ \frac{\bar{q}}{\bar{p}} - \frac{\bar{s}}{\bar{p}} \left[\frac{(s' - \bar{q})'}{s' - \bar{q}} - \frac{\bar{p}'}{\bar{p}} \right] + \int \frac{\bar{s}}{\bar{p}} dx \right\} \omega_2 + \frac{\bar{r}}{\bar{p}} - \frac{2\bar{s}\bar{r}}{(s' - \bar{q}) \int \bar{p} dx} = 0, \\ \omega_2' + \left[\frac{\bar{p}\bar{s} + \bar{p} \int \bar{p} dx}{\bar{p} \int \bar{p} dx} + \frac{\bar{p}(\bar{q} - s')}{2\bar{p}^2} \right] \omega_2 + \left[\frac{\bar{q}\bar{s} + \bar{r} \int \bar{p} dx}{\bar{p} \int \bar{p} dx} + \frac{\bar{q}(\bar{q} - s')}{2\bar{p}^2} \right] \omega_2 + \\ + \frac{\bar{r}\bar{s}}{\bar{p} \int \bar{p} dx} + \frac{\bar{r}(\bar{q} - s')}{2\bar{p}^2} = 0,$$

où

$$\bar{p} = \lambda p \quad ; \quad \bar{q} = \lambda q \quad ; \quad \bar{r} = \lambda r \quad ; \quad \bar{s} = \lambda s \quad (1).$$

La formule (12) se retrouve pour $\lambda = 1$, $t = 0$.

IV. - Si des toutes les expressions (14) seulement les deux fonctions ω_1' et ω_3 ont le multiplicateur commun λ_1 :

$$\omega_3 = \lambda_1 \mu \quad ; \quad \omega_1' = \lambda_1 \mu_1,$$

alors nous aurons les intégrales particulières ω_1 et ω_2 de la formule (13), où au lieu de t il faut substituer les solutions

$$(17) \quad t_1 = -\frac{\mu'}{\mu} \frac{\mu_1}{\mu}, \quad t_2 = -\frac{\mu'}{\mu} \frac{\mu_1}{\mu}$$

(1) M. KOURENSKY, « Proceedings of the London Math. Soc. », vol. 24, 1925, pp. 205, 498; M. KURENŠKIJ, « Sitzungsberichte der M.-N.-Är. Section Ševčenko-Gesellschaft in Lemberg », Heft X, 1929.

de l'équation (15), que en ce cas a la forme

$$(18) \quad t' = \frac{1}{2} t^2 + \frac{\mu_1'}{\mu_1} t + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\mu_1'}{\mu_1} \right)^2 - \left(\frac{\mu_1}{\mu} \right)^2 \right] - \frac{\mu_1}{\mu} \left(\frac{\mu_1'}{\mu_1} \right)';$$

la fonction ω_3 est fournie par une quadrature: $\omega_3 = e^{\int \frac{\mu_1'}{\mu} dx}$.

Par exemple, pour

$$x(\sin x - \cos x) y' = 3 y^2 + (x - 2)(\sin x + \cos x) y + 3 \sin x \cos x - x$$

l'équation (15) a la forme (18):

$$t' = \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{x^2};$$

la solution sous la forme (12) en est $t_1 = \frac{2}{x}$; des formules (17) nous

avons $t_1 = \frac{2}{x}$, $t_2 = -\frac{4}{x}$; la formule (13) donne $\omega_1 = \sin x$; $\omega_2 = \cos x$;

alors: $\lambda_1 = x^2$, $\omega_3 = x^3$; $y = \frac{C \sin x + x^3 \cos x}{C + x^3}$.

Nous avons:

$$\bar{p} = 3x^2; \quad \bar{q} = x^2(x-3)(\sin x + \cos x); \quad \bar{r} = 3x^2 \sin x \cos x - x^3; \\ \bar{s} = x^3(\sin x - \cos x);$$

l'équation (15) est:

$$3 \sin x \cdot \omega_2^2 + (x - 6 \sin x \cos x) \omega_2 + 3 \sin x \cos^2 x - x \cos x = 0;$$

l'intégrale $\omega_2 = \cos x$ est une racine de cette équation.

V. — Posons $s = 1$; nous revenons de la sorte à l'équation (4); les équations (13) et (15) s'écriront:

$$(19) \quad \omega_1 = \frac{-Q + T}{2P}; \quad T' = \frac{1}{2} T^2 + \frac{P'}{P} T + \frac{1}{2} \left[4PR - Q^2 + 2P \left(\frac{Q}{P} \right)' \right].$$

M. Bougaëff dans son article sur les intégrales particulières algébriques de l'équation (4) avait obtenu comme condition d'intégrabilité de l'équation (4):

$$(20) \quad PQ' - QP' = 2 \left(\frac{PQ^2}{4} - RP^2 - cP^3 \right), \quad c = \text{const. } (1),$$

à laquelle une intégrale particulière sera une racine de l'équation quadratique réductible.

(1) N. W. BOUGAËFF, « *Matematičeskij Sbornik* », Bd. 17, 1893, s. 437.

Dans le texte de M. Bougaëff se trouve cP^2 au lieu de cP^3 . Il y a lieu de remarquer qu'une liste d'erreurs est corrigée dans le t. 19 de « *Matematičeskij Sbornik* ».

Il est aisé de voir, que la position $c = \frac{k^2}{4}$ et la condition (20) ramènent l'équation (15) à la forme

$$T' = \frac{1}{2} T^2 + \frac{P'}{P} T - \frac{1}{2} (kP)^2;$$

c'est un cas simple de l'équation (18), où il faut poser $\mu = \frac{1}{k}$, $\mu_1 = P$.

Nous avons :

$$T_1 = kP \quad ; \quad T_2 = -kP \quad ; \quad \omega_1 = -\frac{Q - kP}{2P} \quad ; \quad \omega_2 = -\frac{Q + kP}{2P};$$

$$\omega_3 = e^{\frac{1}{k} \int P dx}.$$

Pour l'intégrale générale sous forme (3) nous avons :

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= \lambda s \quad ; \quad \Omega_3 = \lambda p \quad ; \quad \Omega_2 - 2\Omega_3\Omega_1 = \lambda q; \\ \Omega_1\Omega_1' + \Omega_3\Omega_2' + \Omega_2\Omega_1' - \Omega_2\Omega_1 &= \lambda r \quad ; \quad \Omega_2' = \lambda' s + \lambda s', \end{aligned}$$

d'où

$$\Omega_1 = \frac{s' - q + s \frac{\lambda'}{\lambda}}{2p} \quad ; \quad \Omega_2 = \lambda s \quad ; \quad \Omega_3 = \int \lambda p dx.$$

La détermination de $t = \frac{\lambda'}{\lambda}$ des équations (15)-(18) se remplacera par la détermination $u = \frac{1}{\lambda}$ de l'équation

$$uu'' = \frac{1}{2} u'^2 + \frac{p'}{p} uu' + \frac{1}{2s^2} \left[4pr - q^2 + s'^2 - 2ps \left(\frac{s' - q}{p} \right)' \right] u^2 - 2p^2.$$

Pour $\lambda = \text{const.} = K$, nous avons la condition d'intégrabilité

$$4pr - q^2 + s'^2 - 2ps \left(\frac{s' - q}{p} \right)' = 4K^2 p^2 s^2;$$

cette condition, pour $s = 1$, $K^2 = -c$, se réduit à la condition de Bougaëff (20).

VI. — L'équation sous forme canonique (10), par la substitution

$$z = \frac{2J^2}{J' - 2J\gamma_1},$$

conserve la même forme canonique. Après n substitutions nous aurons:

$$\tilde{\chi}_n = \tilde{\chi}_n^2 + J_n,$$

où

$$J_n = J_{n-1} + \frac{1}{2} (\lg J_{n-1})'' - \frac{1}{4} (\lg J_{n-1})'^2.$$

Si l'on pose pour abréger

$$(\lg J)'' = \lg'' J \quad ; \quad (\lg J)'^2 = \lg'^2 J$$

on obtient les formules intéressantes:

$$J_1 = J + \frac{1}{2} \lg'' J - \frac{1}{4} \lg'^2 J;$$

$$J_2 = J + \frac{1}{2} \lg'' J - \frac{1}{4} \lg'^2 J + \frac{1}{2} \lg'' \left(J + \frac{1}{2} \lg'' J - \frac{1}{4} \lg'^2 J \right) - \\ - \frac{1}{4} \lg'^2 \left(J + \frac{1}{2} \lg'' J - \frac{1}{4} \lg'^2 J \right);$$

$$J_3 = J + \frac{1}{2} \lg'' J - \frac{1}{4} \lg'^2 J + \frac{1}{2} \lg'' \left(J + \frac{1}{2} \lg'' J - \frac{1}{4} \lg'^2 J \right) - \\ - \frac{1}{4} \lg'^2 \left(J + \frac{1}{2} \lg'' J - \frac{1}{4} \lg'^2 J \right) + \frac{1}{2} \lg'' ((\dots)) - \frac{1}{4} \lg'^2 ((\dots));$$

.....

Si, après l' $n^{\text{ème}}$ opération,

$$(21) \quad 2 \lg'' J_n = \lg'^2 J_n,$$

alors

$$J_{n+1} = J_n \quad ; \quad \tilde{\chi}_{n+1} = \tilde{\chi}_n;$$

$$\tilde{\chi}_n = \frac{2J_n^2}{J_n - 2J_n \tilde{\chi}_n} \quad ; \quad \tilde{\chi}_n = \frac{J'_n \pm \sqrt{J_n^2 - 4J_n \tilde{\chi}_n}}{4J_n}.$$

L'intégrale de l'équation proposée (10) est définie par la formule

$$\tilde{\chi} = J' - \frac{2J^2}{4JJ_1} \\ J'_1 - 4J_1J_2 \\ J'_2 - 4J_2J_3 \\ J'_3 - \dots - 4J_n - \frac{J_n^2}{J_{n-1} - 2J_{n-1}\tilde{\chi}_n},$$

ou

$$\tilde{\alpha} = \frac{I}{\frac{I'}{2} + I} + \frac{I'}{\frac{I'}{2} + I} + \frac{I''}{\frac{I'}{2} + I} + \dots + \frac{I_{n-2}}{\frac{I_{n-1}}{2} + I_{n-1} \tilde{\alpha}_n},$$

où

$$-\frac{I}{J} = I'; \quad \frac{I}{J'} = I_1, \dots$$

VII. — L'équation (21) peut s'écrire :

$$\frac{J''}{J} - \frac{3}{2} \left(\frac{J'}{J} \right)^2 = 0.$$

L'intégrale générale est :

$$J = \frac{k_1}{(x + k_2)^2}.$$

Pour $n = 0$ nous avons $J = \frac{k_1}{(x + k_2)^2}$, et il s'en suit la possibilité d'intégrer les équations

$$(22) \quad \tilde{\alpha}' = \tilde{\alpha}^2 + c(x + k)^m,$$

quand $m = 0$, ou $m = -2$; en transformant à la fois la variable dépendante $\tilde{\alpha}$ et la variable indépendante x on reconnaît la possibilité d'intégrer les équations (22) pour $m = -\frac{4i}{2i+1}$ (i est entier, positif ou négatif).

Pour $n = 1$ nous aurons

$$(23) \quad \frac{J''}{J} - \frac{3}{2} \left(\frac{J'}{J} \right)^2 + 2J = \frac{2k_1}{(x + k_2)^2};$$

une intégrale particulière de cette équation étant $J = \frac{k_1}{(x + k_2)^2}$.

En déterminant l'intégrale générale de l'équation (23), par la double transformation des variables dépendante $\tilde{\alpha}$ et indépendante variable x , nous trouverons, probablement, une classe nouvelle des fonctions J , pour laquelle existe l'intégrale de l'équation (10) sous forme finie.

En particulier, quand $k_1 = 0$, nous obtiendrons de (23) l'équation de M. Sinzoff⁽¹⁾ qu'il a intégrée par la fonction $Sl(u)$ sinus lemniscatus u , c'est-à-dire par une forme particulière de la fonction $\sin am(u)$, correspondant à la valeur $k^2 = -1$ du paramètre k de cette fonction.

(1) D. SINZOFF, *Sametzi ob uravnenijach, analog. uravneniju Riccati*, Kasan, 1894.

Matematica. — *Sopra uno spostamento generalizzato negli spazi di Riemann.* Nota di PIA NALLI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Il sig. A. Wundheiler, in una Nota recente ⁽²⁾, si occupa di uno spostamento di un vettore lungo una linea, generalizzazione di un altro chiamato dal sig. G. Thomsen *parallelismo di Fermi*.

Lo spostamento viene caratterizzato nel modo seguente.

In uno spazio di Riemann è fissata una linea L nei punti della quale è definito un vettore v .

Un vettore u , funzione dei punti di L , soddisfa alle seguenti condizioni:

a) ha lunghezza costante,

b) è costante il prodotto scalare $u \times v$,

c) se P è un punto di L , P' un altro punto infinitamente vicino al primo, il vettore u in P' appartiene alla giacitura determinata dal vettore v in P' e dal vettore che si ottiene trasportando il vettore u da P nel punto P' per parallelismo secondo Levi-Civita.

In particolare, se v è il versore tangenziale ad L si ha per u il parallelismo di Fermi.

In tal caso la b) si può sostituire con quest'altra: è costante l'angolo che u forma con L . (Ora la c) si può mettere sotto quest'altra forma: c') il vettore derivato di u in un punto P di L appartiene alla giacitura determinata in P da u e v . Enunciata in tal modo, le formule ottenute dal sig. Wundheiler si possono avere quasi senza calcoli ed inoltre appare poco giustificato l'appellativo di parallelismo per lo spostamento generale del Wundheiler come per quello particolare di Fermi-Thomsen.

Un vettore è parallelo lungo una linea secondo Levi-Civita quando è nullo il suo derivato; ma, se ogni volta che lungo una linea un vettore ed il suo derivato siano legati da una condizione, si volesse dire che il vettore è parallelo lungo la linea secondo una certa definizione, sarebbe come voler dire che una funzione soddisfacente ad una equazione differenziale $dy = f(x, y) dx$ è costante secondo una certa definizione, per il fatto che la costante soddisfa all'equazione $dy = 0$.

Che la condizione c) si possa mettere sotto la forma c') risulta immediatamente dalle seguenti considerazioni.

(1) Nella seduta del 19 maggio 1929.

(2) A. WUNDHEILER, *Sur un déplacement généralisé dans les espaces riemanniens*. Questi « Rendiconti », serie 6^a, vol. IX, pp. 387-389.

Riferita la varietà a coordinate geodetiche lungo L , se u^i sono le componenti controvarianti di \mathbf{u} in P , spostando \mathbf{u} per parallelismo da P in P' si avrà in questo punto un vettore le cui componenti controvarianti saranno ancora le u^i .

Le componenti di \mathbf{u} in P' sono $u^i + du^i$, le componenti di \mathbf{v} in P , v^i , ed in P' , $v^i + dv^i$, quindi, per la c)

$$u^i + du^i = \sigma u^i + \rho(v^i + dv^i).$$

Ma evidentemente σ differisce da 1 per un infinitesimo e ρ è un infinitesimo, perciò

$$(1) \quad du^i = \varepsilon u^i + \eta v^i,$$

ε ed η essendo infinitesimi, e questa è precisamente la condizione $c')$.

In quanto alle formule del sig. Wundheiler possono ottenersi immediatamente. Lo spazio di Riemann sia riferito a coordinate qualunque e sia g_{hk} il tensore fondamentale.

La L sia riferita ad un parametro t , siano $\dot{\mathbf{u}}$ e $\dot{\mathbf{v}}$ i derivati di \mathbf{u} e \mathbf{v} lungo L con referenza a t .

Essendo, secondo la (1),

$$\dot{\mathbf{u}} = \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}$$

eguagliando le componenti controvarianti dei due membri avremo

$$(2) \quad \frac{du^i}{dt} + \sum_{hk} \left\{ \begin{matrix} b \ k \\ i \end{matrix} \right\} u^b \frac{dx_k}{dt} = \lambda u^i + \mu v^i.$$

Tenendo conto che \mathbf{u} ha lunghezza costante, è

$$\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}} = 0,$$

cioè

$$\sum_{hk} g_{hk} (\lambda u^h + \mu v^h) u^k = 0,$$

e cioè, chiamando U la lunghezza costante di \mathbf{u} ed H il valore costante del prodotto scalare $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$:

$$(3) \quad U^2 \lambda + H \mu = 0.$$

Per la costanza di $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ si ha poi

$$\dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \dot{\mathbf{v}} = 0$$

cioè

$$\sum_{hk} g_{hk} (\lambda u^h + \mu v^h) v^k + \sum_{hk} g_{hk} \left[\frac{dv^h}{dt} + \sum_{pq} \left\{ \begin{matrix} p \ q \\ h \end{matrix} \right\} v^p \frac{dx_q}{dt} \right] u^k = 0.$$

Ma la prima parte del primo membro è

$$\lambda H + \mu V^2,$$

denotando con V la lunghezza di \mathbf{v} .

Ricavando dalla (3) e dalla seguente λ e μ e sostituendo nella (2), si ritrovano le formule del sig. Wundheiler.

Osservazione del Socio T. LEVI-CIVITA.

La Nota della signorina prof. Pia Nalli mi porge l'opportunità di far conoscere una osservazione, che rende espressiva la genesi del trasporto di Fermi e sue varianti, e che già da tempo avevo comunicata ai signori Thomsen e Wundheiler.

Mi riferisco, per fissar le idee, al caso elementare dello spazio ordinario, considerandovi una curva L e, in un generico suo punto P , il versore tangente \mathbf{t} .

Se in un punto particolare P_0 di L si assegna un triedro di vertice P_0 con uno spigolo g diretto tangenzialmente, e poi si fa scorrere il vertice su L , imponendo al triedro un semplice moto traslatorio, lo spigolo g (che, come ogni altra retta solidale, conserva direzione invariata) non resta in generale tangente alla curva L . Per far sì che g abbia in ogni punto la direzione di \mathbf{t} bisogna associare alla traslazione una opportuna rotazione. Fissando in particolare l'attenzione sul passaggio (del triedro) da una posizione generica P (del suo vertice) ad una posizione P' infinitamente vicina, si può realizzare il voluto comportamento, combinando lo scorrimento traslatorio con una rotazione elementare attorno ad un asse normale alle due tangenti in P e P' , ossia attorno alla binormale \mathbf{b} della curva in P . È questo il trasporto del triedro, meno discosto da una semplice traslazione elementare (o, se si vuole, dal parallelismo), che sia atto a mantenere il contatto dello spigolo g con la curva L .

L'incremento $d\mathbf{u}$ che subisce, in tale trasporto, un generico vettore \mathbf{u} solidale col triedro, è per una formula fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi,

$$(\text{rotazione elementare}) \wedge \mathbf{u},$$

ossia, designando con ds l'arco elementare PP' e con λ uno scalare finito,

$$ds \lambda (\mathbf{b} \wedge \mathbf{u}).$$

In particolare, se \mathbf{u} è originariamente perpendicolare allo spigolo g e resta perpendicolare a \mathbf{t} durante il trasporto, si avrà

$$(1) \quad \frac{d\mathbf{u}}{ds} = \lambda \mathbf{t}.$$

Lo scalare λ , funzione, *a priori* incognita, di \mathbf{u} e della curva di trasporto L , si determina immediatamente in base alla condizione che il trasporto definito dalla (1) rispetti la perpendicolarità a \mathbf{t} . Ciò si traduce nella circostanza formale che

$$(2) \quad \mathbf{u} \times \mathbf{t} = 0$$

deve essere una relazione invariante di fronte al sistema differenziale (1); ossia che $\frac{d}{ds}(\mathbf{u} \times \mathbf{t})$ deve annullarsi, in virtù di (1) e (2).

Ora, se si tien conto della prima formula di Frenet

$$(3) \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = c\mathbf{n}$$

dove c designa la curvatura della L in P e \mathbf{n} il versore della normale principale, nonchè della (1), si ha

$$(4) \quad \lambda = -c(\mathbf{u} \times \mathbf{n}).$$

È dunque necessario e sufficiente che λ abbia l'espressione (4) perchè il trasporto dei vettori \mathbf{u} definito dalla (1) li mantenga costantemente nel piano normale a L .

Si verifica poi che la (1) (come è del resto evidente, data la sua origine) ha, per i vettori \mathbf{u} del detto piano normale (applicati nel punto P che descrive L), carattere di moto rigido, in quanto lascia invariati i prodotti scalari. Infatti, per due generici $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ che verifichino la (1), si ha ad un tempo

$$\mathbf{u}_1 \times \frac{d\mathbf{u}_2}{ds} = 0 \quad , \quad \mathbf{u}_2 \times \frac{d\mathbf{u}_1}{ds} = 0$$

e quindi

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) = 0.$$

Passiamo ora ad uno spazio riemanniano qualsiasi, L, P e \mathbf{t} avendo, in tale varietà, lo stesso significato attribuito loro finora nello spazio ordinario. Ove s'intenda con $\frac{d}{ds}$ la derivazione vettoriale lungo la curva L (introdotta, salvo il nome, dal Bianchi⁽¹⁾), le formule (1)-(4) seguitano a

(1) Cfr. la mia Memoria *Sur l'écart géodésique*, « Math. Ann. », B. 97, 1926, pp. 291-320; oppure l'edizione inglese (Glasgow, Blackie, 1927, p. 212), o la tedesca (Berlin, Springer, 1928, p. 63) delle *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*.

sussistere; il sistema (1), colla specificazione (4) per λ , definisce un trasporto dell'insieme dei vettori normali u ; che conserva i prodotti scalari, quindi lunghezze ed angoli. Associandolo concettualmente al semplice scorrimento di t lungo L , si ha il trasporto di Fermi, ecc.

Il signor Wundheiler e, in forma semplificata, la signorina Nalli hanno generalizzato la (1) caratterizzando un particolare trasporto (in generale non rigido) dell'intera stella di vettori uscenti da P .

Matematica. — *Sul concetto di vettore.* Nota di U. CASSINA, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. PEANO.

La parola « vettore » venne introdotta nel 1845 da sir W. R. HAMILTON, ed il concetto indicato con essa è strettamente collegato con quello di « punto improprio » della geometria proiettiva e di « segmenti equipolenti » del calcolo geometrico di G. BELLAVITIS (1833). Ma benchè sia passato ormai quasi un secolo dalla prima introduzione del concetto di « vettore », e benchè nel frattempo sia sorta tutta una dottrina fondata su detto concetto: il *Calcolo vettoriale* che si è dimostrato di grande utilità in numerose questioni di pertinenza della meccanica, della fisica matematica e della geometria, e benchè questa dottrina sia stata sviluppata in modo semplice e rigoroso specialmente in Italia (G. PEANO, C. BURALI-FORTI, R. MARCOLONGO, T. BOGGIO, ecc.); non è difficile di sentire ancora, anche fra matematici italiani, delle discussioni intorno a questo concetto di « vettore ». Discussioni che rivelano divergenze profonde di opinioni, le quali provengono, come sempre, dal fatto che i disputanti usano la stessa parola per indicare enti diversi.

E qui, incidentalmente, osservo che dispute del genere sono impossibili fra chi fa uso dei simboli della *Logica matematica* di G. PEANO, perchè ogni idea essendo rappresentata da simboli fissi e sottoposti a leggi precise ed immutabili si può dire con G. W. LEIBNIZ « calculemus » e quindi troncare ogni vacua discussione originata dal diverso significato attribuito dai vari disputanti alle stesse parole del linguaggio ordinario.

Da conversazioni svoltesi in quest'ultimo triennio alla sezione milanese della « Mathesis » od al « Seminario matematico e fisico » di Milano ho potuto poi rilevare come alcuni ritengano ancora che non sia possibile separare il concetto di « vettore » da quello di sistema cartesiano di riferimento. Questa opinione, atta a suscitare la meraviglia del geometra perchè le tre caratteristiche del « vettore » hamiltoniano (ed adottato dalla scuola italiana): « lunghezza », « direzione » e « verso » gli appaiono indipendenti

(1) Nella seduta del 19 maggio 1929.

da qualunque sistema di coordinate, è tale da farmi pensare utile di pubblicare qui alcune cose da me dette in una conferenza alla sezione milanese della « Mathesis » del maggio 1927.

E precisamente esaminato quale sia il significato originale attribuito alla parola « vettore » di W. R. HAMILTON, che coincide con quello attribuito da H. GRASSMANN alla parola « Strecke », mi soffermo sulle varie forme di definizioni possibili di detto concetto: definizioni per *astrazione* o definizioni *nominali*. E termino col proporre una nuova definizione nominale del concetto di vettore, la quale, pur discendendo direttamente dalle considerazioni di HAMILTON, mi pare assai più semplice delle definizioni nominali date dagli altri autori.

In particolare dalla presente Nota risulterà poi come il concetto di « vettore » sia assolutamente indipendente da qualunque sistema di coordinate fissate nello spazio. E questo vale non soltanto per i vettori dello spazio ordinario euclideo, ma anche per quelli dello spazio lineare ad n dimensioni. E mediante questi enti intrinseci (od « assoluti » come preferisce dire il BURALI-FORTI) è possibile studiare ogni proprietà degli spazi lineari o curvi ed a un numero qualunque di dimensioni ⁽¹⁾.

§ 1. — Il concetto di vettore secondo Hamilton, Grassmann ed altri.

Il nome « vettore » è stato introdotto da sir William Rowan HAMILTON nel 1845, in una sua Nota pubblicata nel *Quarterly Journal of math.* di Cambridge (t. I, p. 56); ed il concetto espresso con tale nome è il fondamento del calcolo vettoriale che si è dimostrato così utile in numerose questioni.

La parola « vettore » deriva dal latino *vehere* = trasportare; « vettore » sta perciò per « veicolo » (o meglio per « chi guida il veicolo »). Ed inverso data una coppia (ordinata) di punti (propri) A ; B allora — secondo HAMILTON — il « vettore individuato da detta coppia », che indicherò con « vect (A, B) », è il « veicolo » che trasporta A in B lungo il cammino rettilineo.

(W. R. HAMILTON, *Lectures on quaternions*, Dublin, 1853, p. 15: « "it may be called" the vector of the point B , from the point A , because it may be considered for its office, function, work, task, or business, to transport or carry (in latin, *vehere*) a moveable point, from the given or initial position A , to the sought or final position B »).

Tale concetto metafisico di vettore è poi chiarito meglio dallo stesso HAMILTON mediante la condizione generale d'eguaglianza dei vettori individuati da due coppie di punti A ; B e C ; D .

(1) Cfr. per questo: *Espaces courbes et théorie de la relativité* di C. BURALI-FORTI e T. BOGGIO (Sten, Torino, 1924, 1^a parte).

HAMILTON dice che « vect (A, B) = vect (C, D) » quando i punti A, B, D, C , nell'ordine scritto, sono i vertici consecutivi d'un parallelogrammo, cioè i lati AB e CD sono paralleli ed i lati AC e BD sono paralleli; oppure quando i punti A, B, C, D appartengono ad una stessa retta ed allora i segmenti AB e CD sono di eguale lunghezza ed il verso da A a B è eguale al verso da C a D .

(*Lectures*, pp. 96-97: « this sameness of ordinal relations between two pairs of points AB, CD , which is denoted as above by the equation $D - C = B - A$ ⁽¹⁾, may and ought to be considered as holding good, when the four points taken in the order $ABDC$, are, in this order, the four successive corners of a parallelogram »);

Lectures, p. 98: « And the only other case in holding which the lately written equation can be satisfied by any two distinct pairs of points AB and CD , is when these four points are in one common right line; D being also as far removed from C upon that line, as B is from A , and towards its same (infinitely distant) parts of space, but not in the opposite direction »).

In modo pressochè analogo si esprime H. GRASSMANN nel suo *Ausdehnungslehre* del 1844. (*Werke*, t. I, p. 303: ... « ich sage also, dass $B-A$ dann und nur dann gleich B_1-A_1 sei, wenn die geraden Linien von A nach B und von A_1 nach B_1 gleiche Länge und Richtung haben »).

Queste due condizioni hamiltoniane di eguaglianza di vettori le possiamo riunire in una sola dicendo — nelle solite ipotesi — che « vect (A, B) = vect (C, D) » quando e soltanto quando il punto medio del segmento BC coincide con il punto medio del segmento AD .

Così si ha la definizione di eguaglianza di vettori data da BURALI-FORTI e MARCOLONGO nella prima edizione del loro *Calcolo vettoriale* (1909).

Da quanto precede risulta come il vettore individuato da una coppia di punti distinti sia il concetto « astratto » corrispondente ad una certa classe di segmenti orientati « equipollenti », secondo la nomenclatura proposta da GUSTO BELLAVITIS fin dal 1833⁽²⁾, cioè di segmenti orientati aventi eguale « lunghezza », eguale « direzione » ed eguale « verso ». Ed in tal modo è appunto introdotto il concetto di « vettore » nelle *Lezioni di meccanica razionale* di T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI (vol. I, Bologna 1923, p. 3).

Per indicare il vettore individuato dalla coppia di punti A, B , HAMILTON e GRASSMANN fanno uso di varie notazioni; tra le altre della notazione « $B - A$ » che è la più conveniente, perchè il segno « — » che figura fra i punti A e B viene a godere delle ordinarie proprietà del segno — alge-

(1) Ove $B-A$ sta per « vect (A, B) ».

(2) G. BELLAVITIS, *Sopra alcune applicazioni di un nuovo metodo di geometria analitica*, « Giornale di scienze, lettere ed arti », Verona, 1833, t. XIII, pp. 53-61. Ma la memoria fondamentale del BELLAVITIS è: *Sposizione del metodo delle equipollenze*, « Mem. soc. it. delle scienze », serie I, t. XXV, p. 2, 1855; pp. 225-309.

brico. Ciò è stato messo in luce specialmente da G. PEANO, che ha dato (*Calcolo geometrico*, Torino 1888) forma geometrica chiara e semplice al calcolo generale contenuto nell'*Ausdehnungslehre* di GRASSMANN; calcolo geometrico di GRASSMANN — PEANO nel quale è contenuto il calcolo vettoriale moderno sviluppato dalla scuola italiana in quest'ultimo ventennio (C. BURALLI-FORTI, R. MARCOLONGO, T. BOGGIO).

In meccanica, qualche autore, dà alla parola « vettore » altri significati. Così per esempio, nel *Traité de mécanique rationnelle* di P. APPELL (3. ed., 1909) si parla di « vecteurs libres », « vecteurs glissants » e « vecteurs liés »; in cui i vettori « liberi » sono gli ordinari vettori ed invece i vettori « scorrenti » ed i vettori « legati » **non** sono dei vettori. Perciò questi nomi sono poco opportuni, perchè vanno contro ad una regola generale di grammatica o di logica generale, secondo cui il qualificativo apposto ad un nome comune o nome d'una classe deve dare enti appartenenti alla stessa classe. Invece di « vettori scorrenti » si potrebbe quindi usare il nome che ora propongo di « scorritore » — oppure quello di « bipunto » introdotto dal PEANO nel suo *Calcolo geometrico* —; ed invece di « vettore legato » si potrebbe parlare di « forze », perchè il « vettore legato » ci dà la « forza » come la si intende comunemente nel modello meccanico. Da notare poi che questi enti ed altri analoghi (come quello di « coppia di forze » della meccanica) si possono tutti ottenere facilmente come funzioni di punti e vettori (hamiltoniani).

§ 2. — Definizioni nominali del concetto di vettore.

Visto qual'è il significato attribuito alla parola « vettore » da HAMILTON in poi, ci possiamo ora proporre di esaminare qual'è il modo migliore di *definire* questo concetto. « Definire » cioè esprimerlo mediante altri concetti geometrici riguardati come noti.

Sia dunque $A; B$ una coppia (ordinata) di punti. Allora il vettore individuato da codesta coppia, e che abbiamo indicato con la notazione « vect (A, B) », ci appare come una certa funzione delle coppie di punti; e quindi, *a priori*, ci si presentano possibili delle definizioni per *astrazione* o delle definizioni *nominali*. La proposizione:

(I) « vect (A, B) = vect (C, D) equivale a dire che il punto medio fra A e D coincide con il punto medio fra B e C »

è una definizione *nominale* dell'« eguaglianza fra vettori » ed una definizione per *astrazione* del concetto di « vettore ».

Mediante essa noi non diciamo con precisione cosa sia il vettore corrispondente ad una data coppia di punti, ma soltanto quando due vettori sono da ritenersi eguali. L'esempio più cospicuo ed antico di una defini-

zione di tale tipo è la definizione 5^a del libro V di EUCLIDE di « rapporto » (λόγος) di grandezze omogenee.

Ma fu osservato, dal RUSSELL e dal BURALI-FORTI, come una definizione del tipo (1) non sia corretta dal punto di vista rigidamente logico; in questo senso che possono esistere funzioni diversissime fra loro e che pure verificano tutte ad una stessa condizione del tipo (1). Per esempio, siano x ed y dei segmenti rettilinei ed indichiamo con « long x », « ar x », « vol x » rispettivamente la *lunghezza* del segmento x , l'*area* di un quadrato di lato sovrapponibile ad x , il *volume* di un cubo di lato sovrapponibile ad x ; allora queste tre funzioni sono evidentemente diverse, ma pur sono tali che « long x = long y », « ar x = ar y », « vol x = vol y » quando e soltanto quando x è sovrapponibile ad y ⁽¹⁾.

Di qui la necessità, dal punto di vista strettamente logico, di eliminare le definizioni per astrazione; il che è sempre possibile seguendo il metodo di RUSSELL che considera il concetto astratto da definirsi come una *classe* (d'infiniti elementi), od il metodo di BURALI-FORTI che lo considera come un particolare *operatore* (o simbolo di funzione) e perciò come *ente semplice*.

Seguendo l'indirizzo di B. RUSSELL si può allora definire il vettore corrispondente alla coppia (ordinata) di punti $A; B$ — cioè « vect (A, B) » — come la classe formata da tutte le coppie di punti *equipollenti* alla coppia $A; B$ (cioè alla classe formata da tutte le coppie di punti $X; Y$ tali che il punto medio fra A ed Y coincida col punto medio fra B ed X) ⁽²⁾.

Coi simboli del *Formulario mathematico* di G. PEANO (ed. V, 1908):

$a, b \in p. \quad \odot \cdot \text{vect } (a, b) = (x; y) \ni [x, y \in p. \quad (a + y)/2 = (b + x)/2].$ Def.

In tal modo il vect (A, B) ci appare come una *classe* di coppie di punti a cui appartiene, in particolare, la coppia $A; B$.

Il BURALI-FORTI, del vettore corrispondente alla coppia di punti $A; B$, dà invece la seguente definizione ⁽³⁾: « vect (A, B) » è eguale a quell'operatore fra terne di punti e numeri reali relativi tale che applicato alla terna arbitraria ($X; Y; Z$) produce il numero Vol (B, X, Y, Z) — Vol (A, X, Y, Z); ove « Vol (B, X, Y, Z) » ed analoga indica il volume del tetraedro di vertici B, X, Y, Z misurato con una data unità di misura e con un dato segno ⁽⁴⁾.

(1) Cfr. C. BURALI-FORTI, *Logica matematica* (2^a ed., Milano, 1929; p. 300).

(2) Invece di *coppie di punti equipollenti* si può parlare, se si preferisce, di *segmenti orientati equipollenti*.

(3) C. BURALI-FORTI, *Nuove applicazioni degli operatori*, (« Atti R. Acc. delle scienze di Torino », vol. 50, 1915, p. 669). Cfr. pure: C. BURALI-FORTI, *Logica matematica* (2^a ed., Milano Hoepli, 1919, p. 312).

(4) E precisamente con « Vol (B, X, Y, Z) », ed analoghe, il BURALI-FORTI indica quel numero reale relativo tale che: 1° il suo valore assoluto, o modulo, è la misura,

La definizione di C. BURALI-FORTI dà effettivamente il vettore come ente semplice, però essa presuppone il concetto di volume, con un segno, del tetraedro; quindi è possibile solo dopo aver sviluppato ampiamente la geometria elementare. Ma il concetto di vettore può usarsi invece assai opportunamente fin dalle prime proposizioni della geometria (come ha mostrato per es. il PEANO nel suo *Formulario* (ed. V), p. 165 e s.) e, ad ogni modo, può essere interessante il vedere se è possibile di definirlo nominalmente — sempre rimanendo nell'indirizzo di BURALI-FORTI, cioè in modo che esso appaia come ente semplice — ma mediante concetti geometrici meno complessi del volume, con un segno, del tetraedro.

Nella definizione seguente (che io ho data in una mia conferenza dal titolo *Vettori, omografie vettoriali e quaternioni* tenuta il 12 maggio 1927) il concetto che serve a definire il « vettore » è quello di « punto medio » relativo ad una data coppia di punti, e quindi non potrebbe essere più semplice. Ad ogni modo scegliendo l'edificio geometrico di M. PIERI, in cui la geometria elementare è fondata in modo semplicissimo sui soli concetti primitivi di *punto* e di *sfera* ⁽¹⁾ (o, ciò che fa lo stesso, sul concetto di « punto » e sulla relazione di « equidistanza »), posso definire il *punto medio* relativo alla coppia di punti distinti $A; B$ — da indicare per il momento con « med (A, B) » — come quel punto della retta congiungente A con B che è equidistante da A e da B (ove la « retta congiungente A con B » può alla sua volta definirsi secondo G. W. LEIBNIZ ⁽²⁾ come l'insieme di tutti i punti X tali che le sfere di centri A e B e passanti per X hanno questo solo punto in comune). Come *punto medio* corrispondente ad una coppia di punti coincidenti del tipo $A; A$ prenderò poi il punto A stesso; cioè porrò per definizione « med (A, A) = A ».

Ciò posto ecco le definizioni che io propongo:

1^a. « Sia $A; B$ una coppia (ordinata) qualunque di punti; allora con « vct (A, B) » — da leggere « vettore corrispondente alla coppia di punti $A; B$ » — indico quella trasformazione (univoca e reciproca) che ad ogni punto P fa corrispondere quel punto P' tale che il punto medio relativo alla coppia $A; P'$ coincida con il punto medio relativo alla coppia $B; P$ ».

2^a. « Dò poi il nome generico di *vettore* (che abbrevio in v) ad ogni ente x per il quale esiste almeno una coppia di punti $A; B$ tale che $x = \text{vct} (A, B)$ » ⁽³⁾.

ad es., con il centimetro cubo, del volume del tetraedro di vertici B, X, Y, Z ; 2° se i punti B, X, Y, Z non sono complanari, il suo segno è $+$ ovvero $-$ secondochè, disposto l'indice e il medio della mano sinistra da B verso X e da B verso Y , rispettivamente, è possibile, oppure no, disporre il pollice da B verso Z .

(1) M. PIERI, *La geometria elementare istituita sulle nozioni di « punto » e « sfera »*, (« Memoria della Società italiana delle Scienze » (detta dei XL), serie 3^a, t. XV, 1908).

(2) G. W. LEIBNIZ, *Characteristica Geometrica* (« Math. Schrift. », 1679, t. V, p. 141 e sg.).

(3) È pressochè inutile avvertire che in tal modo i « vettori » vengono a coincidere con le « traslazioni » dello spazio in sè, cioè con le omologie spaziali a centro e piano improprio.

In simboli:

1.
$$a, b \in p \cdot \mathcal{O} \cdot \text{vct}(a, b) = b - a =$$
$$= 1g \ni [x \in p \cdot \mathcal{O}_x \cdot g x \in p : \text{med}(a, gx) = \text{med}(b, x)].$$
2.
$$v = x \ni \{ \exists (a, b) \ni [a, b \in p \cdot x = \text{vct}(a, b)] \}.$$

Dalle definizioni qui adottate risulta che « $\text{vct}(A, B) = \text{vct}(C, D)$ » quando e soltanto quando « $\text{med}(A, D) = \text{med}(B, C)$ »; da cui in particolare « $\text{vct}(A, A) = \text{vct}(B, B)$ » qualunque siano i punti A e B . Al vettore (unico) corrispondente ad una coppia di punti coincidenti si può dare il nome di *vettore nullo*.

Siano A, B due punti distinti; allora si può definire la *lunghezza* (o « modulo »), la *direzione* ed il *verso* del $\text{vct}(A, B)$ rispettivamente come la « distanza dei punti A e B » (o « lunghezza del segmento di estremi A e B »), come la « direzione della retta congiungente A con B » e come il « verso del raggio di origine A e passante per B ».

Con ciò i concetti di *lunghezza*, *direzione* e *verso* di un vettore non nullo vengono a dipendere dagli analoghi concetti (di carattere *intrinseco*, cioè indipendente da ogni sistema di coordinate) della geometria ordinaria: *lunghezza* d'un segmento rettilineo, *direzione* di una retta e *verso* di un raggio.

E qui si può osservare che anche tali concetti, che sono fra i più semplici della geometria, si possono prendere come *primitivi*, o definire per *astrazione*, o definire *nominalmente*.

Così si può definire per astrazione la *lunghezza* di un segmento, dicendo che *due segmenti hanno lunghezze eguali* quando sono sovrapponibili; si può definire per astrazione la *direzione* (o « punto improprio ») di una retta, dicendo che *due rette hanno eguale direzione* quando sono parallele o coincidenti; ed infine si può definire per astrazione il *verso* di un raggio, dicendo che *due raggi hanno eguale verso* quando appartengono a rette coincidenti ed un raggio contiene interamente l'altro, oppure appartengono a rette parallele ed i loro punti appartengono ad uno stesso dei due semipiani in cui la retta congiungente le loro origini divide il piano che li contiene.

Vediamo invece come si possono definire nominalmente questi concetti nell'edificio geometrico di PIERI fondato, come ho già detto, sui soli concetti primitivi di « punto » e « sfera ».

Si ha bisogno del concetto di *congruenza* fra coppie di punti (che equivale al concetto di « sovrapponibilità » di segmenti), che PIERI (v. *Mem. c.*, § IV, prop. 31) definisce così: « due coppie di punti $A; B$ e $C; D$ si dicono *congruenti* fra loro quando la sfera per B e di centro A e la sfera per D e di centro C sono *simmetriche* rispetto al punto medio dei loro centri ». Per indicare tale relazione di « *congruenza* » PIERI fa uso del segno \simeq che io pure adotterò.

Ciò posto ecco le definizioni che possiamo dare di « *distanza* di due punti », di « *direzione* di una retta » e di « *verso* di un raggio ».

Siano A, B due punti distinti; allora con « $d(A, B)$ » — da leggere « *distanza* di A da B » — indichiamo ⁽¹⁾ quella trasformazione che ad ogni punto X fa corrispondere l'insieme (*sfera* di centro X) di tutti i punti Y tali che la coppia $X; Y$ sia congrua alla coppia $A; B$, con « $dir(A, B)$ » — da leggere « *direzione* della retta congiungente A con B » — indichiamo quella trasformazione che ad ogni punto X fa corrispondere la retta passante per X e parallela alla congiungente di A con B , e con « $vers(A, B)$ » — da leggere « *verso* del raggio di origine A e passante per B » — indichiamo quella trasformazione che ad ogni punto X fa corrispondere il raggio di origini X parallelo ed equiverso al raggio di origine A passante per B .

Coi simboli del *Formulario* di G. PEANO (ed. V) e col segno di congruenza usato da PIERI si ha:

$$a, b \varepsilon p \cdot a \sim = b \cdot \mathcal{O} :$$

$$3. \quad d(a, b) = \mathfrak{I} g \mathfrak{E} [x \varepsilon p \cdot \mathcal{O}_x \cdot g x = p \wedge y \mathfrak{E} \{ x; y \vee a; b \}].$$

$$4. \quad dir(a, b) = \mathfrak{I} g \mathfrak{E} [x \varepsilon p \cdot \mathcal{O}_x \cdot g x = x + q(b - a)].$$

$$5. \quad vers(a, b) = \mathfrak{I} g \mathfrak{E} [x \varepsilon p \cdot \mathcal{O}_x \cdot g x = x + Q_o(b - a)].$$

Matematica. — *Sulle singolarità isolate dalle funzioni armoniche.* Nota di M. PICONE, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Cfr. C. BURALI-FORTI, *Logica matematica*, op. cit., p. 309.

Geometria. — *Sui sistemi continui di curve piane con tacnodo.*
Nota di B. SEGRE, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. SEVERI.

1. È noto che se una curva piana C (anche non algebrica) variabile in un sistema continuo, possiede un punto doppio variabile P , ogni curva \bar{C} del sistema, infinitamente vicina a C , passa per P . ⁽²⁾ Da qui discende che se le curve C del sistema continuo hanno invece un *tacnodo* P variabile, ogni curva \bar{C} non solo deve passare per P , ma deve quivi avere con C la tangente in comune. Orbene, al n. 2 io faccio vedere di più, che *se una curva C variabile in un sistema continuo, possiede un tacnodo variabile P , tutte le curve \bar{C} , del sistema, infinitamente vicine a C , si osculano in P , ossia contengono un elemento differenziale del 2° ordine di origine P , il quale dipende unicamente dall'intorno di 2° ordine di P su C* ⁽³⁾.

Da qui, al n. 3, traggio alcune conseguenze di Geometria differenziale, indicando un modo, che mi pare istruttivo, d'introdurre il noto invariante proiettivo di contatto di C. SEGRE. E da ultimo dò un complemento del teorema ricordato in principio, facendone applicazione a certe questioni di Geometria algebrica.

2. L'equazione cartesiana della curva C , di cui all'enunciato del numero precedente, può mettersi sotto la forma

$$(1) \quad [\alpha(x - \xi) + (y - \eta)]^2 - 2[\alpha(x - \xi) + (y - \eta)] \cdot \varphi + \dots = 0,$$

ove si son poste in rilievo le coordinate (ξ, η) del *tacnodo* P , e l'equazione $\alpha(x - \xi) + (y - \eta) = 0$ della relativa tangente, φ indicando una forma quadratica nelle $x - \xi, y - \eta$, ed i puntini stando per termini infinitesimi con $x - \xi$ ed $y - \eta$ d'ordine superiore al terzo.

Senza scapito di generalità, possiamo supporre che la curva (1) vari in un sistema continuo solo semplicemente infinito, e che quindi ξ, η e

(1) Nella seduta del 1° giugno 1929.

(2) Cfr. F. SEVERI, *Trattato di Geometria algebrica*, vol. I, parte 1 (Bologna, Zanichelli, 1926), p. 38. - Detta proprietà era già stata osservata da CAYLEY per i sistemi di curve algebriche: ved. p. es. G. SALMON, *Traité de Géométrie analytique - Courbes planes* (Paris, Gauthier-Villars, 1903), p. 107.

(3) Qualora le curve del sistema continuo sieno *algebriche*, si può, in luogo delle curve C , parlare del *sistema lineare tangente in C al dato sistema* (per tale locuzione vedasi una mia Nota in questi « Rendiconti », vol. XXXIII (5) 1924, p. 182), e dire che questo sistema lineare ha per punti base P , il consecutivo di P sulla tangente in questo punto a C , ed un punto ulteriore a questo infinitamente vicino (non sito, in generale, su C), il quale è perfettamente individuato dalla curva C .

gli altri coefficienti α, \dots che figurano nella (1), risultino funzioni di un parametro, p. es. della ξ ; funzioni definite in un intorno di $\xi = 0$, con derivata finita, e tali che

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \eta = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \alpha = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \varphi = ax^2 + bxy + cy^2.$$

Detto $F(x, y; \xi)$ il primo membro della (1), si ottiene

$$(2) \quad F(x, y; 0) = y^2 - 2y \cdot (ax^2 + bxy + cy^2) + \dots = 0$$

com'equazione di una particolare curva C del nostro sistema (avente il *tacnodo* P nell'origine, e l'asse delle x come tangente relativa).

Poichè risulta

$$F(x, y; \xi) = F(x, y; 0) + \xi [F'_\xi(x, y; 0) + \varepsilon],$$

con ε infinitesimo per $\xi \rightarrow 0$, il nostro assunto resta stabilito, qualora si dimostri che la curva $F'_\xi(x, y; 0) = 0$ contiene un elemento del 2° ordine uscente dall'origine ed ivi tangente all'asse delle x , che è completamente determinato dalla (2)⁽¹⁾. Ora è

$$(3) \quad F'_\xi(x, y; 0) = 2[y - (ax^2 + bxy + cy^2)](\alpha'_0 x - \eta'_0) + y \cdot \lambda + \dots,$$

ove α'_0 ed η'_0 son le derivate per $\xi = 0$ di α ed η , λ rappresenta una forma lineare nelle x, y , ed i puntini stanno per termini infinitesimi con x ed y d'ordine superiore al secondo. Dalla (3) segue che la curva $F'_\xi(x, y; 0) = 0$ ha effettivamente nell'origine il comportamento voluto, essendo ivi osculata per $a \neq 0$ dalla parabola $y = ax^2$, e per $a = 0$ dalla retta $y = 0$ ⁽²⁾.

3. Il precedente teorema mostra che, dati nel piano due elementi differenziali del 2° ordine fra loro tangenti

$$(4) \quad y = 2h x^2 + \dots, \quad y = 2k x^2 + \dots$$

(1) Nelle ipotesi di cui alla nota precedente, ciò risulta senza considerazioni infinitesimali, osservando che il fascio di curve tangente in C al dato sistema continuo $\propto 1$, è quello individuato dalle curve $F(x, y; 0) = 0$ ed $F'_\xi(x, y; 0) = 0$.

(2) In quest'ultimo caso la curva (2) ha nell'origine un così detto *tacnodo simmetrico*, il quale, per quanto sopra, può venir caratterizzato dalla seguente proprietà: *le curve con tacnodo infinitamente vicine alla (2), hanno tutte un flesso in quel punto.* — Per le curve algebriche, la suddetta singolarità è stata introdotta da tutt'altro punto di vista (e così denominata) da E. WÖLFING, nella Nota *Ueber die Hesse'sche Covariante einer ganzen rationalen Function von ternären Formen*, «Math. Ann.» vol. 36 (1890), p. 119.

Va inoltre osservato, che se la suddetta parabola osculatrice ha in P colla curva C incontro più che 4-punto, P risulta per tal curva una *cuspidi* di 2ª specie; e reciprocamente.

(costituenti nel loro complesso un *tacnodo*: $y^2 - 2y \cdot (h + k)x^2 + \dots = 0$), ne resta individuato un terzo ad essi tangente

$$(5) \quad y = (h + k)x^2 + \dots,$$

la cui definizione non muta scambiando i primi due, ed è *invariante di fronte alle trasformazioni puntuali del piano*⁽¹⁾; basta infatti osservare che ogni trasformazione puntuale (regolare) muta curve infinitamente vicine in curve infinitamente vicine, e curve con *tacnodo* in curve con *tacnodo*.

I tre elementi di 2° ordine (4) e (5), insieme a quello disposto lungo la comune tangente $y = 0$, determinano un *birapporto*

$$(2h, 2k, h + k, 0) = -\frac{k}{h},$$

il quale ⁽²⁾ è invariante di fronte alle trasformazioni puntuali che mutano i quattro elementi del 2° ordine considerati, in quattro elementi analoghi. Dunque:

Due elementi differenziali del 2° ordine fra loro tangenti, ammettono un invariante simultaneo, di fronte ad ogni trasformazione puntuale che muti l'elemento del 2° ordine colla stessa origine disposto lungo la comune tangente, in un elemento del 2° ordine che ancora appartenga ad una retta; in particolare, quindi, di fronte alle trasformazioni proiettive.

Da quest'ultimo punto di vista, ossia come invariante *proiettivo* di contatto, il numero suddetto (cambiato di segno) già era stato considerato per tutt'altra via da C. SEGRE.⁽³⁾ Data l'importanza ch'esso ha in molteplici questioni di Geometria differenziale, ritengo opportuno d'indicare un altro

(1) E. BOMPIANI, nella Nota *Sulle trasformazioni puntuali e di contatto nel piano* (questi « Rendiconti », vol. IV (6) 1926, p. 435), ha introdotto un invariante relativo a tre elementi del 2° ordine colla tangente in comune; per gli elementi (4), (5) tale invariante — com'era facilmente prevedibile — risulta uguale a -1 , e permette una nuova definizione dell'elemento (5).

(2) Cfr. E. BOMPIANI, Nota cit. precedente. — Si può dare un'interpretazione geometrica diretta di quel birapporto, ricorrendo ad una trasformazione quadratica avente un punto fondamentale nell'origine.

(3) Ved. C. SEGRE, *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche, e sulla linea parabolica di una superficie*, questi « Rendiconti », vol. VI (5) 1897, p. 168. Quivi tale invariante vien definito come *limite di un certo birapporto*, onde ne consegue immediatamente il carattere *proiettivo*; poscia vien riconosciuto ch'esso risulta uguale al *rapporto delle curvature dei due elementi nel punto di contatto*. Il fatto che questo rapporto è un invariante proiettivo, già era stato osservato direttamente da R. MEHNKE (1891), e prima ancora, sotto forma implicita, da L. GEISENHEIMER (1880).

Mi pare tuttavia che ciò non giustifichi la proposta fatta di recente da E. ČECH (questi « Rendiconti », vol. VIII (6) 1928, p. 484), di designare quell'invariante coi nomi di GEISENHEIMER-MEHNKE, poichè è solo attraverso alla definizione di C. SEGRE che ne è stato posto in chiara luce il significato proiettivo.

modo d'introdurlo (*senza alcuna considerazione di limite*), seguendo un processo forse meno perspicuo di quello suesposto, ma del tutto elementare.

Dati due elementi differenziali del 2° ordine complanari e fra loro tangenti, si scelga nel loro piano un generico elemento del 1° ordine, e si considerino le coniche che lo congiungono ai primi due. Le due coniche bitangenti così ottenute, ammettono notoriamente un invariante proiettivo (dato p. es. dal birapporto che le due coniche formano, nel loro fascio, colle due coniche degeneri che a questo appartengono): ebbene, si dimostra agevolmente che tale invariante non dipende dall'elemento del 1° ordine fissato, e che coincide proprio col suddetto invariante di C. SEGRE ⁽¹⁾.

4. Le curve algebriche C di dato ordine n con *tacnodo*, di uno stesso piano π , costituiscono un sistema continuo Σ irriducibile (di dimensione $\frac{1}{2}n(n+3)-3$) e *completò*, nel senso che non è contenuto in un sistema più ampio di curve d'ordine n aventi la stessa singolarità. In una C generica, Σ ammette un sistema lineare tangente ⁽²⁾, il quale è regolare, completo ed ha un punto base fuori di C , e dunque sega C secondo una serie lineare non completa. Pertanto *un qualunque sistema continuo di curve piane algebriche con tacnodo, ha una serie caratteristica incompleta*.

Esistono pure sistemi continui completi, a serie caratteristica incompleta, pei quali anche il generico sistema lineare tangente risulta incompleto ⁽³⁾. Per dimostrarlo, incominciamo col ricordare ⁽⁴⁾ che se una curva C variabile in un sistema continuo possiede un punto k — *plo* variabile P ($k \geq 2$), ogni curva \bar{C} del sistema, infinitamente vicina a C , passa per P $k-1$ volte (almeno); ed aggiungiamo che se \bar{P} è il punto k — *plo* di \bar{C} , infinitamente vicino a P , le $k-1$ tangenti in P a \bar{C} costituiscono il gruppo primo polare della retta $P\bar{P}$ rispetto al gruppo delle k tangenti in P a C .

Possiamo ovviamente limitarci al caso in cui il sistema continuo è semplicemente infinito, e rappresentabile in coordinate cartesiane coll'equazione

$$f(x, y; t) = 0,$$

il cui primo membro possieda derivate finite e continue, fatte rispetto alla t una volta e rispetto alle x, y k volte. Le coordinate (x, y) del punto

(1) Da qui risulta che due coniche bitangenti hanno nei relativi due punti di contatto un medesimo invariante di C. SEGRE, ossia (ved. nota precedente), che i rapporti delle rispettive curvatures in detti punti, sono uguali fra loro.

(2) Ved. nota (3) alla pagina 970.

(3) Quel sistema lineare incompleto, può anche esser *sovrabbondante*. Esempi in cui si verifica questa particolarità, verranno indicati in un prossimo lavoro dedicato ai sistemi continui di curve piane algebriche, in cui troveranno applicazione le considerazioni di questo numero.

(4) Cfr. F. SEVERI, Op. cit., p. 40.

$k - plo$ variabile P , risulteranno funzioni $\alpha(t), \beta(t)$ del parametro t , di cui supporremo esistano e siano finite le derivate prime α', β' .

L'ipotesi che P sia $k - plo$ per C , si traduce colle identità:

$$(6) \quad \left[\frac{\partial^h f}{\partial x^r \partial y^s} \right]_{\substack{x=\alpha(t) \\ y=\beta(t)}} = 0 \quad (r+s=h, \quad h=0, 1, 2, \dots, k-1).$$

Posto $\varphi(x, y, t) = f'_t(x, y, t)$, dalle (6), derivando rispetto al parametro t , si deduce

$$\left[\frac{\partial^h \varphi}{\partial x^r \partial y^s} \right]_{\substack{x=\alpha(t) \\ y=\beta(t)}} = - \left[\alpha' \frac{\partial^{h+1} f}{\partial x^{r+1} \partial y^s} + \beta' \frac{\partial^{h+1} f}{\partial x^r \partial y^{s+1}} \right]_{\substack{x=\alpha(t) \\ y=\beta(t)}}.$$

Ora queste equazioni (per $h=0, 1, 2, \dots, k-2$) esprimono, avuto riguardo alle (6), che la curva $\varphi=0$ passa $k-1$ volte per P ; ed inoltre (per $h=k-1$), che le $k-1$ rette che la toccano in P formano il gruppo primo polare della retta $P\bar{P}$ (di coefficienti angolari α', β'), rispetto al gruppo delle k tangenti in P a C . E ciò dimostra l'asserto, poichè (n. 2) la curva \bar{C} appartiene al fascio determinato dalle $f=0, \varphi=0$.

Se consideriamo il sistema continuo irriducibile (di dimensione $d = \frac{1}{2}n(n+3) - \frac{1}{2}k(k+1) + 2$), costituito da tutte le curve piane algebriche C , di dato ordine n , con punto $k - plo$, il sistema lineare (∞^d e regolare) ad esso tangente in una C generica, ammette il relativo punto $k - plo$ come punto base $(k-1) - plo$; esso per $k > 2$ non è completo, poichè le $k-1$ tangenti in detto punto base alle varie sue curve, descrivono (giusta la precedente proposizione) solo una g_{k-1}^1 , onde tal sistema, e quindi pure la serie caratteristica da esso segnata su C , ha la deficienza $k-2$ ⁽¹⁾.

(1) Di questo fatto, che si sarebbe potuto prevedere direttamente, resta così provata l'intima ragione.

Geometria. — *Sur une propriété caractéristique des surfaces F de M. Fubini.* Nota di E. ČECH, presentata ⁽¹⁾ dal Corrispondente G. FUBINI.

1. Dans ses recherches sur la géométrie projective différentielle des surfaces, M. Fubini s'est posé le problème de trouver toutes les congruences de droites telles que les courbes de Darboux se correspondent sur les deux nappes focales. Il a trouvé que les surfaces susceptibles d'être une nappe focale d'une telle congruence forment une famille dépendant de cinq fonctions arbitraires d'un argument. M. Fubini donne à ses surfaces le nom *isothermo-asymptotiques*; je propose de les appeler *surfaces de M. Fubini* ou surfaces F tout court. M. Fubini démontre que chaque surface F est une nappe focale de ∞^6 congruences jouissant de la propriété expliquée plus haut, d'où il vient une théorie de transformation W des surfaces F analogue à la transformation classique des surfaces à courbure totale constante ⁽²⁾.

On connaît plusieurs propriétés caractéristiques des surfaces F: 1^{re} chaque congruence canonique est conjuguée à la surface (Fubini) ⁽³⁾; 2^{me} la surface peut être représentée sur un plan de manière qu'aux courbes de Darboux il correspond trois faisceaux de droites (Thomsen) ⁽⁴⁾; la surface admet ∞^3 transformations en elle même conservant les lignes des Darboux (Cartan) ⁽⁵⁾. Une autre propriété caractéristique des surfaces F forme l'objet de cette Note.

2. Soit S une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v et soit $(\beta du^2 + \gamma dv^2) : 2 du dv$ l'élément linéaire projectif de S. Posons

$$\beta : \gamma = e^{3\varphi},$$

ainsi que les surfaces F sont caractérisées par l'équation $\varphi_{uv} = 0$, les indices indiquant des dérivées partielles. Les courbes

$$e^{-\varphi} \frac{dv}{du} = \text{const.}$$

forment un faisceau ⁽⁶⁾ contenant les lignes de Darboux et celles de Segre; je l'appellerai le *faisceau DS* ⁽⁷⁾.

(1) Nella seduta del 1^o giugno 1929.

(2) Pour plus de détail, v. G. FUBINI et E. ČECH, *Geometria proiettiva differenziale*, § 51.

(3) Op. cit., § 27.

(4) « Bollettino dell'Unione Mat. Italiana », 2. VI, 1927, pp. 80-85.

(5) « Annales de l'Ecole Normale », (3), 37, 1920, p. 320-321.

(6) Voir FUBINI-ČECH, op. cit., §§ 23 D et 84.

(7) Ces courbes ont été étudiées par M. Bompiani sous le nom de *courbes anharmoniques*; v. FUBINI-ČECH, Appendice II, p. 689.

Ces courbes peuvent évidemment être définies par l'équation différentielle du second ordre

$$(1) \quad \frac{d^2 v}{du^2} = \varphi_u \frac{dv}{du} + \varphi_v \left(\frac{dv}{du} \right)^2.$$

Or considérons trois familles $\infty^1 F_i$ ($i = 1, 2, 3$) de courbes du faisceau DS, définies par

$$\frac{dv}{du} = e^{\varphi} \tau_i.$$

L'équation (1) donne

$$(2) \quad \tau_{iu} + e^{\varphi} \tau_i \tau_{iv} = 0. \quad (i = 0, 1, 2)$$

A chaque point x de la surface S , les plans osculateurs aux courbes des familles F_i passant par x sont (dans la notation habituelle)⁽¹⁾

$$(\beta - \gamma \tau_i^2) \xi + \tau_i [2 \xi_u + (\varphi_u + \theta_u) \xi] - \tau_i^2 [2 \xi_v - (\varphi_v - \theta_v) \xi].$$

Condition pour que ces trois plans passent par une droite est que le déterminant

$$|\beta - \gamma \tau_i^2, \tau_i, \tau_i^2| = \gamma |\varphi^2 - \tau_i^2, \tau_i, \tau_i^2|$$

soit égal à zéro. En évaluant ce déterminant, on obtient la condition simple

$$(3) \quad \tau_1 \tau_2 \tau_3 = e^{3\varphi}.$$

Disons que les familles F_i forment un système T si la condition (3) est vérifiée. *Un système T est donc composé de trois familles ∞^1 de courbes appartenant au faisceau DS et jouissant de la propriété que, à chaque point de S , les trois plans osculateurs passent par une droite.*

3. La recherche des systèmes T revient à l'intégration des équations (2) et (3).

Or ces équations admettent les solutions évidentes

$$\tau_i = c_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

les constantes c_i étant liées par la condition $c_1 c_2 c_3 = 1$ ⁽²⁾. Il en résulte que

(1) Voir FUBINI-ČECH, § 22 (1).

(2) Le choix $c_1 = 1, c_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}}, c_3 = e^{\frac{4\pi i}{3}}$ montre que les trois familles de lignes de Segre forment un système T; j'ai trouvé ce résultat déjà en 1921. Le choix $c_1 = 1, c_2 = -e^{\frac{2\pi i}{3}}, c_3 = -e^{\frac{4\pi i}{3}}$ montre que deux familles de ligne de Darboux et la troisième famille de lignes de Segre forment aussi un système T; ce système T a été trouvé par M. Bompiani en 1924. Voir E. ČECH, *Systèmes trilinéaires des lignes sur une surface et de-*

chaque surface (non réglée) possède ∞^2 systèmes T. Or les surfaces F sont caractérisées par la propriété de posséder ∞^3 systèmes T.

4. Pour démontrer le résultat énoncé, posons

$$(4) \quad \lambda = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \quad \mu = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3}.$$

Cela étant, ajoutons les trois équations (2) après les avoir multiplié par $\frac{1}{\tau_i}$, ou par $\frac{1}{\tau_i^2}$, ou enfin par 1. En tenant compte de (3) et (4), on obtient

$$(5) \quad \lambda_v = 0, \quad \mu_u = 0, \quad \lambda_u = e^{\frac{\varphi}{2}} \cdot v, \quad \mu_v = e^{-\frac{\varphi}{2}} \cdot v,$$

v étant une inconnue auxiliaire. Les systèmes T s'obtiennent en intégrant (5) et en calculant τ_1, τ_2, τ_3 des équations (3) et (4). Or les conditions d'intégrabilité des équations (5) sont

$$(6) \quad v_u = -\frac{1}{2} \varphi_v v, \quad v_v = \frac{1}{2} \varphi_u v$$

et condition d'intégrabilité de (6) est

$$(7) \quad v \varphi_{uv} = 0.$$

Si $\varphi_{uv} \neq 0$, alors $v = 0$, est les équations (5) montrent que λ et μ , et par suite aussi τ_1, τ_2, τ_3 , sont des constantes et nous voyons qu'il n'existe sur S que les systèmes T déjà mentionnés. Soit donc $\varphi_{uv} = 0$, ainsi que S est une surface F. On peut alors choisir les paramètres asymptotiques u, v de façon que $\beta \equiv \gamma$ ou bien $\varphi = 0$, ainsi que les équations (6) donnent $v = \text{const.}$, et les équations (5) donnent

$$\lambda = vu + v_1, \quad \mu = v\bar{v} + v_2,$$

v_1, v_2 étant aussi des constantes arbitraires.

Enfin, les équations (3) et (4) montrent que une surface F possède ∞^3 systèmes T définis par

$$(8) \quad \left(\frac{dv}{du}\right)^3 - (vu + v_1) \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (v\bar{v} + v_2) \frac{dv}{du} - \bar{1} = 0,$$

v, v_1, v_2 étant des constantes arbitraires; rappelons qu'on suppose choisi les paramètres asymptotiques u, v de manière que $\beta = \gamma$.

Geometria. — *Nuovi enti proiettivi nella stella che ha per centro un punto di una superficie.* Nota di G. SANNIA, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Ali ed eliche.* Nota di L. S. DA RIOS, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

I. — L'ELICA COME UN INSIEME DI ELEMENTI ALARI.

Ho già mostrato come il funzionamento delle cellule alari e delle semplici ali possa riferirsi alle azioni dinamiche esercitate da una corrente fluida contro una speciale tubazione⁽²⁾. Informandomi agli stessi criteri, e con opportune semplificazioni, mi propongo in questo studio di riportare il funzionamento delle eliche a quello delle ali.

Dividendo una comune elica aerea a due pale in parti mediante superfici cilindriche coassiali, essa può apparire costituita di tanti elementi alari di apertura infinitamente piccola. Questo punto di vista è sempre apparso il più naturale ed intuitivo per spiegare in qualche modo la spinta prodotta dall'elica. Ma lo studio approfondito della questione, su questa via, dette luogo a sviluppi assai complicati; e tuttavia ben lungi dal ritrarre in modo sicuro i caratteri salienti del fenomeno.

Di contro io credo che l'indagine si presenti relativamente facile, restando fedeli alla concezione *tubolare* delle ali; e sostituendo, in conformità, allo studio dell'elica nel suo moto d'avanzamento quello dell'elica immobile in seno ad una corrente a filetti elicoidali. Vengono così confermate formule d'uso comune; e s'insinua ad un tempo una veduta teorica, che potrebbe essere fonte di opportune innovazioni.

2. — L'ELICA FISSA IN SENO AD UNA CORRENTE ELICOIDALE.

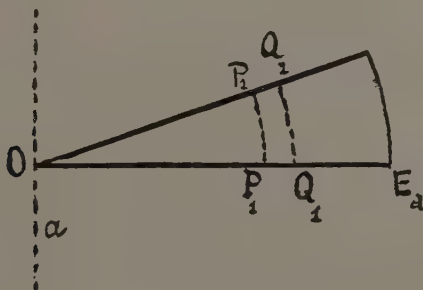
Chiameremo *diretto* un moto traslatorio $v^{(1)}$ d'un corpo rigido animato di velocità uniforme v in seno ad un fluido in quiete; e diremo *invertito* il moto di traslazione $v^{(1)}$ del fluido con velocità — v contro il corpo fisso. Analogamente si potrà parlare di moti rotatori diretto e invertito $\omega^{(d)}$ ed $\omega^{(i)}$ ed ancora di moti elicoidali $e^{(d)}$ ed $e^{(i)}$ diretto e invertito composti d'una traslazione $\pm v$ e d'una rotazione $\pm \omega$, costanti.

(1) Nella seduta del 1° giugno 1929.

(2) Cfr.: *Tubazioni ricurve ed ali*, «R. Accademia Nazionale dei Lincei», seduta del 7. aprile 1929 (VII).

Si sa che il moto traslatorio $v^{(2)}$ equivale dinamicamente a quello diretto $v^{(4)}$. Risulta ancora, dalla teoria dei moti relativi⁽¹⁾, che l'inversione del moto rotatorio fra solido e fluido importa che nel modo invertito si aggiunga fra le forze attive la conseguente reazione centrifuga. A prescindere perciò da quest'ultima esigenza, anche i due moti rotatori diretto e invertito sono a ritenersi equivalenti. E tali pure saranno i moti elicoidali $e^{(2)}$ ed $e^{(1)}$, salva la restrizione indicata per i moti rotatori.

Una comune elica aerea a due pale, che avanzi secondo il proprio asse, è animata d'un moto elicoidale $e^{(4)}$ diretto. Il corrispondente moto invertito $e^{(1)}$ è quello d'una corrente fluida che investe l'elica tenuta fissa. In questo caso le traiettorie delle particelle sono eliche cilindriche coassiali, dello stesso passo p e d'inclinazione β decrescente colla loro distanza l dall'asse a del movimento.



Una pala di elica aerea suole idealmente essere riguardata come una porzione della superficie materiale generata da un moto elicoidale di un segmento OE, normale all'asse di rotazione e che si appoggi su di esso con l'estremo O. Dobbiamo supporre che il passo p_e d'un tal moto sia maggiore del passo p suddetto. Ricordiamo ancora che la differenza $p_e - p$ è la misura di quello che dicesi il *rinculo* s dell'elica nel suo moto effettivo $e^{(4)}$. Sia OE_d (vedasi figura) il bordo d'attacco d'una tal pala; r la sua lunghezza; l la distanza d'un punto generico P_1 di OE_d da O; β_e l'inclinazione della pala nel punto P_1 , ossia dell'elica cilindrica passante per P_1 e che insiste sull'elicoide rigato corrispondente alla pala. I filetti fluidi, alla distanza l , risulteranno così inclinati sulla superficie di pala d'un angolo $\gamma = \beta_e - \beta$; risultando

$$(1) \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{ls}{l^2 + p_e p}.$$

(1) Cfr., per es., T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale*, vol. I, pp. 198-200.

Due cilindri coassiali all'elica aerea, di raggi l ed $l + dl$, staccheranno dalla superficie di pala suddetta un tratto $P_1 Q_1 P_2 Q_2$ rappresentato in pianta nella figura. Questo è assimilabile ad un elemento alare d'incidenza γ sulle traiettorie delle particelle fluide comprese fra i due cilindri suddetti. In realtà da una pala di comune elica aerea verrà staccato invece un solido assimilabile ad un elemento di ala spessa di apertura dl , con bordi d'attacco e d'uscita uguali rispettivamente a $P_1 Q_1$ e $P_2 Q_2$ e avente un profilo che coincide colla sezione della pala effettiva con uno di quei cilindri, una tal sezione supponendosi sviluppata in un piano. Diremo ancora γ l'angolo d'incidenza d'un tale elemento reale d'elica.

L'azione esercitata dalla corrente elicoidale sull'intera elica immersa si avrà dal complesso delle azioni esercitate sui predetti elementi delle sue pale.

3. - L'AZIONE DELLA CORRENTE ELICOIDALE SOPRA UN ELEMENTO DI PALA D'ELICA.

La presenza d'un'ala, in seno ad una corrente uniforme che l'invade, deforma i filetti e li sposta inoltre dal piano perpendicolare al bordo di attacco. Similmente i filetti della corrente elicoidale verranno modificati nel loro andamento e spostati dalla superficie cilindrica, cui inizialmente appartengono. Come per le ali, così per le pale d'un'elica, sarà opportuno prescindere da siffatto sbandamento laterale; il quale poi (secondo quello che già dicemmo per le ali) non intacca i risultati dell'indagine nella loro essenza qualitativa. Resta così da rilevare che l'alterazione d'un generico filetto (che si suppone quindi insistere sempre sulla stessa superficie cilindrica di raggio l) in un suo punto P è tanto più accentuata quanto maggiore ne è la distanza dalla generatrice cilindrica passante per il punto sopra designato con P_1 , la distanza essendo considerata lungo il filetto stesso; e quanto maggiore è lo spostamento di P da P_1 contato lungo la generatrice stessa. Supporremo che, per un'elica a due pale, l'alterazione sia trascurabile per i filetti spostati da P_1 del semipasso $\frac{p}{2}$. Si può allora immaginare l'intera corrente elicoidale C divisa in due vene C_d e C_s di destra e sinistra, ciascuna delle quali sia influenzata soltanto dalla corrispondente pala p_d o p_s dell'elica; i filetti delle due vene avranno precisamente per traiettorie iniziali le linee descritte dai punti di due rettangoli che si muovono dello stesso moto elicoidale dei bordi d'attacco OE_d ed OE_s delle pale, i loro piani passando per l'asse a di rotazione, le loro altezze essendo $\frac{p}{2}$, e le loro mediane normali all'asse a coincidendo coi bordi suddetti.

Nella Nota sopra riferita si è mostrato come un'ala spessa (coi lembi di ventre e dorso ben distinti) equivalga ad un'ala sottile, il cui profilo corra intermedio fra le linee di ventre e dorso; e si è poi dedotto che

l'effetto reattivo d'una corrente su di un'ala sottile può assimilarsi a quello esercitato contro una speciale tubazione. Per questa, l'effetto reattivo è rappresentato da due forze \mathbf{R}_1 ed \mathbf{R}_2 , essendo $\mathbf{R}_1 = Q\mathbf{V}_1$ ed $\mathbf{R}_2 = -Q\mathbf{V}_2$, con Q portata attraverso la tubazione e \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 velocità medie d'imbocco e sbocco. Per un'ala sottile, la sezione costante della tubazione equivalente è da ritenersi un rettangolo, di cui una dimensione è la sua apertura e l'altra un segmento b proporzionale alla profondità dell'ala, e quindi alla sua lunghezza; per l'elemento alare equivalente all'elemento d'elica sopra considerato, si potrà quindi ritenere $b = kr$, essendo k un opportuno coefficiente. Indicando quindi con δ la densità dell'aria e con V_e la velocità scalare delle particelle fluide nel punto d'incidenza P_1 , la portata Q relativa all'elemento generico di pala sarà $\delta kr V_e dl$.

Da tutto ciò si raccoglie che l'azione dinamica esercitata sopra un elemento effettivo di pala è la risultante $d\mathbf{R}$ di due forze $d\mathbf{R}_1$ e $d\mathbf{R}_2$, essendo

$$(2) \quad d\mathbf{R}_1 = k\delta r V_e \mathbf{V}_1 dl; \quad d\mathbf{R}_2 = -k\delta r V_e \mathbf{V}_2 dl; \quad d\mathbf{R} = k\delta r V_e (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) dl;$$

\mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 designando le velocità nei punti P_1 e P_2 dei bordi d'attacco e di uscita.

4. — LA SPINTA ASSIALE DELL'ELICA NEL SUO MOTO D'AVANZAMENTO.

Supponendosi costante la sezione $kr dl$, si dovrà avere scalarmente $V_e = V_1 = V_2$: e quindi

$$\text{mod}(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) = 2 V_e \cos \frac{\varphi}{2},$$

essendo φ l'angolo formato dalle direzioni della velocità \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 .

Essendo poi

$$V_e^2 = v^2 + \omega^2 l^2,$$

dalla terza delle (2) si deduce

$$(3) \quad dR = 2 \delta kr \cos \frac{\varphi}{2} (v^2 + \omega^2 l^2) dl.$$

Se indichiamo ora con dR_a la componente di $d\mathbf{R}$ secondo l'asse di rotazione, e con ϑ l'angolo che la direzione di $d\mathbf{R}$ forma con l'asse a , dalla (3) si ricava

$$(4) \quad dR_a = 2 \delta kr v^2 \cos \frac{\varphi}{2} \cos \vartheta \cdot dl + 2 \delta kr \omega^2 \cos \frac{\varphi}{2} \cos \vartheta \cdot l^2 dl.$$

Notiamo che l'elemento di elica varia con l di sezione e nella sua inclinazione rispetto ad a ; di concerto varieranno gli angoli φ e ϑ . Designando

con α' e con α valori medi dell'espressione $2\delta k \cos \frac{\varphi}{2} \cos \vartheta$, dalla (4), integrando rispetto a tutto il bordo d'attacco OE_d di lunghezza r , si ottiene

$$(5) \quad R_a = \alpha' v^2 r^2 + \alpha n^2 r^4;$$

avendo indicato con n la frequenza di ω .

La formola (5) dà quindi l'espressione della spinta assiale prodotta da una pala di elica che si muova di moto elicoidale diretto $e^{(d)}$. Duplicandone il valore si avrà la spinta totale dell'elica a due pale.

Come si è detto esplicitamente, non si è tenuto conto di eventuali salti di pressione sulle due facce delle pale dell'elica. In fatto, come per l'ala, sulla superficie dorsale si ha una forte depressione rispetto alla superficie ventrale sottostante. Ne risulta una tal quale aspirazione in senso assiale; quindi un incremento al valore di R_a dato dalla (5).

5. - LA SPINTA DELL'ELICA RUOTANTE A PUNTO FISSO.

Facendo $v = 0$, ossia considerando l'elica a punto fisso, la (5) diventa

$$(6) \quad R_a = \alpha n^2 r^4;$$

e si ha così la notissima formola del Col. Renard.

La deduzione della (6) dalla (5) non è però al sicuro di ogni obbiezione. Infatti, riducendosi la corrente da elicoidale a rotatoria, alcune semplificazioni già introdotte possono apparire inaccettabili.

Per le correnti uniformi e per quelle elicoidali è lecito (nel nostro senso) prescindere dallo sbandamento laterale; in quanto le particelle dei filetti fluidi, una volta uscite, non ricadono più sotto la perturbazione locale che l'ala o l'elica producono. Non così per le traiettorie circolari; a meno che non si ammetta che, in corrispondenza del diametro perpendicolare a quello di attacco delle pale, le singole traiettorie chiuse si riducano allo stato primitivo. Tenendo conto nel moto invertito $\omega^{(i)}$ della forza centrifuga e del richiamo verso le estremità, le traiettorie inizialmente circolari tendono a diventare spiraliformi; ed inoltre, per l'azione delle pale, esse tendono a spostarsi dal piano, in cui si trovano, in senso opposto a quello secondo il quale l'elica avanzerebbe. Si può allora ritenere che i filetti fluidi, dopo di aver investito una pala, per il loro spostamento laterale e assiale non vengano più a cadere sotto l'altra. Così avvenendo, le (5) e (6) hanno ragione di coesistere.

Comunque, si riconosce che il moto invertito rotatorio $\omega^{(i)}$ dà luogo a maggior complicazione del moto elicoidale invertito $e^{(i)}$. Si sa del resto che lo spettro del moto d'un'elica rotante in seno ad una corrente uniforme, e corrispondente quindi al moto elicoidale diretto $e^{(d)}$, appare molto più semplice di quello $\omega^{(i)}$ dell'elica rotante nell'aria tranquilla.

6. - ESPRESSIONE DELLA COPPIA RESISTENTE.

Sia π il piano passante per l'asse a e per il punto di applicazione C della forza $d\mathbf{R}$ sopra considerata; e siano dR_n e dR_r le componenti di $d\mathbf{R}$ secondo la normale a π nel punto C e secondo il raggio che da C va perpendicolarmente all'asse. Per manifesta ragione di simmetria rispetto al centro O dell'elica aerea, torna nulla la somma delle componenti dR_r relative agli elementi delle due pale p_d e p_s . Le due componenti dR_n relative a due tratti simmetrici delle pale formano invece una coppia, che si oppone al moto rotatorio dell'elica. Sostituendo nella (4) all'angolo ϑ l'angolo formato dalla $d\mathbf{R}$ con detta normale, si dedurranno formole analoghe alle (5) e (6). Designando quindi con β' e β opportuni coefficienti, si può scrivere

$$(5') \quad R_n = \beta' v^2 r^2 + \beta n^2 r^4;$$

$$(6') \quad R_n = \beta n^2 r^4;$$

a seconda che ci si riferisce al moto $e^{(i)}$ o a quello $\omega^{(i)}$.

Le (5') e (6') daranno quindi anche la resistenza di una pala nei moti diretti $e^{(d)}$ e $\omega^{(d)}$; e da esse si potrà dedurre il valore della coppia resistente dell'elica che si muova in fluido tranquillo.

7. - LA SOSTENTAZIONE DELLE ALI E LA SPINTA DELL'ELICA.

Per le ali in volo orizzontale interessa conoscere il rapporto $\frac{R_y}{R_x}$ fra la componente verticale R_y e quella orizzontale R_x della reazione \mathbf{R} opposta dall'aria; ossia fra il peso P sostenuto che contrasta ad R_y e la forza F di trazione opposta ad R_x . Poichè nell'urto fra fluido e corpo si hanno necessariamente dissipazioni energetiche, bisogna avvertire che la F che si misura alla bilancia nella galleria del vento ritrae l'effetto d'urto sia in quanto produce attrito e dissipazione d'energia, sia in quanto altera l'uniformità della corrente investitrice. Il rapporto $\frac{R_y}{R_x}$ o $\frac{P}{F}$, che dicesi rendimento aerodinamico delle ali, può ritenersi compreso fra 10 e 20.

Quello che si dice per le ali in regime normale di volo si può ripetere (secondo il nostro punto di vista) per l'elica in modo elicoidale; sostituendo alla reazione verticale R_y la componente R_n della formola (5) o la spinta assiale S ; e alla R_x la componente R_n data dalla (5') o la resistenza alla rotazione T . Al rapporto $\frac{R_n}{R_n}$ o $\frac{S}{T}$, che per analogia potrà dirsi *rendimento aerodinamico* della pala d'elica, toccheranno naturalmente va-

lori più piccoli di quelli che competono al rendimento delle ali. Basta pensare che se, in moto, il predetto angolo d'incidenza γ (dato dalla (1)) è pressochè costante per i diversi elementi alari, va invece rapidamente crescendo dagli estremi al mozzo dell'elica l'angolo della reazione $d\mathbf{R}$ con l'asse a ; e quindi rapidamente diminuisce la componente assiale dR_n . Ma, a prescindere da questa circostanza, nessun limite *a priori* potrà prefissarsi al rapporto $\frac{R_n}{R_t}$, come a quello $\frac{R_y}{R_x}$.

Meccanica. — *Sul moto di un corpo di massa variabile.* (Estratto di lettera). Nota di E. FERMI, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Viene precisato in questa Nota l'effetto della caduta di meteoriti, sopra le equazioni del movimento di un pianeta.

... I risultati dell'effetto della caduta dei meteoriti sopra le equazioni del movimento di un pianeta, mi pare si possano precisare al modo seguente.

Sia \mathbf{V} la velocità (vettoriale) del pianeta; m la sua massa (funzione del tempo t) e \mathbf{v} la velocità di uno dei meteoriti; $\bar{\mathbf{v}}$ il valore medio (vettoriale) della velocità dei meteoriti che cadono sul pianeta nel tempo dt . Nelle sue Note⁽²⁾ è sostanzialmente contenuta l'equazione seguente

$$(1) \quad \frac{d(m\mathbf{V})}{dt} = \mathbf{F} + \frac{dm}{dt} \bar{\mathbf{v}}.$$

Il problema si riduce dunque al calcolo di $\bar{\mathbf{v}}$, che Lei ha supposto senz'altro eguale a zero. La determinazione di $\bar{\mathbf{v}}$ dipende naturalmente dalle ipotesi che si fanno sopra la legge di distribuzione delle velocità dei meteoriti. L'ipotesi più naturale è forse ammettere che essi abbiano velocità media nulla rispetto allo spazio delle stelle fisse; e che la legge di distribuzione delle velocità sia Maxwelliana.

Più generalmente ammettiamo, per ora, che si abbia una legge di distribuzione delle velocità dei meteoriti che ammetta simmetria sferica; per modo che la probabilità che un meteorita abbia velocità appartenente a un elemento $d\omega$ dello spazio rappresentativo delle velocità sia $f(v)d\omega$ essendo f una funzione, per ora arbitraria, della sola grandezza della velocità del meteorita.

(1) Nella seduta del 1° giugno 1929,

(2) Questi « Rendiconti », vol. VIII, 1928, pp. 329-333, 621-622.

La probabilità di un urto del pianeta con un meteorita di velocità v è, evidentemente, proporzionale a $f(v)dw$ e, inoltre, alla velocità relativa

$$g = |\mathbf{v} - \mathbf{V}|$$

del pianeta e del meteorita.

Il valor medio della velocità dei meteoriti che cadono sul pianeta è dunque

$$\bar{v} = \frac{\int v |\mathbf{v} - \mathbf{V}| f dv}{\int |\mathbf{v} - \mathbf{V}| f dv}.$$

È evidente, per simmetria, che \bar{v} deve essere parallelo a \mathbf{V} . Riducendoci dunque a calcolare solo la componente nella direzione di \mathbf{V} , che è l'unica diversa da zero, ed usando coordinate polari in modo che si possa porre $dw = 2\pi \sin \theta d\theta v^2 dv$, troviamo

$$\bar{v} = \frac{\int_0^\infty \int_0^\pi v \cos \theta \sqrt{V^2 + v^2 - 2Vv \cos \theta} f(v) 2\pi \sin \theta d\theta v^2 dv}{\int_0^\infty \int_0^\pi \sqrt{V^2 + v^2 - 2Vv \cos \theta} f(v) 2\pi \sin \theta d\theta v^2 dv}.$$

L'integrazione rispetto a θ si effettua subito e dà come risultato

$$\bar{v} = \frac{\int_0^V v^3 f(v) dv \left[\frac{2}{3} v - \frac{2}{15} \frac{v^3}{V^2} \right] + \int_V^\infty v^3 f(v) dv \left[\frac{2}{3} V - \frac{2}{15} \frac{V^3}{v^2} \right]}{\int_0^V v^2 f(v) dv \left[2V + \frac{2}{3} \frac{v^2}{V} \right] + \int_V^\infty v^2 f(v) dv \left[2v + \frac{2}{3} \frac{V^2}{v^2} \right]}.$$

Se per $f(v)$ si pone l'espressione Maxwelliana

$$f(v) = e^{-h^2 v^2}$$

il calcolo degli integrali non si può fare coi mezzi ordinari, e bisognerebbe ricorrere alle tabelle dei valori della funzione

$$\Theta(x) = \int_x^\infty e^{-x^2} dx.$$

Il risultato è invece estremamente semplice se si ammette, con ipotesi certamente non rispondente alla realtà, che la grandezza della velocità di tutti i meteoriti sia la stessa. In questa ipotesi si trova infatti

$$\bar{v} = \begin{cases} -\frac{v^2}{5V} \frac{5V^2 - v^2}{3V^2 + v^2} & \text{per } v \leq V \\ -\frac{V}{5} \frac{5v^2 - V^2}{3v^2 + V^2} & \text{per } v \geq V. \end{cases}$$

Se, in particolare, ammettiamo che la velocità dei meteoriti sia molto maggiore di quella del pianeta, risulta, dalle formule precedenti, l'espressione semplicissima

$$\bar{v} = - \frac{V}{3}.$$

È interessante vedere la forma che prende l'equazione del movimento (1) in questa ipotesi. Ponendo in essa per \bar{v} il valore precedente, si trova

$$\frac{d(m\mathbf{V})}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{3} \mathbf{V} \frac{dm}{dt}$$

che si può anche scrivere

$$\frac{1}{m^{1/3}} \frac{d}{dt} (m^{4/3} \mathbf{V}) = \mathbf{F}.$$

Questa forma, come si vede, non è molto dissimile da quella ordinaria, alla quale naturalmente si riduce se la massa non dipende dal tempo.

Astronomia. — *Oscillazioni pendolari negli elementi ellittici della variabile « W Ursae majoris ».* Nota di G. VIOLA presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. A. BEMPORAD.

L'astronomo Walter, in una Memoria da poco edita a cura della Specola Universitaria di Königsberg, svolge in modo semplicissimo uno speciale studio sulle oscillazioni pendolari del sistema *W Ursae Majoris*.

Dalla elaborazione di tutto il materiale d'osservazione sia fotometrico che fotografico raccolto in 25 anni l'A. constatò che i minimi, principale e secondario, subiscono dei ritardi e degli anticipi rispetto all'epoca calcolata con formola di Hellerich.

Questi ritardi od anticipi, dedotti per i singoli minimi, rappresentati graficamente danno luogo a curve di andamento sinusoidale, con una periodicità diversa da serie a serie e di valore non superiore a 87 P.

Non sembra però molto prudente confrontare le epoche determinate dai minimi osservati (i quali, in generale, si fondano sempre su un limitato numero di osservazioni che rare volte è superiore a 30 e talvolta si fondano su due sole osservazioni) con le epoche calcolate; questo, sia perchè le osservazioni sono sempre affette da errori (dipendenti dall'istrumento adottato, dalla trasparenza atmosferica ecc.) sia perchè avendo a disposizione una curva non ben definita, il minimo dedotto da questa rimane sempre incerto.

(1) Nella seduta del 19 maggio 1929.

I valori di Δ ricavati dalle curve di Russel, Fowler e Borton, e di Aurino sono incerti, perchè i minimi non sono ben determinati e le curve sono incomplete.

In ogni modo queste differenze saranno da noi tenute nella debita considerazione, specie nello spiegare l'effetto che hanno questi ritardi od anticipi del minimo secondario rispetto a $\frac{P}{2}$ sulla durata del periodo di rivoluzione.

Dall'esame della curva (3) siamo indotti ad ammettere che i valori di Δ variano con legge periodica, raggiungendo un massimo positivo quasi uguale in valore assoluto al corrispondente negativo.

Inoltre il valore di Δ si annulla nel punto di mezzo tra i due massimi, la rappresentazione grafica di esso è senza dubbio una curva di andamento sinusoidale.

Ammessso che Δ raggiunga il valore massimo $\pm 0^d.0060$, calcoliamo con gli elementi dedotti dalle osservazioni del Bemporad, la longitudine ω del periastro e dell'eccentricità e dell'orbita ⁽¹⁾.

Δ	$e \cos \omega$	ω	e
$+0^d.0060$	$+0.0086$	$43^{\circ}.2$	0.0118
$+0.0050$	$+0.0072$	48.4	0.0108
$+0.0040$	$+0.0057$	54.6	0.0099
$+0.0030$	$+0.0043$	62.0	0.0092
$+0.0020$	$+0.0029$	70.5	0.0086
$+0.0010$	$+0.0014$	79.9	0.0082
0.0000	0.0000	90.0	0.0081
-0.0010	-0.0014	103.1	0.0082
-0.0020	-0.0029	109.5	0.0086
-0.0030	-0.0043	118.0	0.0092
-0.0040	-0.0057	128.4	0.0099
-0.0050	-0.0072	131.6	0.0108
-0.0060	-0.0086	136.8	0.0118

Da un attento esame del precedente specchio si deduce che le variazioni di ω e di e sono continue e periodiche. La eccentricità e dell'orbita

(1) Cfr. Nota II: *Elementi ellittici del sistema di «W Ursae Majoris»*, in «Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei».

risulta minima per $\omega = 90^\circ$, il periodo di variazione di essa è metà del periodo di variazione di ω .

Questo ci dice intanto che l'orbita non conserva sempre la stessa ellitticità, ma è soggetta a delle contrazioni e deformazioni della durata di anni 4,5 circa. Durante il periodo di due deformazioni e contrazioni, che è di circa 18 anni, la linea degli apsi compie un'intera oscillazione.

Durante questo intervallo di tempo, il periodo di rivoluzione della variabile, risulta due volte in aumento e due volte in diminuzione, precisamente:

dal (1904-5)	al (1909-10) diminuisce
» (1909-10)	» (1914-15) aumenta
» (1914-15)	» (1918-19) diminuisce
» (1918-19)	» (1922-23) aumenta.

Quanto abbiamo detto risulta confermato, in modo molto soddisfacente, dai risultati ottenuti dai vari astronomi in epoche diverse.

Periodo	Autorità	Epoca
$p = 0.33364044$	Müller e Kempf	1903
$= 0.33364044$	Baldwin	1903
$= 0.33363920$	Shapley	1908
$= 0.33364016$	Lazzarino	1912
$= 0.33364044$	Bemporad	1915
$= 0.33363902$	Russell Borton Fowler	1917

Circa la causa che produce l'oscillazione della linea degli apsi e la relativa variazione del periodo di rivoluzione, non siamo per ora in grado di spiegarla, ma ulteriori studi e ricerche su questa variabile potranno dare una spiegazione definitiva di quanto si è osservato fino ad oggi.

Fisica. — *A proposito di recenti esperienze sopra sottili pellicole metalliche.* Nota di M. PIERUCCI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. L. PUCCIANI.

§ 1. Un anno addietro pubblicai su questi « Rendiconti » ⁽²⁾ il risultato di alcune mie esperienze, secondo le quali resulterebbe una influenza della carica elettrica sulla conduttività di pellicole di tungsteno estremamente sottili. Tali pellicole, del tutto trasparenti, mi erano date senz'altro dal rivestimento metallico che sulla parete interna delle comuni lampade a incandescenza viene a formarsi con l'uso; adoperavo, per la loro forma più comoda, le lampade cilindriche così dette « da vetrina ». Ottenevo, essenzialmente i risultati seguenti:

I) la resistenza della pellicola, mantenuta nel vuoto, in qualche mese di tempo si stabilizza; essa è di qualche migliaio di ohm per la forma quadrata;

II) il coefficiente di temperatura della resistenza (alla temperatura ordinaria) è: $-5 \cdot 10^{-4}$, cioè negativo e grande, in valore assoluto, in confronto dei valori dei coefficienti negativi ottenuti (pure per pellicole sottilissime) dagli altri sperimentatori; questo risultato, insieme a quello dell'alta resistenza, fa ritenere che la grossezza della pellicola non sia superiore a qualche 10^{-7} cm.;

III) se, mediante un rivestimento esterno di stagnola, si trasforma la lampada in un condensatore, e si comincia a caricare e scaricare questo, mantenendo a terra l'armatura formata dalla pellicola, si osserva dapprima un aumento permanente nella resistenza della pellicola stessa; caricando e scaricando per un numero molto grande di volte si ottiene una ulteriore stabilizzazione di questa resistenza; la quale non varia più, permanentemente, che pochissimo per carica e scarica;

IV) raggiunta questa stabilizzazione, si può osservare una influenza invertibile della carica sulla conducibilità della pellicola; e precisamente un aumento di questa per cariche negative, una diminuzione per cariche positive;

V) tale variazione (rispettivamente in più o in meno) è di circa un centomillesimo, quando il numero degli elettroni mandati a terra o richiamati sulla pellicola è di: $6.8 \cdot 10^{11}$ per cm^2 .

(1) Nella seduta del 1° giugno 1929.

(2) Vol. VII, s. 6ª, 1° sem., pp. 400-405, 1928.

§ 2. Poco tempo dopo il sig. Bartlett in un suo pregevole articolo⁽¹⁾ riepilogava le numerose esperienze compiute dai vari sperimentatori sulle pellicole metalliche sottili, ne confermava con sue proprie esperienze i principali risultati, ed eseguiva sull'argomento esperimenti nuovi.

Dall'articolo del Bartlett risulta tra l'altro che:

I) per pellicole sottilissime (lo spessore non è meglio specificato) di tutti i metalli da lui sperimentati (oro, platino, palladio, rame, argento, bismuto, tellurio) il coefficiente di temperatura della resistenza, alla temperatura ordinaria, è negativo⁽²⁾;

II) la resistenza specifica delle pellicole metalliche, da un valore praticamente infinito per piccolissime grossezze, decresce, in maniera dapprima molto rapida, con l'aumentare della grossezza; finchè si arriva ad uno « spessore critico », variabile da metallo a metallo e diverso a seconda del processo di formazione della pellicola, ma che « si aggira intorno ai $5 \cdot 10^{-7}$ cm. ».

Al di sopra di tale spessore critico la resistività è pressochè normale.

Questi due risultati non sono, del resto, che una estensione di quelli classici del Patterson⁽³⁾; il quale trova che per il platino la resistività elettrica diventa anormale verso i $5 \cdot 10^{-7}$ cm. (v. tabella di p. 665, loc. cit.); al di sotto di questa grossezza l'accrescimento della resistività è molto rapido; per grossezze di $2 \cdot 10^{-7}$ cm. la resistenza specifica è da 6 a 7 volte quella ordinaria; il coefficiente di temperatura, benchè piccolissimo, è ancora però positivo. (Soltanto per pellicole di platino la cui resistenza per la forma quadrata è maggiore di quelle del Patterson - verosimilmente, dunque, ancor più sottili o meno uniformi - il Londgen trova un coefficiente negativo)⁽⁴⁾.

In ogni modo da queste esperienze del Bartlett si può concludere che il coefficiente di temperatura della resistenza negativo è una proprietà generale delle pellicole sottilissime. E mentre ciò è, in qualche modo, una conferma indiretta del risultato n. II da me ottenuto per il tungsteno, prova anche (concordemente ai risultati di precedenti sperimentatori: Patterson (loc. cit.), Londgen (loc. cit.), Swann⁽⁵⁾, Koller⁽⁶⁾, Reynolds⁽⁷⁾, Curtiss⁽⁸⁾, ecc.) che le mie pellicole di tungsteno erano estremamente sottili (giacchè per esse il coefficiente di temperatura non soltanto era negativo, ma anche assai grande in valore assoluto). Tutto ciò, messo in relazione

(1) R. S. BARTLETT, « Phil. Mag. », 5, s. 7^a, pp. 848-859, 1928.

(2) Per il bismuto tale coefficiente è negativo anche per pellicole assai grosse.

(3) J. PATTERSON, « Phil. Mag. », 4, s. 6^a, pp. 652-678, 1902.

(4) A. C. LONDGEN, « Phys. Rev. », 11, p. 84, 1900.

(5) W. F. G. SWANN, « Phil. Mag. », 28, p. 467, 1914.

(6) L. R. KOLLER, « Phys. Rev. », 18, pp. 221-235, 1921.

(7) F. W. REYNOLDS, « Phys. Rev. », 24, pp. 523-531, 1924.

(8) L. F. CURTISS, « Phys. Rev. », 17, p. 235, 1921.

col fatto che la pellicola — sulla quale ho eseguito le esperienze riferite nella precedente mia Nota — aveva una resistenza di qualche migliaio di ohm per la forma quadrata (precisamente 1655 ohm, alla temperatura di 15° C.) ci conferma sempre più nella convinzione che il valore di qualche 10^{-7} cm., che io davo come probabile per la grossezza della pellicola, sia giusto. Quando si supponesse che tale grossezza fosse: $4.2 \cdot 10^{-7}$ cm. bisognerebbe ammettere che la resistività fosse 100 volte maggiore di quella ordinaria del tungsteno! Ora nessuno sperimentatore, che io mi sappia, ha trovato, neppur lontanamente, valori così grandi per le resistività delle pellicole il cui spessore superi i $2 \cdot 10^{-7}$ cm.⁽¹⁾ Si deve trattare insomma di pochi strati atomici.

Vero è che nella mia citata Nota accennavo come, per mettere in accordo le mie esperienze con la teoria elettronica dei metalli, bisognerebbe assegnare allo spessore delle mie pellicole il valore $5 \cdot 10^{-7}$ cm., qualora si supponesse che il numero degli elettroni liberi sia di 1 per atomo; ma è pur vero che secondo autori recenti (confronta ad es. l'Houston)⁽²⁾ il numero n di tali elettroni, pur essendo, come ordine di grandezza, di qualche unità per atomo, pare che si debba assumere come crescente col crescere del numero d'ordine del gruppo al quale appartiene l'elemento nella Tabella di Mendeleieff. Come lo stesso Houston mostra (loc. cit., p. 458) è più conforme all'esperienza supporre n uguale addirittura a tale numero d'ordine, che supporlo uguale all'unità. Se così fosse, dunque, per accordare le mie esperienze con la teoria elettronica, bisognerebbe ammettere (essendo il tungsteno del 6° gruppo) che lo spessore delle mie pellicole fosse appena dell'ordine di $1 \cdot 10^{-7}$ cm.

Era dunque del massimo interesse poter avere, in qualche maniera, un'idea di tale grossezza media.

§ 3. Ma ha un sicuro significato parlare di « grossezza media » di una pellicola estremamente sottile? Perchè infatti questa grossezza non può essere desunta altro che usufruendo delle costanti specifiche del metallo di cui la pellicola è formata; le quali costanti però mutano (il lettore scusi il bi-

(1) Soltanto il Fery trova valori enormi in completa discordanza con tutti gli altri numerosissimi sperimentatori. Benchè il suo lavoro (« Journ. de Phys. », t. IX, s. 6^a, n. 1, 1928) sia veramente molto pregevole, mi pare che questa discordanza si debba attribuire ad una particolare disposizione sperimentale: e precisamente al fatto che la pellicola (di platino) viene ottenuta per bombardamento catodico sopra una lastra di vetro munita, preventivamente, ai due estremi, di lamine d'oro (incomparabilmente più spesse della pellicola di platino) che fanno da anodo. Forse non è congettura errata pensare che la pellicola metallica nella sua parte centrale, nella quale ne viene misurata la grossezza per via ottica, risulti molto più spessa che non ai bordi, dove essa si raccorda con gli elettrodi d'oro. Ciò non menoma però i risultati ottenuti dallo stesso Fery a proposito della misura, per via ottica, degli spessori delle lamine sottili.

(2) W. V. Houston, « Zeitschr. f. Phys. », 48, pp. 449-468, 1928.

sticcio delle parole!), e non sappiamo precisamente come, quando il metallo stesso sia ridotto in condizioni di pellicole così sottili, che la loro grossezza sia dell'ordine delle dimensioni atomiche. E inoltre le inevitabili differenze locali di grossezza contribuiscono in modo diverso, nè sempre noto, alle proprietà fisiche medie, le quali sole sono suscettibili di misura. Ad esempio nei miei esperimenti, palesemente, l'effetto osservato è con gran prevalenza dovuto alle parti più sottili della pellicola; sicchè se ad es., rimanendo invariate queste parti, quelle più grosse raddoppiassero, l'effetto (globalmente) non varierebbe in maniera apprezzabile⁽¹⁾. E in questa stessa ipotetica mutazione la misura della grossezza ottenuta per pesata (pur prescindendo dalla eventuale variazione del peso specifico)⁽²⁾ porterebbe (e giustamente) a valori più alti. Valori diversi palesemente si otterrebbero con altre misurazioni, come potrebbero essere: ottiche, elettriche, ecc.

Da quanto abbiamo osservato risulta dunque che qualsiasi determinazione di spessore può, tutt'al più, fornire l'ordine di grandezza.

In ogni modo, per avere appunto un'idea di quest'ordine di grandezza per la pellicola di tungsteno da me adoperata l'anno scorso, senza aprire la lampada, sono ricorso al metodo dell'assorbimento della luce; tanto più che i recenti, già citati esperimenti del Fery, provano che per spessori pure abbastanza piccoli ($5 \cdot 10^{-6}$ cm.) vale ancora la proporzionalità fra lo spessore e quella che egli chiama « densità ottica ».

Ho preso dunque la solita lampada da vetrina e l'ho fatta attraversare in blocco dalla luce; siccome per il tungsteno è conosciuto il coefficiente k di assorbimento per la riga 5790 del mercurio ($k = 2.71$; v. Tabelle di Landolt, 5ª ediz., pp. 965-966), ho lavorato con luce pressochè monocromatica in quell'intorno. La luce trasmessa veniva misurata poi mediante una cella fotoelettrica.

La quantità di luce trasmessa nelle zone della lampada dove è depositata la pellicola è risultata il 62 % della quantità trasmessa dalle zone prive di deposito metallico. Di qui, tenendo conto della forma cilindrica della lampada e del fatto che la luce attraversa due volte la pellicola, ma trascurando le differenze che il potere riflettente della lampada presenta nelle zone metallizzate da quelle prive di deposito (il che facendo, palesemente, si ottiene un limite superiore più alto), si trova⁽³⁾ come limite superiore della grossezza media della pellicola: $2 \cdot 10^{-7}$ cm. Tale valore, per quanto ho detto sopra, è certamente ancora più alto di quello cercato; in ogni modo non può essere che un valore di orientamento. Ma tanto ci basta per mostrare il buon accordo col valore di cui abbiamo parlato alla fine del § 2.

(1) Sicchè una determinazione della grossezza per questa via sarebbe quanto mai ingannevole; e difatti io non l'ho nemmeno tentata.

(2) Cfr. H. W. EDWARDS, « Phys. Rev. », 32, p. 712, 1928.

(3) Con calcoli basati sulla comune legge di assorbimento, calcoli che per brevità ometto.

§ 4. Altro fatto messo in chiaro nell'articolo del Bartlett è « l'invecchiamento » delle sottili pellicole metalliche per azione del tempo, del calore e della *corrente elettrica*; per queste azioni la resistenza della pellicola cambia in maniera « irreversibile » (generalmente aumenta per pellicole molto sottili).

Le permanenti variazioni di resistenza del n. III del § 1 (le quali già nella mia precedente nota riguardavo come fatti spurii) rientrano dunque, evidentemente, nelle « variazioni irreversibili per invecchiamento » del Bartlett (così egli le chiama con termine comprensivo). E come coll'andar del tempo si ha la stabilizzazione di cui si parla al n. I, così si può pensare che per prolungata azione delle correnti di carica e di scarica, di brevissima durata ma relativamente intense, si abbia la ulteriore stabilizzazione della pellicola di tungsteno, alla quale ho accennato al n. III. Quando la resistenza della pellicola è del tutto stabilizzata (anche per quanto concerne le azioni elettriche) si riesce ad osservare, come è detto ai numeri IV e V, una variazione « reversibile » di resistenza; variazione che sembra appunto coincidere con l'effetto cercato. Il quale effetto dopo queste brevi considerazioni, appare come ancor meglio individuato e distinto dagli altri fatti spurii.

Anche secondo il Bartlett, infine, come secondo i numerosi sperimentatori che lo hanno preceduto (cito tra gli altri: Janitzky⁽¹⁾; Kleine⁽²⁾; Reynolds (loc. cit.); Suhrmann⁽³⁾; Koller (loc. cit.); M. So⁽⁴⁾; Warburton⁽⁵⁾; Puodziukynas⁽⁶⁾...) e che lo hanno seguito (Joliot⁽⁷⁾; Riede⁽⁸⁾; Fery (loc. cit.); Dembinska⁽⁹⁾...) risulta sempre più necessario per lavorare seriamente sulle pellicole metalliche usare rarefazioni molto spinte del gas ambiente; appunto come io facevo nelle mie citate esperienze.

§ 5. Recentissimamente il sig. Barlow⁽¹⁰⁾ ha pubblicato i risultati di tre suoi esperimenti che, secondo la sua opinione (non condivisa dallo scrivente), sarebbero addirittura « cruciali » contro l'applicazione fatta dal Sommerfeld⁽¹¹⁾ della Statistica di Fermi⁽¹²⁾ alla Teoria Elettronica dei metalli.

Fra questi esperimenti ve n'è uno sulla ricerca, che già io trattai, della eventuale variazione di resistenza dei conduttori per effetto della carica

(1) A. JANITZKY, « Zeitschr. f. Phys. », 31, pp. 277-295, 1925.

(2) H. KLEINE, « Zeitschr. f. Phys. », 33, pp. 391-407, 1925.

(3) R. SUHRMANN, « Zeitschr. f. Phys. », 19, pp. 1-16, 1923.

(4) M. SO, « Phys. Mat. Soc. Jap. Proc. », 2, pp. 118-125, 1920.

(5) F. W. WARBURTON, « Phys. Rev. », 30, pp. 673-680, 1927.

(6) A. PUODZIUKYNAS, « Zeitschr. f. Phys. », 46, pp. 253-270, 1927.

(7) F. JOLIOT, « Compt.-Rend. », 186, p. 1526, 1928.

(8) A. RIEDE, « Zeitschr. f. Phys. », 46, pp. 302-309, 1928.

(9) R. S. DEMBINSKA, « Zeitschr. f. Phys. », 54, pp. 46-52, 1929.

(10) H. M. BARLOW, « Phil. Mag. », 7, pp. 459-476, 1929.

(11) A. SOMMERFELD, « Zeitschr. f. Phys. », 47, p. 1, 1928.

(12) E. FERMI, « Zeitschr. f. Phys. », 36, p. 902, 1926.

elettrica; il quale esperimento ad una prima lettura potrebbe forse sembrare (è certo lo sembra al sig. Barlow) in contradizione con quegli esperimenti, che un anno fa in proposito pubblicai su questi « Rendiconti ».

Il Barlow lavora — alla temperatura dell'aria liquida — su pellicole ottenute per deposito di soluzioni colloidali. Non dice di aver lavorato nel vuoto, nè ciò appare dalle figure unite al testo.

In ogni modo ecco quello che importa:

Le sue più sensibili misure (testualmente: « the most sensitive measurements ») sono quelle eseguite su pellicole di platino⁽¹⁾, il cui spessore egli lo calcola (non dice in quale maniera) come costituito « da nove molecole ». Egli carica tali pellicole in modo da richiamarvi sopra (o togliervi) $5.7 \cdot 10^{11}$ elettroni per cm^2 ; e non trova alcuna variazione « reversibile » di resistenza maggiore di: 0.0012 per cento. Non si capisce bene se realmente egli abbia o no osservato un qualche effetto minore. (Riporto le testuali parole del Barlow: « Yet there was no change in the resistance greater than 0.0012 per cent. The type of change referred to here is one which appears as soon as the charge is produced, and disappears immediately the charge is removed »).

Ora, ricordando quanto si è detto nei paragrafi precedenti, risulta che il Barlow:

1) adopera pellicole costituite da un numero di strati atomaci maggiore di quello da cui era costituita la mia pellicola di tungsteno⁽²⁾;

2) nelle esperienze che ha fatto con maggiore sensibilità egli aggiunge (o toglie) sopra l'unità di area della pellicola un numero di elettroni minore di quello che facesti io nei miei esperimenti ($5.7 \cdot 10^{11}$ invece di $6.8 \cdot 10^{11}$ per cm^2);

3) lavora sopra sostanze diverse dal tungsteno; e nelle migliori esperienze adopera il platino che (secondo i concetti comunemente ammessi) ha un numero di elettroni liberi per atomo maggiore di quello che non abbia il tungsteno (essendo il platino dell'ottavo gruppo).

Per ciascuna dunque di queste tre ragioni la variazione relativa di elettroni liberi sulla pellicola non poteva necessariamente essere che minore di quella realizzata da me, qualora egli avesse lavorato a temperatura ordinaria. Pur facendo, perciò, astrazione dal fatto che il Barlow lavora a temperatura così diversa da quella alla quale lavoravo io (15° – 20° C) — nè è facile dire *a priori* come la temperatura influisca sull'effetto in questione — non può far meraviglia (ed egli stesso doveva aspettarselo) che il suo re-

(1) Sia detto incidentalmente: il platino non mi sembra il metallo più adatto; perchè è vero che non si ossida, ma ha tendenze spiccatissime ai fenomeni di assorbimento.

(2) Assumendo (come già ho fatto nella presente Nota) il valore $2.84 \cdot 10^{-8}$ per il diametro atomico del tungsteno si avrebbero, nella mia pellicola, al massimo sette strati atomici.

sultato sia negativo, per la semplice ragione che egli non ha raggiunto una sensibilità sperimentale sufficiente a rivelare l'effetto, se ad esso compete l'ordine di grandezza assegnatogli dalle mie esperienze.

Infatti, se basandoci sopra i miei risultati e tenendo conto quantitativamente delle tre ragioni sopraindicate, calcoliamo la variazione relativa della resistenza della pellicola di platino, che presumibilmente avrebbe dovuto osservare il Barlow nelle sue esperienze, troviamo che essa variazione, *alla temperatura ordinaria*, potrebbe raggiungere al massimo il valore: $5 \cdot 10^{-6}$; mentre il limite superiore da lui assegnato (per la temperatura dell'aria liquida) è 2, 4 volte più grande di questo valore, cioè: $12 \cdot 10^{-6}$.

Concludendo, la discussione della Nota del Bartlett, la misura da me eseguita della grossezza della pellicola usata nelle precedenti mie esperienze, la critica infine degli esperimenti del Barlow mi pare che portino ad avvalorare ancor più il risultato che un anno addietro davo come molto probabile: l'esistenza, cioè, nei conduttori di una variazione di resistenza qualora essi vengano caricati elettricamente.

Fisica. — *Sulla distribuzione longitudinale dei fotoelettroni.* Nota di A. CARRELLI, presentata dal Socio M. CANTONE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulla teoria quantistica delle frange d'interferenza.* Nota di E. FERMI, presentata dal Socio O. M. CORBINO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Di un confronto fra le variazioni con il campo magnetico dell'effetto Hull, del P. T. E. e della resistenza nel bismuto ordinario e nel bismuto compresso.* Nota di R. FEDELE, presentata dal Socio A. LO SURDO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *I primi elementi di una nuova teoria generale per il moto delle acque e degli altri fluidi.* Nota di G. MAZZONE-SANGIORGI, presentata dal Socio R. MARCOLONGO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica-Matematica. — *Dimostrazione della formula dei potenziali ritardati col metodo degli operatori funzionali.* Nota di D. GRAFFI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. GIORGI.

Data l'equazione di propagazione delle onde:

$$(1) \quad \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = f(x, y, z, t)$$

in cui c è la velocità di propagazione, e ∇^2 l'operatore di Laplace, cioè:

$$\nabla^2 = \text{div grad} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

è ben noto che alcune delle sue soluzioni si possono esprimere per mezzo dei così detti potenziali ritardati.

Della formula dei potenziali ritardati sono state date varie dimostrazioni; intendo mostrare come una molto semplice si ottenga col metodo degli operatori funzionali lo studio dei quali è dovuto particolarmente a G. Giorgi ⁽²⁾.

Indichiamo infatti con Δ l'operatore $\frac{\partial}{\partial t}$. La (1) si può scrivere:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{\Delta^2}{c^2} \varphi = f(x, y, z, t).$$

Seguendo il metodo degli operatori funzionali, poichè questa equazione è a coefficienti costanti, è lecito trattare Δ come se fosse un moltiplicatore.

Poniamo $\frac{\Delta}{c} = k$ e scriviamo l'equazione data nella forma:

$$(2) \quad \nabla^2 \varphi - k^2 \varphi = f(x, y, z, t).$$

Di questa equazione si può trovare facilmente una formula risolutiva analoga a quella di Green per le funzioni armoniche ⁽³⁾. Richiamiamo brevemente tale formula risolutiva e la sua dimostrazione.

(1) Nella seduta del 1° giugno 1929.

(2) G. GIORGI, *Il metodo simbolico per lo studio delle correnti variabili*, « Atti dell'Associazione Elettrotecnica Italiana », vol. VIII (1904), pp. 65-143. *Sul calcolo delle soluzioni funzionali originate da problemi di elettrodinamica*, idem, vol. IX (1905), pp. 651-699.

(3) RIEMANN-WEBER, *Differential-Gleichungen der mathematischen Physik*. Edizione 1910, vol. II, cap. XVI, § 147, p. 357.

La (1) sia valida in uno spazio S chiuso dalla superficie σ , di cui indicheremo con $d^2\sigma$ un generico elemento differenziale. Sia P un punto generico di essa e r la distanza di un altro punto P' di S da P . Si consideri una sfera di centro P e raggio ε tutta interna ad S e sia Σ la superficie di detta sfera e S' lo spazio compreso fra σ e Σ . Allora per il lemma di Green, vale la relazione identica:

$$(3) \quad \iiint_{S'} \left(\frac{e^{-kr}}{r} \nabla^2 \varphi - \nabla^2 \frac{e^{-kr}}{r} \varphi \right) dx dy dz = - \iint_{\sigma} \left\{ \frac{e^{-kr}}{r} \frac{d\varphi}{dn} - \frac{d}{dn} \left(\frac{e^{-kr}}{r} \right) \varphi \right\} d^2\sigma - \\ - \iint_{\Sigma} \left\{ \frac{e^{-kr}}{r} \frac{d\varphi}{dn} - \frac{d}{dn} \left(\frac{e^{-kr}}{r} \right) \varphi \right\} d^2\Sigma$$

ove il simbolo $\frac{d}{dn}$ indica la derivata fatta in direzione normale a σ od a Σ , e diretta verso l'interno di S' .

Ora si ha:

$$\nabla^2 \frac{e^{-kr}}{r} = k^2 \frac{e^{-kr}}{r}$$

e quindi:

$$\frac{e^{-kr}}{r} \nabla^2 \varphi - \nabla^2 \frac{e^{-kr}}{r} \varphi = \frac{e^{-kr}}{r} (\nabla^2 \varphi - k^2 \varphi) = \frac{e^{-kr}}{r} f(x, y, z, t).$$

Sostituendo nella (3) e passando al limite per ε tendente allo zero, si ottiene, come nella formula ordinaria di Green:

$$(4) \quad \varphi(x, y, z) = - \frac{1}{4\pi} \iiint_S \frac{e^{-kr}}{r} f(x, y, z, t) dx dy dz + \\ + \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \left(\frac{d}{dn} \frac{e^{-kr}}{r} \varphi - \frac{e^{-kr}}{r} \frac{d\varphi}{dn} \right) d^2\sigma.$$

Questa relazione ha valore effettivo esplicito quando k è una quantità. Ma nel nostro caso è formale, o simbolica, cioè deve essere ulteriormente tradotta in formola esplicita, perchè k è un operatore $= \frac{\Delta}{c}$. Si deve dunque interpretare il simbolo $e^{-kr} = e^{-\frac{\Delta}{c}r}$, in base al significato $\Delta = \frac{d}{dt}$ e delle regole del calcolo degli operatori funzionali.

Ora il prof. Giorgi⁽¹⁾ ha dimostrato che il risultato dell'operatore $e^{b\Delta}$ sulla funzione $V(t)$ è dato dalla formula di Lagrange

$$e^{b\Delta} V(t) = V(t + b)$$

anche indipendentemente da ogni ipotesi sulla analiticità di $V(t)$.

Applicando questo teorema si ha:

$$\frac{e^{-kr}}{r} f(x, y, z, t) = \frac{f\left(x, y, z, t - \frac{r}{c}\right)}{r},$$

$$\frac{d}{dn} \frac{e^{-kr}}{r} \varphi = \left(-\frac{1}{r^2} e^{-kr} - \frac{k}{r} e^{-kr} \right) \frac{dr}{dn} \varphi = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dn} \varphi \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{cr} \frac{dr}{dn} \varphi' \left(t - \frac{r}{c} \right),$$

$$\frac{e^{-kr}}{r} \frac{d\varphi}{dn} = \frac{1}{r} \frac{d\varphi \left(t - \frac{r}{c} \right)}{dn}.$$

Così si ottiene la formula cercata:

$$\begin{aligned} (5) \quad \varphi(x, y, z, t) &= -\frac{1}{4\pi} \iiint_S f\left(x, y, z, t - \frac{r}{c}\right) dx dy dz \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dn} \varphi \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{cr} \varphi' \left(t - \frac{r}{c} \right) \frac{dr}{dn} \right\} d^2\sigma \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{1}{r} \frac{d\varphi \left(t - \frac{r}{c} \right)}{dn} d^2\sigma. \end{aligned}$$

Si osservi che se si fosse cambiato e^{-kr} in e^{kr} la dimostrazione sarebbe rimasta valida ugualmente e si sarebbero ottenuti i così detti potenziali anticipati invece di quelli ritardati.

Accennerò ora brevemente che col metodo degli operatori funzionali si può integrare molto brevemente l'equazione di propagazione delle onde in un mezzo assorbente:

$$(6) \quad \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{2\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(x, y, z, t)$$

(1) G. GIORGI, Memoria citata, 1905, parte I, § V (p. 8 della ristampa).

lo studio della quale è già stato fatto coi metodi classici dal Brillouin ⁽¹⁾ e dal Tedone ⁽²⁾.

Introducendo l'operatore $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ la (6) diventa:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{\Delta^2}{c^2} \varphi - \frac{2\mu}{c} \Delta \varphi = f(x, y, z, t).$$

Applicando a questa equazione la (4), si ottiene:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & -\frac{1}{4\pi} \iiint_S \frac{e^{-\frac{r}{c} \sqrt{(\Delta + \mu)^2 - \mu^2}}}{r} f(x, y, z, t) dx dy dz \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{d}{dn} \left(\frac{e^{-\frac{r}{c} \sqrt{(\Delta + \mu)^2 - \mu^2}}}{r} \right) \varphi d^2 \sigma \\ & - \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{e^{-\frac{r}{c} \sqrt{(\Delta - \mu)^2 - \mu^2}}}{r} \frac{d\varphi}{dn} d^2 \sigma. \end{aligned}$$

L'interpretazione degli operatori ora scritti si fa direttamente applicando le formole che Giorgi in un suo recente lavoro ⁽³⁾ ha dato per l'operatore $e^{-\frac{x}{c} \sqrt{(\Delta - \mu)^2 - \mu^2}}$, e avendo cura, nel secondo integrale, di far prima l'interpretazione dell'operatore, e poi derivare rispetto ad n . Ne conseguono le formole note, che per altra via si ottengono solo attraverso artifici lunghi e laboriosi.

(1) M. BRILLOUIN, *Propagazione nei mezzi conduttori*, «Compte-rendus de Paris», vol. 136 (1° sem. 1903), pp. 667-746.

(2) O. TEDONE, *Sull'integrazione dell'equazione delle onde smorzate col metodo delle caratteristiche*, questi «Rendiconti», serie 5^a, vol. XXII (1° sem. 1913), p. 757.

(3) G. GIORGI, *Sugli integrali dell'equazione di propagazione in una dimensione*, «Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo», tomo 62° (anno 1928), pp. 265-312. (Vedi particolarmente p. 21).

Elettrotecnica. — *Sulla autoeccitazione delle macchine asincrone autocompensate.* Nota di F. NERI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. L. LOMBARDI.

Il fenomeno della autoeccitazione delle macchine a campo Ferraris di tipo normale è da tempo noto nelle sue linee generali. Se, ai morsetti di statore di un comune motore asincrono si dispongono tre batterie di condensatori, collegate per es. tra loro a Δ e si conferisce alla macchina, per mezzo di un motore primo, una velocità via via crescente, ad un certo istante la macchina bruscamente si eccita. Il fenomeno è iniziato dal magnetismo residuo di cui è sede il rotore della macchina, e viene esaltato dalla presenza dei condensatori i quali, assorbendo una corrente anticipata quasi esattamente di 90° sulla tensione, fanno sì che la reazione dello statore sia concomitante anzichè antagonista. La piccola *fem* iniziale trova così il modo di aumentare fino ad un limite alla cui determinazione preliminare non si offrono difficoltà; esso è in ogni caso definito dal punto d'incontro di quella che può chiamarsi caratteristica di eccitazione della macchina [curva avente in ordinate le tensioni applicate (allo statore), in ascisse le componenti della corrente in quadratura col potenziale] e dalla retta che che caratterizza attraverso gli stessi parametri, la batteria.

È chiaro che, affinchè la macchina possa eccitarsi, per ogni determinata velocità di rotazione, esiste un valore di capacità minimo, legato in modo esclusivo all'andamento del primo tratto della caratteristica di eccitazione, al disotto del quale il fenomeno non si verifica più; ed è del pari chiaro, tenendo presente l'andamento caratteristico delle curve di magnetizzazione dei circuiti contenenti materiali ferro magnetici che, in tali condizioni esiste anche una tensione minima al disotto della quale la macchina non può, nei primi momenti, e salvo le successive eventuali regolazioni, stabilizzarsi. La possibilità di ottenere una tensione praticamente sfruttabile ai morsetti appare comunque qui legato alla esistenza della batteria di condensatori, la quale non può assolutamente escludersi senza provocare la diseccitazione della macchina.

In questi ultimi tempi atteso l'interesse vieppiù sentito di realizzare dei buoni fattori di potenza nelle reti di distribuzione e nelle linee di trasmissione, si sono andate diffondendo nella pratica le macchine asincrone così dette autocompensate nelle quali, attraverso processi diversi generalmente noti può conseguirsi il risultato di far funzionare la macchina con quel fat-

(1) Nella seduta del 1º giugno 1929.

tore di potenza che più appare opportuno attese le condizioni economiche che nei riguardi dell'utente, definiscono il problema; essa è cioè suscettibile di fornire parzialmente o totalmente a se stessa la « corrente di eccitazione » che le è necessaria; si può naturalmente anche andare oltre, sovracompendando la macchina con che può ad essa riservarsi anche quella funzione di « rifasatore » che, ove la cosa appaia tecnicamente ed economicamente conveniente, viene normalmente disimpegnata da motori sincroni.

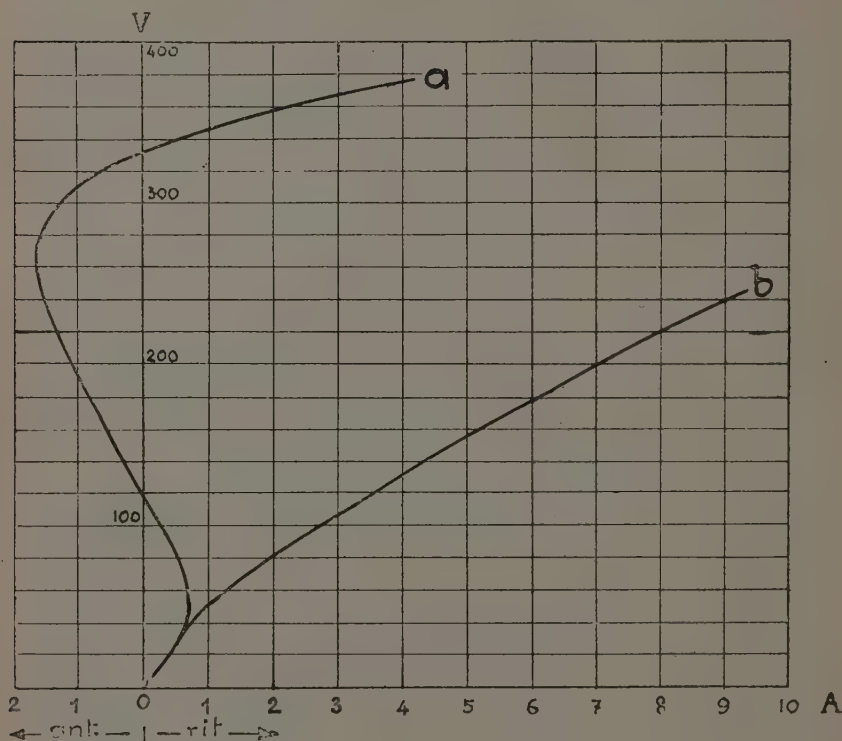


Fig. 1.

È sembrato interessante il vedere come tali macchine si comportino nei riguardi del fenomeno di autoeccitazione; e si è all'uopo compiuta una serie sistematica di ricerche sperimentali su di un piccolo motore della Casa Brown-Boveri da 3,7 kW, 220 V, 45 ~ 1350 giri, il quale è stato all'uopo accoppiato con un motore a corrente continua a velocità esattamente regolabile.

La « caratteristica di eccitazione » acquista qui un carattere particolare in quanto può ovviamente intendersi come definita dalla curva corrispon-

dente per la macchina non compensata e dall'andamento della corrente di compensazione in funzione della tensione, nonchè dalla sua fase; e poichè quest'ultima può venire variata con tutta facilità variando l'angolo di calettamento delle spazzole striscianti sul collettore a lamelle (di cui tutte queste macchine sono munite) si concepisce la possibilità di variare entro ampi limiti l'andamento complessivo della caratteristica di eccitazione, il che, naturalmente si riflette sull'intero funzionamento della macchina ed in modo particolare sulla possibilità della regolazione della tensione generata.

In fig. 1 sono riportate due delle curve caratteristiche rilevate a $45^\circ \sim$ e, come detto a $\cos \varphi = 0$, sulla macchina in parola; la *a* si riferisce alla macchina compensata, la *b* alle condizioni di controcompensazione. Esse rappresentano le estreme di una famiglia di curve intermedie come posizione e come andamento tra le due tracciate, e le quali sono tutte praticamente realizzabili assegnando angoli opportuni all'anello portaspazzole.

Si noterà come le due curve estreme *a* e *b* (e così le intermedie) abbiano il primo tratto, quello cioè più vicino all'origine, sensibilmente coincidente; ciò è dovuto al fatto che, ai bassi valori della tensione l'azione della compensazione diviene, in questo tipo di macchina praticamente trascurabile. Scaturisce intanto evidente da ciò e da quanto si è detto precedentemente che anche qui esiste, in corrispondenza di una certa velocità, una capacità minima al disotto della quale la macchina non può eccitarsi (ed essa coincide sensibilmente con quella relativa alla stessa macchina non compensata), ma, una volta che tale valore minimo sia raggiunto, non resta più, come nel caso delle macchine normali definito il valore della tensione alla quale il complesso si stabilizza; esiste invece la possibilità di regolare *a priori* la tensione stessa entro limiti relativamente vasti, col semplice spostamento delle spazzole alle quali può, per esempio assegnarsi quella posizione alla quale corrisponda una tensione che non ecceda la normale.

Ma proprietà tipica di questa macchina che anche in ciò si differenzia nettamente dalle macchine asincrone di tipo comune, consiste nel fatto che, raggiunta, come si è detto, la eccitazione iniziale della macchina è qui possibile escludere in modo completo la batteria di condensatori senza che la macchina stessa si disecchi; basta all'uopo conferire, con l'artificio più volte citato, alla caratteristica un andamento tale che essa tagli l'asse delle ordinate. Il piccolo motore sul quale sono state condotte le prove, p. es. richiede per la eccitazione iniziale una batteria di condensatori (connessi a Δ) di $\sim 38 \mu F$ per fase; eccitata la macchina ed escludendo i condensatori, in corrispondenza della posizione di spazzole che dà luogo alla caratteristica *a*, essa si stabilizza ad una tensione di 330 V; tensione che, per eccedere di troppo quella normale per la quale il motore è stato costruito, non ha permesso di studiare anche il comportamento della macchina in completa autoeccitazione in presenza di carichi ohmici od induttivi.

È chiaro però che, sia la macchina in regime di totale o parziale eccitazione, sussiste sempre per essa la possibilità di « seguire » con la tensione il carico in maniera relativamente semplice; così per esempio, lasciando in parallelo sulla macchina le batterie di eccitazione iniziale è stato possibile, variando gradualmente l'angolo di calettamento delle spazzole, di crescere il carico (ohmico) della macchina da zero fino al massimo, mantenendo costantemente la tensione al valore normale di 220 V.

Chimica. — *Sintesi in chimica organica con l'energia raggiante.* —
 III. *Acenafte e aldeide benzoica* ⁽¹⁾. Nota di REMO DE FAZI,
 presentata ⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

L'azione della luce solare su alcuni idrocarburi aciclici e ciclici in presenza di aldeidi e chetoni, è stata sperimentata da Paternò ⁽³⁾ ed anche da Ciamician e Silber ⁽⁴⁾. Però mentre le reazioni che avvengono fra chetoni e idrocarburi sono state ampiamente studiate ⁽⁵⁾, quelle tra aldeidi e idrocarburi aromatici si trovano appena accennate ⁽⁶⁾, nè si conoscono ricerche riguardanti l'azione della luce solare sull'acenafte e aldeidi cicliche.

Ho iniziato le esperienze in questo campo perchè hanno per me particolare interesse, in seguito alla mia reazione cromatica delle aldeidi cicliche con acenafte in presenza di acido solforico concentrato ⁽⁷⁾.

Ho cominciato con lo studiare il comportamento dell'aldeide benzoica e dell'acenafte disciolti in benzolo, tenuti per due anni all'azione della luce solare, in un tubo di vetro chiuso.

I prodotti che si formano sono parecchi e ciò è dovuto non soltanto alla facilità con cui l'aldeide benzoica tende a polimerizzarsi, ma anche al lungo tempo che l'acenafte e l'aldeide benzoica sono stati lasciati esposti alle radiazioni solari.

I composti che per ora ho individuato sono:

1) due polimeri dell'aldeide benzoica, uno identico a quello già trovato da Ciamician e Silber ⁽⁸⁾ l'altro al trimero ottenuto da Mascarelli ⁽⁹⁾.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Farmaceutica della R. Università di Messina.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1929.

(3) PATERNÒ E., « Gazz. Chim. Ital. », 39, I, 341, 1909 e 39, II, 415, 1909.

(4) CIAMICIAN e SILBER, « R. Acc. dei Lincei », 18, I, 216, 1909.

(5) PATERNÒ E., « Gazz. Chim. Ital. », 39, I, 341, 1909 e 39, II, 415, 1909.

(6) Vedi Note precedenti.

(7) « Gazz. Chim. Ital. », 46, I, 334, 1916; 51, I, 328, 1921; 54, 658, 1924.

(8) CIAMICIAN e SILBER, « R. Acc. dei Lincei », 18, I, 216, 1909.

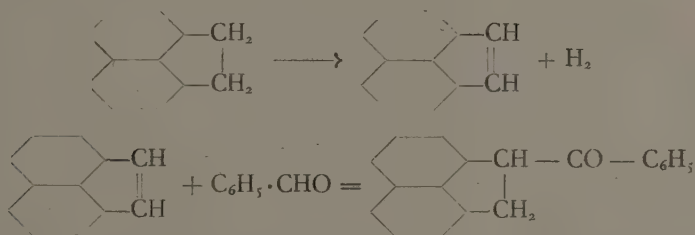
(9) MASCARELLI, « R. Acc. dei Lincei », 15, II, 375, 1906; I, 388, 1910.

2) Un corpo che all'analisi dà risultati concordanti per una molecola di acenaftene più una molecola di aldeide benzoica, meno una molecola di idrogeno.

3) Lo stilbene e l'isostilbene.

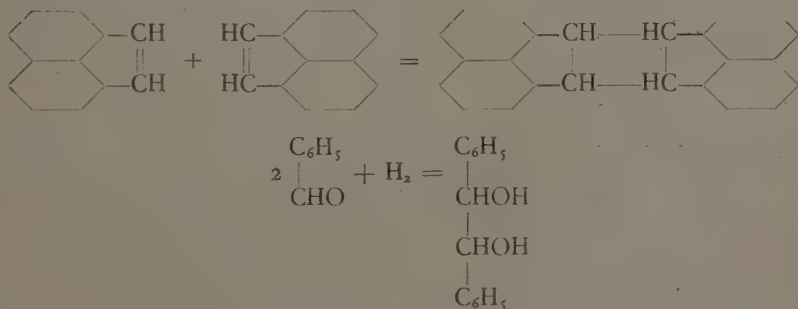
4) Una sostanza resinosa, che per la piccola quantità ottenuta non è stata studiata.

I due polimeri dell'aldeide benzoica, il tetramero di Ciamician e il trimero di Mascarelli, l'uno fondente a 165-170° e l'altro a 248-250°, non rappresentano una novità in questa reazione. Mentre il nuovo corpo ottenuto dall'acenaftene e aldeide benzoica, che fonde a 195-198° è l'unico esempio che si conosca, e la formazione del quale può essere interpretata con le reazioni seguenti:



Perciò l'acenaftene si trasformerebbe in acenaftilene, il quale addizionandosi all'aldeide benzoica, darebbe luogo al nuovo composto, e quindi probabilmente all'I-benzoil-acenaftene. Questo comportamento non deve meravigliare perchè è analogo a quello che si verifica tra benzofenone e alcuni idrocarburi aromatici⁽¹⁾.

Non sono riuscito a trovare tra i prodotti della reazione nè il di-acenaftilene, nè l'idrobenzoino:

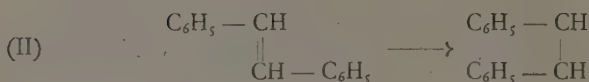
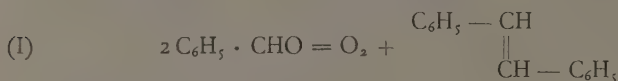


ma non per questo posso affermare che non si siano formati.

(1) PATERNÒ, E. « Gazz. Chim. Ital. », 39, II, 415, 1909.

Inoltre è stato possibile isolare piccole quantità di stilbene (I), e d'isostilbene (II), il che fa pensare che in un primo tempo, dall'aldeide benzoica si formi stilbene, e questo poi per azione prolungata della luce solare si trasformi in isostilbene.

La reazione andrebbe secondo le equazioni seguenti:



L'aldeide benzoica, come ha già dimostrato Mascarelli, si ossida poi ad acido benzoico: $2\text{C}_6\text{H}_5\text{CHO} + \text{O}_2 = 2\text{C}_6\text{H}_5\text{COOH}$. Anzi il Mascarelli nelle sue ricerche sull'azione della luce solare sull'aldeide benzoica e iodilbenzolo, non soltanto è riuscito a isolare l'acido benzoico e lo stilbene, ma accenna anche ad una sostanza resinosa che per distillazione fornisce ancora dello stilbene. E poichè l'isostilbene, per ebollizione, e più facilmente in presenza di iodio, rigenera lo stilbene, è molto probabile che nella sostanza resinosa di Mascarelli, vi fosse anche dell'isostilbene. È evidente perciò la complessità delle reazioni e le difficoltà, che spesso s'incontrano nello studio di alcune fotosintesi.

Le esperienze sull'azione della luce solare sull'acenaftene e l'aldeide benzoica e su altre aldeidi aromatiche, meritano di essere continuate, per meglio studiare tutti i prodotti che si formano e per verificare se questa fotoreazione è generale.

Chimica. — *Pile di concentrazione, interamente metalliche, funzionanti in contrasto con la legge di Volta.* Nota di O. SCARPA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

La considerazione della probabile esistenza di ioni mobili nei metalli, specialmente in quelli allo stato liquido, mi ha condotto, già da tempo, a dubitare della rigorosa validità della legge delle tensioni (2^a legge di Volta).

Se infatti esistono nei metalli ioni capaci di fluire con velocità finita, per effetto della diversa mobilità rispetto agli elettroni, debbono generarsi al contatto fra metalli eterogenei fenomeni di squilibrio elettrico atti a causare in catene metalliche chiuse, di determinata costituzione, (anche se queste posseggono temperatura uniforme) forza elettromotrice non nulla; e venir quindi generata una corrente elettrica, contrariamente a quanto stabilisce la legge delle tensioni.

L'energia corrispondente a tale corrente deve derivare da parziale trasformazione dell'energia chimico-fisica posseduta dal sistema allorquando i metalli a contatto sono atti a reagire formando composti intermetallici o soluzioni, ma può anche esser assorbita in maggiore o minor misura dall'ambiente, in accordo a quanto stabilisce la teoria termodinamica degli elettromotori.

Tale interessante fenomeno fu da me recentemente dimostrato con adatte esperienze, e confermato con numerosi controlli ⁽²⁾.

Le pile metalliche così costituite (ad es. la pila: rame, oro, mercurio, rame) possono esser chiamate *pile metalliche di reazione* in quanto il loro funzionamento è accompagnato dalla formazione (e talvolta dalla dissociazione) di composti intermetallici, o almeno dalla formazione di soluzioni; fenomeno questo che, a mio parere, pur implica l'esistenza di affinità fra solvente e soluto.

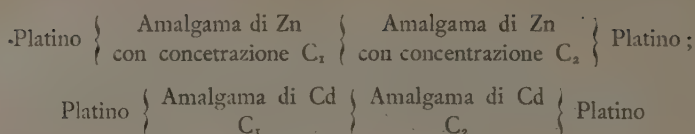
Proseguendo lo studio, e riprendendo alcune mie vecchie ricerche, sono ora riuscito a dimostrare sperimentalmente anche l'esistenza di *pile metalliche di diffusione*, nelle quali l'energia elettrica generata corrisponde solo al lavoro ricavabile dalle variazioni nella concentrazione di soluzioni metalliche (interamente metalliche) in contatto.

(1) Nella seduta del 1^o giugno 1929.

(2) O. SCARPA, *Esistenza di forze elettromotrici in circuiti metallici eterogenei, possedenti temperatura uniforme, con produzione di correnti elettriche continue.* «Atti del R. Istituto Lombardo di Scienze», L. ed A., Adunanza 11 aprile 1929. (Atti, serie II, vol. 57, Anno 1929).

V. pure il largo sunto nell'«Elettrotecnica», vol. 16, 25 maggio 1929.

Tali ad es., sono le pile⁽¹⁾:



le quali sono caratteristiche, poichè corrispondono alle due pile metalliche:

Platino, Zinco, Mercurio, Platino
Platino, Cadmio, Mercurio, Platino

da me scoperte e particolarmente studiate⁽²⁾.

Ad illustrazione delle loro caratteristiche più salienti, ricordo che i diagrammi di stato dei sistemi zinco-mercurio e cadmio mercurio mostrano la inesistenza di composti intermetallici (almeno per temperature superiori a -50°C) e la praticamente completa insolubilità allo stato solido dello zinco nel mercurio, mentre la solubilità del cadmio nel mercurio è, allo stato solido, caratterizzata da un intervallo di immiscibilità, con esistenza di soluzioni solide coniugate senza punto eutettico⁽³⁾. (Figg. 5 e 6).

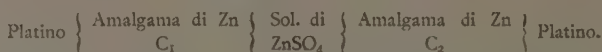
Allo stato liquido la solubilità è invece illimitata in ambo i casi.

Aggiungo che mentre la dissoluzione dello zinco nel mercurio avviene con assorbimento di calore, quella del cadmio nel mercurio, avviene con sviluppo di calore e che, ciò non pertanto, in ambedue le pile metalliche sopracitate, lo zinco ed il cadmio funzionano da polo negativo, similmente a quanto avviene nelle pile chimiche:

Platino, Zinco, Soluzione di un sale di Zn, Platino
Platino, Cadmio, Soluzione di un sale di Cd, Platino.

La forza elettromotrice posseduta a 15°C dalle due pile metalliche è rispettivamente di $0.7 \cdot 10^{-6}$ Volta e $1 \cdot 10^{-6}$ Volta, quando sono di fresca preparazione⁽⁴⁾.

(1) Da non confondere con le note pile di concentrazione di amalgame, con elettrolita interposto; per es., con la pila:



(V. LEWIS, *Physical-Chemistry*, vol. II, p. 171 e sg., IV edizione, 1925).

(2) V. loc. cit.

(3) PUSCHIN, « *Zeitschr. An. Chem.* », vol. 36, anno 1903.

(4) V. loc. cit.

*
* *

Anche le esperienze relative alle pile metalliche di concentrazione furono da me eseguite nella camera termostatica che ho fatto appositamente costruire in questo laboratorio⁽¹⁾. Ciò non pertanto disposi le pile in esame entro a termostati, e protessi tutti i circuiti, mediante grossi schermi di legno e sughero, dalla irradiazione termica dell'osservatore (situato a circa 3 metri dal galvanometro, dai circuiti e dalle pile) e dalla lampadina (di cinque candele) che illumina la scala del galvanometro. Questa è disposta a 2 metri dal galvanometro (Kipp e Zonen) il quale ha



Fig. 1.

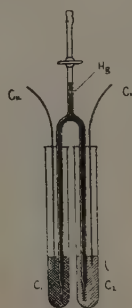


Fig. 2.

la resistenza interna 10 Ohm e la sensibilità $1.5 \cdot 10^{-9}$ Ampère per 1 mm di deviazione.

Naturalmente anche in questo caso, fu presa ogni cura per eliminare le eventuali forze elettromotrici di origine termoelettrica, fatto di cui mi sono sempre assicurato mediante molteplici controlli.

Tutte le misure di f. e. m. furono iniziate dopo raggiunto l'equilibrio termico, e furono sovente prolungate per più giorni sulle medesime pile; ottenendo così (come già nello studio delle pile metalliche di reazione) grande concordanza di risultati, in modo da togliere ogni ragionevole dubbio sulla loro validità.

A queste pile di concentrazione ho dato le forme seguenti: La figura 1 rappresenta una pila con il vaso (di vetro) ad U, il quale possiede delle

(1) Questa camera non ha finestre, ha una triplice porta protetta da 3 ampie bussole, ha tutte le pareti interne all'edificio, ed ha la porta, le pareti, la volta ed il pavimento rivestiti di grossi strati di sughero.

bolle e delle strozzature che hanno lo scopo di ritardare la diffusione in grazia dei bruschi salti di concentrazione che esse causano. La chiavetta permette di montare la pila e stabilire il contatto fra i liquidi senza causare mescolamenti dannosi.

La figura 2 rappresenta un altro tipo di pila, la cui evidenza rende superflua ogni descrizione ⁽¹⁾. Per brevità sorvolo su altre disposizioni.

Come elettrodi ho usato 2 fili di platino (fig. 1); ma in alcuni casi anche l'impiego di 2 fili di rame (fig. 2) non altera sensibilmente i risultati delle misure, poichè allorquando ambedue le amalgame sono diluite, per ragioni di simmetria, risulta sensibilmente nullo l'effetto dei due elettrodi di rame sulle f. e. m. della pila.

Per misurare le f. e. m. di tali pile non ho impiegato metodi potenziometrici, poichè ho creduto necessario di semplificare quanto possibile i circuiti, riducendo al minimo il numero dei contatti ed eliminando tutti quelli ai quali possono originare eventuali f. e. m. termoelettriche.

Perciò, come già nello studio delle pile metalliche di reazione, ho chiuso le pile direttamente sul galvanometro, e ho calcolato la loro f. e. m. in base alla intensità della corrente da esse generata nel circuito galvanometrico; rispetto al quale la resistenza delle pile metalliche è trascurabile.

Per brevità riporto soltanto le tabelle relative alle pile:

Platino, Amalgama di Zn, Mercurio, Platino

Platino, Amalgama di Cd, Mercurio, Platino

dalle quali è facile dedurre le f. e. m. delle rispettive pile di concentrazione:

Platino, Amalgama C_1 , Amalgama C_2 , Platino.

Ma in proposito ricordo che siccome il mercurio, anche il più puro, non può certamente essere ritenuto come *rigorosamente* privo di tracce dei metalli in esso solubili (per es., di tracce di Zn e di Cd) esso, a rigore, può essere considerato come una soluzione diluitissima di detti metalli, la cui concentrazione si può assumere unica (anche se chimicamente indeterminabile) quando il mercurio proviene dalla medesima origine e da una stessa operazione di purificazione.

Di modo che, in realtà, anche le pile:

Platino, Amalgama del metallo, Mercurio, Platino

possono essere considerate, a rigore, come pile metalliche di concentrazione.

(1) Il buon montaggio di tale tipo di pila è assai difficile.

TABELLA I

Amalgama di Zinco $T = 19^{\circ}$

Titolo percentuale dello zinco			F. E. M. (10^{-6} Volt)	Osservazioni
in peso (per 100 gr. di Hg.)	atomico (per 100 atomi di Hg.)	atomico (per 100 atomi totali)		
0.00	0.00	0.00	0.00	L'amalgama costituisce il polo negativo della pila ed il mercurio quello positivo.
0.5	1.52	1.50	0.25	
1.0	3.08	2.98	0.44	
1.5	4.66	4.45	0.63	
2.0	6.18	5.80	0.75	
2.5*	7.74*	7.18*	0.75	
3.0*	9.32*	8.45*	0.75	
4.0*	12.32*	10.8*	0.75	
5.0*	15.58*	13.2*	0.75	
10.0*	31.16*	21.6*	0.75	

N. B. - I numeri con l'asterisco indicano titoli medi, poichè le amalgame corrispondenti risultano formate da un miscuglio bifase, di zinco metallico ed amalgama liquida satura alla temperatura di 19° .

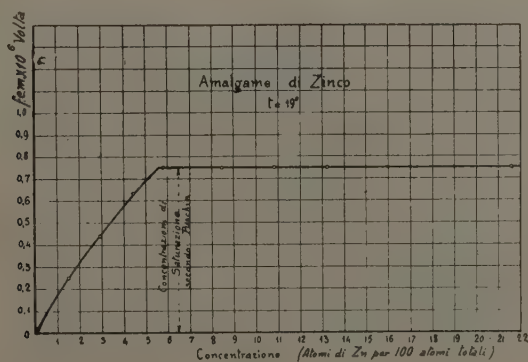


Fig. 3.

TABELLA II

Amalgama di Cadmio

$T \doteq 18^{\circ}$

Titolo percentuale del cadmio			F. E. M. (10 ⁻⁶ Volt)	Osservazioni
in peso (per 100 gr. di Hg.)	atomico (per 100 atomi di Hg.)	atomico (per 100 atomi totali)		
0.00	0.000	0.00	0.00	L'amalgama costitui- sce il polo negativo ed il mercurio il polo posi- tivo delle pile.
0.5	0.88	0.90	0.09	
1.0	1.78	1.75	0.26	
1.5	2.68	2.62	0.36	
2.0	3.56	3.46	0.45	
2.5	4.46	4.26	0.52	
3.0	5.36	5.06	0.66	
4.0	7.12	6.62	0.90	
5.0*	8.92*	8.12*	0.99	
10.0*	17.84*	14.6*	0.99	

N. B. - I numeri coll'asterisco indicano titoli medi, poichè le amalgame corrispondenti risultano formate da un miscuglio bifase, di amalgama liquida e dell'amalgama solida con essa in equilibrio alla temperatura di 18° .

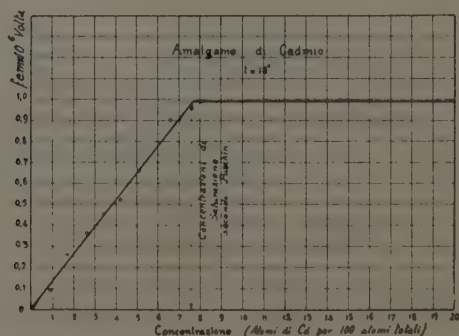


Fig. 4.

Le figure 3 e 4 riproducono i corrispondenti diagrammi e per maggior chiarezza le figure 5 e 6 riproducono i diagrammi di stato dei sistemi mercurio-zinco e mercurio-cadmio quali risultano dalle determinazioni del Puschin⁽¹⁾.

Dal loro esame risulta evidente come la legge di variazione della f. e. m. sviluppata dalle dette amalgame al contatto con il mercurio, al variare della concentrazione, sia lineare per l'amalgama di zinco e pressochè lineare (leggermente parabolica) per l'amalgama di cadmio, e ciò entro ai

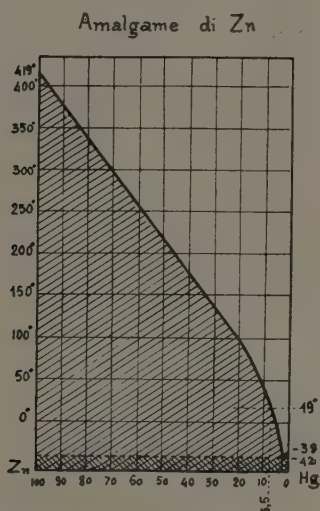


Fig. 5.

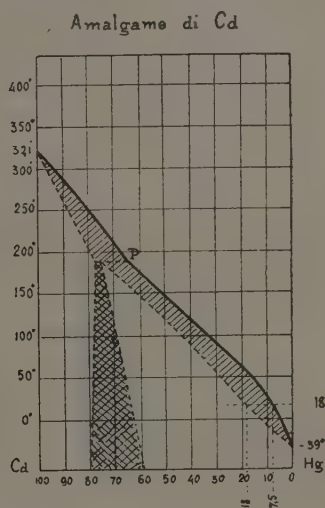


Fig. 6.

limiti di composizione per cui tali amalgame esistono come sistemi mono-fasi liquidi.

Appena viene raggiunta la composizione per cui la fase liquida si trova in equilibrio con la fase solida (zinco per le amalgame di zinco, e soluzione solida al 18 % per l'amalgama di cadmio a 18°) la f. e. m. delle due pile diventa costante mentre varia il titolo medio del metallo allegato, fatto che mostra come il valore di tali f. e. m. sia essenzialmente assegnato dalla costituzione delle fasi liquide in contatto.

Aggiungo che questi valori massimi, costanti, sono praticamente eguali a quelli da me trovati rispettivamente per le sopracitate pile metalliche (quando sono di fresca preparazione) con elettrodi di zinco e di cadmio. Tale fatto è molto importante specialmente per le amalgame di cadmio, perchè non essendo probabile che le amalgame solide di cadmio sieno in

(1) «Zeitsch. An. Chem.», vol. 36, anno 1903, p. 214.

equilibrio elettrico con il cadmio metallico (con il quale non sono certamente in equilibrio chimico-fisico), esso potrebbe indicare che la mobilità degli ioni nei metalli solidi (anche nelle amalgame solide) è di ordine di grandezza trascurabile rispetto a quella degli elettroni.

Questione questa assai dibattuta e tuttora *sub iudice*. Naturalmente tale deduzione vale soltanto per i sistemi da me studiati e sarebbe pericoloso estenderla fin d'ora alla generalità. E ciò tanto più in quanto essa vale entro al limite della sensibilità del galvanometro da me usato ⁽¹⁾.

Dall'esame dei diagrammi 3 e 4 e dal loro confronto con i diagrammi 5 e 6 risulta inoltre una notevole coincidenza fra la concentrazione corrispondente alla brusca cessazione dell'aumento delle f. e. m. al crescere della concentrazione, e la concentrazione di equilibrio fra le fasi liquida e solida alla temperatura dell'esperimento (18° per le amalgame di cadmio e 19° per quelle di zinco), quale fu dedotto dal Puschin mediante l'analisi termica (dalle curve di raffreddamento). Tale fatto fa pensare alla possibilità di applicare ⁽²⁾ la misura delle f. e. m. delle pile metalliche di concentrazione allo studio di speciali equilibri eterogenei.

La coincidenza ora citata, certamente non fortuita, nonchè la esistenza del valore limite (costante) della f. e. m. delle pile di concentrazione di amalgame di zinco, contro al mercurio, raggiunto allorquando esiste (anche soltanto in tracce) la fase solida: zinco metallico; ed il fatto che tale f. e. m. si mantiene costante mentre cresce la quantità di zinco nella massa totale, e coincide con il valore della f. e. m. della pila metallica: Platino, Zinco, Mercurio, Platino, sono una nuova prova ⁽³⁾ della reale esistenza delle f. e. m. da me scoperte.

La teoria delle f. e. m. di tali pile, nonchè i dati relativi ad altri sistemi (fra i quali cito fin d'ora quelli comprendenti le amalgame alcaline) saranno oggetto di note successive.

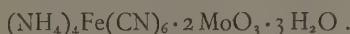
(1) Istallerò fra breve un galvanometro almeno 10 volte più sensibile.

(2) Ciò naturalmente, a parte la difficoltà delle misure derivante dalla loro estrema delicatezza.

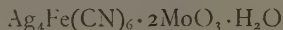
(3) Tale prova è in realtà superflua. Ma la cito, perchè la estrema delicatezza sperimentale delle misure ed il fatto che i miei risultati sono in opposizione a quanto stabilisce una delle leggi fondamentali della fisica, contro la cui validità non fu mai sollevato alcun dubbio, può lasciar perplessi taluni fra coloro che non conoscono le precauzioni ed i controlli da me adottati nella ricerca.

Chimica. — *Sui ferro-ciano-molibdati e sui composti analoghi del rutenio e dell'osmio* ⁽¹⁾. Nota di G. A. BARBIERI, presentata ⁽²⁾ dal Socio R. NASINI.

In ricerche precedenti ⁽³⁾ ho avuto occasione di osservare che il noto precipitato gelatinoso rosso-bruno che si ha facendo reagire in soluzione acida un molibdato con un ferrocianuro, quando venga introdotto in una soluzione di acetato di ammonio si trasforma in un composto cristallino di color giallo-canario la cui composizione corrisponde alla formula



Nella Nota in cui ho descritto questa nuova reazione insieme con altri metodi di preparazione che conducono direttamente allo stesso composto (o dal paramolibdato di ammonio per trattamento con ferrocianuro di ammonio, o dalla soluzione fortemente ammoniacale di un molibdato e di un ferrocianuro alcalino per aggiunta di acido acetico fino a reazione acida) non ho potuto dare la prova dell'esistenza nel composto di un complesso costituito dal jone ferrocianidrico con le due molecole di acido molibdico perchè il composto, essendo insolubile, pareva non prestarsi, non soltanto a misure fisico-chimiche, ma nemmeno a reazioni di doppio scambio. In esperienze successive mi riuscì tuttavia di sostituire con argento tutto l'ammonio del composto. Quest'ultimo venne lasciato a freddo in contatto per molte ore con poco più della quantità calcolata di nitrato d'argento sciolta in alcool. Il sale di argento che così si ottiene è una polvere cristallina giallo-chiara che alla luce diventa grigio-verde. All'analisi diede dei risultati che concordano con la formula



Calcolato %	Ag	45.45	N	8.85	Mo	20.22
Trovato »	»	45.19	»	8.89	»	19.92

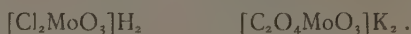
La formazione per doppio scambio di questo composto parla in favore dell'esistenza del complesso $[\text{Fe}(\text{CN})_6 \cdot 2 \text{MoO}_3]$. Quanto alla struttura di

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio Chimico del R. Istituto Superiore Agrario di Bologna.

(2) Nella seduta del 19 maggio 1929.

(3) « Berichte », 60, 2415, 1927.

questo composto si può anzitutto avvicinarla a quella di altri complessi che l'acido molibdico forma con l'acido cloridrico e con l'acido ossalico.

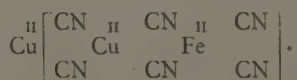


Nel ferro-ciano-molibdato abbiamo lo stesso tipo raddoppiato:



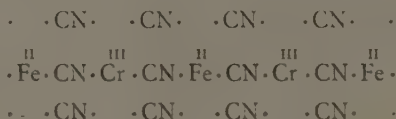
Intorno al modo in cui si possono immaginare legati fra loro gli elementi che fanno parte del complesso, qualche indicazione ci può essere fornita dai risultati ai quali sono giunti H. Reilhen⁽¹⁾ e L. Cambi⁽²⁾ nei loro studi recenti sulla struttura dei cianuri complessi insolubili.

H. Reilhen per spiegare il colore anormale che presentano certi ferrocianuri insolubili attribui ad essi una struttura che li fa rientrare nella classe dei complessi polinucleari. Ad esempio il ferrocianuro rameico avrebbe un solo atomo di rame nella sfera esterna e l'altro entrerebbe a far parte del complesso negativo, come è espresso dalla seguente formula:



Questa interpretazione sta in buon accordo coi seguenti fatti: 1° il ferrocianuro rameico addiziona soltanto quattro molecole di ammoniaca; 2° soltanto un atomo di rame può essere facilmente sostituito con un atomo di metallo alcalino-terroso con formazione di composti cristallizzati.

Analogamente, L. Cambi per differenziare la struttura del cobaltocianuro ferroso e del nitroprussiato ferroso, che hanno colore normale, dai sali ferrosi anormalmente colorati degli acidi cromo-, mangani- e ferri-cianidrico, ammette che nei primi il ferro bivalente sia trattenuto nella sfera esterna, mentre nei secondi entri nella formazione di un complesso polinucleare insieme con gli elementi trivalenti. Ad esempio, al cromaticianuro ferroso spetterebbe la struttura espressa dalla formula:



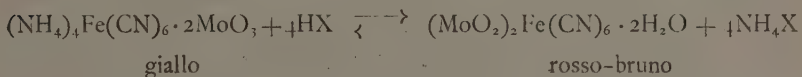
Ciò che hanno di comune e di essenziale queste interpretazioni sta nell'ammettere che, *entro uno stesso complesso*, alcuni radicali CN possano

(1) LIEB, « Ann. », 451, 75, 1927.

(2) « Gazz. Chim. Ital. », 58, 61, 1928.

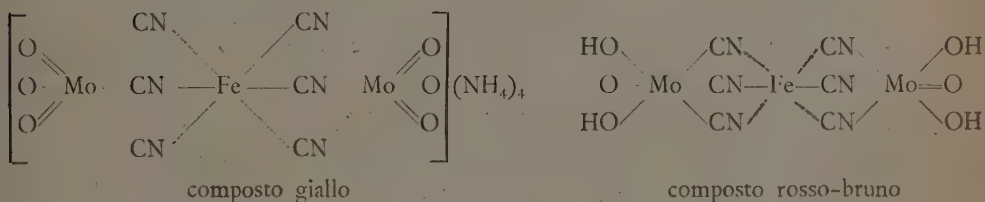
essere legati simultaneamente a due atomi metallici: ad uno per valenza normale e all'altro per valenza secondaria.

È molto probabile che anche il nostro composto contenga un complesso polinucleare. Nell'interpretazione della sua struttura bisogna però tener conto del singolare comportamento che manifesta con gli acidi. Quando venga trattato con un acido minerale esso si trasforma in un composto rosso-bruno che, trattato con un grande eccesso del sale di ammonio dell'acido impiegato, ripristina il composto originario. Si ha cioè l'equilibrio:



Evidentemente bisogna attribuire al composto giallo una struttura diversa da quella del composto rosso-bruno.

Ciò è possibile, a mio parere, ammettendo, come già ebbi ad accennare nella Nota su ricordata, che nel composto giallo l'acido molibdico sia entro il complesso legato a radicali CN per sole valenze secondarie, mentre nel composto rosso-bruno lo sia anche per valenze normali. Ciò può essere espresso dalle seguenti formule:



*
* *

Mi è parso interessante di ricercare se l'acido rutenio-cianidrico potesse formare con l'acido molibdico un complesso analogo a quello che forma l'acido ferrocianidrico.

Fin dal 1855 venne messa in evidenza dal Claus⁽¹⁾ l'analogia stretta che esiste tra il rutenocianuro di potassio ed il ferrocianuro di potassio e l'impossibilità di separare questi composti per cristallizzazione frazionata, in quanto che formano cristalli misti in tutti i rapporti. Il Claus stesso constatò anche che il comportamento del rutenocianuro di potassio verso molti reattivi (sali ferrici e ferrosi, rameici, mercuriosi, di piombo, di zinco) ricorda quello del ferrocianuro. Il Claus non poteva nel 1855 pensare di verificare se l'acido rutenocianidrico si comportasse con l'acido molibdico

(1) « Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie », 1855, 444.

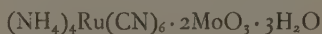
in modo analogo all'acido ferrocianidrico perchè la reazione tra molibdati e ferrocianuri in soluzione acida fu descritta per la prima volta soltanto nel 1859 ⁽¹⁾.

Ma nè il Martius ⁽²⁾ che si occupò dei rutenocianuri nel 1860 nè gli altri ricercatori che lo seguirono sullo stesso argomento si occuparono di sperimentare il comportamento dei rutenocianuri con l'acido molibdico.

Io ho constatato che aggiungendo una soluzione di rutenocianuro di potassio ad una soluzione di molibdato di ammonio acidificata con acido solforico, si ottiene un precipitato gelatinoso giallo-aranciato, insolubile in acqua e negli acidi diluiti, solubile senza colorazione in ammoniaca e negli alcali fissi. Esso contiene acido rutenocianidrico, acido molibdico e tracce di alcali. Una certa quantità di questo precipitato ottenuto con gr. 3 di rutenocianuro di potassio e gr. 6 di molibdato di ammonio venne raccolta e lavata alla pompa, sciolta in ammoniaca concentrata e poi trattata con acido acetico fino a reazione acida.

Il liquido ammoniacale, per aggiunta dell'acido acetico, a poco a poco ingiallisce, poi deposita una polvere cristallina bianco giallognola. Il prodotto così ottenuto non è puro perchè contiene un po' di tetramolibdato di ammonio. Per purificarlo bisogna ridiscioglierlo in ammoniaca e aggiungere acetato di ammonio e acido acetico fino a reazione acida. Il prodotto puro è bianco; trattato con acqua ingiallisce lievemente, con acidi minerali si trasforma in una polvere giallo-aranciata che per aggiunta di acetato di ammonio ritorna bianca.

All'analisi diede dei risultati che concordano con la formula:



Calcolato %	N	20.82	Ru	15.11	Mo	28.44
Trovato »	»	20.50	»	14.89-15.15	»	28.20.

La lacuna constatata nella chimica dei rutenocianuri si riscontra pure in quella degli osmiocianuri. Anche per questi composti venne lumeggiata dal Claus e dal Martius la stretta analogia che presentano coi ferrocianuri, ma non venne studiato il loro comportamento con l'acido molibdico.

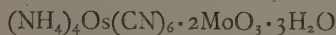
Io ho constatato che una soluzione di osmiocianuro di potassio aggiunta ad una soluzione di molibdato alcalino acidificata con acido solforico, vi determina la formazione di un precipitato gelatinoso, rosso-bruno che ricorda perfettamente quello che si ottiene impiegando un ferrocianuro: ne differisce soltanto per il colore che è meno cupo. Anche questo precipitato, insolubile in acqua e negli acidi diluiti, dà con l'ammoniaca o con

(1) H. Rose, *Traité de Chimie analytique*, 1859.

(2) *Inauguraldissertation*, Göttingen, 1860.

gli alcali delle soluzioni incolori. Esso contiene acido osmiocianidrico e acido molibddico. La sua soluzione ammoniacale, trattata con acido acetico, si colora in rossastro e deposita una polvere cristallina che viene purificata come si è detto per il composto di rutenio al quale rassomiglia perfettamente.

Trattata con acidi minerali questa polvere diventa rosso-bruna: con acetato di ammonio ritorna bianca. Essa contiene acido osmiocianidrico, acido molibddico e ammoniaca. All'analisi quantitativa diede risultati concordanti con la formula:



Calcolato %	N	18.41	Os	25.08	Mo	25.23
Trovato »	»	18.23	»	25.26	»	24.94-25.48.

Alcune ricerche preliminari mi hanno mostrato che tutti i ferro-pentacianuri in cui il ferro è bivalente danno con l'acido molibddico dei precipitati rosso-bruni e che tali precipitati sciolti in ammoniaca danno per aggiunta di acetato di ammonio e acido acetico, dei precipitati cristallini gialli che ricordano nell'aspetto il ferro-esaciano-molibdato di ammonio. Il nitroprussiato sodico, che è un pentacianuro in cui il ferro è trivalente, non forma con l'acido molibddico alcun precipitato.

Chimica. — *Triseleniuro, solfodiseleniuro e selendisolfuro dietilici* ⁽¹⁾. Nota di G. R. LEVI e di A. BARONI, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

In due Note precedenti ⁽³⁾ abbiamo avuto occasione di far notare come sia complessa la questione dei polisolfuri alchilici, dimostrando che prodotti descritti da precedenti autori, come pentasolfuro dietilico, non siano altro che miscele di zolfo e tetrasolfuro. Le nostre ricerche sono risultate più complicate del presunto per una non prevista isomeria da noi poi osservata e precisamente per la dimostrata esistenza di due pentasolfuri dietilici isomeri. Rimandiamo alle Note già citate per le considerazioni che possono trarsi da questa isomeria, considerazioni che per il complesso di ragioni allora esposte, non ci sentiremmo di chiamare conclusioni.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Chimica Fisica della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 5 maggio 1929.

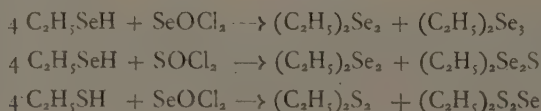
(3) Questi « Rendiconti », sedute del 7 e 21 aprile u. s.

Lo studio delle catene corrispondenti di selenio e di quelle miste di selenio e zolfo da noi iniziato da qualche tempo⁽¹⁾, oltre che presentare uno specifico interesse in sè, in quanto non ci risulta siano noti finora esempi di questo tipo, se si eccettua il solfodiseleniuro sodico di Messinger⁽²⁾, pensiamo possa contribuire alla conoscenza di queste catene di poliderivati, poichè l'operare con atomi diversi di selenio e di zolfo può essere una delle vie per risalire alla struttura della catena in esame.

Abbiamo iniziato lo studio con le catene miste di tre atomi di metalloide e di queste riferiamo nel presente lavoro. I composti con tre atomi di zolfo e cioè i trisolfuri alchilici sono noti da tempo⁽³⁾; non era invece nota a tutt'oggi l'esistenza di una catena di tre atomi di selenio e di due di selenio e uno di zolfo oppure di due di zolfo e uno di selenio. Di questi due tipi di catene miste è stato riferito soltanto brevemente da uno di noi lo scorso anno in una seduta della Società di Chimica di Milano il 16 maggio 1928⁽⁴⁾, mentre della prima abbiamo dato comunicazione più tardi alla stessa Società⁽⁵⁾.

Il selenmercaptano necessario per queste esperienze fu preparato per azione del bromuro di etile sul selenidrato di sodio in soluzione alcoolica⁽⁶⁾.

I risultati delle esperienze sotto riportate concordano sostanzialmente con quelli trovati precedentemente per le catene semplici di zolfo. Infatti i metodi di preparazione già descritti sostituendo al cloruro di tionile l'ossicloruro di selenio e al mercaptano il selenmercaptano, danno lo stesso schema di reazione:



Pure l'azione rispettivamente del selenio e dello zolfo sui disolfuri e i diseleniuri è dello stesso tipo di quella precedentemente da noi trovata per i composti solforati semplici. Infatti per riscaldamento a temperatura sufficientemente elevata (200°) del diseleniuro con zolfo si ottiene la somma di un atomo di zolfo e rispettivamente dal disolfuro più selenio la somma di un atomo di selenio, preparando così dei composti misti di selenio e zolfo identici a quelli che si formano nelle reazioni sopra scritte con ossicloruro di selenio e cloruro di tionile.

(1) «Giornale di Chimica Industriale», X, 266 (1928).

(2) «Ber. dt. Chem. Ges.», 30, 805.

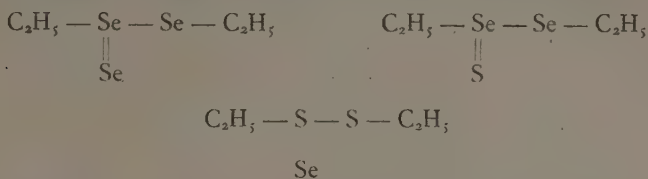
(3) Vedi BEILSTEIN, IV e I, pp. 291, 348; suppl. I, pp. 145, 173.

(4) Loc. cit.

(5) «Giornale di Chimica Industriale», XI, aprile 1929, seduta del 10-4-1929.

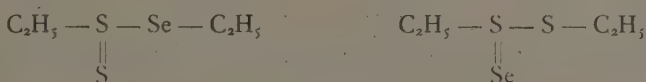
(6) TSCHUGAJEW, «Berichte», 42, p. 50.

Accettando le formule del tipo 1 da noi date come più probabili nelle Note precedentemente citate, i composti sopra descritti avrebbero la struttura:

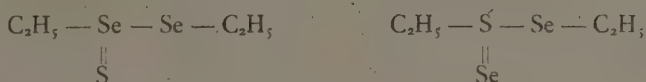


La sola differenza sostanziale di comportamento rispetto ai corrispondenti composti solforati è data dalla non formazione di tetraseleniuro e triseleniuro dall'azione del cloruro di selenio Se_2Cl_2 sul selenmercaptano. Tale differenza potrebbe però essere più apparente che sostanziale e cioè dipendere dalla diretta decomposizione a diseleniuro, alla distillazione, del tetraseleniuro eventualmente formatosi. Del resto lo stesso triseleniuro preparato dall'ossicloruro di selenio si decompone fortemente quando lo si ridistilla nel vuoto.

Nelle preparazioni finora eseguite non abbiamo notato casi di isomeria del tipo:



e rispettivamente:



formule che appaiono ugualmente possibili per entrambi i tipi che potrebbero formarsi col metodo di azione di zolfo o selenio sui diseleniuri o disolfuri corrispondenti. Non si deve però escludere la possibilità di isomerie di questo tipo specialmente osservando che le piccole differenze nei punti di ebollizione nelle diverse catene miste ($94^\circ - 98^\circ - 100^\circ$) sarebbero verosimilmente ancora minori per le isomerie in catene della stessa composizione.

PARTE SPERIMENTALE.

TRISELENIURO DIETILICO. — *a) Preparazione con* $\text{C}_2\text{H}_5\text{SeH} + \text{SeOCl}_2$. — Il prodotto è stato ottenuto versando a piccole porzioni 10 gr. di selenmercaptano sciolti in circa 50 cc. di solfuro di carbonio, in una soluzione di ossicloruro di selenio (gr. 3.7) sciolto nella stessa quantità di solfuro di

carbonio. La reazione è molto energica e necessita un raffreddamento con ghiaccio e sale per evitare sensibili perdite di selenmercaptano. A reazione ultimata si distilla il solfuro di carbonio su bagnomaria e l'olio che rimane viene frazionato a pressione ridotta (26 mm.), ottenendo le seguenti frazioni:

1° fraz.	p. e. 70°	$(C_2H_5)_2Se_2$	gr. 4.3	Rend. 89°.
2° fraz.	p. e. 100°	$(C_2H_5)_2Se_3$	gr. 0.7	Rend. 10 %

Facendo reagire invece selenmercaptano e cloruro di selenio Se_2Cl_2 nelle medesime condizioni, si ottiene solo diseleniuro con una resa del 85° e non fu possibile riconoscere la presenza di triseleniuro nemmeno in tracce.

b) *Preparazione con $(C_2H_5)_2Se_2 + Se$ (un atomo) riscaldando in tubo chiuso in bagno d'olio a 200° per tre ore.* — In questa preparazione si usarono gr. 10.82 di diseleniuro dietilico a cui vennero aggiunti gr. 3.96 di selenio rosso precipitato di fresco. Dopo riscaldamento si ottennero alla distillazione a 26 mm. le seguenti frazioni:

1° fraz.	p. e. 70°	$(C_2H_5)_2Se_2$	gr. 9.5	Rend. —
2° fraz.	p. e. 100°	$(C_2H_5)_2Se_3$	gr. 0.9	Rend. 6.1 %

Il prodotto a p. eb. 100° a 26 mm. fu analizzato pesandolo su una bilancia di Longue sensibile a $\frac{1}{1000}$ di mgr., e il selenio, dopo fatto il microcarius, fu precipitato con anidride solforosa. I risultati ottenuti si riferiscono alla preparazione (a) e sono i seguenti:

triseleniuro pesato	Se pesato	Se % teorico	Se % trovato
gr. 0.003880	0.0031	80.35 %	79.90 %
gr. 0.003042	0.0024	80.35 %	80.21 %

Il peso specifico risultò, col metodo dei liquidi pesanti, 1.7805 a 13° e l'indice di rifrazione $n_D^{12.8} = 1.60919$ a 12.8. Abbiamo determinato anche il peso specifico e l'indice di rifrazione del diseleniuro, non ancora noti, ottenendo i valori:

$$D_4^{13.0} = 1.6962 \quad n_D^{12.8} = 1.58852$$

DISELENSOLFURO DIETILICO. — a) *Preparazione con $C_2H_5SeH + SOCl_2$.* — Il prodotto si ottiene nello stesso modo indicato per il triseleniuro. In questa preparazione vennero usati gr. 10 di selenmercaptano e gr. 2.7 di cloruro di tionile; alla distillazione a 26 mm. si ottennero:

1° fraz.	p. e. 70°	$(C_2H_5)_2Se_2$	gr. 4.20	Rend. 84.7 %
2° fraz.	p. e. 98°	$(C_2H_5)_2Se_2S$	gr. 2.25	Rend. 39.5 %

b) Preparazione con $(C_2H_5)_2Se_2 + S$ (un atomo) riscaldando in tubo chiuso in bagno d'olio. — Il riscaldamento venne operato in un primo tempo a 150° ; alla successiva distillazione si ottenne però solo diseleniuro. Riscaldando invece a 200° per due ore e distillando poi a 26 mm. il prodotto (10 grammi) si ebbero le seguenti frazioni:

1° fraz.	p. e. 70°	$(C_2H_5)_2Se_2$	gr. 4.0
2° fraz.	p. e. 85°	$(C_2H_5)_2S_3$	gr. 0.5
3° fraz.	p. e. 94°	$(C_2H_5)_2S_2Se$	gr. 1.2
4° fraz.	p. e. 98°	$(C_2H_5)_2Se_2S$	gr. 3.7

Riscaldando il diseleniuro nelle stesse condizioni con due atomi di zolfo si ottengono poi qualitativamente gli stessi prodotti, ma nel tubo dove è avvenuto il riscaldamento, per raffreddamento successivo si deposita selenio.

Il diselensolfuro venne analizzato dosando il selenio come elemento e lo zolfo come solfato di bario. I risultati analitici sono i seguenti:

	diselensolfuro pesato	Se pesato	$BaSO_4$ pesato	S % trovato	Se % trovato
(1)	gr. 0.009740	gr. 0.0062	gr. 0.0091	12.83	63.65
(2)	gr. 0.005448	gr. 0.0035	gr. 0.0051	12.80	64.24
(3)	gr. 0.015220	gr. 0.0073	gr. 0.0108	12.87	63.30

S % teorico = 12.90; Se % teorico = 63.74. Le analisi (1) e (2) si riferiscono alla preparazione (a); la (3) alla preparazione (b).

Il peso specifico risultò col metodo dei liquidi pesanti 1.7070 a 13° e l'indice di rifrazione $n_D = 1.60244$ a $12^\circ.8$.

DISOLFOSELENIURO DIETILICO. — *a) Preparazione con $C_2H_5SH + SeOCl_2$.* — Vennero usati gr. 10 di mercaptano e gr. 6 di ossicloruro di selenio. Avvenuta la reazione come è indicato per il triseleniuro, la distillazione a 26 mm. dell'olio residuo diede le seguenti frazioni:

1° fraz.	p. e. 50°	$(C_2H_5)_2S_2$	gr. 3.35	Rend. 64 %
2° fraz.	p. e. 94°	$(C_2H_5)_2S_2Se$	gr. 2.90	Rend. 51 %

b) Preparazione con $2C_2H_5SH + Se_2Cl_2$. — Vennero usati gr. 2 di cloruro di selenio Se_2Cl_2 sciolti in solfuro di carbonio, a cui si aggiunsero gr. 3 di mercaptano sciolti pure in solfuro di carbonio. Dopo eliminazione di quest'ultimo a bagnomaria, si distillò il residuo a 26 mm.; si ottennero:

1° fraz.	p. e. 51°	$(C_2H_5)_2S_2$	gr. 0.1	Rend. 8 %
2° fraz.	p. e. 94°	$(C_2H_5)_2S_2Se$	gr. 2.3	Rend. 88 %

c) Preparazione con $(C_2H_5)_2S_2 + Se$ (un atomo) riscaldando in bagno d'olio a 200° per due ore. — Vennero usati gr. 8 di disolfuro; alla distillazione dopo il riscaldamento si ottennero:

1° fraz.	p. e.	51°	$(C_2H_5)_2S_2$	gr. 3.0
2° fraz.	p. e.	85°	$(C_2H_5)_2S_3$	gr. 0.6
3° fraz.	p. e.	94°	$(C_2H_5)_2S_2Se$	gr. 2.4
4° fraz.	p. e.	108°	$(C_2H_5)_2S_4$	gr. 2.1

L'analisi del disolfoseleniuro diede i seguenti risultati:

disolfoseleniuro pesato	$BaSO_4$ pesato	Se pesato	S % trovato	Se % trovato
gr. 0.005975	gr. 0.0137	gr. 0.0023	31.50	39.16
gr. 0.003055	gr. 0.0070	gr. 0.0012	31.47	39.28
gr. 0.004563	gr. 0.0105	gr. 0.0018	31.60	39.45

Se % teorico = 39.33; S % teorico = 31.85.

Il peso specifico determinato coi liquidi pesanti risultò 1.4994 a 13° e l'indice di rifrazione $n_D = 1.59914$ a $12^\circ.8$.

Riassumendo:

Vengono preparati i tre composti $(C_2H_5)_2Se_3$, $(C_2H_5)_2S_2Se$, $(C_2H_5)_2SSe_2$ non ancora descritti; il primo dall'azione del ossicloruro di selenio sul seleniomeraptano ed anche dall'azione del selenio sul diseleniuro dietilico; il secondo dal mercaptano e ossicloruro di selenio ed anche da mercaptano e cloruro di selenio Se_2Cl_2 e da disolfuro dietilico e selenio; il terzo da seleniomeraptano con cloruro di tionile e anche da diseleniuro e zolfo.

Vengono anche date le corrispondenti costanti di $(C_2H_5)_2Se_2$ prodotto già preparato da altri autori.

Le costanti fisiche di questi composti sono:

$(C_2H_5)_2Se_2$	p. eb. a 26 mm.	70°	$D_4^{13} = 1.6962$	$n_D^{12.8} = 1.58852$
$(C_2H_5)_2Se_3$	» » » 26 »	100°	$D_4^{13} = 1.7805$	$n_D^{12.8} = 1.60919$
$(C_2H_5)_2Se_2S$	» » » 26 »	98°	$D_4^{13} = 1.7070$	$n_D^{12.8} = 1.60244$
$(C_2H_5)_2SeS_2$	» » » 26 »	94°	$D_4^{13} = 1.4094$	$n_D^{12.8} = 1.57914$

mostrando un incremento notevole dei pesi specifici e dell'indice di rifrazione con la sostituzione del selenio allo zolfo, specie per i primi.

Chimica. — *Un altro contributo agli studi sulla mummificazione degli antichi egiziani.* Nota di A. TULLI, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sul potere emissivo totale del bismuto.* Nota di W. DEL REGNO, presentata dal Socio M. CANTONE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica-Fisica. — *L'azéotropisme dans les systèmes binaires contenant une substance hydroxylée.* Nota di M. LECAT, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica biologica. — *Peso molecolare della mioproteina (determinato col metodo della tensione superficiale secondo Lecompte Du Noüy)* ⁽¹⁾. Nota di L. DE CARO, presentata ⁽²⁾ dal Socio F. BOTTAZZI.

È stato dimostrato da Lecompte Du Noüy ⁽³⁾ che la tensione superficiale statica delle soluzioni proteiche, dell'oleato sodico ecc., col procedere della diluizione, prima di raggiungere il valore dinamico, uguale quasi a quello del solvente, a diluizioni grandissime, presenta due o tre minimi, critici, in corrispondenza di valori speciali del rapporto superficie-volume, dovuti al disporsi della sostanza sciolta in uno strato monomolecolare. Ciò ha luogo quando si verifica l'equazione: $Ca^2 = m \frac{S}{V}$: dove è

C = concentrazione;

a = area della sezione trasversale della molecola;

m = massa della molecola;

S = superficie totale di adsorbimento (cioè dell'interfacie soluzione-aria + soluzione-pareti);

V = volume della soluzione.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Napoli.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1929.

(3) P. LECOMPTE DU NOÛY, *Surface equilibria of biological and organic colloids*, New-York, 1926.

Mediante questa equazione si risale alle dimensioni e al peso molecolari della sostanza sciolta.

In queste mie ricerche ho determinato la tensione superficiale dinamica e statica (con l'apparecchio di Lecompte Du Noüy) di soluzioni di mio-proteina (a lungo dializzate) di cane, sciolta in acqua bidistillata, in presenza di tracce di idrato sodico.

Le determinazioni erano fatte in vetrini di forma cilindrica la cui totale superficie di adsorbimento, per 5 cm³ di soluzione, era uguale a 44,551 cm². (È stato dimostrato da Lecompte Du Noüy che le proteine vengono assorbite anche nell'interfacie soluzione-parete di vetro). In queste condizioni si è potuto osservare che la tensione superficiale statica, in funzione della diluizione, prima di raggiungere il corrispondente valore dinamico, presenta tre minimi caratteristici, in corrispondenza delle seguenti diluizioni: 1/37000; 1/55000; 1/80000.

Se si ammette che in corrispondenza di questi minimi la sostanza sciolta si organizza in uno strato monomolecolare, e che ciascun minimo corrisponde ad una orientazione speciale della molecola, si possono calcolare le tre dimensioni fondamentali di questa, considerandola inscritta in un parallelepipedo. E allora si ha:

$$a) \text{ minimo a } 1/37000 = \text{cm. } 225,6 \times 10^{-8}$$

$$= \mu\mu \text{ } 22,56$$

$$= \text{\AA} \text{ngström } 225,6$$

$$b) \text{ minimo a } 1/55000 = \text{cm. } 151,7 \times 10^{-8}$$

$$= \mu\mu \text{ } 15,17$$

$$= \text{\AA} \text{ngström } 151,7$$

$$c) \text{ minimo a } 1/80000 = \text{cm. } 104,3 \times 10^{-8}$$

$$= \mu\mu \text{ } 10,43$$

$$= \text{\AA} \text{ngström } 104,3$$

che sono le tre dimensioni del parallelepipedo.

Moltiplicando l'area della sezione orizzontale (perpendicolare all'asse maggiore) per l'altezza, si ha il volume della molecola, cioè:

$$\text{cm}^2 \text{ } 15822,3 \cdot 10^{-16} \times 225,6 \cdot 10^{-8} = 3569513 \times 10^{-24} \text{ cm}^3$$

Dividendo il volume molecolare così trovato per la densità della mio-proteina, anidra, (= 1,3 secondo Weber) si ha la massa molecolare, cioè g. 2644084×10^{-24} . Moltiplicando la massa molecolare, qui sopra ottenuta, per il numero di Avogadro, N, (= $6,062 \times 10^{23}$ secondo Millikan) si ha il peso molecolare di 1602843. Poichè la reazione della soluzione corrisponde a pH = 8,8 - 8,7 (questo spostamento è dovuto al variare della di-

luizione da 1/10000 a 1/80000), la mioproteina trovasi salificata in parte, allo stato di sale sodico.

La salificazione della mioproteina (di coniglio) come acido, procede, secondo Weber ⁽¹⁾, in 2 tempi: nel primo, dal punto isoelettrico (pH = 6,3) a pH 9-10; nel secondo, da pH = 9-10 a pH = 13. Nel caso presente si può ammettere che la mioproteina trovasi salificata quasi totalmente, nella prima zona, in cui essa funge da un acido dotato di una costante di dissociazione $K_a = 6,3 \times 10^{-9}$. Inoltre dai dati di Weber risulta ancora che la mioproteina possiede un peso equivalente, come anione, uguale a 950. Se adesso si divide il peso molecolare del mioproteinato = 1602843 per quello equivalente = 950, si ha 1687: cioè un anione proteico trasporta 1687 cariche negative.

Dai dati dell'analisi elementare della mioproteina di coniglio, di O. Fürth ⁽²⁾, e ammettendo che nella molecola si trovino almeno due atomi di solfo, si ricava la seguente formula per la molecola minima possibile: $C_{294}H_{464}O_{94}N_{76}S_2$, il cui peso molecolare è 6624 e per il mioproteinato sodico di 6776. Dividendo il peso molecolare 1602843 per 6776 si ha 273; il che permetterebbe di stabilire la formula grezza della molecola di mioproteinato sodico. Le dimensioni di questa molecola sono alquanto maggiori di quelle generalmente attribuite alle sostanze proteiche; esiste in letteratura solo un caso di un peso molecolare di 5.000.000 attribuito da Svedberg all'emocianina di *Helix Pomatia*. È da notare che queste dimensioni hanno il significato di un valore limite superiore; come pure è da prendersi in considerazione il fatto, che lo stato d'idratazione della molecola di mioproteinato, in corrispondenza di pH = 8,8 è un fattore, inerente al metodo, capace di esagerare di molto le reali dimensioni molecolari.

Ma come prova del grado di esattezza delle cifre trovate e calcolate, si può determinare il volume dell'atomo di carbonio, dividendo il volume molecolare per il numero di atomi di C. Si ottiene allora, un valore di 50,9 Ångström³).

Questo valore risulta alquanto maggiore del valore trovato per sostanze non idratibili, quali l'acido palmitico, stearico, cerotico ecc. (da 29 a 37 Ångström³).

È probabile, quindi, che il peso molecolare della mioproteina anidra sia di molto inferiore a 1602843; tuttavia, ciò che qui ha interesse, per le conseguenze di natura fisiologica che possono trarsi, è che le dimensioni spaziali della molecola di mioproteinato, sperimentalmente ricavate dallo

(1) H. H. WEBER. *Das kolloidale Verhalten der Muskeleiweißkörper*. III. Mitt. «Biochem. Zeitschrift», 189, p. 407, 1927.

(2) O. FÜRTH. *Chemie des Muskelgewebes*. OPPENHEIMER, «Handbuch der Biochemie.», IV., p. 301, 1925.

spessore dello strato monomolecolare, non debbono essere gran che differenti da quelle che la mioproteina possiede *in vivo*, nel tessuto muscolare.

Sapendo che in 1 cc. di muscolo striato l'estensione della superficie totale delle miofibrille è, in cifra tonda, uguale a 20000 cmq. (Bernstein), si può calcolare il numero di strati che la quantità di mioproteina (presente in 1 cmc. di muscolo) è capace di formare attorno a questa superficie, ammettendo che la mioproteina trovasi esternamente alle miofibrille (Bottazzi e Quagliariello). Si può anche calcolare la quantità in grammi di mioproteina necessaria per rivestire di uno strato monomolecolare la superficie di 20000 cmq. Poichè alla molecola si è attribuita la forma di un parallelepipedo, detta quantità è differente secondo la faccia che si mette a contatto con la superficie delle miofibrille. Secondo che ciò si avveri in corrispondenza di ciascuna delle tre facce, la quantità di mioproteina, che dev'essere contenuta in 1 cmc. di muscolo sarà rispettivamente di:

g. 0,12 (asse maggiore della molecola perpendicolare all'asse delle miofibrille - minimo a 1/37000);

g. 0,081 (asse maggiore parallelo all'asse delle miofibrille - minimo a 1/55000);

g. 0,0053 (asse maggiore parallelo all'asse delle miofibrille - minimo a 1/80000).

Ora, dalle ricerche di Bottazzi e Quagliariello, sul contenuto % del muscolo in proteine, risulta che la miosina rappresenta il 34-45 % delle proteine totali, mentre la mioproteina rappresenta il 66-55 % delle proteine totali. Ponendo le proteine totali uguali al 20 %, in cifra tonda, della massa muscolare, e assumendo per la mioproteina il valore medio del 60 % delle proteine totali, si ha che 100 grammi di muscolo contengono g. 12 di mioproteina, cioè 1 grammo di muscolo contiene g. 0,12 di mioproteina.

Dato il grande contenuto in acqua del muscolo, se si assume che 1 grammo di esso occupa il volume di 1 cc., la quantità di mioproteina in esso contenuta, corrisponderà esattamente a quella richiesta per rivestire la superficie totale delle miofibrille cioè 20000 cmq. con uno strato monomolecolare, e con orientazione tale della molecola, che il suo asse maggiore risulti perpendicolare all'asse maggiore delle miofibrille.

Nella molecola di mioproteina sono presenti gruppi polari e gruppi apolari liberi, quest'ultimi in quantità maggiore. Dei primi sono da considerarsi i $-\text{COOH}$, dei secondi i $-\text{CH}_3$. Poichè le miofibrille sono ricche di sostanze lipoidee, è verso di esse che saranno orientati i gruppi apolari liberi $-\text{CH}_3$, i quali sono certamente più solubili in una fase lipoidea che in una fase acquosa; viceversa i gruppi polari liberi $-\text{COOH}$ saranno in maggior numero (dissociati o no) orientati verso la fase acquosa, sarcoplasmica.

Analogamente una molecola di acido butirrico, nell'interfacie benzene-acqua, è orientata in modo che la catena apolare peschi nel benzene e il gruppo carbossilico nell'acqua.

Le molecole di mioproteina, in corrispondenza della reazione esistente nel muscolo a riposo ($\text{pH} = 7,4$), sono in una certa misura salificate allo stato di proteinato alcalino; questa salificazione avverrà, presumibilmente, solo nella porzione della molecola immersa nella fase acquosa. È a questo stato di salificazione che la mioproteina, che è una globulina, deve la sua solubilità nell'acqua, mentre è ai gruppi non polari ch'essa deve la sua solubilità nella fase lipoidea miofibrillare.

Quando il muscolo è in stato d'eccitamento, la molecola di mioproteina si deionizza, e quindi diminuisce la sua solubilità nella fase acquosa. Le porzioni di molecola prima ionizzate, tendono, quando hanno perduto le loro cariche elettriche, ad aggregarsi fra loro. Ma poichè le singole molecole restano, tuttavia, ancorate per l'altra estremità nella fase lipoidea, l'aggregazione di esse solleciterà la deformazione della fase lipoidea nel senso di un accorciamento lungo l'asse maggiore delle miofibrille.

La disposizione della mioproteina in uno strato monomolecolare funge da membrana contrattile, spiegherebbe la notevole velocità delle reazioni chimico-colloidali che sono a base della contrazione muscolare, nonché la completa reversibilità di esse.

Chimica biologica. — Na, K, Ca e Mg nel succo muscolare e nel suo ultrafiltrato ⁽¹⁾. Nota di G. QUAGLIARIELLO, presentata ⁽²⁾ dal Socio F. BOTTAZZI.

Muscoli di cani uccisi per dissanguamento, liberati nel miglior modo possibile del connettivo e del grasso interstiziale, tritati a macchina e pestati con sabbia di quarzo pura all'analisi, sono stati spremuti al torchio idraulico sino alla pressione di 250 atmosfere. In una parte del succo muscolare ($\text{pH} = \text{circa } 6$) si è fatta la determinazione delle sostanze proteiche, del residuo secco a 110°C e delle ceneri. Un'altra parte del succo, circa 300 cc, è stata ultrafiltrata attraverso membrana di collodio acetico 10 % . I primi 10 cc di ultrafiltrato sono stati scartati; si sono raccolti i successivi 30-35 cc, che sono stati portati a secchezza e inceneriti.

Sulle ceneri del succo intero e dell'ultrafiltrato si determina il Na, il K, il Ca e il Mg.

(1) Ricerche eseguite nel Laboratorio di Chimica biologica della R. Università di Napoli.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1929.

Nella soluzione delle ceneri, dopo aver allontanato i fosfati ed i metalli dei primi quattro gruppi analitici, si precipita il Ca come ossalato e il Mg come carbonato, e l'uno e l'altro vengono determinati come ossidi. Il K e il Na si determinano globalmente come cloruri, e il K poi come cloroplatinato, ottenendo per differenza il Na.

I risultati delle analisi sono i seguenti:

In 100 di succo intero g.	Na 0,0460;	K 0,4310;	Ca 0,0347;	Mg 0,0712
Nell'ultrafiltrato di g. 100				
di succo g.	» 0,0470;	» 0,2860;	» 0,0195;	» 0,0308
Differenza g.	— 0,001	+ 0,1450	+ 0,0152	+ 0,0404

Da questi dati risulta che circa $\frac{1}{3}$ del K e i $\frac{2}{5}$ del Ca e del Mg si trovano nel succo muscolare in una forma non ultrafiltrabile.

Per quanto è a mia conoscenza, non esistono in letteratura dati sullo stato di questi elementi nel muscolo cui possano essere riferiti questi da me ottenuti nel succo, eccetto che per il K, una parte del quale, secondo Neuschlosz, si trova nel muscolo in una forma non diffusibile, cosa per altro negata da Höber. Se consideriamo invece lo stato di questi elementi nel plasma del sangue, troviamo che mentre il K è tutto o quasi ultrafiltrabile, una buona parte del Mg e una parte anche maggiore del Ca non non lo sono. È evidente che questi elementi, nel muscolo come nel plasma del sangue, si trovino in qualche modo fissati ai colloidi.

Mi propongo di ricercare a quale dei colloidi del muscolo questi elementi si trovano fissati e possibilmente la natura del legame.

Geologia applicata. — *Risultati geologici dell'attraversamento dell'Appennino tosko-bolognese colla grande galleria della direttissima Bologna-Firenze* ⁽¹⁾. Nota di L. MADDALENA, presentata ⁽²⁾ dal Corresp. C. VINASSA DE REGNY.

È noto che i lavori per la nuova linea direttissima Bologna-Firenze sono a buon punto e che la più importante opera di questa linea, la galleria dell'Appennino, si presume sarà interamente forata entro l'anno.

Trattasi di un sotterraneo a doppio binario lungo 18510 metri, che deve considerarsi come una delle più importanti opere che siano state costruite nel mondo; se essa è di poco inferiore per lunghezza alla galleria del Sempione, offre però caratteristiche e condizioni assai differenti ed ha

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Sperimentale delle Ferrovie dello Stato.

(2) Nella seduta del 19 maggio 1929.

richiesto una somma di lavoro ben maggiore di quanto si è avuto in tale valico alpino. Se in quest'ultimo (costruito in un primo tempo per un solo binario) si dovette lottare contro la durezza della roccia da perforare, le elevate temperature, le acque calde; ben maggiori difficoltà si dovettero superare nell'Appennino per la lotta contro i terreni infidi rigonfianti, il gas esplosivo e le acque abbondantissime, difficoltà aggravate dalla grande sezione di scavo richiesta per il doppio binario.

È certo di grande interesse per la scienza geologica che sieno resi noti i risultati delle indagini compiute sia nel periodo degli studi preparatori, come nei 10 anni dell'esecuzione dei lavori, durante i quali venne prestata una assidua assistenza geologica.

Disgraziatamente i rinvenimenti di fossili furono pressochè nulli, quantunque gli assistenti ai cantieri fossero continuamente sollecitati alla ricerca e nessun lume paleontologico si è potuto ricavare, ma dal punto di vista stratigrafico si può ritenere risolta la dibattuta questione della posizione delle argille scagliose rispetto alle arenarie del nucleo centrale appenninico.

Lo scrivente, come geologo dell'Istituto Sperimentale delle F. S., ebbe la fortuna di collaborare fin dall'anno 1912 coll'ing. Claudio Segrè, compianto membro di questa Accademia, negli studi per il profilo geologico della grande galleria dell'Appennino, e di seguirne mano mano i lavori di scavo.

L'ing. Luigi Baldacci, quando era capo del R. Ufficio Geologico, fece parte della Commissione Adamoli per lo studio del tracciato della Direttissima Bologna-Firenze e spetta a lui il merito di aver intraveduto la reale struttura dell'Appennino tosco-bolognese.

Di particolare importanza, agli effetti costruttivi, era il riconoscere l'andamento e lo sviluppo della formazione delle « argille scagliose » che presenta caratteristiche di franosità in superficie, e che dà luogo a gravissime difficoltà negli scavi in sotterraneo per la tendenza al rigonfiamento con sviluppo di enormi pressioni, come si era constatato con la dura esperienza fatta nella costruzione di altre linee a semplice binario attraverso la catena appenninica.

Questa formazione, purtroppo tanto sviluppata nell'Appennino talchè ha reso l'Italia la terra classica delle frane, deve le sue origini alle potenti azioni meccaniche subite durante i movimenti orogenetici, da cui appunto è derivata la catena appenninica. Una complessa serie di stati argillosi, con poche intercalazioni di strati calcari (alberese) e più raramente di arenaria si trovò compresa tra le potenti pile di banchi dell'arenaria fondamentale (macigno) ed altre arenarie se pur meno potenti, ma sufficientemente compatte del terziario medio (oligocene?). Le spinte orogenetiche, procedenti dalle arenarie inferiori a quelle superiori, schiacciarono le argille, come una massa plastica compressa tra due mascelle di non uniforme resistenza, con-

torcendo e frantumando gli strati di arenaria e di calcare in esse compresi, facendo assumere alle argille una struttura fogliettata e scagliosa, dando ad esse movimenti incomposti e svariati a seconda del mutare delle pressioni, così da assumere, talora, una struttura fluidale e spingendole ad introdursi nelle fratture delle rocce vicine, così da simulare le forme di giacitura tipiche delle rocce eruttive.

Ad aumentare il disordine di queste formazioni contribuirono anche le eruzioni di rocce ofiolitiche (gabbri, diabasi, serpentini), che si insinuavano tra le argille.

È poi da notarsi che questi terreni sono sovente la sede di giacimenti di idrocarburi gassosi ed anche liquidi, come ne fanno fede i petroli emiliani che sono contenuti appunto nella formazione delle argille scagliose.

Date le difficoltà costruttive intrinseche di questi terreni che con un sotterraneo transappenninico si dovevano fatalmente attraversare, occorreva scegliere un tracciato col quale simili difficoltà fossero ridotte al minimo non solo per la minor lunghezza del tratto in argille scagliose, ma anche per le migliori condizioni nei riguardi dello stato franoso delle materie. Era necessario conoscere preventivamente la natura e la successione dei terreni da attraversarsi col grande sotterraneo onde predisporre i mezzi d'opera adatti e fare una valutazione attendibile del costo complessivo dei lavori.

Tale problema era aggravato dal fatto che esisteva una profonda divergenza di vedute tra i geologi italiani sulla età geologica e sui rapporti tectonici tra la formazione arenaceo-marnosa nel nucleo centrale dell'Appennino tosco-bolognese e le argille scagliose. Secondo gli uni dette formazioni arenacee dovevano attribuirsi all'eocene inferiore e le argille all'eocene medio; secondo gli altri queste ultime apparterrebbero al cretaceo superiore e dovevano intendersi come stratigraficamente sottostanti alla arenarie. È ovvio che, a seconda delle due interpretazioni, derivava una profonda differenza nella lunghezza di terreni pericolosi che si sarebbe dovuto attraversare col grande sotterraneo.

Questa divergenza di vedute diede luogo a vivaci discussioni scientifiche sostenute anche in pubblicazioni su riviste tecniche, e porsero il destro ad aspre polemiche sui giornali quotidiani a sostegno d'interessi locali.

I geologi dell'Amministrazione ferroviaria, in base al dettagliato studio della regione, erano giunti alla convinzione che la formazione argillosa doveva considerarsi come sovrapposta stratigraficamente a quella dell'arenaria macigno; ma ritennero doveroso, data l'importanza dell'opera e la necessità di esatti preventivi di confortare lo studio geologico colla esecuzione di alcuni sondaggi da spingersi fino oltre al piano del sotterraneo. Vennero infatti eseguite sette trivellazioni a carota che raggiunsero profondità variabili da un minimo di 135 ad un massimo di 386 metri e complessivamente vennero eseguiti m. 2268 di foro. I risultati confermarono pienamente gli studi preliminari e grazie ad essi i geologi dell'Amministrazione poterono

addivenire alla costruzione di un profilo geologico ed alla previsione dell'estensione dei tratti dei singoli terreni che si sarebbero incontrati.

Si riproduce qui lo specchietto di previsione allegato alla relazione geologica presentata nell'anno 1913.

Qualora si pensi che il costo previsto per metro lineare di galleria variava da lire oro 2800 a lire oro 8000, a seconda della natura del terreno, si comprende tutta la importanza e la responsabilità dello studio compiuto:

Successione dei tratti da N. a S.	Estensioni approssimative in cifre tonde	Natura dei terreni che si attraverseranno
I	oltre 2 km.	Strati e banchi di arenarie con interposizioni di schisti argillosi (terreno 1 a).
II	circa 4, 5 km.	Zona essenzialmente di schisti argillosi con interposizioni di schisti arenacei ed anche marnosi. Gli schisti argillosi possono presentare passaggi ad argille scagliose (terreno 2 a) ed eventuali incontri di rocce ofiolitiche.
III	circa 1 km.	Alternanze di strati arenacei e schisti argillosi generalmente induriti. Possono verificarsi intercalazioni di banchi più o meno marnosi (terreno 2 b) zona di passaggio al 3.
IV	circa 8 km.	Banchi di arenarie « macigno » e « marne arenacee » con qualche intercalazione di calcari marnosi e alternanza di schisti argillosi induriti del tipo del terreno 2 b, specialmente per l'ultimo mezzo km. verso Sud. (Terreno fondamentale 3).
V	oltre 3 km.	Alternanza di strati e banchi di arenaria e banchi di galestri calcarei, arenacei, marnosi e talora argillosi (terreno 2 b).

Le previsioni contenute nella citata relazione geologica, riprodotte nel profilo pubblicato, secondo i disegni originali, nel n. 6 del vol. XXV della « Rivista Tecnica delle Ferrovie Italiane » (14 luglio 1924) hanno corrisposto al vero, cosicchè se per gli studi geologici compiuti per la galleria del Sempione fu possibile dire che quella fu una « debacle » della geologia, in questo caso si è ottenuto invece un risultato veramente lusinghiero, anche perchè si è portato un efficace contributo scientifico con la piena conoscenza della struttura appenninica risolvendo, se non le incertezze geologiche, almeno quelle stratigrafiche, che dal punto di vista della geologia applicata hanno maggiore importanza.

Partendo dall'imbocco Nord, si incontrarono alternanze di arenarie e schisti argillosi interposti (terreno 1a) ora in regolare stratificazione, ora irregolarmente disposti in seguito a forti azioni meccaniche subite che diedero luogo a forti fratturazioni dei banchi di arenaria e ad intrusioni dello schisto tra i banchi medesimi, come si trattasse di una massa plastica.

Quantunque le stratificazioni fossero sovente tormentate, si è potuto quasi sempre distinguere un motivo dominante di pendenza verso Nord.

Ben presto incominciarono a verificarsi venute di gas, in predominio metano, specialmente dove predominava l'elemento argilloso che aveva potuto chiudere il gas come un liquido entro sacche ermetiche che conservavano una certa pressione.

Le filtrazioni d'acqua si mantennero sempre in quantità limitata.

Alla progressiva 2300 m. si verificò il passaggio alla sottostante formazione degli schisti argillosi passanti ad argille scagliose (terreno 2a) e cioè con una differenza inferiore ad un centinaio di metri di quanto era previsto nel profilo geologico. Il piano di separazione si presentò inclinato verso Bologna di circa 15°.

La roccia si presentò subito con la tipica struttura scagliosa, a superfici lucenti con trovanti più o meno frequenti di calcare, meno frequenti di arenaria, costituiti da frammenti di strati spezzati e sconvolti e così intimamente inglobati nella massa argillosa che essa, per le enormi pressioni subite, rimaneva tanto aderente ai blocchi estratti, da costituire come una patina lucente rivelando solo ai colpi di mazza il bianco cereo del calcare alberese o la struttura granulare dell'arenaria.

Furono continue le emanazioni di gas e particolarmente abbondanti dove si incontrarono pile isolate di strati calcarei sempre più o meno fratturati, quasiché questi strati costituissero il recipiente, reso ermetico dalla circostante argilla, che conteneva il gas compresso.

Subito si notarono i rigonfiamenti dell'argilla, specie nel cunicolo d'avanzata, a stento contenuti da potenti armature di legname costruite con sagome speciali e da centine di ferro, talchè per facilitare l'avanzata si dovette ricorrere alla costruzione a sagoma circolare del diametro di m. 3.15 con una speciale armatura a cunei di legno sostituiti poi da cunei di calcestruzzo in seguito all'incendio di una forte venuta di gas che bruciò per tre mesi.

L'attacco intermedio della galleria a mezzo dei due pozzi inclinati ha dato luogo, durante lo scavo dei pozzi medesimi, a qualche preoccupazione, perchè si ebbe un predominio di scisti argillosi fortemente sconvolti che produssero notevoli pressioni e fecero temere di essere caduti nella formazione di argille scagliose. Si trattava invece del terreno 2b di passaggio alla sottostante formazione delle arenarie fondamentali. Questo terreno è costituito, come si è detto, da alternanze di arenarie e di scisti argillosi, e poichè i pozzi inclinati hanno colpito casualmente i banchi argillosi secondo la loro

direzione, si è avuto un predominio di questa roccia che per le forti compressioni subite aveva assunto un certo grado di scagliosità.

È qui il caso di ricordare che la scagliosità è una struttura conseguente ad azioni meccaniche e perciò essa può riscontrarsi in terreni di epoche diverse, mentre le tipiche « argille scagliose » costituiscono un orizzonte geologico ben definito, con le loro caratteristiche proprietà che sono inerenti, non solo alla struttura scagliosa, ma anche alla composizione chimica.

È facile, ad esempio, constatare che nelle tipiche argille scagliose è quanto mai scarso l'elemento calcareo, mentre negli schisti argillosi che fanno parte delle formazioni 1 *a* e 2 *b* esso è molto abbondante, costituendo sovente delle vene spatiche.

Inoltre, mentre le argille della formazione 2 *a* rigonfiano se trattate all'autoclave, ciò non si verifica affatto negli schisti accennati.

Pertanto i geologi dell'Amministrazione, esaminando i terreni incontrati nello scavo dei pozzi, escludono immediatamente che potesse trattarsi delle tipiche argille scagliose: ed, infatti, col procedere degli scavi cominciarono ad apparire e quindi predominare le arenarie e le marne del terreno fondamentale 3 confermando pienamente le previsioni contenute nel profilo geologico della galleria, dal quale il profilo dei pozzi doveva scostarsi alquanto data la loro inclinazione.

Alla base dei pozzi era prevista la costruzione di una stazione di precedenza dei treni che per un tratto della lunghezza di m. 154 doveva avere una larghezza massima di m. 17 ed una altezza dal piano del ferro di m. 9,17: tale stazione doveva anche permettere un migliore sviluppo dei lavori e dei trasporti.

Tale enorme scavo avrebbe presentato delle difficoltà forse insormontabili se avesse dovuto essere eseguito nel terreno 2 *a*, invece si ebbe un predominio di arenaria e di schisti argillosi non rigonfianti; ciò dimostra che la zona per l'attacco intermedio dei pozzi venne scelta nel modo più opportuno.

E se pure le stratificazioni si presentarono fortemente contorte e frantumate per essere stata questa zona, vicino al nucleo centrale appenninico, particolarmente soggetta all'azione delle forze che determinarono il sollevamento orogenetico, non ebbero a presentarsi particolari difficoltà e la sagoma dei rivestimenti ed il loro spessore si mantennero nei limiti delle previsioni, e non si rese necessaria nessuna ricostruzione.

Il fatto di una relativa abbondanza dell'elemento argilloso ha portato anche il grande vantaggio di poter eseguire la maggior parte dello scavo a sezione doppia del normale senza che si verificassero sensibili filtrazioni d'acqua.

Intanto però si disponeva un impianto di pompatura per far fronte alla possibilità prevista di venuta d'acqua. Ben presto infatti, procedendo

con le avanzate verso Bologna e verso Firenze, attraverso le stratificazioni, sempre prevalentemente arenacee e marnose, incominciarono a verificarsi filtrazioni crescenti che giunsero a superare ogni previsione. Si può dire che questo solo è il fenomeno che superò i limiti di quanto era stato previsto.

La circolazione delle acque nelle grandi masse arenacee è ben poco conosciuta. Le arenarie sono per sè considerate come rocce permeabili solo per porosità e quindi assai debolmente, tanto meno poi quando nella stratificazione esistono alternanze di banchi di marna ed interposizioni di scisti argillosi, come è il caso della formazione fondamentale dell'Appennino toscano-bolognese.

Però nello studio geologico preliminare si aveva avuto occasione di constatare come la tettonica della regione, rilevata specialmente nei profondi solchi vallivi, fosse notevolmente accidentata con conseguenti fratturazioni degli strati, si erano previste filtrazioni di qualche entità e con carattere di diffusione più o meno regolare, non mai in vene concentrate di considerevole portata, quali si verificano generalmente soltanto nelle formazioni calcaree. Invece s'incontrarono sia nell'avanzata dai pozzi verso Bologna come in quella dall'imbocco Firenze, delle vene concentrate che raggiunsero rispettivamente la portata di circa litri 70 e litri 250 al secondo.

In complesso con l'impianto di pompe alla base dei pozzi, che andò mano a mano aumentando di potenzialità, si dovettero estrarre fino a 350 litri al secondo e dall'imbocco Firenze uscirono fino a 500 litri al secondo.

L'esperienza compiuta in questo lavoro servirà, anche da questo punto di vista, di esempio e di guida per casi del genere. La continua presenza delle filtrazioni d'acqua per tutto il tratto centrale della grande galleria dell'Appennino è sufficiente a confermare che esso non ha interessato, in tale tratto, la formazione delle argille scagliose, caratteristica delle quali è la mancanza d'acqua.

Quando, infatti, con l'avanzata dei pozzi verso Bologna venne raggiunto il passaggio alle argille scagliose, alla progressiva 1800 circa, cessò completamente ogni filtrazione. Il passaggio è avvenuto secondo un piano inclinato di circa 13° verso Bologna, dimostrando la regolare sovrapposizione delle argille alle stratificazioni arenaceo scistose del terreno 2b.

Pertanto il tratto complessivo scavato nel terreno più difficile previsto di circa 4500 m. sarà di m. 4600 con un errore di circa il 2 %.

È qui opportuno notare che nel profilo geologico si era previsto la possibilità che, dato l'andamento complessivo delle diverse formazioni, si potesse verificare una apparizione del terreno 2b nella parte mediana del tratto in argille scagliose. Tale apparizione, che dovrebbe essere caratterizzata dalla presenza di marne e soprattutto di arenarie, non si è finora verificata e pur non escludendo che possa aver luogo nel tratto di circa 1 Km.

che ancora resta da perforare, deve soltanto considerarsi come una eventualità eccezionalmente favorevole.

Dai pozzi inclinati verso Firenze, la galleria è ora interamente forata, ed i terreni incontrati furono sempre quelli essenzialmente arenacei, del terreno 3 passanti a marne con interposizione di schisti argillosi talora con predominio di marne; solo negli ultimi tre km. e mezzo verso l'imbocco Firenze, si ebbe un predominio dell'elemento argilloso, sempre più o meno arenaceo, con intercalazioni di calcare marnoso a struttura galestrina (terreno 2 b).

Mentre nella parte centrale del sotterraneo la formazione arenacea si mostrò fortemente tormentata e frantumata, procedendo verso Firenze si rendeva sempre più evidente una regolarità nella stratificazione con un motivo dominante di pendenza verso sud a conferma dell'andamento ad ampia anticlinale riconosciuto preventivamente nel nucleo centrale dell'Appennino toscano-bolognese.

L'opera grandiosa, ormai prossima al completamento, ha dimostrato in modo inoppugnabile la sovrapposizione delle argille scagliose sull'arenaria macigno, eliminando così un dubbio stratigrafico; purtroppo altrettanto non può dirsi dal punto di vista geologico.

Oceanografia. — *Considerazioni teorico-sperimentali sul regime delle maree del mare Adriatico.* Nota di M. TENAMI, presentata dal Socio M. PALAZZO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Petrografia. — *Studi petrografici sulla zona del Canavese.* Nota di M. FENOGLIO, presentata dal Corrisp. A. STELLA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Botanica. — *I fenomeni proteolitici in conchria.* Nota di C. GORINI, presentata dal Socio P. R. PIROTTA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Sul comportamento del fosfogeno nel tetano muscolare.* ⁽¹⁾ Nota di G. MARTINO, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

P. e G. P. Eggleton avevano visto che il fosfogeno — composto organico dell'acido fosforico (fosfocreatina) caratteristico dei muscoli — subisce in un gastrocnemio di rana, per effetto della faradizzazione diretta o indiretta (per via nervea), prolungata per 2'-4' minuti, una notevolissima diminuzione, mentre contemporaneamente aumenta l'acido fosforico inorganico. In un successivo riposo, della durata di 30'-60' minuti, nel gastrocnemio di rana tetanizzato si osserva sempre la reintegrazione del fosfogeno; ma essa può verificarsi, secondo gli stessi AA., solo in presenza di ossigeno e non è mai possibile osservarla in condizioni anaerobiche ⁽³⁾.

Invece nel succo muscolare di coniglio E. Lehnartz ⁽⁴⁾ osservò in condizioni praticamente anaerobiche una sintesi rilevante della fosfocreatina.

Successivamente D. Nachmansohn ⁽⁵⁾, H. Gorodissky ⁽⁶⁾, e poi Meyerhof e Nachmansohn ⁽⁷⁾ videro che anche nel muscolo in condizioni strettamente anaerobiche si verifica, nel riposo successivo ad un tetano più o meno prolungato, una reintegrazione parziale o totale del fosfogeno muscolare.

Intanto da ricerche personali, come pure da altre indipendenti di D. Nachmansohn, successivamente ancora confermate da Meyerhof e Nachmansohn, derivava il concetto della relativa indipendenza delle variazioni del fosfogeno dall'attività della fibra muscolare (processo di contrazione) e della loro intima connessione invece coll'attività delle giunzioni neuromuscolari, cioè col processo di eccitamento.

Avevamo già visto, che nelle contratture muscolari determinate dalla azione di svariati agenti (cloroformio, alcoli, caffeina, chinina ⁽⁸⁾) si verifica una netta diminuzione del fosfogeno, che pare tanto più marcata, quanto più energico è il potere contratturante dell'agente impiegato. In successive esperienze ⁽⁹⁾ potemmo accertare che il cloroformio non esercita sul fosfo-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Messina.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1929.

(3) EGGLETON P. and EGGLETON G. P., « Journ. of Phys. », 63, 155, 1927.

(4) LEHNARTZ E., « 10. Tagung der Dtsch. Phys. Ges. Frankfurt a. M. », 1927.

(5) NACHMANSOHN D., « Bioch. Ztschr. », 196, 73, 1928.

(6) GORODISSKY H., « H.-S. Ztschr. f. phys. Chemie », 175, 261, 1928.

(7) MEYERHOF O. u., NACHMANSOHN D., « Naturwiss. », 16, 726, 1928.

(8) MARTINO G., « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », III, 225, 1928; MARTINO G. e CARBONARO G., « Ibidem », III, 218, 1928.

(9) MARTINO G., « Arch. di Fisiol. », 26, 362, 1928.

geno del succo muscolare la stessa azione che su quello del muscolo; che la perdita dell'eccitabilità muscolare non accompagnata da accorciamento delle fibre, come per l'azione dei vapori di acetone, non si accompagna ad alcuna variazione del contenuto in fosfogeno; che se il cloroformio agisce su muscoli già resi ineccitabili con l'acetone o già contratti per effetto delle modificazioni cadaveriche, come pure quando si espongono al calore (capace in condizioni normali di determinare la completa scomparsa della fosfocreatina muscolare) muscoli già accorciati per l'azione dei vapori di alcool amilico o muscoli in rigidità cadaverica, mancano completamente le note variazioni del fosfogeno; che questo invece diminuisce sempre quando il muscolo subisce comunque un raccorciamento, purchè in normali condizioni di eccitabilità, anche per effetto della immersione prolungata in glicerina o in soluzione satura di NaCl. Dall'insieme di tutti questi dati risultava giustificata l'ipotesi che le variazioni della fosfocreatina potessero essere piuttosto in rapporto diretto con il fenomeno dell'eccitamento del muscolo per via nervea, sicchè parve logico esplorare il comportamento del fosfogeno negli accorciamenti muscolari provocati in condizione di blocco delle giunture neuromuscolari, sperimentando cioè in muscoli curarizzati. In tali condizioni nè la tetanizzazione diretta prolungata, nè l'esposizione al calore o ai vapori di cloroformio ci permise mai di osservare alcuna netta diminuzione del contenuto in fosfogeno dei muscoli ⁽¹⁾. Questo risultato convalidava così la nostra ipotesi, che « la variazione del fosfogeno durante l'accorciamento muscolare potesse essere precisamente connessa con l'attività della giuntura neuro-muscolare ».

Anche D. Nachmansohn ⁽²⁾ aveva confrontato gli effetti della tetanizzazione di muscoli normali con quella di muscoli curarizzati, pervenendo a risultati corrispondenti e affermando che « das Phosphagen eine Substanz ist, die der Vermittlung der Erregung vom Nerven zum Muskel dient, nicht aber dem eigentlichen Kontraktionsvorgang ». E più tardi anche bloccando le terminazioni nervose motrici col cloruro di tetrametilammonio, Meyerhof e Nachmansohn ⁽³⁾ videro che la tetanizzazione è incapace di provocare nel muscolo di rana alcuna diminuzione del contenuto in fosfogeno.

Stabilito così un nesso tra fosfocreatina dei muscoli e processo di eccitamento, si imponeva di cercare di aggiungere qualche dato più preciso sul comportamento del fosfogeno nei vari momenti dell'attività muscolare.

Pensammo pertanto di eseguire delle prove di tetanizzazione diretta e indiretta (per via nervea) del gastrocnemio di anfibì, con varia durata di stimolazione elettrofaradica, e ricorrendo a un espediente che permettesse

(1) MARTINO G., « Ibidem », 26, 379, 1928.

(2) NACHMANSOHN D., loc. cit.

(3) MEYERHOF O. und NACHMANSOHN D., loc. cit.

di interrompere subito al momento voluto qualsiasi processo biochimico del muscolo. A quest'ultimo scopo servì l'uso dell'aria liquida ⁽¹⁾, la quale, se presenta l'inconveniente di indurre eccitamento nel muscolo all'atto della immersione, non determina però che modiche variazioni del contenuto in fosfogeno di esso: secondo le ricerche di H. Gorodissky ⁽²⁾, esse sono molto inferiori a quelle che si ottengono con la tetanizzazione del muscolo.

Le ricerche furono eseguite sui gastrocnemi di *Bufo viridis* e con la seguente disposizione sperimentale:

Il muscolo si situava tra le due branche di un eccitatore a punte mobili e moderatamente comprimenti, il quale a sua volta era sostenuto in posizione verticale su un vaso di Dewar, a pochi centimetri da questo, così che bastava spingere il gastrocnemio con una bacchetta di vetro per farlo cadere nell'aria liquida, con la perdita soltanto di frazioni minime di tempo. Quando si doveva sperimentare stimolando il muscolo per via indiretta, il nervo del preparato poggiava sugli elettrodi di un secondo eccitatore (eccitatore per nervi di Dastre). Si utilizzò la corrente faradica di un induttorio a slitta del Du Bois-Réymond, alimentato da un accumulatore di due volts, ed essa era inviata per la via del primo eccitatore nelle prove di faradizzazione diretta, per la via del secondo in quelle di faradizzazione indiretta. Fu sempre impiegata in tutte le esperienze corrente forte e di uguale intensità (rocchetti chiusi).

Si eseguirono i dosaggi dell'acido fosforico inorganico e del fosfogeno con la tecnica proposta dagli Eggleton ⁽³⁾, e da noi finora sempre adottata.

Dalle esperienze, i cui risultati sono esposti nell'annessa tabella, derivò quanto segue:

1° Confrontando il contenuto in fosfogeno di un gastrocnemio faradizzato direttamente per 3"-18" secondi con quello del muscolo omologo di uno stesso animale, faradizzato per un tempo più lungo 20"-170"), nel primo gastrocnemio esso risultò ridotto in genere a quantità indosabili, mentre nel secondo si trovò dosabile in quantità varie ma sempre bene valutabili.

Ciò induce a pensare che durante il tetano da faradizzazione diretta, purchè prolungato oltre i 20" secondi circa, possa verificarsi una sintesi parziale del fosfogeno scomparso all'inizio della stimolazione ⁽⁴⁾.

2° Anche con la tetanizzazione dei muscoli per via nervea si ottenne una rapida scomparsa della fosfocreatina nei muscoli faradizzati per

(1) L'aria liquida adoperata ci venne gentilmente fornita dall'Istituto di Fisica di questa R. Università di Messina.

(2) GORODISSKY H., loc. cit.

(3) EGGLETON P. and EGGLETON G. P., « Bioch. Journ. », 21, 190, 1927.

(4) Ricordiamo a questo proposito che era già risultato da osservazioni di O. MEYERHOF (« Brit. med. Journ. » 3188, 859, 1927), che « während der Hauptteil des Phosphagens erst in der oxydativen Erholung restituiert wird, wird ein kleiner Teil der während des Tetanus zerfallenden Menge bereits unmittelbar nachher wieder aufgebaut ».

un tempo breve (1''-15'' secondi), mentre se ne trovarono costantemente quantità dosabili nei gastrocnemi faradizzati per tempi più lunghi (19''-30'' secondi).

La scomparsa del fosfogeno nel caso della stimolazione per via nervea risultò più pronta che nelle prove di stimolazione diretta; la sua parziale ricomparsa invece coincise per limiti di tempo con quella dei muscoli direttamente faradizzati. Tale ricomparsa della fosfocreatina non cominciò ad apprezzarsi che in coincidenza di un evidente rilasciamento delle fibre muscolari tetanizzate (attenuazione del tetano): probabilmente ciò significa che vi è un rapporto tra sintesi di fosfogeno che si verifica durante il tetano muscolare ed esaurimento di attività delle placche motrici, indipendentemente dall'attività che nelle fibre del muscolo può continuare per effetto di stimoli diretti.

3° Stimolando i due gastrocnemi, mercè la faradizzazione diretta, per un tempo capace di dare la massima diminuzione del contenuto in fosfogeno (5''), e lasciando cadere immediatamente dopo uno dei muscoli nell'aria liquida, mentre l'altro veniva prima lasciato riposare per 5''-20'' secondi, in questo ultimo si trovarono quantità dosabili di fosfogeno solo quando il tempo di riposo fu tale, che sommato a quello precedente di faradizzazione permise di raggiungere il limite minimo di 20''-25'' secondi, risultato necessario per la ricomparsa (sintesi) del fosfogeno durante il tetano ininterrotto.

Sembra pertanto che il fosfogeno, scomparso per effetto di una breve faradizzazione (5''), possa ricomparire solo dopo un tempo di circa 15'' secondi, e ciò tanto se il muscolo rimane in attività, quanto se rimane in riposo durante tale periodo.

4° Stimolando direttamente un gastrocnemio per un tempo breve (5''-3''), e lasciandolo riposare per un tempo sufficientemente lungo (25''-42'' secondi), mentre il muscolo omologo dello stesso animale veniva invece faradizzato per un tempo uguale alla somma del periodo di tetanizzazione e di riposo del primo (30''-45''), si trovò poi nei due muscoli un uguale contenuto in fosfogeno.

Tanto durante il tetano, quanto durante il riposo, a parità di tempo, si verificherebbe quindi la reintegrazione di una stessa quantità di fosfogeno.

5° La quantità globale dei fosfati dosabili col metodo di Briggs (acido fosforico inorganico + fosfogeno) risultò in genere inferiore nei muscoli stimolati per un tempo breve e superiore in quelli stimolati per un tempo più lungo.

Questo dato coincide con una precedente osservazione di Embden e Lawaczek ⁽¹⁾, i quali videro che l'aumento di acido fosforico nei muscoli tetanizzati è tanto più forte, quanto più rapidamente dopo l'inizio della stimolazione essi vengono immersi in aria liquida.

(1) EMBDEN G. u. LAWACZEK H., « Bioch. Zeitschr. », 127, 181, 1922.

TABELLA

Esperienza	Tipo di faradizzazione	Durata della stimolazione	Durata del successivo riposo	Acido fosforico mg. di P $\frac{o}{10}$	Fosfogeno mg. di P $\frac{o}{10}$	Osservazioni
I	1° Gastrocn. } 2° Gastrocn. }	diretta	10'' 30''	0 0	88 76	0 9
II	1° Gastrocn. } 2° Gastrocn. }	"	10'' 45''	0 0	75 70 $\frac{1}{2}$	7 12 $\frac{1}{2}$
III . . .	1° Gastrocn. } 2° Gastrocn. }	"	15'' 60''	0 0	82 78	0 6
IV . . .	1° Gastrocn. } 2° Gastrocn. }	"	15'' 170''	0 0	88 66 $\frac{1}{2}$	0 6 $\frac{1}{2}$
V	1° Gastrocn. } 2° Gastrocn. }	"	5'' 20''	0 0	81 69 $\frac{1}{2}$	0 7 $\frac{1}{2}$
VI . . .	1° Gastrocn. } 2° Gastrocn. }	"	2'' 25''	0 0	61 62	17 14
VII . . .	1° Gastrocn. } 2° Gastrocn. }	"	3'' 18''	0 0	76 62	0 0
VIII . .	1° Gastrocn. } 2° Gastrocn. }	indiretta	2'' 10''	0 0	83 74	0 3
IX . . .	1° Gastrocn. } 2° Gastrocn. }	"	1'' 15''	0 0	79 66	0 0
X	1° Gastrocn. } 2° Gastrocn. }	"	1'' 19''	0 0	81 55	7 18 $\frac{1}{2}$
XI . . .	1° Gastrocn. } 2° Gastrocn. }	"	3'' 22''	0 0	78 52	0 15
XII . . .	1° Gastrocn. } 2° Gastrocn. }	"	5'' 30''	0 0	83 79	1 $\frac{1}{2}$ 9 $\frac{1}{2}$
XIII . .	1° Gastrocn. } 2° Gastrocn. }	diretta	5'' 5''	0 5''	86 82	0 0
XIV . .	1° Gastrocn. } 2° Gastrocn. }	"	5'' 5''	0 10''	77 68	0 0
XV . . .	1° Gastrocn. } 2° Gastrocn. }	"	5'' 5''	0 15''	94 91 $\frac{1}{2}$	0 8
XVI . .	1° Gastrocn. } 2° Gastrocn. }	"	5'' 5''	0 20''	81 65 $\frac{1}{2}$	0 10 $\frac{1}{2}$
XVII . .	1° Gastrocn. } 2° Gastrocn. }	"	30'' 5''	0 25''	68 65	12 $\frac{1}{2}$ 13
XVIII .	1° Gastrocn. } 2° Gastrocn. }	"	45'' 3''	0 42''	98 80	7 6

Nel corso della stimolazione del 2° gastrocnemio si presentò un evidente rilasciamento delle sue fibre.

Il 2° gastrocnemio venne fatto cadere in aria liquida esattamente all'inizio di una evidente attenuazione del tetano.

La tetanizzazione del 2° gastrocnemio fu interrotta subito dopo la comparsa di un evidente rilasciamento delle fibre muscolari.

I fatti riferiti ci pare che si possano così spiegare:

Al passaggio dell'eccitamento dal nervo al muscolo subito si verifica una rapida scissione del fosfogeno, con produzione di acido fosforico inorganico. Tale scissione è più pronta nel caso della faradizzazione indiretta che in quello della faradizzazione diretta, probabilmente perchè nella tetanizzazione del muscolo per via nervea è certo implicata l'attività contemporanea di *tutte* le giunzioni neuro-muscolari, mentre lo stesso può non verificarsi durante la faradizzazione diretta. Le condizioni stabilitesi durante il primo periodo dell'eccitamento si mantengono fino al momento, in cui comincia ad esaurirsi l'attività delle placche motrici. In coincidenza con questo fenomeno, e anche se il tetano continua per l'azione dello stimolo elettrico sulla fibra muscolare, come nel caso della faradizzazione diretta, si rende possibile la reintegrazione della fosfocreatina: per tale fenomeno di sintesi non ha alcuna importanza lo stato di attività o di riposo della fibra muscolare, perchè nell'un caso e nell'altro, a parità di tempo, la quantità di fosfogeno reintegrata risulta sempre la stessa. Questo ultimo fatto potrebbe anche servire ad avvalorare, a parer nostro, le osservazioni dei precedenti Autori, che videro reintegrarsi il fosfogeno muscolare tanto in presenza di ossigeno, quanto in condizioni strettamente anaerobiche.

A questa interpretazione dei risultati riferiti intendiamo attribuire soltanto quel valore, che sembra oggi spettarle in base ai fatti osservati; e riconosciamo che la nostra ipotesi esige un ulteriore controllo e una più solida base di nuovi dati sperimentali.

Fisiologia degli insetti. — *Fenomeni tropici nelle larve di « Bombyx Mori »* ⁽¹⁾. Nota di M. TIRELLI, presentata ⁽²⁾ dal corrisp. F. RAFFAELE.

Si è parlato molto di tropismi, forse troppo, da quando Loeb ebbe il merito di mettere in circolazione questa fortunata parola. E da molti si è fatta una deplorabile confusione sul suo significato; estendendone il valore che è quello di una semplice indicazione, per quanto sintetica ed espressiva, di fenomeni vitali, a comprendere le cause stesse di questi fenomeni.

Dopo l'enunciazione di Loeb, a poco a poco si sono venute formando due correnti fra i sostenitori della sua teoria. Coloro che hanno cercato di dare ad essa una interpretazione meno rigidamente meccanicista, e di attenuare le sue conseguenze, che sentono veramente più un gelo di morte

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia e Fisiologia comparate della R. Università di Genova e nella R. Stazione Bacologica Sperimentale di Padova.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1929.

che il calore della vita; e coloro che hanno invece voluto rendere ancora più schematico il concetto di tropismo, tentando inoltre di attribuire ad esso un valore generale e quasi dogmatico.

Loeb riporta in un suo libro ⁽¹⁾ la descrizione di una macchina da tropismi. Una cassetta sostenuta da tre ruote, di cui una orientabile; con due cellule a selenio sul lato anteriore, che dirigono la ruota orientabile; se le due cellule ricevono uguale quantità di luce, la cassetta cammina in linea retta; se ricevono quantità di luce differenti la cassetta gira sino a che la quantità di luce ricevuta da ciascuna delle due cellule sia uguale. Aggiustando il meccanismo interno della cassetta, si può a volontà renderla negativamente o positivamente fototropica. Loeb non ha il coraggio di paragonare esplicitamente questa cassetta ad un organismo; ma dal testo si vede che un tale paragone lo soddisferebbe molto. Tutti sapevano, prima di Loeb, che le foglie di una pianta vanno in alto e verso la luce, e che le radici si spingono sotterra; dicendo con Loeb che le radici sono positivamente e le foglie negativamente geotropiche, non ne sappiamo in realtà di più; abbiamo soltanto dato un nome al fenomeno. Con i tropismi noi non possiamo *spiegare* fenomeni vitali; noi possiamo soltanto descrivere meglio ed analizzare talvolta questi fenomeni. Così nella pianta potremo stabilire se è un fototropismo negativo, o piuttosto un geotropismo positivo che spinge le radici sotterra; potremo quindi analizzare meglio il fenomeno in sé, ed indicarne con più esattezza le cause immediate; ma quando si tratta di dire *perchè le radici obbediscono a queste cause* la teoria dei tropismi ci lascia ugualmente all'oscuro. In ogni modo questa teoria ha avuto ed ha il merito di dare un impulso notevole alle ricerche sperimentali.

Bohn ⁽²⁾ ha complicato la teoria dei tropismi con i concetti di sensibilità differenziale. Egli ha emesso una legge, secondo cui il tropismo di un organismo cambia di segno quando si ha una variazione nell'intensità dello stimolo che lo determina. Mi sembra però che Bohn sia giunto all'enunciazione di questa legge partendo da un'osservazione semplicista, e da una interpretazione senza dubbio parziale, di fenomeni vitali. Egli osserva che le cimici fuggono la luce; ma se l'intensità della sorgente luminosa aumenta, il fototropismo negativo delle cimici improvvisamente si inverte e le cimici diventano positivamente fototropiche; ma si tratta, e Bohn stesso fa notare, di una reazione assolutamente temporanea; le cimici si voltano, ma non tutte e nemmeno completamente, per tornare in ogni caso, immediatamente, a fuggire di nuovo la luce. Le azioni tropiche dovrebbero avere un fondamento identico, sia nelle piante che negli animali, e ciò è logico perchè esse vorrebbero spiegare la proprietà ed il comporta-

(1) LOEB. J., *Forced movements, tropism and animal conduct*. Philadelphia and London, 1918.

(2) BOHN G. DRZEWINA A., *La chemie et la vie*. Paris-Alcan.

mento stesso della materia vivente. Newcombe⁽¹⁾ nelle piante nega assolutamente l'inversione dei tropismi.

I tropisti convinti spiegano l'azione delle energie esterne sugli organismi ammettendo che una distribuzione dissimetrica di esse sulla superficie del corpo dell'organismo possa modificare l'equilibrio chimico e chimico-fisico dell'organismo stesso; e che per ristabilire questo equilibrio l'organismo sia obbligato a spostarsi in quella direzione tale che assicuri nuovamente la distribuzione simmetrica delle energie esterne sul suo corpo. Si è visto che molti fenomeni vitali seguono leggi della chimica e della fisica; così l'intensità delle più diverse manifestazioni vitali cresce, con l'aumento della temperatura, secondo lo stesso coefficiente che la legge di Arrhenius stabilisce per il decorso delle reazioni chimiche. Con esperienze su *Eudendrium* Loeb⁽²⁾ ha trovato che il fototropismo obbedisce alla legge di Bunsen-Roscoe, che è il fondamento della fotochimica: la soglia dell'eccitazione è uguale al prodotto dell'intensità per la durata dello stimolo.

In altre esperienze Loeb e Northrop⁽³⁾ hanno trovato che la luce orienta gli organismi in modo che il prodotto $I \times t \times \cos. a$, in cui I è l'intensità luminosa, t il tempo durante il quale lo stimolo luminoso agisce ed a l'angolo d'incidenza della luce, sia uguale per tutti gli elementi fotosensibili degli occhi o della pelle.

Alcuni hanno confermato i risultati di queste esperienze, così Hecht⁽⁴⁾ in *Ciona intestinalis*, Moore⁽⁵⁾ in *Cerianthus membranaceus*; altri no. Pieron⁽⁶⁾ trova che le quantità liminari dell'eccitamento luminoso non sono, rispetto agli organismi, una funzione lineare, come vorrebbe appunto la legge di Bunsen-Roscoe, ma una funzione parabolica.

Rabaud⁽⁷⁾ distingue gli organismi in stenofotici ed eurifotici secondo che sopportano male o bene le variazioni di intensità luminosa. I movimenti però che produce la luce, non sono sempre necessariamente orientati,

(1) NEWCOMBE F. C., *The supposed reversal of geotropic response*. « New Physiologist »: XXII, 281-288, 1923.

(2) LOEB J. WASTENEYS H., *The identity of heliotropism in animals and plants*. « Science » XLI, 328-330 1915; *On the identity of heliotropism in animals and plants*. « Proc. Nat. Ac. Sc. » I, XLIV, 44-47.

(3) LOEB J., NORTHROP J. H., *The photochemical basis of animal heliotropism*. « Journ. gen. Physiol. » V, 581-596, 1922.

(4) HECHT S., *The photic sensitivity of « Ciona intestinalis »*. Journ. gen. Physiol. I, 147, 1918.

(5) MOORE M., *Tropistic reaction of « Cerianthus membranaceus »*. « Journ. gen. Physiol. » VI, 385-392, 1924; *The reaction of « Cerianthus » to sources of light*. Ib., VI, 393 1924.

(6) PIÉRON H., *La loi de BUNSEN-ROSCOE s'applique-t-elle à l'excitation lumineuse des Invertébrés? (Résultat des recherches sur « Mja arenaria »)* « C. R. Ac. Sc. », CLXXXI, 688, 1925; *La loi d'excitation lumineuse chez « Mja arenaria »*. « C. R. Soc. Biol. », XCIII, 1235, 1925.

(7) RABAUD E., *La lumière et le comportement des organismes*. « Bull. Biol. France et Belgique ». LII, 4, 1918.

la luce non provoca sempre un effetto tropico, spesso determina una semplice eccitazione motrice, ma la direzione del moto è determinata da altre influenze. Non bisogna trascurare l'azione del mezzo sui fenomeni tropici; Rose ⁽¹⁾ ha messo in evidenza l'azione del pH sul fototropismo dei Copepodi; influenze esterne, alle volte non ben precisabili, possono complicare notevolmente la giusta interpretazione dei fenomeni tropici di un organismo.

Del resto non bisogna credere che i movimenti di tropismo siano davvero moti macchinali, sempre decisi, rapidi, sicuri. Quando un bruco si dirige verso la luce, o verso il suo alimento, ha un'andatura spesso incerta, titubante quasi, alle volte si arresta, poi riprende il cammino, ed è un cammino in generale tortuoso. Sembra che l'animale vada cercando lungo la strada la sorgente dello stimolo che lo eccita, e non trovandola, la cerca ancora avanzando. Egli non sa localizzare con precisione la sorgente dello stimolo, l'eccitamento che riceve non gli dà modo di poter determinare la distanza che deve percorrere per raggiungere la fonte dell'eccitamento. In una parola: l'organismo reagisce allo stimolo tropico, ma non come la « macchina da tropismi » di cui ho parlato; e nel comportamento stesso dell'organismo, nella modalità almeno con cui obbedisce allo stimolo tropico, dovremmo vedere, se non in altro, la differenza di un organismo dalla macchina.

Tali ultime osservazioni sono state fatte da Manquat ⁽²⁾, su *Leucoma phorrhaea* e su *Helix arbustorum*; e valgono anche per la modalità con cui si svolgono i fenomeni tropici nelle larve di *Bombyx mori*.

Bachi neonati, digiuni, messi in un tubo orizzontale, illuminato ad una estremità, scuro all'altra, si dirigono con notevole rapidità verso la luce. È indifferente che si tratti di luce artificiale o di luce diurna. In tubi completamente illuminati, verticali, i bachi mostrano un debole geotropismo negativo, tentando appena di salire. In un tubo verticale, con l'estremità alta oscura; e quella bassa illuminata, i bachi si dirigono tutti, e rapidamente, in basso; il fototropismo supera nettamente il geotropismo.

In tubi orizzontali, sia tutti illuminati che tutti oscuri, che abbiano ad una estremità alcune strisce di foglia di gelso, i bachi restano indecisi, senza dirigersi nè all'una nè all'altra estremità. Esiste uno stimolo chimico, ma non tanto forte da determinare un effetto tropico. I bachi sentono la presenza della foglia, perchè divengono irrequieti e si agitano con maggiore intensità; essi sono indubbiamente eccitati, ma tale stimolo

(1) ROSE M., *Action du pH extérieur sur le phototropisme des Copépodes pélagiques*. « Arch. Physiol. biol. », III, 33-41, 1924.

(2) MANQUAT M., *Sur la théorie des tropismes dans le comportement animal*. Nancy (Thèse de Doct.), 232, pp. 1921. Ved. anche ERHARD H., *Kritik von J. Loeb. Tropismenlehre auf Grund fremder und eigener Versuche*. « Zool. Jahrb., Abt. Allg. Zool. u. Physiol., d. Tiere. » XXXIX., I, 1922.

non è capace di determinare e dirigere un movimento verso la sorgente dello stimolo stesso. I bachi tastano le pareti di vetro, come cercando la foglia, di cui sentono l'effluvio, ma non sanno dirigersi verso questo effluvio. Sono chemio-sensibili; ma non chemio-tropici. Essi alzano la testa ed i primi segmenti del corpo; è questo un riflesso che si nota nei bachi in presenza di vari stimoli. In tubi orizzontali, con una estremità illuminata e l'altra oscura con gelso, i bachi vanno alla luce; in tubi verticali, tutti illuminati, con gelso all'estremità bassa, i bachi si dirigono in alto; e in queste due ultime esperienze i movimenti fototropici positivi e geotropici negativi dei bachi, sono più rapidi e decisi che in tubi ugualmente disposti, ma senza foglia. Vi è dunque uno stimolo chimico, ma questo non è capace di determinare per suo conto un chemiotropismo, tale stimolo è solo capace di rafforzare il fototropismo positivo, ed il geotropismo negativo che i bachi posseggono alla nascita. Tale fatto coincide con le osservazioni di Rabaud, più su riportate. Secondo Rabaud lo stimolo luminoso spesso non determina un tropismo, ma un semplice eccitamento motorio, mentre la direzione del movimento è determinata da altre influenze, talora complesse. Nei bachi neonati lo stimolo chimico determina un eccitamento motorio, ma il movimento dipende dalla luce e dalla tendenza dei bachi a salire. Quando i bachi neonati dal fondo dei telaini dove son collocate le uova salgono sulle striscie di foglia deposte sulla garza, essi obbediscono ad un fototropismo positivo e ad un geotropismo negativo, resi più intensi dall'eccitamento motorio prodotto dallo stimolo chimico.

Esiste in realtà anche un vero chemiotropismo, ma bisogna mettere i bachi ad una estrema vicinanza dalla foglia, essi allora riescono a dirigersi direttamente, anche all'oscuro, su di essa. Ma è un chemiotropismo molto debole rispetto al foto e al geotropismo. Durante la prima età i fenomeni descritti non sembrano mutare. Noi possiamo quindi stabilire una serie decrescente di tropismi: *Fototropismo positivo* > *Geotropismo negativo* > *Chemiotropismo positivo*.

Nelle esperienze di cui ho esposto i risultati, usai tubi di vetro ad estremità ora ermeticamente chiuse, ora tappate semplicemente con tamponcini di cotone; talvolta le due estremità di uno stesso tubo erano chiuse, una nella prima ed una nella seconda maniera. Verso le estremità chiuse ermeticamente si ha verosimilmente un accumulo di vapor d'acqua ed anidride carbonica. In un tubo orizzontale, con una estremità illuminata e chiusa, ed una estremità oscura aperta (chiusa con semplice tamponcino di cotone) i bachi vanno alla luce, ma appena hanno raggiunto la zona illuminata, appena quindi sono arrivati a metà circa del tubo, si arrestano; in un tubo con l'estremità illuminata aperta, e quella oscura chiusa, i bachi non si arrestano appena raggiunta la zona illuminata, ma a poco a poco si dirigono verso l'estremità aperta del tubo.

Subito dopo la prima muta il comportamento tropico dei bachi cambia.

Posti in un tubo verticale, tutto illuminato, mostrano un geotropismo negativo notevolmente più spiccato, il fototropismo positivo persiste. In un tubo verticale con l'estremità bassa illuminata, e l'estremità alta oscura, i bachi si dirigono verso la luce. Il fototropismo è ancora maggiore del geotropismo. In un tubo orizzontale, tutto illuminato, con foglia di gelso ad una estremità, i bachi si dirigono con notevole rapidità verso la foglia. In un tubo orizzontale, completamente oscuro, i bachi sono però incapaci di raggiungere l'estremità colla foglia; così in un tubo verticale e tutto oscuro, i bachi non si dirigono verso l'alto. Lo stimolo luminoso è neces-



Fig. 1



Fig. 2.

sario quindi in questo periodo, ai bachi, perchè il chemiotropismo ed il geotropismo possano manifestarsi.

In un tubo verticale, con gelso all'estremità bassa, i bachi si dirigono in basso verso la foglia. Il chemiotropismo comincia a superare d'intensità gli effetti del geotropismo. Ma in un tubo orizzontale, con gelso all'estremità oscura, i bachi vanno ancora verso la luce, il chemiotropismo è ancora inferiore al fototropismo. Si può a questo punto stabilire la graduatoria seguente:

Fototropismo positivo > *Chemiotropismo positivo* > *Geotropismo negativo*; avvertendo però che vi è bisogno della luce perchè gli effetti del chemio e del geotropismo possano manifestarsi.

Successivamente cresce ancora l'intensità del chemiotropismo e del geotropismo; i bachi riescono a dirigersi verso l'alto o verso il gelso anche

in tubi completamente oscuri. Non solo, ma in un tubo con una estremità illuminata, e l'altra oscura, con gelso, i bachi vanno verso il gelso. Il chemiotropismo è divenuto più intenso anche del fototropismo. Si è invertita la serie dei valori tropici: *Chemiotropismo positivo* > *Fototropismo positivo* > *Geotropismo negativo*.

In un tubo verticale con l'estremità alta illuminata, e l'estremità bassa oscura, con gelso, i bachi vanno però in alto, alla luce; il fototropismo ed il geotropismo sommati insieme superano ancora il chemiotropismo. Ma infine i bachi, in un tubo disposto come il precedente, riescono a dirigersi in basso, all'oscuro, verso il gelso. Dunque: *Chemiotropismo* > *Fototropismo* + *Geotropismo*.

E noto che i bachi utilizzano solo una piccola quantità delle sostanze contenute nella foglia che mangiano; ho voluto provare se i caccherelli possono esercitare un'azione chemiotropica sui bachi. Tale azione esiste; con i caccherelli secchi, in un tubo orizzontale completamente illuminato, i bachi si dirigono verso i caccherelli, ed ugualmente vi si dirigono all'oscuro. Il chemiotropismo determinato dai caccherelli supera il foto ed il geotropismo. Ma in un tubo con caccherelli secchi ad una estremità e gelso all'altra, i bachi si dirigono senza esitazioni verso il gelso. Ma la foglia di gelso è anche umida. Inumidendo i caccherelli aumenta infatti, notevolmente, il loro potere di attirare chemiotropicamente i bachi. In un tubo orizzontale con gelso ad una estremità, e caccherelli umidi all'altra, i bachi in un primo tempo, si dirigono indifferentemente sia verso il gelso che verso i caccherelli; ma poi quelli che s'eran diretti verso quest'ultimi, cambiano direzione e si dirigono anch'essi al gelso. Ho cercato di scindere l'azione chemiotropica da quella igrotropica.

In tubi orizzontali, sia illuminati che scuri, chiusi ad una estremità con un tamponcino di cotone inumidito, i bachi si dirigono verso di esso; in un tubo orizzontale che ha all'estremità alcuni pezzetti di cloruro di calcio, i bachi non mostrano però di risentire alcuna particolare azione. Ho voluto provare se anche l'effluvio secco della foglia riesce ad attirare i bachi. Ho messo ad una estremità di un tubo orizzontale della foglia, e tra essa ed i bachi, alcuni pezzetti di cloruro di calcio, trattenuti da pochi fili di cotone; i bachi si dirigono ugualmente e rapidamente verso l'estremità col gelso.

Verso la fine della seconda età si ha un affievolimento del chemiotropismo; ma si ha anche un affievolimento degli altri effetti tropici; l'animale si incammina verso lo stato di torpore proprio del periodo di muta, e diventa più tardo nel rispondere agli stimoli esterni.

Alla nascita i bachi, come abbiamo visto, sono assai debolmente chemiotropici, col progredire dello sviluppo l'intensità del chemiotropismo cresce, sino a sovrapporsi al foto ed al geotropismo. Sembra quasi che manchi ai bachi neonati che ancora non hanno assaggiato il gelso, l'esperienza per la

sua foglia. Dopo, essi acquistano questa esperienza, e la foglia esercita allora verso di essi una attrazione maggiore di quella che esercitano la luce e la tendenza a salire.

Per seguire le variazioni sui tropismi, è bene sperimentare su pochi bachi alla volta. Nei successivi periodi della vita di un baco, secondo che esso sia vicino alla muta, o l'abbia compiuta da poco, o che si trovi nel periodo medio di una età; mutano le intensità con cui si manifestano i tre diversi tropismi presi in esame. Mettendo nei tubi molti bachi insieme, c'è il caso di ottenere un comportamento confuso, alcuni vanno al gelso rapidamente, altri no; alcuni all'oscurità riescono a raggiungere il gelso o a dirigersi verso l'alto, altri non vi riescono. Bisogna prendere pochi bachi, ed in condizioni fisiologiche e di sviluppo identiche, e che si trovino quindi in un equilibrio tropico il più possibile uguale.

Biologia. — *Correlazione di numero e di grandezza di singoli tipi di neuroni retinici in animali di differente mole somatica.* Nota di L. BUCCIANTE e E. DE LORENZI, presentata dal Socio G. LEVI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *Durata di sopravvivenza dei vari tessuti di embrioni di pollo nei quali l'incubazione fu interrotta.* Nota di L. BUCCIANTE, presentata dal Socio G. LEVI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Istogenesi. — *Ricerche sulla istogenesi delle isole del Langerhans «in ovis aries L.».* Nota di G. LENTATI, presentata dal Socio E. GIACOMINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Corrispondente DIONISI commemora il defunto Socio A. PERRONCITO.

L'On. GARBASSO (Presidente) ringrazia il prof. DIONISI per la bella commemorazione, che ha fatto rivivere nella sua interezza la figura di A. PERRONCITO come scienziato, come cittadino e come soldato.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio CHIARUGI presenta in omaggio il suo « Trattato di Embriologia » parte 1^a « Gli elementi della riproduzione sessuale e la fecondazione ».

Il Socio PALAZZO fa omaggio di una sua Memoria dal titolo « Misure magnetiche in Oltregiuba e Somalia nel 1926 ».

Il Socio MARCOLONGO presenta in omaggio due suoi opuscoli, l'uno dal titolo « L'Euclides Danicus di Georg Mohr, Amsterdam 1672 », e l'altro dal titolo « Lo strumento inventato da Leonardo da Vinci per la risoluzione del problema di Alhasen », ed espone il contenuto di ambedue. Presenta, anche a nome di C. BURALI-FORTI, il vol. I dell'opera « Analisi vettoriale generale e applicazioni. Trasformazioni lineari ». Riferendosi quindi a una recente comunicazione intorno al significato di un disegno del Viviani trovato nelle carte del Cimento, parla di un interessante esperimento di Leonardo, forse del 1515, relativo alla deviazione nella caduta dei gravi, dovuta alla rotazione della terra.

L'Accademico Segretario Prof. PARRAVANO presenta i libri giunti in dono segnalando « L'Histoire des Sciences mathématiques dans l'antiquité Hellénique » del Corrisp. G. LORIA, le « Memorie e Note Scientifiche » del Corrisp. L. DONATI, « The problems of applied Entomology » di R. A. WARDLE, e il volume pubblicato in occasione del centenario della Scuola d'Ingegneria di Stoccarda.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Corrispondente SCORZA legge, anche a nome del Socio SEVERI, la relazione con la quale si propone la stampa della Memoria di G. MIGNOSI dal titolo « Equazioni algebriche risolubili per radicali in un corpo finito ».

L'Assemblea approva.

Il Socio SEVERI, anche a nome del Socio CASTELNUOVO, legge la relazione con la quale si propone la stampa della Memoria del prof. A. COMESSATTI dal titolo « Le involuzioni sulle curve algebriche e il teorema generale di diramazione per le funzioni fuchsiane ».

L'Assemblea approva.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 1° giugno 1929

- BIANCHI F. — Nuovo sistema di difesa contro la grandine e le scariche elettriche atmosferiche. « Paragrindine elettrica Bianchi ». Pisa, 1927. 8°, pp. 1-45.
- BOSELLI F. B. — Studi sugli Psyllidi (Homoptera: Psyllidae o Chermidae). (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario ». Vol. XXII. Portici, pp. 204-218). s. l. 1929. 8°.
- BURALI FORTI C. e MARCOLONGO R. — Analisi vettoriale generale e applicazioni. Trasformazioni lineari. Vol. I. Bologna, Zanichelli Nicola Editore. 1929, 8°. pp. I-VIII, 1-271.
- CATERINI F. — In memoria di Mario Canavari (Estr. dagli « Annali delle Università Toscane di Scienze mediche, fisiche matematiche e naturali ». Vol. XII, fasc. I, pp. 175-192). Pisa, 1929. 8°.
- CHIARUGI G. — Trattato di Embriologia. I. Gli elementi della riproduzione sessuale e la fecondazione. Milano, 1929. 8°, pp. I-VIII, 1-391.
- CIPOLLA F. — Fauna briozoica miocenica della Marmarica italiana. (Estr. dal « Bollettino della Società di Scienze naturali ed economiche di Palermo ». Anno X, 1928). Palermo, 1929. 8°. pp. 1-II.
- DE CHAURAND DE SAINT EUSTACHE E. — Dichiarazione circa le formole naturali per la densità e pressione negli astri. Firenze, 1929. 8°, pp. 1-4.
- DONATI L. — Memorie e note scientifiche, elasticità, vettori, elettrologia, correnti alternative. Bologna, Zanichelli N. Editore, s. d. 8°, pp. I-VI, 1-350.
- Festschrift der Technischen Hochschule Stuttgart, 1829-1929. Berlin, 1929. 8°, pagine I-VII, 1-475.
- KIRK ED. — Bathmopterius, a new Fossil Gasteropod Genus from the Silurian of Alaska. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 74). Washington, 1928. 8°, pagine 1-4.
- LORIA G. — Histoire des Sciences mathématiques dans l'antiquité Hellenique. 1929. Paris, Gauthier-Villars et Cie, Editeurs, 8°, pp. I-III, 1-215.
- MARCOLONGO R. — L'Euclides Danicus di Georg Mohr. Amsterdam 1672. (Estr. dal « Rendiconto della R. Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli ». Serie IV, vol. XXXV). Napoli, 1929. 8°, pp. 1-7.
- MARCOLONGO R. — Lo strumento inventato da Leonardo da Vinci per la risoluzione del problema di Alhazen. (Estr. dal « Rendiconto della R. Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli ». Serie IV. Vol. XXXV). Napoli, 1929. 8°, pp. 1-3.
- PALAZZO L. — Misure magnetiche in Oltregiuba e Somalia nel 1926. Roma, 1929. 4°, pp. 1-62.
- PEARL R. — Eugenics. (Sonderabd. aus den « Verhandlungen des V. Internationalen Kongresses für Vererbungswissenschaft ». Berlin 1927, pp. 261-262). s. d. 8°.
- WARDLE R. A. — The Problems of applied Entomology. Manchester, 1929. 8°, pp. I-VII, 1-587.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 16 giugno 1929 (anno VII)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Meccanica. — *Sul moto di un corpo di massa variabile.*
Nota ⁽¹⁾ del Socio E. ALMANSI. (Da una lettera al Socio T. LEVI-CIVITA).

Lessi con molto interesse le tue due Note ⁽²⁾ fin da quando comparvero negli Atti dell'Accademia.

Vorrei però fare un'osservazione. Mi pare che la formula $\frac{d(mv)}{dt} = F$ possa ottenersi senza ricorrere al secondo postulato ($dv = d'v = d''v$).

Consideriamo, infatti, fra due istanti qualunque t_1 e t_2 , il sistema formato del corpo P e di quei corpuscoli Q che nell'intervallo di tempo $t_2 - t_1$ cadono su P. Nell'istante t_1 sia m_1 la massa di P, v_1 la sua velocità, w_1 la velocità di un corpuscolo Q di massa μ ; nell'istante t_2 sia v_2 la velocità di P (del quale s'intende che ora facciano parte anche i corpuscoli Q); la sua massa sarà $m_2 = m_1 + \sum \mu$. Quindi, per il teorema delle quantità di moto avremo:

$$(a) \quad m_2 v_2 - (m_1 v_1 + \sum \mu w_1) = \int_{t_1}^{t_2} (F + F') dt,$$

ove F, F' denotano, al tempo t , la risultante delle forze agenti sul corpo P (compresi i corpuscoli catturati), e la risultante delle forze agenti sui corpuscoli ancora liberi.

(1) Presentata nella seduta del 16 giugno 1929.

(2) In questi «Rendiconti», vol. VIII, 1928, pp. 329-333; 621-622.

Ma se w è la velocità di un corpuscolo nell'istante che precede l'urto, sarà

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}' dt = \sum \mu w - \sum \mu w_1;$$

per cui la formula (a) diverrà

$$m_2 v_2 - m_1 v_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt + \sum \mu w.$$

E questa, in virtù del 1° postulato, conduce alla tua (2).

.....

Fisica. — *Sull'assorbimento delle radiazioni ultraviolette od ultrarosse da parte della nebbia.* Nota ⁽¹⁾ del Socio Q. MAJORANA.

In altra Nota, insieme a questa presentata, ho riferito sulla realizzazione da me ottenuta di due sistemi di telefonia ottica, mediante l'uso di radiazioni ultraviolette od ultrarosse. Mentre sono in corso di svolgimento osservazioni sull'efficienza dei due sistemi, in dipendenza delle variabili condizioni atmosferiche (per distanze fra le due stazioni, di parecchi chilometri), ho voluto intraprendere separatamente delle ricerche di laboratorio, per determinare il grado di assorbimento delle dette radiazioni da parte di aria asciutta, umida o contenente della nebbia.

Il dispositivo impiegato consiste in un tubo di vetro di m. 1,59 di lunghezza, del diametro interno di cm. 5, terminato da due lastre di vetro di cm. 0,7 di spessore. Nel tubo, si può introdurre aria secca od umida, mediante l'uso di una pompa aspirante Gaede, di tubi essiccatori al cloruro di calcio, oppure di gorgoglio dell'aria aspirata a traverso acqua tenuta alla temperatura ambiente, di circa 20°. Si può, inoltre, per rarefazione, produrre la formazione di nebbia.

Dispongo una sorgente luminosa a conveniente distanza, lungo il prolungamento dell'asse del tubo, e, mediante l'uso di lenti e diaframmi forati, realizzo un fascio cilindrico di raggi, del diametro di cm. 3, che penetra da un'estremo del tubo e lo percorre da un capo all'altro senza lambirne le pareti cilindriche. Quest'accorgimento ha il suo valore, giacchè la intensità di luce emergente risulterebbe di molto variabile, per riflessione su tali pareti, qualora esse fossero da un caso all'altro variamente appannate.

(1) Presentata nella seduta del 1° giugno 1929.

Per lo studio in questione, utilizzo, a seconda dei casi, una lampada a vapori di mercurio in quarzo Gallois, di 250 watt di potenza od una ad incandescenza di 500 watt, a filamenti raccolti in piccolo spazio.

Poichè la ricerca ha relazione col problema della telefonia con raggi ultravioletti od ultrarossi, essa è qui limitata alle λ , che in tali sistemi da me già realizzati e descritti, sono impiegate. Per conseguenza, oltre a rendermi conto dell'assorbimento, nelle varie condizioni dell'atmosfera interna del tubo, esercitato su tutta la luce emergente dalle dette lampade; ho proceduto a determinazioni analoghe, quando si interpongono filtri di vetro all'ossido di nichel (3650 \AA circa) od all'ossido di manganese (1 micron circa).

Il congegno rivelatore delle radiazioni, situato all'altro estremo del tubo, può essere a turno costituito da una cellula fotoelettrica all'idruro di sodio in atmosfera di neon, oppure da una cellula fotoresistente al tallio, od, infine, da una pinza termoelettrica lineare di Moll. In tutti i casi, viene adoperato un galvanometro di Moll, che grazie alla sua grande sensibilità ed assoluta prontezza, si presta egualmente bene a tutte le determinazioni, malgrado la sua bassissima resistenza. Il galvanometro è convenientemente shuntato, perchè sia del tutto aperiodico, specie quando è in circuito con le cellule. Le osservazioni si compiono su scala a m. 3,50 di distanza; talchè la sensibilità del galvanometro risulta di ampère $1,5 \cdot 10^{-8}$ per divisione. Nel caso che si adoperi una delle cellule, nel circuito è inserita una f. e. m. che può essere scelta fra 10 e 150 volt. Maggiore tensione si adopera per la cellula fotoelettrica che ha, di solito, una tensione di accensione prossima al limite superiore predetto.

Si possono, con tale dispositivo, realizzare varie combinazioni, servendosi di una delle sorgenti indicate, accoppiata con uno dei detti congegni riceventi. Nei vari casi, si può così studiare l'eventuale assorbimento dovuto alla presenza nel tubo, di aria secca, umida o nebbia. A ciò si perviene, mediante l'uso di opportuni rubinetti, e lasciando permanentemente in funzione la pompa Gaede. Se si tratta di osservare con aria secca od umida, si provoca una continua circolazione di tali gas; e dopo qualche minuto si fa la lettura. Queste letture si confrontano sempre con quella fatta a tubo vuoto di aria o quasi (2 o 3 cm. di mercurio di pressione). Il mantenere l'aria in circolazione permanente, mentre la sua pressione è all'incirca uguale a quella esterna dell'ambiente, ha il vantaggio (nel caso dell'aria umida) di evitare del tutto formazione di nebbia; inoltre, le pareti del tubo rimangono praticamente trasparenti e non appannate.

Per provocare la formazione di nebbia, si arresta la circolazione dell'aria umida e si abbassa bruscamente la pressione. Poichè si tratta di compiere osservazioni relative o di confronto, tra gli assorbimenti corrispondenti ai vari casi, ho preferito non dar luogo ad una formazione stabile di nebbia, ed osservare le deviazioni del galvanometro negli istanti in cui si provoca un fuggevole e intenso annabbimento, ma con processo sempre rigorosamente identico nei vari casi. A tale fine la pompa viene connessa col tubo

contenente aria umida a pressione ordinaria a traverso un grosso recipiente di circa 5 litri, la cui aria è preventivamente rarefatta a 2 cm. di mercurio di pressione. Appena fatta la connessione, si forma una fitta nebbia che permane qualche secondo e poi scompare, per il lavorare della pompa. Con ciò, dopo qualche minuto il tubo viene anche ad esser vuotato di aria.

Le osservazioni, per il caso della nebbia, si fanno leggendo rapidamente la ridotta deviazione del galvanometro, negli istanti di massimo affievolimento delle radiazioni.

Le determinazioni di assorbimento consistono nelle osservazioni di due deviazioni ottenute, l'una quando nessuno assorbimento vi ha nel tubo (per es. se esso è vuoto di aria), e l'altra quando in questo vi ha un gas assorbente. Le due deviazioni (detratta, se del caso, la deviazione per corrente all'oscurità) si ritengono proporzionali alle intensità di radiazioni raccolte dal congegno ricevente. Se le chiamiamo I_0 e I , essendo la prima maggiore della seconda, sarà:

$$r = \frac{I}{I_0} = e^{-pl};$$

dove r è il rapporto fra le due letture; $l = 1,^m 59$, è la lunghezza del tubo, e p il *fattore di assorbimento*. La relazione ci dà dunque il valore di p , osservando caso per caso I_0 , I e cioè il rapporto r .

Passo ora a dire dei risultati numerici ottenuti. Premetto anzitutto le osservazioni fatte, schermando le sorgenti con vetro all'ossido di nichel o di manganese, e lasciando il tubo in condizioni di costante trasparenza e di assorbimento nullo (cioè vuoto di aria).

Adoperando voltaggio opportuno per la cellula fotoelettrica (circa 120 volt) e per quella al tallio (circa 10 volt), e nessuna f. e. m. aggiuntiva per la pinza termoelettrica, ho le seguenti deviazioni per le sorgenti indicate:

Sorgente	Rivelatore	Raggi diretti	Schermo al Ni	Schermo al Mn
Lampada a Hg	Cellula f. e.	425	125	0
» »	» al Tl	7	0	0
» »	pinza t. e.	3	0	2
» incand.	cellula f. e.	250	15	0
» »	» al Tl	170	0	90
» »	pinza t. e.	55	0	30

La diversità delle cifre su riportate, proviene dalle numerose modalità che, caso per caso, determinano la deviazione: distribuzione delle intensità di ciascuna sorgente secondo le varie λ ; grado di trasparenza degli schermi

al Ni od al Mn per le stesse λ ; diversa sensibilità dei tre rivelatori alle differenti regioni dello spettro.

Dalla tabella, è interessante rilevare che gli schermi al Ni od al Mn riducono le intensità dell'energia raggiante arrivante dall'arco a mercurio e dalla lampada ad incandescenza (quando ci si serve rispettivamente della cellula f. e. o di quella Tl) a $\frac{3}{10}$ od ai $\frac{5}{10}$ circa dei primitivi valori. Ora, se si tiene conto che il vetro al Ni da me impiegato, non è dei più opachi alla luce ordinaria, e che quello al Mn lo è invece assai, si comprende come la differenza di comportamento a favore del sistema: lampada incandescente, vetro al Mn, cellula al Tl; si accentui. In altri termini, sembra che sia in pratica, già più efficiente il complesso u. r., di fronte a quello u. v., per il solo fatto che gli schermi al Mn, lasciano impressionare maggiormente le cellule al Tl.

Ciò posto, dirò delle misure di assorbimento. In primo luogo, ho potuto constatare che *nessun sensibile assorbimento vi ha, dell'energia raggiante che impressiona i rivelatori da me usati, quando nell'interno del tubo si trova aria secca od umida, ma perfettamente limpida.* In altri termini, le deviazioni del galvanometro sono per tutti e tre i rivelatori e per le due sorgenti, le stesse di quelle che si hanno quando il tubo è vuoto di aria. Ciò dico, con l'approssimazione di circa l'1 %, chè al di là, non ho avuto campo di fare osservazioni più precise, a causa di accidentali cause perturbatrici. Il risultato vale tanto per la luce totale (raggi diretti), che per quella filtrata con uno degli schermi. Esso conferma, in certo modo, le notizie date da altri autori, come il Kreusler, secondo il quale, l'aria è del tutto trasparente per $\lambda > 1930 \text{ \AA}$. L'opacità dei suoi componenti è al disotto di questo limite con l'ordine decrescente: ossigeno, vapor d'acqua, azoto; la presenza eventuale di ozono accentua tale opacità portandola sino a circa 2800 \AA .

Queste prime conclusioni limitano evidentemente il campo delle ulteriori ricerche, nel senso che è ormai sufficiente indicare quello che avviene quando nel tubo si forma della vera nebbia. Nella seguente tabella, riporto i più interessanti risultati, dedotti, al solito, facendo le medie di più osservazioni. Da queste ho determinato i valori del rapporto r e quelli del coefficiente di assorbimento p , scegliendo come unità di misura il metro:

Sorgente	Schermo	Rivelatore	r	p
Lampada ad Hg	—	Cellula f. e.	0.12	1.35
» »	al Ni	» »	0.10	1.47
» incand.	—	» al Tl	0.29	0.79
» »	al Mn	» »	0.29	0.79

Le precedenti cifre ci dicono che, nelle condizioni di esperimento, il coefficiente di assorbimento p è quasi il doppio per lampada a mercurio schermata, rispetto alla lampada ad incandescenza pure schermata; ossia l'ultrarosso, corrispondente a $\lambda = 1$ micron, si propaga più facilmente attraverso la nebbia dell'ultravioletto di 3650 \AA . La conclusione vale per il caso delle esperienze fatte; ma si comprende, come possa essere attendibile estenderle al caso della effettiva applicazione di tali radiazioni a grande distanza, supponendo che si abbia a che fare con una nebbia meno fitta (per la quale il coefficiente p sia p. e. mille volte più piccolo), ed una distanza molto più grande (p. e. mille volte maggiore). Restando così il prodotto pl invariato, il caso sperimentale di laboratorio corrisponde esattamente a quello di pratica applicazione.

Si può ancora così ragionare. Suppongasi di aver impiantato una stazione trasmittente telefonica per u. v. ed una per u. r. Si scelgano inoltre come intensità di energia raggiante per tali λ , rispettivamente i valori I_v e I_r , tali che gli effetti fonici sui ricevitori, posti nella immediata vicinanza, siano gli stessi. Le energie raggianti delle due stazioni si propagano nello spazio, in modo dipendente dal sistema di ottico impiegato, più o meno divergente. Le energie, raccolte alle stazioni riceventi, si affievoliscono perciò sotto tal riguardo secondo una certa legge che ora lascio di indagare. Anzi per semplicità, suppongo che si tratti precisamente di fasci paralleli, per i quali l'effetto della distanza sia naturalmente nullo, per quanto concerne la divergenza. Sussiste però, l'affievolimento per assorbimento progressivo, causato dalla mancanza di trasparenza assoluta all'atmosfera. Portiamo ora le stazioni riceventi alle distanze l_v e l_r , tali che l'effetto fonico sia in entrambe le trasmissioni, appena uguale a quello necessario, per la netta percezione acustica delle parole o dei suoni. Se le curve caratteristiche dei due ricevitori sono identiche, si potrà ammettere che tale effetto corrisponda a certe intensità i_v e i_r , tali che

$$\frac{i_v}{I_v} = \frac{i_r}{I_r}$$

E poichè, chiamando p_v e p_r i fattori di assorbimento per l'ultravioletto e per l'ultrarosso, deve essere:

$$\frac{i_v}{I_v} = e^{-p_v l_v}, \quad \frac{i_r}{I_r} = e^{-p_r l_r},$$

sarà, evidentemente:

$$p_v l_v = p_r l_r.$$

Cioè, i fattori di assorbimento per le due specie di radiazioni sono in ragione inversa delle rispettive portate massime di trasmissione.

Se dunque, i risultati precedentemente ottenuti sono estensibili al caso delle avverse condizioni atmosferiche; se cioè, anche qui si può parlare di coefficienti di assorbimento che stiano nel rapporto di 1 a 2 circa; *la portata delle trasmissioni con l'ultrarosso, è, in certi casi di nebbia, doppia di quelle realizzabili con l'ultravioletto.*

Ma a tale conclusione non è lecito arrivare senz'altro, occorrerà prima studiare quale influenza può avere il fatto che i raggi emessi dalle stazioni non possono mai costituire un fascio rigorosamente parallelo; occorre inoltre riflettere che, in pratica, la nebbia può non essere omogeneamente distribuita nel tratto compreso fra le due stazioni; e infine potrà darsi che ciò che, nell'atmosfera, si chiama talvolta caligine o foschia, possa non dipendere solamente dalla presenza di vapor d'acqua, ma anche da inomogeneità per azioni termiche o da polviscolo terrestre.

È perciò desiderabile ai fini pratici della telefonia ottica, che ulteriori studii vengano a integrare le conclusioni alle quali sono pervenuto con le ricerche di laboratorio.

Geologia. — Una nuova facies di Trias superiore nelle Alpi Marittime italiane. Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. S. FRANCHI.

Nella descrizione del profilo geologico del traforo del Colle di Tenda⁽²⁾ da me fatta in un lavoro in collaborazione col compianto Ispettore delle Miniere, L. Baldacci, riservandomi, come studioso della regione, la parte geologica, io ho indicato nella serie dei terreni incontrati nella galleria della Strada Nazionale nonchè nella grande galleria ferroviaria, eseguita molto tempo dopo, degli scisti argillosi variegati, delle Dolomie di vari tipi, delle anidriti candidissime e dei gessi in masse ingenti; formazioni sulla cui età io sono rimasto molto perplesso, trattandosi evidentemente di un carriggiamiento⁽³⁾ di essi sopra gli scisti eocenici, per cui l'ordine di sovrapposizione delle varie forme litologiche era alquanto dubbio.

Quanto agli scisti argillosi variegati, rosso vinaccia, giallo ocrei, con frequenti cubetti di pirite, a causa dei loro rapporti con strati fossiliferi del Lias inferiore (*Gryphaea arcuata* Limk., *Arietites Buklandi*, ecc.) lungo una estesa linea di frattura, fra il Colle di Tenda e il Gesso, con chiaro ricoprimento verso ovest, sugli scisti eocenici, io ero disposto a ritenerli retici o del

(1) Presentata nella seduta del 3 marzo 1929.

(2) L. BALDACCÌ e S. FRANCHI, *Studio geologico della Galleria del Colle di Tenda (Linea Cuneo-Ventimiglia)*. «Boll. del R. Comitato Geologico»; 1900.

(3) È questo il primo grande carreggiamento descritto nelle Alpi Marittime italiane, e anteriormente al classico lavoro di M. LUGEON, *Sur les grandes nappes de recouvrement des Alpes*.

Trias superiore, mentre assegnai al Trias senza determinazione di piano, le andriti, i gessi e le carnirole, di cui importanti masse erano state attraversate dalla galleria ferroviaria.

Dopo la pubblicazione del suddetto lavoro sulla galleria del Colle di Tenda, causa i nuovi campi di rilevamento assegnatimi, della Valle Grisanche e della parte occidentale del gruppo del Monte Bianco, io non sono più stato richiesto per consultazioni geologiche nel prosieguo dei lavori ferroviari, cosicchè esiste una lacuna nelle mie notizie concernenti i terreni attraversati dalle gallerie costrutte a valle di Vicula e tra questa località e S. Dolmasso di Tenda. Io nutro speranza di poter ottenere questi dati dalle Ferrovie dello Stato, che certamente possederanno i profili geologici e i campioni.

Però, visitando nello scorso agosto, i lavori della nuova linea Cuneo-Ventimiglia che si stava preparando per la inaugurazione, avvenuta poi nell'Ottobre, ho potuto osservare lungo la linea ferroviaria, a valle della stazione di Briga Marittima, una interessantissima serie del Trias inferiore, comprendente potenti masse di scisti quarzitici varicolori, che li differenziano dalle quarziti tipiche dell'Eotrias della ragione, e sopra di delle importanti masse di scisti argillosi variegati e di carnirole, che potrebbero rappresentare il Trias medio, e delle dolomie intensamente fratturate, che sarai disposto a riferire al Trias superiore.

Grandi masse di carnirole con intercalazioni di calcari giallognoli a strati molto contorti si stavano scavando nelle trincee ferroviarie per colmare il piano alluvionale sul quale è impiantata la costruenda grande stazione ferroviaria di San Dalmazzo di Tenda.

La regione fra Briga e questo ultimo abitato e quella a valle, fino al confine, in cui la Roja incide profondamente il suo corso, dapprima nell'Eotrias, poi nel Permiano, con forme litologiche anagenitiche specialissime, presenta il più grande interesse, perchè, a un certo momento, sotto agli alti caglioni di scalcarì giuresi delle cime Rioro e Durasca, a sinistra, e dalla Cima Gauron a destra, la facies carniolica del Trias si assottiglia di molto, e si affacciano, proprio al basso di detti scaglioni, delle dolomie che io attribuirei al Norico. Particolarmente lungo la strada mulattiera che conduce dall'abitato di Granile alla camera di carico del grande acquedotto del lago artificiale delle Mesce, si attraversano sopra una certa potenza delle dolomie che io non esiterei a porre nel Norico, il che è in accordo colla *facies retica* e *liasica* di calcari neri e bigi soprastanti.

Questa mia impressione, che di fossili non ebbi fortuna di scoprirne, nelle rapide gite fatte, è stata confermata da quella fatta sulla riva sinistra, tra l'abitato di San Dalmazzo e il confine al Vallone di Groa, lungo la bella mulattiera che corre ai piedi di quelle guglie dolomitiche, di un pittoresco indescrivibile, e che io suppongo appunto noriche, per la loro forma litologica a grana fina compatta. Ricerche di fossili in quella località sono urgenti.

Nella lunga galleria, precedente la camera di carico, si incontrarono scisti rossi e giallo-ocracei che ascriverei al Trias superiore come quelli tanto estesi, che si incontrano nella discesa lungo la falda orientale del Rio Gauron.

Questa forma di Trias superiore è analoga a quella tanto sviluppata oltre confine, specialmente fra Breil e il Colle di Bracus, dove sono grandi masse di anidriti e di scisti variegati, che io ho avuto il piacere di osservare in compagnia del giovane geologo francese André Rivière.

Grandi analogie esistono quindi col Trias superiore attraversato colla grande galleria del Colle di Tenda.

L'interesse speciale, che ha causato questa mia breve comunicazione, è la grande probabilità, che spero, prossime ricerche tradurranno in certezza, della presenza delle dolomie noriche, in alcuni punti associate alle note forme gessose e carnioliche del Trias superiore, descritte dai geologi francesi nelle Alpi Marittime e nel Brianzone (W. Kilian, E. Ritter, Léon Bertrand e A. Rivière).

Le grandi masse di Dolomie del Trias superiore o Norico, sottostanti ai Calcescisti, e con essi sfumanti a *Wortenia solitaria* (Vallone di Elva, Monte Chialmo) o ricche in siphonce (Valle del Cugino, dintorni di Villanova, ecc.) sarebbero in qualche modo rappresentate nel Trias prevalentemente a *facies* brianzone dell'alta Valle Roja.

Biologia. — *Sui presunti caratteri citologici specifici del citoplasma delle cellule sessuali.* Nota ⁽¹⁾ del Socio G. LEVI.

I tentativi di rintracciare lo stipite delle cellule sessuali durante lo sviluppo embrioidale (via germinale, « Keimbahn » dei tedeschi) fondandosi sui caratteri citologici specifici ebbero fino ad oggi scarso successo. Se si prescinde dai pochissimi esempi a tutti noti di *Ascaris megalocephala* e di pochi altri, nell'immensa maggioranza degli animali le cellule sessuali sono riconoscibili come tali in germi relativamente inoltrati. L'argomento fu estesamente trattato in molte pubblicazioni anche recenti, in modo molto completo in una lucida rassegna di N. Beccari.

Negli Amnioti furono da molti Autori descritti, molto prima che si abbozzi la gonade, cellule migranti, caratterizzate specialmente dalla forma sferica e dal volume, che corrispondono a gonociti (Waldeyer). Però difettando in questi elementi caratteri specifici precisi, la natura gonocitaria dei medesimi è posta in dubbio da vari Autori.

(1) Presentata nella seduta del 1° giugno 1929.

Appunto per questa ragione suscitavano a suo tempo molto interesse i risultati di Rubaschkin (1909-1910), e di Tschaschin (1910), secondo i quali tanto i gonociti che gli elementi sessuali maschili e femminili differirebbero costantemente dalle cellule somatiche per i caratteri del condrioma, il quale avrebbe forma di grossi granuli nei primi, di filamenti nelle seconde. Secondo Rubaschkin il condrioma granulare rappresenta la forma primitiva, perchè esiste in cellule indifferenziate (blastomeri, gonociti, cellule sessuali maschili e femminili); la comparsa di filamenti preludia la differenziazione della cellula.

Tale veduta, sotto le vesti colla quale fu formulata, apparve ben presto insostenibile. In elementi seminali di moltissimi animali il condrioma è in forma di filamenti: di *Paludina* (Meves, Perroncito) di *Blaps* e *Blatta* (Duesberg) di *Apis mellifica* (Meves e Duesberg), di *Geotriton fuscus* (Terni), così pure in ovociti di vari Anfibi, di *Cheloni* (Levi).

Io stesso dimostrai, poco dopo le ricerche di Rubaschkin, che già durante le prime segmentazioni dell'uovo di Chiroterteri singoli condriosomi assumono forma di filamenti e che tale trasformazione è completa alla fase di blastociste.

Ciononostante, se il carattere differenziale illustrato da Rubaschkin avesse valore per le cellule sessuali primordiali (gonociti), l'importanza teorica del fatto sarebbe stata diminuita, ma tale carattere sarebbe praticamente importante, concedendo di rintracciarne l'origine in periodi dello sviluppo molto più precoci di quanto fosse stato possibile finora. Ed infatti Rubaschkin credette di riconoscerli in embrioni di *Cavia* a 6-7 somiti nell'entoderma della linea primitiva.

I risultati a cui pervennero gli Autori i quali dopo Rubaschkin e Tschaschin si occuparono della citologia del condrioma sono poco concordanti. v. Berenberg-Gossler (1912) ritiene che la forma granulare dei condriosomi non è proprietà costante dei gonociti, e non è neppure specifica; perchè anche cellule somatiche contengono condriosomi granulari. L'A. conclude che i gonociti non sono riconoscibili con metodo morfologico come progenitori delle cellule seminali e degli ovociti.

Delle pubblicazioni successive si occuparono più particolarmente dei caratteri citologici dei gonociti e delle cellule sessuali maschili e femminili G. Levi, Swift, Firket, Stieve, Rauh.

Secondo Swift (1914), in contrasto con quanto Tschaschin ha visto sullo stesso materiale, i mitocondri dei gonociti di pollo rassomigliano ai mitocondri delle cellule somatiche, sono in forma di bastoncini di 1-3 μ di lunghezza.

I due Autori più recenti, Stieve e Rauh, pervengono a risultati diversi l'un dall'altro. Stieve⁽¹⁾ il quale compì le sue indagini sovra materiale

(1) STIEVE *Die Entwicklung der Keimzellen und der Zwischenzellen in der Hodenanlage des Menschen. Ein Beitrag zur Keimbahnfrage.* «Zeitschr. f. Mikrosk. Anatomische Forschung». Bd. 10, 1927.

umano, si associa a v. Berenberg-Gossler nell'interpretare gli elementi, i quali furono da vari Autori ritenuti gonociti, come elementi somatici; questi sono le cosiddette « cellule migranti entodermiche », le quali derivano dall'entoderma, specialmente nella parte più caudale del tronco, si portano nel mesenchima ove scompaiono; essi non avrebbero nulla di comune collo stipite delle cellule germinali. Stieve concede che queste grosse cellule sferiche contengono grossi mitocondri sferici, ma contesta che questo carattere sia specifico, perchè anche in altri elementi (ad es. nelle cellule interstiziali del testicolo ed in molti altri) l'A. trovò granuli⁽¹⁾ (mitocondri).

Stieve conclude che nè nell'uomo, nè in altri Veterbrati si può parlare di uno stipite ininterrotto morfologicamente dimostrabile di cellule sessuali (Keimbahn).

All'opposto Rauh (1929)⁽²⁾ riconobbe i gonociti in embrioni di ratto a partire dallo stadio a 19-25 somiti, per la presenza di un accumulo di condrosomi a forma di falce, costituito da grossi e fitti granuli; i gonociti si distinguono dagli elementi somatici, caratterizzati da condriconti. Quando i gonociti emigrano nella regione della gonade (epitelio germinativo, secondo Waldeyer) i mitocondri, pur mantenendo la forma di grossi granuli, non sono più così addensati. La stessa forma hanno i mitocondri delle cellule sessuali anche in periodi successivi, quando la gonade incomincia ad acquistare i caratteri di testicolo e rispettivamente di ovario; sulle differenze di distribuzione nelle varie fasi minutamente descritte dall'A., tralascio di riferire.

L'essenziale è che l'A. accetta la veduta che le cellule genitali primordiali, le quali emigrano dall'ectoderma nell'abbozzo della gonade e poi si continuano negli spermatotici ed ovociti, hanno un condrioma caratteristico a forma granulare.

È singolare che a tutti gli Autori che dopo il 1912 si sono interessati di quest'argomento siano sfuggite le mie pubblicazioni nelle quali io dimostravo insussistente la tesi di Rubaschkin e Tschaschin, che i gonociti e le cellule sessuali hanno costantemente un condrioma in forma di granuli.

(1) STIEVE fissò il suo materiale nella miscela di Regaud e questo ci spiega che le immagini da lui ottenute siano imperfette. Se egli avesse ricorso a fissazioni in liquidi osmici i suoi risultati sarebbero stati diversi. Ed a torto Stieve invoca l'autorevole voce di Meves in favore della sua tesi che il condrioma ha in molte cellule forma granulare. Nei preparati ben riesciti il condrioma, se si prescinde dagli ovociti dei Mammiferi e da pochissimi altri elementi, è sempre in forma di filamenti; vi sono granuli singoli ma i filamenti prevalgono. Su questo particolare molto discusso in passato i risultati sulle cellule viventi coltivati in vitro sono decisivi; i condriconti sono molto sensibili alle fissazioni inadeguate e facilmente si addensano in masse sferiche. Stieve dimentica che le ricerche di Meves sono sì di fondamentale importanza, ma risalgono a più di 20 anni addietro; da quel tempo le nostre conoscenze sul condrioma sono molto progredite.

(2) RAUH W., *Das Chondriom in den ersten Keimzellen der Ratte. Eine Keimbahnuntersuchung.* «Zeitschr. f. Anat. Entwicklung». Bd. 89, 1929.

Nel 1912⁽¹⁾ dimostrai che il citoplasma dei gonociti degli embrioni di Anfibi contiene un ammasso di condrioconti da 3-4 μ di lunghezza, rettilinei quasi rigidi, oppure lievemente sinuosi.

Quando i gonociti contengono ancora abbondante deutoplasma i condrioconti sono scarsi, aumentano di pari passo alla scomparsa del deutoplasma. Per ulteriori particolari attinenti ai rapporti dei condriosomi colla centrosfera rimando alla mia antica comunicazione.

In uno studio successivo (1915)⁽²⁾ sulla citologia degli elementi del germe dei Chiroterri a partire dalla segmentazione dell'uovo riferii qualche fatto non concordante coi risultati di Rubaschkin: nell'epitelio intestinale non ho mai trovato quelle cellule entodermiche a mitocondri granulari che rappresenterebbero gonociti destinati ad emigrare nella regione del corpo genitale. Solamente nella regione nella quale si formerà il futuro corpo genitale, al disotto dell'epitelio della lamina viscerale del mesoderma ho trovato qualche grossa cellula sferica contenente grossi mitocondri. Ma poichè si trattava di reperti isolati non ho creduto che questi elementi corrispondessero a gonociti.

La costituzione del citoplasma delle cellule interpretate come gonociti, non differisce adunque da quella delle cellule somatiche; il criterio della forma del condrioma non ha valore per riconoscere i gonociti, in un periodo dello sviluppo in cui tale riconoscimento riesce più difficile per essere essi situati in regioni lontane dall'eminenza genitale.

Non sarei ritornato su queste mie antiche ricerche, se quanto mi fu dato di osservare durante gli ultimi anni non avessero convalidata la mia convinzione che il carattere citologico ritenuto specifico per i gonociti e per le cellule sessuali maschili e femminili non solamente non può essere esteso agli Anamni, ma non ha neppure valore per gli Annioti.

Ho esaminato dei miei vecchi preparati di ovario di pulcino a termine e mi sono convinto che tanto gli oogomi che gli oociti contengono una fitta massa di condrioconti, mai mitocondri; negli oogoni questa massa consta di lunghi filamenti ed è distribuita uniformemente, negli oociti è a forma di filamenti brevi ed è addensata intorno alla centrosfera.

Ho pure riesaminato i miei preparati di embrioni di *Vespertilio marinus*, che furono descritti nella mia memoria del 1915, e non mi risulta che gli elementi entodermici che Rauh interpreta come gonociti siano caratterizzati da grossi mitocondri. Si vedono, è vero, in varie regioni dell'embrione, come ho detto nella mia Memoria sopra ricordata, singoli elementi sferici contenenti grosse granulazioni, ma io l'attribuisco alla circostanza che questi elementi riuscirono accidentalmente fissati in modo meno perfetto di quelli

(1) LEVI G. *I condriosomi dei gonociti*. « Monit. zool. it. ». 1912. Anno 23; ID. *I condriosomi nell'oocite degli Anfibi*. « Monit. zool. it. » 1912. Anno 23.

(2) LEVI G., *Il comportamento dei condriosomi durante i più precoci periodi dello sviluppo dei Mammiferi*. « Archiv. f. Zellforsch ». Bd. 13. 1915.

contigui. Si tratta comunque di un carattere contingente, il quale non può in alcun modo essere utilizzato come criterio per distinguere gli elementi sessuali.

Certamente le cellule sessuali indifferenti (gonociti), come pure le cellule sessuali maschili e femminili differiscono dalle cellule somatiche contigue per il maggior volume, per la forma sferica, per l'aspetto vescicoloso del nucleo; inoltre i gonociti degli Anfibi contengono sfere di deutoplasma, anche in un periodo dello sviluppo nel quale questa sostanza è scomparsa dalle cellule somatiche.

Ma nessuno di questi caratteri è nettamente specifico, quale sarebbe invece quello dato dalla forma del condrioma, se questo carattere esistesse realmente. Dimodochè riesce in pratica molto difficile di riconoscere i gonociti durante il periodo antecedente alla comparsa della gonade ed i dubbi sollevati sulla natura gonocitaria delle cellule migranti entodermiche mi sembrano giustificati. Con ciò non intendo negare, come fa Stieve, l'esistenza di una via germinale nei Vertebrati; quello che si può dire a tutt'oggi è che non è dimostrato che i gonociti abbiano caratteri citologici nettamente specifici; la profonda differenza che li separa dalle cellule somatiche risiede nelle proprietà biologiche.

Riassunto. — Non esistono nei Vertebrati differenze specifiche costanti fra il condrioma dei gonociti e degli ovociti da un lato e quello delle cellule somatiche; dimodochè questo criterio citologico non può servire a distinguere gli elementi dello stipite sessuale dagli elementi somatici.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DAI SOCI

Matematica — *Sulle singolarità isolate delle funzioni armoniche.* Nota di M. PICONE, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

P. Noaillon ⁽²⁾ è recentemente ritornato sul comportamento delle funzioni armoniche, in quante si vogliano variabili, nell'intorno di un loro punto singolare isolato, per osservare che, valendosi dello sviluppo di Laurent nel detto intorno e della trasformazione di Lord Kelvin, *ci si può ben limitare a studiare soltanto il comportamento all'infinito di una funzione armonica*

(1) Nella seduta del 1° giugno 1929.

(2) P. NOAILLON, *Point singulier isolé non critique d'une fonction harmonique* [« Comptes Rendus de l'Académie des Sciences », t. 184 (1° sem., 1927), pp. 360-362]. Devo all'ottima recensione del prof. BELARDINELLI delle Note d'Analisi contenute nel detto volume dei « C. R. », apparsa nel fascicolo dello scorso aprile del « Bollettino dell'Unione matematica italiana », la conoscenza della citata Nota del NOAILLON, che mi era precedentemente sfuggita.

in tutto lo spazio, ed egli stabilisce allora la proprietà seguente: *Se la funzione reale $u(M)$ del punto M è armonica in uno spazio euclideo di origine O , ed è tale che, essendo α e K due costanti, delle quali la prima non negativa, riesce definitivamente, al tendere di M all'infinito,*

$$(1) \quad u(M) < K \cdot \overline{OM}^\alpha,$$

allora la funzione è un polinomio di grado non superiore a α .

Tale proprietà, come rileva il Noaillon, era già stata osservata da Poincaré⁽¹⁾, il quale però, in luogo della limitazione (1) in un senso, imponeva alla $u(M)$ la limitazione nei due sensi

$$(2) \quad |u(M)| < K \cdot \overline{OM}^\alpha.$$

La dimostrazione del Noaillon, basata sopra una geniale idea di Hadamard, consiste appunto in un elegante perfezionamento di quella data da Poincaré, che faceva anch'egli uso dello sviluppo di Laurent della funzione.

Scopo delle poche righe che seguono è di mostrare come il semplicissimo procedimento da me seguito nelle due Note pubblicate nel 1926 in questi « Rendiconti » sullo stesso argomento⁽²⁾, col concorso di talune eleganti proprietà integrali ipersferiche possedute dalle funzioni armoniche, delle quali proprietà è bene notare esplicitamente la loro immediata deducibilità dalle primissime formole della teoria elementare delle funzioni armoniche, consenta assai facilmente, non solo l'ottenimento dei risultati di Poincaré e di Noaillon, ma anche dei seguenti teoremi, i quali — in particolare — stabiliscono direttamente l'equivalenza delle due condizioni (1) e (2) e possono essere utilmente applicati nello studio delle singolarità isolate delle funzioni armoniche:

I. Sia I un intorno circolare di raggio δ del punto O , nello spazio euclideo $S_{(2+\nu)}$ a $2+\nu$ dimensioni e la funzione reale $u(M)$ sia armonica in $I - O$. Se $\varphi(r)$ è la più arbitraria funzione reale definita nell'intervallo aperto $(0, \delta)$, ed ivi limitata, e se esiste una costante K , per la quale, al tendere di M verso O riesce definitivamente

$$\varphi(\overline{OM}) \cdot u(M) \left\{ \begin{array}{ll} < K / \overline{OM}^\nu & , \text{ per } \nu \equiv 1, \\ < K(1 + |\log \overline{OM}|) & , \text{ per } \nu = 0, \end{array} \right.$$

(1) H. POINCARÉ, *Théorie du potentiel newtonien* [Paris, Gauthier-Villars (1899)], nn. 95 e 96. Cfr. anche O. D. KELLOG, *On some theorems of Bôcher concerning isolated singular points of harmonic functions* [« Bulletin of the American Mathematical Society » (novembre-dicembre 1926), pp. 664-668].

(2) M. PICONE, a) *Sulle singolarità delle funzioni armoniche* [« Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », vol. III, serie 6ª (1º sem., 1927), pp. 655-660]; b) *Sulle singolarità isolate delle funzioni armoniche in tre o più variabili* [Ibidem, vol. IV, serie 6ª (2º sem., 1927), pp. 18-21].

allora, ad ogni numero positivo q si può sempre farne corrispondere un altro H_q tale che, al tendere di M verso O , risulti definitivamente

$$\left| \varphi \left(\frac{\overline{OM}}{1+q} \right) \cdot u(M) \right| \begin{cases} < H_q / \overline{OM}^v, & \text{per } v \geq 1, \\ < H_q (1 + |\log \overline{OM}|), & \text{per } v = 0, \end{cases}$$

II. La funzione reale $u(M)$ sia armonica nel dominio illimitato CI complementare di I . Se $\varphi(r)$ è la più arbitraria funzione reale definita nell'intervallo aperto $(\delta_1 + \infty)$, ed ivi limitata, e se esiste una costante K per la quale, al tendere di M all'infinito, riesca definitivamente in CI

$$\varphi(\overline{OM}) \cdot u(M) \begin{cases} < K, & \text{per } v \geq 1, \\ < K(1 + |\log \overline{OM}|), & \text{per } v = 0, \end{cases}$$

allora, ad ogni numero positivo q si può sempre farne corrispondere un altro H_q tale che, al tendere di M all'infinito, risulti definitivamente

$$|\varphi[(1+q)\overline{OM}] \cdot u(M)| \begin{cases} < H_q, & \text{per } v \geq 1, \\ < H_q(1 + |\log \overline{OM}|), & \text{per } v = 0. \end{cases}$$

Per abbreviare, mi limiterò a considerare il caso $v \geq 1$. Denoterò con $\omega(O)$ l'ipersfera di raggio uno e di centro in O dello spazio $S_{(2+v)}$, con ω_v la misura di $\omega(O)$, con $d\omega(P)$ l'elemento di misura di $\omega(O)$ nel punto P . Per un punto M di $S_{(2+v)}$ dirò sue coordinate polari col polo in O , la distanza $\rho = OM$ e le coordinate, sull'ipersfera $\omega(O)$, del punto P secondo cui il raggio \overrightarrow{OM} incontra $\omega(O)$. Il punto M di $S_{(2+v)}$ sarà perciò identificato con la coppia (ρ, P) .

1. Proprietà integrali ipersferiche delle funzioni armoniche. — La funzione $u(\rho, P)$ sia armonica nell'iperstrato sferico aperto $(r' + 0, r'' - 0)$ definito dalla limitazione $r' < \rho < r''$ (con r' positivo o nullo e r'' finito o infinito) e sia $Y_n(P)$ una qualsiasi funzione ipersferica d'ordine n . La seconda formola di Green della teoria elementare delle funzioni armoniche ci consente di dire che, al variare di ρ in $(r' + 0, r'' - 0)$, si ha:

$$\int_{\omega(O)} \left[u_\rho(\rho, P) \frac{Y_n(P)}{\rho^{n+v}} - u(\rho, P) \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{Y_n(P)}{\rho^{n+v}} \right] \rho^{v+1} d\omega(P) = A_n,$$

designando A_n una costante. Posto dunque

$$U(\rho) = \int_{\omega(O)} u(\rho, P) Y_n(P) d\omega(P),$$

ne segue

$$\frac{dU}{d\rho} + \frac{n+\nu}{\rho} U = A_n \rho^{n-1},$$

e si ha dunque, integrando tale equazione in U , il teorema:

III. Se $u(\rho, P)$ è armonica nell'iperstrato sferico aperto ($r' + 0$, $r'' - 0$), ad ogni funzione ipersferica $Y_n(P)$ si possono far corrispondere due costanti A'_n e A''_n , per le quali riesce identicamente nel detto iperstrato:

$$(3) \quad \int_{\omega(O)} u(\rho, P) Y_n(P) d\omega(P) = A'_n \rho^n + \frac{A''_n}{\rho^{n+\nu}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Queste relazioni esprimono quelle proprietà delle funzioni armoniche che vorrei chiamare *integrali ipersferiche* ⁽¹⁾.

Sia I un intorno circolare di raggio δ del punto O e $u(\rho, P)$ sia armonica in $I - O$ (in CI), sussistono allora le (3) per ogni $\rho < \delta$ (per ogni $\rho > \delta$), ebbene la quantità

$$A'_n \rho^n + A''_n \rho^{-n-\nu}$$

e le costanti A'_n e A''_n le dirò, rispettivamente, il *residuo*, il *primo indice* e il *secondo indice d'ordine n* della funzione armonica $u(\rho, P)$ in O (all'infinito rispetto al polo O), relativi alla funzione ipersferica $Y_n(P)$. Dirò $p(\nu, n)$ il numero delle funzioni ipersferiche d'ordine n linearmente indipendenti e $Y_{n1}, Y_{n2}, \dots, Y_{np}$ quelle introdotte da Heine, supposte normalizzate. Posto

$$\frac{1}{\sqrt{\omega_\nu}} \int_{\omega(O)} u(\rho, P) Y_{nh}(P) d\omega(P) = A'_{nh} \rho^n + \frac{A''_{nh}}{\rho^{n+\nu}} \quad (h = 1, 2, \dots, p(\nu, n)),$$

queste quantità e le costanti A'_{nh} e A''_{nh} le dirò, rispettivamente, i *residui*, i *primi indici* e i *secondi indici fondamentali d'ordine n* della funzione armonica $u(\rho, P)$ in O (all'infinito rispetto al polo O). Evidentemente, al va-

(1) Cfr. PICONE, *Sul problema di Neumann nel piano* [«Bollettino dell'Unione matematica italiana», t. VIII (1929)].

Per $n = 0$ le (3) trovansi stabilite, con lo stesso procedimento nelle mie due Note di questi «Rendiconti» precedentemente citate. Ovviamente le (3) potrebbero anche dedursi dallo sviluppo di LAURENT della $u(\rho, P)$ nell'iperstrato ($r' + 0$, $r'' - 0$):

$$u(\rho, P) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(Y'_k(P) \rho^k + \frac{Y''_k(P)}{\rho^{k+\nu}} \right),$$

sfruttando l'ortogonalità delle funzioni ipersferiche. Ma non mi pare che si possa dire che detto sviluppo abbia fino ad oggi ricevuto una trattazione generale pienamente soddisfacente, laddove le (3) - stabilite in base alle prime formole della teoria elementare - forniscono uno strumento per approfondire facilmente tutte le modalità di detto sviluppo.

riare in tutti i modi possibili dei coefficienti c_1, c_2, \dots, c_p delle combinazioni lineari $\sum_h c_h A'_{nh}$, $\sum_h c_h A''_{nh}$ si hanno tutti i primi e i secondi indici d'ordine n . Dimostreremo immediatamente il teorema:

IV. Sia I un intorno circolare, di raggio δ , del punto O ; se $u(\rho, P)$ è armonica in $I - O$ (in CI), condizione necessaria e sufficiente perchè essa sia regolare in O (sia regolare all'infinito) è che siano nulli tutti i suoi secondi indici in O (tutti i suoi primi indici all'infinito) di qualsivoglia ordine (di qualsivoglia ordine maggiore di zero).

Basta dimostrare la sufficienza della condizione. Prenderemo due ipersfere s e S , di raggi r e R ($r < R < \delta$), concentriche in O , delle quali fisseremo la seconda, e, per ogni punto (ρ, P) esterno a s porremo (cfr. le citate mie due Note di questi « Rendiconti »):

$$(4) \quad v(r; \rho, P) = \frac{r^v}{\omega_v} \int_{\omega(O)} r^v u(r, Q) \frac{(\rho^2 - r^2) d\omega(Q)}{[\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \gamma(P, Q)]^{\frac{v}{2} + 1}},$$

ove $\gamma(P, Q)$ è l'angolo (fra 0 e π) dei raggi vettori \vec{OP} e \vec{OQ} . Per ogni r , la v è funzione di (ρ, P) armonica e prende su s i valori $r^v u(r, P)$. Ricorrendo al ben noto sviluppo di Jacobi:

$$\frac{1}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \gamma)^{\frac{v}{2}}} = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(\cos \gamma) \alpha^k,$$

che, comunque si fissi la quantità positiva $a < 1$, riesce assolutamente e uniformemente convergente per $|\alpha| \leq a$, si trae dalla (4), per $\rho > r$,

$$(5) \quad v(r; \rho, P) = \frac{r^{2v}}{\omega_v \rho^v} \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{2k}{v}\right) \frac{r^k}{\rho^k} \int_{\omega(O)} u(r, Q) X_k[\cos \gamma(P, Q)] d\omega(Q).$$

$X_k[\cos \gamma(P, Q)]$ è, per ogni P , funzione di Q ipersferica d'ordine k , e quindi si ha, in virtù delle (3) e delle ipotesi,

$$\frac{1}{\omega_v} \left(1 + \frac{2k}{v}\right) \int_{\omega(O)} u(r, Q) X_k[\cos \gamma(P, Q)] d\omega(Q) = A'_k(P) r^k,$$

donde

$$v(r; \rho, P) = \frac{r^{2v}}{\rho^v} \sum_{k=0}^{\infty} A'_k(P) \frac{r^{2k}}{\rho^k}.$$

Ne segue, per $r \rightarrow 0$, uniformemente al variare di P su $\omega(O)$, $\lim v(r; R, P) = \lim v(r, 2r, P) = 0$. La funzione $w(r; \rho, P) = r^v u(\rho, P) - v(r; \rho, P)$, armonica, per ogni r , nell'ipersfere sferico (s, S) , è identicamente nulla su s e, per $r \rightarrow 0$, uniformemente infinitesima su S , e

pertanto si avrà, uniformemente al variare di P , $\lim_{r \rightarrow 0} v(r; 2r, P) = 0$. Ne segue $\lim [r^\alpha u(r, P)] = 0$. Ciò prova (cfr. il teorema III della seconda delle citate mie due Note di questi « Rendiconti ») la regolarità di u in O .

2. Teorema Poincaré-Noaillon. — V. Sia $u(\rho, P)$ armonica in $I - O$ (in CI) e al tendere di ρ a zero (di ρ all'infinito) riesca definitivamente, α e K designando due costanti delle quali la prima non negativa,

$$(6) \quad \rho^{\alpha+\epsilon} u(\rho, P) < K \quad \left[\frac{u(\rho, P)}{\rho^\alpha} < K \right],$$

allora, detto m il massimo intero contenuto in α , vale in I (in CI) la seguente formola di decomposizione in somma:

$$u(\rho, P) = U(\rho, P) + \sum_{k=0}^m \frac{Y_k(P)}{\rho^{k+\nu}} \quad \left[u(\rho, P) = U(\rho, P) + \sum_{k=1}^m Y_k(P) \rho^k \right],$$

ove $U(\rho, P)$ denota una funzione armonica in I (armonica in CI e regolare all'infinito).

Porremo, ad Noaillon,

$$v(\rho, P) \begin{cases} = u(\rho, P), & \text{quando } u(\rho, P) \geq 0, \\ = 0, & \text{quando } u(\rho, P) \leq 0, \end{cases}$$

e, fissata un'arbitraria funzione ipersferica $Y_n(P)$, ne diremo M_n il massimo modulo. Si ha $|u| = 2v - u$, e quindi:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\omega_\nu} \int_{\omega(O)} u(\rho, P) Y_n(P) d\omega(P) \right| &\leq \frac{M_n}{\omega_\nu} \int_{\omega(O)} |u(\rho, P)| d\omega(P) = \\ &= \frac{2M_n}{\omega_\nu} \int_{\omega(O)} v(\rho, P) d\omega(P) - \frac{M_n}{\omega_\nu} \int_{\omega(O)} u(\rho, P) d\omega(P), \end{aligned}$$

donde, per la (6), al tendere di ρ a zero, definitivamente,

$$\frac{1}{M_n \omega_\nu} \left| \int_{\omega(O)} u(\rho, P) Y_n(P) d\omega(P) \right| = \left| A'_n \rho^n + \frac{A''_n}{\rho^{\nu+n}} \right| \leq \frac{2}{\rho^{\alpha+\epsilon}} K - A'_0 - \frac{A''_0}{\rho^\alpha}.$$

Ne segue $A''_n = 0$ quale si sia la funzione ipersferica $Y_n(P)$, di ordine $n > \alpha$. Ma allora, detto m il massimo intero contenuto in α , la funzione armonica in $I - O$:

$$U(\rho, P) = u(\rho, P) - \sum_{k=0}^m \frac{\sqrt{\omega_\nu}}{\rho^{k+\nu}} \sum_{h=1}^m A''_{kh} Y_{kh}(P),$$

ha tutti nulli i secondi indici di qualsivoglia ordine, e pertanto (teorema IV) essa è regolare in O .

3. **Dimostrazione del teorema primo.** — Considereremo ancora le ipersfere s e S del numero precedente e porremo, per $\rho > r$,

$$(7) \quad v(r; \rho, P) = \frac{r^\nu}{\omega_\nu} \int_{\omega(O)} \frac{[K - r^\nu \varphi(r) u(r, P)] (\rho^2 - r^2) d\omega(Q)}{[\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \gamma(P, Q)]^{\frac{\nu}{2} + 1}}.$$

Detto r_0 un valore ($< R$) tale che, per $r \leq r_0$, riesca

$$K - r^\nu \varphi(r) u(r, P) > 0,$$

dalla (7), per $r \leq r_0$, si trae

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{(\rho - r) r^\nu}{(\rho + r)^{\nu+1}} [K - \varphi(r) (A'_0 r^\nu + A''_0)] &< v(r; \rho, P) < \\ &< \frac{(\rho + r) r^\nu}{(\rho - r)^{\nu+1}} [K - \varphi(r) (A'_0 r^\nu + A''_0)], \end{aligned}$$

donde l'esistenza di una costante positiva L per la quale riesce

$$|v(r; R, P)| < L, \quad \text{per } r \leq r_0.$$

Sia $|r^\nu \varphi(r) u(R, P)| < L'$, per $r \leq r_0$, la funzione

$$w(r; \rho, P) = K - r^\nu \varphi(r) u(\rho, P) - v(r; \rho, P),$$

armonica, per ogni r , nell'iperstrato (s, S) è identicamente nulla su s , e, per $r \leq r_0$, verifica la limitazione $|w(r; R, P)| < |K| + L' + L$, si ha dunque nel detto iperstrato

$$(9) \quad |r^\nu \varphi(r) u(\rho, P)| < 2|K| + L' + L + |v(r; \rho, P)|, \quad \text{per } r \leq r_0.$$

Fissato ora arbitrariamente il numero positivo q , si trae dalla (8) l'esistenza di una certa costante positiva L_q per la quale riesce

$$|v[r; (1 + q)r, P]| < L_q, \quad \text{per } r \leq r_0,$$

e quindi dalla (9), posto $H_q = (2|K| + L + L' + L_q)(1 + q)^\nu$, si deduce, come volevasi dimostrare,

$$r^\nu \left| \varphi\left(\frac{r}{1 + q}\right) u(r, P) \right| < H_q, \quad \text{per } r \leq r_0.$$

Matematica. — *Le tenseur quadruple de Christoffel et le tenseur de Riemann.* Nota di A. DE MIRA FERNANDES, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

La formation que j'ai précédemment appelée *tenseur quadruple de Christoffel* (au sens de M. Cisotti) et dont les composantes sont

$$(1) \quad D_{hikl} = D_{ih/l} - D_{hik} \frac{\begin{bmatrix} h & l \\ h \end{bmatrix}}{a_{hh}},$$

$D_{hik} = \frac{\begin{bmatrix} h & k \\ i \end{bmatrix}}{a_{hh}} - \frac{a_{hi}}{a_{hh}} \frac{\begin{bmatrix} h & k \\ h \end{bmatrix}}$ étant le *tenseur triple de Christoffel* (de M. Cisotti) et $ds^2 = \sum_{ik} a_{ik} dx^i dx^k$ le tenseur fondamental, dépend très simplement du tenseur de Riemann.

En effet, on voit aisément que

$$(2) \quad \begin{cases} D_{ik/l} - D_{il/k} = (hi, kl) - \frac{1}{a_{hh}} \left[\frac{\begin{bmatrix} h & k \\ h \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} h & l \\ h \end{bmatrix}} - \frac{\begin{bmatrix} h & l \\ h \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} k & h \\ i \end{bmatrix}} \right] \\ \quad \quad \quad = (hi, kl) + \frac{1}{a_{hi}} \left[D_{hik} \frac{\begin{bmatrix} l & h \\ i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} k & h \\ i \end{bmatrix}} - D_{hil} \frac{\begin{bmatrix} k & h \\ i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} k & h \\ i \end{bmatrix}} \right]. \end{cases}$$

Donc

$$(3) \quad \begin{aligned} D_{hikl} - D_{hilk} &= D_{ih/l} - D_{il/k} - D_{hik} \frac{\begin{bmatrix} h & l \\ h \end{bmatrix}}{a_{hh}} + D_{hil} \frac{\begin{bmatrix} h & k \\ h \end{bmatrix}}{a_{hh}} = \\ &= (hi, kl) + D_{hik} \left[\frac{\begin{bmatrix} l & h \\ i \end{bmatrix}}{a_{hi}} - \frac{\begin{bmatrix} h & l \\ h \end{bmatrix}}{a_{hh}} \right] - D_{hil} \left[\frac{\begin{bmatrix} k & h \\ i \end{bmatrix}}{a_{hi}} - \frac{\begin{bmatrix} h & k \\ h \end{bmatrix}}{a_{hh}} \right] = \\ &= (hi, kl) + D_{hik} \frac{D_{hil}}{a_{hi}} - D_{hil} \frac{D_{hik}}{a_{hi}} = (hi, kl). \end{aligned}$$

Et aussi

$$(4) \quad \begin{cases} D_{hikl} + D_{hhli} + D_{hlik} = D_{hilh} + D_{hklh} + D_{hhil}; \\ D_{hikl} + D_{kili} = D_{klhi} + D_{hilk}. \end{cases}$$

(1) Nella seduta del 16 giugno 1929.

(2) Dans la dérivée covariante $D_{ik/l}$, l'indice h est un *indice d'ordre*.

Matematica. — *Parallelismo e curvatura geodetica sopra una superficie.* Nota di F. SBRANA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. In una Nota pubblicata qualche anno fa in questi « Rendiconti » ⁽²⁾, ho potuto risolvere in modo agevole, con una quadratura, il problema del trasporto per parallelismo (nel senso di Levi-Civita), sopra una superficie. Il risultato ottenuto è suscettibile della seguente interpretazione (che permette di collegarlo con una notevole proposizione, stabilita anteriormente dal Lipka) ⁽³⁾: sia u il versore tangente in un punto P alla superficie σ , del quale si cerca la parallela tangenziale lungo una determinata curva T di σ , e sia t il versore tangente in P alla linea di trasporto T; indicando con ω l'angolo (minore di π) compreso tra t e u , valutato nel senso che va da t verso u , e con $\frac{1}{\rho}$ la curvatura geodetica di T in P, si ha

$$(1) \quad \frac{d\omega}{ds} = \frac{1}{\rho},$$

ove s'intenda per s l'arco contato positivamente su T, a partire da un'origine prefissata.

In ciò che segue stabilisco un'espressione vettoriale (che mi sembra notevole) per la curvatura geodetica di una linea tracciata sopra una superficie, da cui deduco, immediatamente, la (1) ⁽⁴⁾. Colgo l'occasione per trarne

(1) Nella seduta del 16 giugno 1929.

(2) F. SBRANA, *Sul parallelismo di Levi-Civita per una superficie dello spazio ordinario* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XXXIII, serie 5^a, 2° sem. 1923, pagine 236-238).

(3) I. LIPKA, *Sulla curvatura geodetica delle linee appartenenti ad una varietà qualunque* (ibidem, vol. XXXI, serie 5^a, 1° sem. 1922, pp. 353-356). Cfr. anche T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto* (Roma, Stock, 1925), cap. V, § 25.

(4) La relazione (1) potrebbe anche essere dedotta dalla proposizione citata del LIPKA, che si enuncia come segue: « sia T una curva appartenente ad una varietà qualunque, ed s l'arco contato su T a partire da una origine arbitraria. Se P e Q sono due punti di T, corrispondenti ai valori s ed $s + \Delta s$ dell'arco di T, e si indica con $\Delta\omega$ l'angolo compreso tra la tangente a T in Q e la parallela per Q (nel senso di LEVI-CIVITA) alla tangente in P, si ha

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta s} = \frac{1}{\rho},$$

ove si indichi con $\frac{1}{\rho}$ la curvatura geodetica di T in P ».

Se si ricorda che due vettori qualunque, trasportati parallelamente lungo la medesima linea T, si mantengono ad angolo costante, si deduce facilmente la (1), nel caso del trasporto sopra una superficie.

anche un'equazione, relativa alle linee di assegnata curvatura geodetica, tracciate sopra una superficie, che si può considerare un'estensione della nota equazione di Gauss per le geodetiche di una superficie⁽¹⁾.

2. Sia \mathbf{N} il versore normale a σ nel punto P , orientato in modo che risulti (con le notazioni di Marcolongo e Burali-Forti),

$$(2) \quad \mathbf{N} = \frac{1}{\sin \omega} (\mathbf{t} \wedge \mathbf{u}),$$

e \mathbf{p} un versore tangente a σ e normale a \mathbf{t} in P , definito dalla relazione

$$(3) \quad \mathbf{p} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{N}.$$

Dalle (2), (3), si trae

$$(4) \quad \mathbf{p} = \frac{1}{\sin \omega} (\mathbf{t} \cos \omega - \mathbf{u}).$$

Ciò posto, se \mathbf{n}_p è il versore della normale principale a T in P , la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho}$ di T in P si otterrà proiettando il vettore $\frac{1}{r} \mathbf{n}_p$ (in cui $\frac{1}{r}$ sia la flessione di T) ortogonalmente su \mathbf{p} .

Dalla formula di Frénet,

$$\mathbf{n}_p = r \frac{d\mathbf{t}}{ds},$$

e dalla (4) risulta allora

$$(5) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} \mathbf{n}_p \times \mathbf{p} = - \frac{1}{\sin \omega} \frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{u}.$$

In questa relazione si deve intendere naturalmente fissato il verso in cui va contato l'angolo ω ; noi abbiamo già supposto che questo verso vada da \mathbf{t} verso \mathbf{u} . Inoltre, nella (5), \mathbf{u} è un versore qualunque tangente a σ in P (ma distinto da \mathbf{t}). Profitteremo tra breve di tale arbitrarietà.

Introduciamo per questo, su σ , un sistema di coordinate curvilinee x_1, x_2 , rispetto al quale il quadrato dell'elemento lineare di σ sia dato da

$$(6) \quad ds^2 = a_{11} dx_1^2 + 2 a_{12} dx_1 dx_2 + a_{22} dx_2^2;$$

e supponiamo che i coefficienti a_{11}, a_{12}, a_{22} siano funzioni finite e continue di x_1 e x_2 , con le loro derivate dei primi due ordini, nel campo di varia-

(1) Mi è occorso inoltre di rilevare una svista sfuggita al BIANCHI (nelle sue classiche *Lezioni di Geometria differenziale*), relativamente al calcolo della detta curvatura geodetica; di questo darò pure cenno nel seguito,

bilità di x_1 e x_2 . Chiamiamo poi \mathbf{t}_1 e \mathbf{t}_2 rispettivamente i versori tangenti in P alla linea x_1 ($x_2 = \text{costante}$), e alla linea x_2 ($x_1 = \text{cost.}$). Se $\frac{1}{\rho_1}$ è la curvatura geodetica in P della x_1 , posto nella (6) \mathbf{t}_1 in luogo di \mathbf{t} , e \mathbf{t}_2 in luogo di \mathbf{u} , si trova, essendo attualmente $\frac{d}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \frac{\partial}{\partial x_1}$,

$$(7) \quad \frac{1}{\rho_1} = - \frac{1}{\sqrt{a_{11}} \sin \theta} \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial x_1} \times \mathbf{t}_2,$$

ove si indichi con θ l'angolo delle linee coordinate, percorso positivamente da \mathbf{t}_1 verso \mathbf{t}_2 .

Per la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_2}$ della linea x_2 , posto nella (6) \mathbf{t}_2 in luogo di \mathbf{t} , e \mathbf{t}_1 in luogo di \mathbf{u} , si ha invece

$$(8) \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\sqrt{a_{22}} \sin \theta} = \frac{\partial \mathbf{t}_2}{\partial x_2} \times \mathbf{t}_1.$$

Il cambiamento di segno è dovuto al fatto che l'angolo compreso tra \mathbf{t} e \mathbf{t}_2 deve ora essere valutato in senso opposto. Eseguendo i calcoli indicati, si ottiene

$$(9) \quad \frac{1}{\rho_1} = - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a_{11}}} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \quad , \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a_{22}}} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \quad , \quad (a = a_{11} a_{22} - a_{12}^2)^{(1)}.$$

(1) Queste formule si trovano (con qualche differenza nelle notazioni) nelle due ultime edizioni delle *Lezioni di Geometria differenziale* di L. BIANCHI, ma con segni concordi (quindi con uno dei due errato, qualunque sia la convenzione fatta sul senso positivo degli angoli). Cfr., p. es., 3^a ediz., vol. I, § 98, formule (4), (4*); § 99, formule (6*).

Le (9) si stabiliscono nel modo più semplice, osservando che

$$\mathbf{t}_1 = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_1} \quad , \quad \mathbf{t}_2 = \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_2} \quad , \quad \sin \theta = \sqrt{\frac{a}{a_{11} a_{22}}},$$

e quindi, per la (7),

$$\frac{1}{\rho_1} = - \frac{1}{\sqrt{a} \sqrt{a_{11}}} \left(a_{11} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial x_1^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_1} \right) \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_2};$$

essendo poi

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial x_1^2} \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_2} = \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \frac{1}{2} \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_2} = a_{12} \quad ,$$

si trova

$$\frac{1}{\rho_1} = - \frac{1}{\sqrt{a} \sqrt{a_{11}}} \left(a_{11} \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix} - a_{12} \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix} \right),$$

da cui discende subito la prima delle (9).

Analogamente si può ottenere la seconda delle (9) stesse.

Supporremo ora, per semplicità, che le linee coordinate su σ siano tra loro ortogonali, per cui risulterà

$$\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2 = a_{12} = 0.$$

Tornando a considerare una generica linea T di σ , passante per P , di versore \mathbf{t} , determiniamo la sua curvatura geodetica dalla (6), sostituendo \mathbf{t}_1 a \mathbf{u} , e a $-\omega$ l'angolo φ che va da \mathbf{t}_1 a \mathbf{t} . Con ciò la (6) diviene

$$(10) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sin \varphi} \frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{t}_1.$$

Ma avendosi

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 \cos \varphi + \mathbf{t}_2 \sin \varphi, \quad \frac{d\mathbf{t}_1}{ds} \times \mathbf{t}_1 = 0,$$

risulta intanto

$$(11) \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{t}_1 = \frac{d\mathbf{t}_2}{ds} \times \mathbf{t}_1 \sin \varphi + \frac{d \cos \varphi}{ds}.$$

D'altra parte si ha

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{t}_1 = \frac{\partial \mathbf{t}_2}{\partial x_1} \times \mathbf{t}_1 \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial \mathbf{t}_2}{\partial x_2} \times \mathbf{t}_1 \frac{dx_2}{ds} = -\frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial x_1} \times \mathbf{t}_2 \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial \mathbf{t}_2}{\partial x_2} \times \mathbf{t}_1 \frac{dx_2}{ds};$$

e successivamente, dalle (7), (8), e dalle seguenti:

$$(12) \quad \sqrt{a_{11}} \frac{dx_1}{ds} = \cos \varphi, \quad \sqrt{a_{22}} \frac{dx_2}{ds} = \sin \varphi,$$

si trae

$$\frac{d\mathbf{t}_2}{ds} \times \mathbf{t}_1 = \frac{1}{\rho_1} \cos \varphi + \frac{1}{\rho_2} \sin \varphi.$$

Sostituendo nella (11), e poi nella (10), si ottiene infine

$$(13) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} \cos \varphi + \frac{1}{\rho_2} \sin \varphi - \frac{d\varphi}{ds}.$$

Questa formula esprime in modo semplice la curvatura geodetica della generica linea T , in funzione delle analoghe curvaturei, relative alle linee coordinate, e dell'angolo φ che T forma con una di queste (la x_1). Supponendo in essa $\frac{1}{\rho} = 0$, si ritroverebbe la nota equazione di Gauss per le geodetiche⁽¹⁾; più generalmente, essa porge l'equazione delle linee di asse-

(1) Cfr., p. es., L. BIANCHI, loc. cit., § 104 (16). Si noti che nel caso in esame (in cui le linee coordinate sono ortogonali), le espressioni di $\frac{1}{\rho_1}$ e $\frac{1}{\rho_2}$ in funzione dei coef-

gnata curvatura geodetica, tracciate sulla superficie, come, per es., delle linee a curvatura geodetica costante (*circoli geodetici*, secondo Darboux).

3. Resta ora da stabilire la relazione (1), concernente il trasporto per parallelismo del vettore u lungo la linea T di σ . Osserviamo per questo che la nota condizione, per cui $\frac{du}{ds}$ deve risultare normale a σ lungo T :

$$(14) \quad \frac{du}{ds} \times t = 0,$$

offre subito

$$\frac{d(u \times t)}{ds} = \frac{d \cos \omega}{ds} = u \times \frac{dt}{ds}.$$

Confrontando questa condizione con l'espressione (5) di $\frac{1}{\rho}$, si ha senz'altro la (1).

Di quest'ultima espressione vogliamo valerci, per determinare la curvatura gaussiana K di σ in P . Questo ci permetterà qualche ulteriore osservazione, di un certo interesse. Intanto, dalle (12), (13), si trae

$$(15) \quad \frac{d\omega}{ds} = \frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{a_{11}}}{\rho_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\sqrt{a_{22}}}{\rho_2} \frac{dx_2}{ds} - \frac{d\varphi}{ds},$$

ovvero, rappresentando con α l'angolo compreso tra t_1 e u (nel senso che va da t_1 a u), per cui risulterà $\omega = \alpha - \varphi$,

$$(16) \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\sqrt{a_{11}}}{\rho_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\sqrt{a_{22}}}{\rho_2} \frac{dx_2}{ds}.$$

Supponiamo ora che T sia chiusa su σ , e che una delle parti determinate da T su σ sia semplicemente connessa. Dalla (16) si deduce

$$\alpha - \alpha_0 = \int_T \left(\frac{\sqrt{a_{11}}}{\rho_1} dx_1 + \frac{\sqrt{a_{22}}}{\rho_2} dx_2 \right),$$

ove α_0 è l'angolo che u forma inizialmente con t_1 , in un punto P di T , α l'angolo che u forma con t_1 , nello stesso punto P , a trasporto ultimato. Con la solita trasformazione dell'integrale curvilineo in integrale superficiale, si trova

$$\alpha - \alpha_0 = \iint_{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\sqrt{a_{22}}}{\rho_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\sqrt{a_{11}}}{\rho_1} \right) \right\} dx_1 dx_2,$$

ficienti del ds^2 si semplificano sensibilmente. Dalle nostre formule (7), (8), seguirebbe

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} \frac{\partial \sqrt{a_{11}}}{\partial x_2}, \quad \frac{1}{\rho_2} = -\frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} \frac{\partial \sqrt{a_{22}}}{\partial x_1};$$

[cfr., salvo il segno, L. BIANCHI, loc. cit., § 98].

in cui con σ intendiamo rappresentare la parte semplicemente connessa della superficie, limitata da T ; da ciò segue, in modo noto (essendo $(d\sigma = \sqrt{a_{11} a_{22}})$,

$$(17) \quad K = \frac{d\alpha}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{a_{11} a_{22}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\sqrt{a_{22}}}{\rho_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\sqrt{a_{11}}}{\rho_1} \right) \right\}.$$

È questa la *formula di Liouville* per la curvatura K , corrispondente al caso in cui le linee coordinate sono ortogonali⁽¹⁾. Da essa discende subito una conseguenza notevole, nel caso in cui sia $K = 0$ (cioè σ una sviluppabile). Consideriamo infatti l'equazione di Gauss per le geodetiche [che si può ottenere dalla (15)],

$$(18) \quad \frac{\sqrt{a_{11}}}{\rho_1} dx_1 + \frac{\sqrt{a_{22}}}{\rho_2} dx_2 = d\varphi.$$

Per l'ipotesi fatta, si riconosce immediatamente, dalla (17), che il primo membro della (18) è un differenziale esatto⁽²⁾ e quindi l'esistenza di un integrale primo dell'equazione stessa.

Per terminare, osserviamo, tornando alla (1), come da questa segua automaticamente che se la linea di trasposto T è una geodetica, il vettore u forma con la linea un angolo costante. Altre proprietà notevoli si possono dedurre dalla (1) stessa; per es., che se T è un circolo geodetico (secondo Darboux), l'angolo ω varia proporzionalmente all'arco s di T (come accade lungo i paralleli di una superficie di rotazione).

Matematica. — *Particolare formula di maggiorazione per le soluzioni di una classica equazione alle derivate parziali del quart'ordine della Fisica-matematica.* Nota di M. PICONE, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla derivazione parziale dei tensori.* Nota di M. PA-STORI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Cfr., p. es., L. BIANCHI (loc. cit., § 100, formula (II); si noti che abbiamo invertito il significato di ρ_1 e ρ_2). Nella formula data dal BIANCHI, si deve però cambiare il segno di uno dei termini al secondo membro; e ciò in armonia con l'osservazione già fatta al n. 2.

(2) Questa proprietà è dimostrata dal BIANCHI (loc. cit., § 104, p. 106 in fine), ricorrendo ad una espressione meno adatta della curvatura K ; infatti, la formula di LIOUVILLE non poteva condurlo alla stessa conclusione, per l'errore di segno già rilevato.

Geometria. — *Nuovi enti proiettivi nella stella che ha per centro un punto di una superficie.* Nota di G. SANNIA, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. FUBINI.

1. Con una precedente Nota ⁽²⁾ provai che tutte le *rette canoniche* già note (ed altre ancora) uscenti da un punto P di una superficie S, e formanti fascio nel piano canonico π_c , si potevano ottenere in modo sistematico dal cono di Segre Γ_6 e da un altro Γ_4 che da esso si deduce, prendendo in considerazione i successivi coni polari rispetto a Γ_6 o a Γ_4 dei piani passanti per le *tangenti asintotiche* a_r ($r = 1, 2$) o per le *tangenti di Darboux* d_r ($r = 0, 1, 2$) o per le *tangenti* (coniugate) di Segre s_r .

Presentemente son riuscito a dedurre da Γ_6 o da Γ_4 direttamente (cioè senza la polarizzazione) il fascio canonico (n. 3), ed anche a definire nella stella di centro P un piano mai prima considerato (n. 4). Poi (n. 5 e sgg.), sfruttando ancora i detti coni polari, son pervenuto a nuovi enti proiettivi in tale stella: *rette, piani, coni quadrici e cubici*.

Specialmente notevoli sono quattro delle nuove rette in quanto che non appartengono al fascio canonico, e perciò rompono l'incanto costituito da tale fascio: sembrava infatti, per lunga esperienza, che non si potesse uscire da esso (o dal piano tangente π) quando si voleva definire una retta geometricamente interessante; perchè tutte le rette definite, nei modi più svariati, eran sempre cadute in esso.

Naturalmente di tutti i nuovi enti conseguiti esistono i *duali* giacenti in π , come già esisteva in π il fascio canonico duale col centro nel punto canonico P_c .

Qui darò solo gli enunciati dei risultati più essenziali, rimettendo le dimostrazioni di essi e dei precedenti a un più ampio lavoro.

2. Prima però ricordo ⁽³⁾ che, quando si assumono come coordinate proiettive omogenee x, y, z, t di un punto P di S quelle *normali* del Fubini e come linee coordinate u, v su S le asintotiche, le prime due forme fondamentali di S sono del tipo

$$(1) \quad \varphi_2 = 2\beta\gamma du dv, \quad \varphi_3 = \beta\gamma(\beta du^3 + \gamma dv^3).$$

(1) Nella seduta del 1° giugno 1929.

(2) Nuove definizioni del fascio canonico, questi « Rendiconti », vol. VIII, serie 6°, 2° sem., fasc. 9, 373. Nel n. 2, d) di tale Nota invece di « β'_r appartiene a tale cono » pongasi « ciascuno dei β'_r appartiene al cono residuo relativo all'altro ».

(3) Cfr. FUBINI-ČECH, *Geometria proiettiva differenziale*, tomo I (Zanichelli, Bologna, 1926).

Esse si annullano nelle direzioni $du:dv$ delle a_r e delle d_r , mentre in quelle delle s_r si annulla l'altra

$$(2) \quad \varphi'_3 = \omega \beta \gamma (\gamma dv^3 - \beta du^3) \quad (\omega = \text{sign } \beta \gamma).$$

Ogni retta del fascio canonico è la congiungente il punto $P \equiv (x)$ con un punto avente coordinate del tipo

$$(3) \quad x_{uv} + \lambda (\psi_2 x_u + \psi_1 x_v) \quad (1)$$

ove

$$(4) \quad \psi_1 = \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u}, \quad \psi_2 = \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v};$$

perciò la indicherò con $c(\lambda)$ ⁽²⁾.

Si son chiamate *rette canoniche* tutte le $c(\lambda)$ per le quali λ è una costante numerica (cioè è indipendente da P); e tali eran tutte quelle finora incontrate: la *normale proiettiva* $c(0)$, la *tangente canonica* $t_c \equiv c(\infty)$ (la cui coniugata è $t'_c \equiv PP_c$), le *rette principali* $c(-1:6)$ e $c(-1:12)$ di Γ_6 e di Γ_4 (tutte del Fubini); la *direttrice* $c(-1:2)$ (di Wilczynski), lo *spigolo* $c(-1:4)$ (di Green), e l'*asse* $c(-1:3)$ (di Čech).

Qui si incontreranno le altre: $c(-3:8)$, $c(-3:16)$, $c(-7:12)$, $c(-5:12)$, $c(-7:18)$ ⁽³⁾; ma si incontrerà pure, e per la prima volta, una $c(\lambda)$ con λ funzione di u, v . Ed è chiaro che trovatane una, se ne possono avere quante si vogliono.

(1) Tralascio di scrivere le altre tre (e così in seguito) ottenibili cambiando x in y, z, t . In esse $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}, \dots$

(2) Per poter mettere sotto forma *intrinseca e invariante per collineazioni* certe espressioni o equazioni, sicchè allora esse valgono in coordinate u, v qualunque, conviene ricordare anche le *forme lineari*

$$(a) \quad \varphi_1 = \psi_1 du + \psi_2 dv, \quad \varphi'_1 = \omega (\psi_2 dv - \psi_1 du)$$

$$(b) \quad \chi_1 = \frac{1}{\beta \gamma} (\beta \psi_2^2 du + \gamma \psi_1^2 dv), \quad \chi'_1 = \frac{\omega}{\beta \gamma} (\gamma \psi_1^2 dv - \beta \psi_2^2 du)$$

e le *funzioni*

$$(c) \quad \Phi = \frac{2}{\beta \gamma} \psi_1 \psi_2, \quad \Psi = \frac{1}{\beta^2 \gamma} \psi_1^3 + \frac{1}{\beta \gamma^2} \psi_2^3, \quad \Psi' = \frac{\omega}{\beta^2 \gamma} \psi_1^3 - \frac{\omega}{\beta \gamma^2} \psi_2^3,$$

introdotte da Čech per lo studio dell'*elemento lineare proiettivo* $\varphi_3: \varphi_2$.

Esse sono intrinseche e invarianti come le (2) e (3); per le loro espressioni in coordinate u, v qualunque, cfr. loc. cit. (3), p. 1081, § 58, A) e § 59, B).

(3) In loc. cit. (2), p. 1081, si era incontrata $c(-7:24)$. A titolo di curiosità, si può osservare che tutte, escluse quelle di riferimento $c(0)$ e $c(\infty)$, corrispondono a un valore razionale negativo di λ , con denominatore composto coi soli fattori primi 2 e 3.

3. a) Per ogni s_r passa un sol piano⁽¹⁾ di Γ_6 ; i tre piani così definiti (per $r = 0, 1, 2$) passano per una stessa retta che è $c(-3:8)$.

E le tre generatrici di contatto con Γ_6 formano un triedro rispetto al quale π ha per retta polare $c(-3:16)$.

Ecco dunque definite, mediante Γ_6 e le s_r , due delle $c(\lambda)$, e quindi il loro fascio, col piano π_c . Essendo allora $c(\infty) \equiv \pi\pi_c$, ogni altra se ne deduce. Così: la normale proiettiva è la coniugata armonica di $c(-3:8)$ rispetto a $c(-3:16)$ e a $c(\infty)$.

b) I medesimi risultati si hanno se si considera Γ_4 , invece di Γ_6 .

4. Però il triedro formato dalle generatrici di contatto non è il medesimo: e i due triedri, avendo gli spigoli omologhi giacenti in piani passanti per $c(-3:8)$, avranno le facce omologhe segantisi in rette di un medesimo piano (di omologia). Rette e piano risultano da ciò geometricamente definiti.

Le tre rette son quelle che congiungono P coi punti

$$(5) \quad \begin{cases} 16(\psi_1 + \psi_2 \varepsilon^r \mu) x_{uv} + 3(\psi_2^2 - \gamma \psi_1) \varepsilon^r \mu x_u + 3(\psi_1^2 - \beta \psi_2) x_v \\ \varepsilon = \sqrt[3]{1} \quad , \quad \mu = \sqrt[3]{\beta:\gamma} \quad ; \quad r = 0, 1, 2. \end{cases}$$

Il loro piano definisce due nuove rette: le sue tracce su π e π_c .

La prima è la tangente di S definita da

$$(6) \quad \psi_2(\psi_1^2 - \beta \psi_2) du + \psi_1(\psi_2^2 - \gamma \psi_1) dv = 0 \quad (2);$$

la seconda è la $c(\lambda)$ con

$$(7) \quad \lambda = \frac{3}{16} \cdot \frac{(\psi_1^2 - \beta \psi_2)(\psi_2^2 - \gamma \psi_1)}{\beta \psi_2^3 + \gamma \psi_1^3 - 2\psi_1^2 \psi_2^2}.$$

Appunto questa costituisce il primo esempio di una $c(\lambda)$ con λ funzione di u, v ⁽³⁾.

5. a) Se nei due fasci di piani aventi per assi a_1 e a_2 si consideravano come corrispondenti due piani che abbiano la stessa retta polare (tangente di S) rispetto a Γ_6 , essi risultano proiettivi, e perciò individuano un cono quadrico K_2 passante per a_1 e a_2 ⁽⁴⁾.

(1) Oltre π che si intenderà sempre escluso (quando non sia nominato).

(2) O da $\chi_1 - \Phi \varphi_1 = 0$, usando le notazioni di (2), p. 1082.

(3) Che è un invariante proiettivo, potendosi scrivere con le notazioni di (2), p. 1082:

$$(4) \quad \lambda = \frac{3}{32} \cdot \frac{\Phi^2 + 2\Phi - 4\Psi}{2\Psi - \Phi^2}.$$

Del resto λ è uguale a $-\frac{3}{8}$ del birapporto che la $c(\lambda)$ forma con le $c(\infty)$, $c(0)$, $c(-3:8)$, trovate insieme con essa.

(4) Un cono analogo K'_2 , bitangente a K_2 secondo a_1 e a_2 , si ottiene se nei fasci aventi per assi a_1, a_2 si fanno invece corrispondere due piani le cui rette polari siano tangenti coniugate di S.

Rispetto a K_2 , π ha per retta polare lo spigolo c ($-1:4$).

b) K_2 sega le quadriche di Darboux secondo a_1 , a_2 e coniche residue i cui piani formano fascio intorno a una retta c' del fascio canonico duale; e le dette coniche passano tutte per i punti ove c' incontra a_1 e a_2 , e che sono $\psi_1 x - 4x_u$, $\psi_2 x - 4x_v$ ⁽¹⁾.

c) Esiste, in particolare, una coppia di piani passanti per a_1 e a_2 le cui rette polari coincidono con t_c (con t'_c); essi si segano secondo una retta non giacente in π_c (ma su K_2).

Si presentano così, per la prima volta, due rette non canoniche e che sono le congiungenti il punto P con i punti

$$(8) \quad 4\psi_1\psi_2x_{uv} + \psi_1(12\gamma\psi_1 - \psi_1^2)x_u + \psi_2(12\beta\psi_2 - \psi_2^2)x_v,$$

$$(9) \quad 4\psi_1\psi_2x_{uv} - \psi_1(12\gamma\psi_1 + \psi_2^2)x_u - \psi_2(12\beta\psi_2 + \psi_1^2)x_v$$

rispettivamente.

Il loro piano comune passa per lo spigolo ed ha per traccia su π la tangente di S definita da $\beta\psi_2^2 du - \gamma\psi_1^2 dv = 0$ ⁽²⁾.

6. a) Esistono infinite terne $T(k)$ (k è un parametro) di piani passanti per le d_r le cui rette polari rispetto a Γ_6 coincidono con una unica tangente $g(k)$ di S.

b) In particolare vi è una $T(k)$ per cui $g(k) \equiv t_c$; la retta polare di π rispetto al triedro da essa formato è c ($-7:12$).

E vi è una $T(k)$ per cui $g(k) \equiv t'_c$; la retta polare di π rispetto al triedro da essa formato è una retta non canonica, congiungente P con

$$(10) \quad 12(\beta\psi_2^3 + \gamma\psi_1^3)x_{uv} + \psi_2(5\gamma\psi_1^3 - 7\beta\psi_2^3)x_u + \psi_1(5\beta\psi_2^3 - 7\gamma\psi_1^3)x_v.$$

c) Esistono poi tre terne $T(k)$ formanti tre fasci; le corrispondenti $g(k)$ sono definite da

$$(11) \quad 2\beta du^3 - \psi_1 du^2 dv + \psi_2 du dv^2 - 2\gamma dv^3 = 0$$
 ⁽³⁾.

d) Le rette polari di π rispetto alle terne $T(k)$ costituiscono un cono K_3 di terzo ordine, passante per le s_r , per le due rette definite in b), per gli assi dei tre fasci definiti in c). Esso è razionale ed ha per generatrice doppia la retta principale di Γ_6 ; il piano contenente le sue tre generatrici inflessionali ha per tracce su π la t'_c e su π_c la c ($-5:12$).

7. Dal cono Γ_4 si deducono risultati del tutto analoghi a quelli conseguiti ora (n. 6) da Γ_6 , ma che definiscono enti geometrici generalmente diversi. Precisamente:

(1) Ciò vale anche per K'_2 definito in (4), p. 1083, e con la stessa c' .

(2) Ossia $\chi'_1 = 0$, secondo (2), p. 1082. Si ha così un significato geometrico dell'annullarsi della forma χ'_1 di Čech.

(3) Ossia $4\varphi'_3 - \varphi_2\varphi'_1 = 0$, con le notazioni di (2), p. 1082.

In *b*), in luogo di $c(-7:12)$ e della retta congiungente P con (10), si presentano la *direttrice* è la *retta non canonica* congiungente P con

$$(12) \quad 6(\beta\psi_1^3 + \gamma\psi_2^3)x_{uv} + \psi_2(\gamma\psi_1^3 - 3\beta\psi_1^3)x_u + \psi_1(\beta\psi_2^3 - 3\gamma\psi_1^3)x_v.$$

In *c*), invece delle tangenti (11), si presentano a_1, a_2, t'_c .

In *d*) la generatrice doppia del cono cubico K'_3 (diverso da K_3) è la retta principale di Γ_4 (anzicchè di Γ_6); la traccia su π_c del piano delle generatrici inflessionali è $c(-7:18)$; invece di $c(-5:12)$.

Meccanica. — *I primi elementi d'una nuova teoria generale per il moto delle acque e degli altri fluidi.* Nota I di G. MAZZONE-SANGIORGI, presentata⁽¹⁾ dal Socio R. MARCOLONGO.

I. — LEGGI SUI VINCOLI.

1. *La questione dei vincoli esterni ed interni.* — In due Saggi, al primo dei quali ho aggiunto un'appendice⁽²⁾, ho esposto gli elementi d'una nuova teoria per il moto delle acque e degli altri fluidi. In questa Nota, che mi onoro di sottoporre all'Accademia, cercherò di riassumere, dopo dei cenni sulle considerazioni che mi hanno spinto sulla nuova via, i primi elementi della mia teoria ed in Note successive le conferme sperimentali, le conseguenze ed altri elementi.

Per la teoria del moto di un fluido non viscoso, si assumono, a fondamento, le tre equazioni alle derivate parziali che esprimono il principio di D'Alembert. Siccome però in dette tre equazioni figurano cinque funzioni, si aggiungono l'equazione di continuità e quella che lega la densità alla pressione (considerando il fenomeno indipendente dalla temperatura) e di più ancora, siccome le equazioni alle derivate parziali non definiscono completamente le funzioni sconosciute, occorre che siano dati lo stato del fluido all'origine del tempo e le condizioni alle superficie limiti del fluido.

Per il caso sempre che la densità sia solamente funzione della pressione si ha pure il teorema di Lagrange per il potenziale di velocità, teorema per il quale, com'è noto, s'è discusso se sia valido anche per un fluido viscoso.

(1) Nella seduta del 1° giugno 1929.

(2) I. *Saggio d'una nuova teoria generale per il moto delle acque e degli altri fluidi: Teoria degli stramazzi.* Arti grafiche U. Pinnarò, Roma, 1926. *Appendice.* Stamperia Cicerone, Roma, 1927.

II. *Saggio ecc.: Il principio di Newton per l'attrito e la distribuzione della resistenza negli stramazzi, nei tubi rettangolari, nei canali, nei fiumi.* Stabil. poligr. per l'Amm. dello Stato, Roma, 1929.

Per il caso poi di un fluido non viscoso, ma in cui abbiano luogo dei vortici, Helmholtz ha desunto dalle dette equazioni fondamentali le sue leggi sulle proprietà dei vortici.

Si hanno inoltre le equazioni di Navier, le quali si riducono pure alle tre equazioni fondamentali che traducono il principio di D'Alembert, ma con in più dei termini per la viscosità. E tali equazioni si ritengono valide principalmente per i moti lentissimi.

Per i moti non lentissimi, invece, e che sono quelli che si hanno di frequente, secondo Boussinesq, *a causa dell'agitazione*, la velocità reale in ciascun punto oscilla in grandezza e direzione attorno ad una velocità media ed egli ammette la possibilità di applicare a questa velocità media le equazioni di Navier, adottando però un coefficiente di viscosità fittizia — enormemente più grande di quello che si desume per i moti lentissimi — e variabile da punto a punto.

Secondo Reynolds e Lorentz si possono prendere a base le equazioni di Navier, ma se applicate alle velocità reali; volendo passare da queste velocità a quelle medie, e che poi sono le sole che veramente si misurano, cioè quelle di traslazione, bisogna aggiungere al termine per la viscosità e col coefficiente che si desume per i moti lentissimi, ancora un altro termine per le componenti delle velocità, che si chiamano di agitazione.

Prandtl, con la teoria detta dello strato limite, si serve pure delle equazioni di Navier.

Ora, come si sa, il sistema di equazioni generali, di cui s'è detto sopra, completato con le altre equazioni necessarie a rendere definito il problema, anche se vi si riuscisse, presenterebbe difficoltà analitiche quasi sempre insormontabili e nei pochi casi particolari, ed in quelli nei quali con criteri e mezzi approssimati e con adattamenti si riesce a venirne fuori, si hanno risultati non sempre completamente soddisfacenti. Dubbi sulla possibilità di risolvere, per tale via, le questioni particolari cominciò ad averne D'Alembert e d'altro canto si è domandato, se, come avvertì ripetutamente lo stesso Eulero, il quale diede le equazioni che esprimono il principio di D'Alembert, che oggi si prendono quasi sempre come fondamentali, non sia, invero, più conveniente, anche per ragioni di chiarezza, di ricorrere direttamente ai principi generali della meccanica. E difatti in tutto quanto s'è accennato, in sostanza, di sicuro non c'è che quanto scaturisce dai principi generali della meccanica: il principio di D'Alembert non è che la traduzione di uno di essi. Manca intanto la risoluzione generale delle questioni specifiche essenziali dei vincoli esterni ed interni di cui diremo subito.

In complesso per la misura delle azioni dei vincoli, se si guarda a fondo, non si hanno ancora che le due leggi generali date da Newton — la legge di gravitazione e quella di azione e reazione — nonchè il principio dell'attrito, pure di Newton, e che è servito a misurare quelle azioni interne dei fluidi — che si chiamano di viscosità — nei moti lentissimi. Volendo, a

queste leggi si può aggiungere l'equazione caratteristica del fluido. L'equazione di continuità costituisce pure essa un vincolo, ma di altra natura.

Le questioni specifiche riguardanti: quanto succede alle superficie limiti del fluido (al contatto con una superficie solida) e quanto succede fra le particelle di fluido in moto non lentissimo, e cioè nel moto col quale quasi generalmente si ha a che fare, ancora non sono risolte.

Per le prime, come osservò Duhem, mancano principi meccanici sufficientemente generali e quindi si fanno le congetture le più varie. Ed anche la teoria dello strato limite di Prandtl, come risulterà dallo studio di casi conosciuti punto per punto, non sfugge a tale critica. Per le seconde credo che sia lecito di dire che la teoria di Boussinesq è semplicemente un mezzo ingegnoso per ritrovare i risultati che le esperienze hanno offerto e che la teoria di Reynolds-Lorentz, la quale potrebbe sembrare più completa, non ha ricevuto dai fatti se non vaghe conferme qualitative e mai indubbe conferme quantitative precise.

2. *I vincoli negli stramazzi.* — Il fenomeno degli stramazzi, come si sa, è stato studiato da molti e più da Boussinesq per lunghi anni; ma egli, pur con le grandi risorse delle sue conoscenze di analisi matematica, è riuscito a costruire una teoria approssimata, la quale dà risultati non sempre concordanti con la realtà. Le ipotesi di cui si è servito, egli stesso ha riconosciuto che non sono sempre plausibili.

Sono stato indotto a riconsiderare gli stramazzi per via diversa, principalmente perchè m'è parso che in essi dovessero essere più marcati gli effetti dei vincoli esterni. Difatti negli stramazzi si può pensare d'avere a che fare, in sostanza, con un fascio di filetti liquidi che, scorrendo in un canale, sono obbligati ad arrestarsi o a deviare quasi bruscamente per effetto dell'incontro di una traversa. Ora, per mettermi in condizione d'identificare più agevolmente i fenomeni elementari, e cioè per avere una sola causa di deviazione, ho considerato uno stramazzo avente la stessa larghezza del canale e quindi le pareti laterali in continuazione delle pareti del canale e di più la traversa a cresta sottile. Così la parete che produce la deviazione è solo la parete della traversa rivolta a monte e tale deviazione acquista un carattere speciale, come vedremo, sul ciglio di detta parete.

Le celebri esperienze di Bazin, di cui io mi son servito per controllo della mia teoria, data la loro larghissima estensione, vennero principalmente fatte con stramazzi del detto tipo e inclinando variamente verso monte o verso valle la traversa, dapprima posta verticale e normale alle pareti del canale.

Si capisce che si tratta di esperienze in regime permanente, che è più propizio per lo studio dei fenomeni elementari.

Il mio ragionamento, in sostanza, è il seguente.

La massa d'acqua, per la gravità, si mantiene, scorrendo nel canale, e sulla traversa, più bassa che è possibile: se non ci fossero impedimenti

provenienti dal basso (dal fondo del canale o dalla forza centrifuga sulla cresta della traversa, come si vedrà) essa cadrebbe verticalmente. Quella parte, poi, che si imbatte contro la traversa, questa la costringe ad un movimento ascensionale e, per effetto del movimento di traslazione lungo il canale e di quest'altro, i filetti acquistano andamenti, in fondo, convergenti verso la bocca.

Che cosa avviene all'arrivo al ciglio della traversa? Evidentemente una rotazione perchè in esso si deve arrestare il movimento ascensionale e deve cominciare il versamento dalla bocca imposto dalla gravità.

Il moto avviene a strati ⁽¹⁾ e si può pensare che sul ciglio della traversa avvenga per strati paralleli e indefiniti nella direzione del ciglio della traversa, se lo spessore della lama stramazante è molto piccolo rispetto alla lunghezza della traversa, perchè allora l'influenza delle pareti laterali si può ritenere trascurabile.

Considerando la rotazione sola, si deve ammettere che, nel piano verticale passante pel ciglio della traversa, lo straterello più alto della massa ruotante, cioè quello sottoposto alla sola pressione atmosferica, deve avere un'accelerazione centripeta uguale all'accelerazione della gravità, vale a dire che dev'essere $v^2 : r = g$. Orbene questo si verifica per le molecole per le quali r uguale a $2/3$ dell'altezza del carico totale H sul ciglio, perchè allora è

$$\frac{v^2}{r} = 2g \frac{H}{3} : \frac{2}{3} H = g.$$

Su una molecola che compiesse una rotazione con un raggio maggiore o minore di $2/3$ di H non ci sarebbe equilibrio tra le due accelerazioni, centrifuga e della gravità, equilibrio che è necessario, invece, che sussista per lo strato superiore.

Quindi attorno al ciglio della traversa si ha una rotazione per la quale lo spessore della lama stramazante dovrebbe essere uguale a $2/3 H$. E questa è la 1^a legge assunta per i vincoli negli stramazzi.

Ora, io considero negli strati liquidi provenienti da monte, in un primo tempo, solo il moto di traslazione. Per semplicità anzi considero addirittura i detti strati come orizzontali ⁽²⁾ e che essi, all'arrivo sul piano

(1) La considerazione del moto a strati è lecita, anche quando c'è l'agitazione, com'è intuitivo, e come mostra nitidamente, tanto per i canali che per gli stramazzi, la fotografia pubblicata da Camichel e Escande (« Le Génie Civil », 24 gennaio 1925). In vari casi a velocità notevole (indubbiamente in regime turbolento) nelle esperienze dei detti autori il moto si manteneva sempre simile a quello rappresentato nella fotografia.

(2) Condizione questa tanto più prossima al vero quanto più piccola è l'altezza dello stramazzo, perchè allora è pure piccola la pendenza del pelo d'acqua nel canale adduttore. Questo senza contare la pendenza propria del canale, che d'ordinario, è anche piccola. D'altro canto Bazin dice che, nelle sue esperienze, la differenza tra la componente orizzontale della velocità e la velocità totale è piccolissima. S'intende poi che, trovati i principi elementari — che bisogna cercare e perciò bisogna isolare i fenomeni elementari — nulla vieta che si possa tener conto della pendenza.

verticale passante per il ciglio della traversa, siano tangenti agli archi della rotazione di cui sopra e che lo straterello più alto sia tangente all'arco di raggio $\frac{2}{3}H$.

Oltre le conferme che in seguito darò della scomposizione ideale ch'io faccio del fenomeno, è bene cominciare a notare che nelle esperienze di Bazin, nei casi a vena libera, a mano a mano che la traversa s'inclina verso valle, la curva del profilo diventa più tesa e lo spessore della lama stramazza sulla traversa — finchè il ciglio rimane ed è resa possibile la rotazione elementare di cui s'è discorso — tende proprio a $\frac{2}{3}H$.

Il rialzamento del pelo d'acqua al di sopra della quota $\frac{2}{3}H$ sulla soglia è dovuto ad altre azioni, a quelle verticali determinate dalla presenza della parete della traversa.

Io ho pensato che le molecole d'acqua appoggiate alla parete della traversa, comunque essa sia inclinata, tendano a scorrere lungo essa verso l'alto e che per una traversa sufficientemente alta costituiscano dei filetti che, almeno nella parte più alta, si dispongano tangenzialmente alla parete di ritenuta. In adiacenza del ciglio della traversa, del loro carico H i $\frac{2}{3}$ dovranno rimanere allo stato potenziale, per il contrasto opposto da tutta la lama stramazza, ed $\frac{1}{3}$ potrà esistere allo stato dinamico.

La parte che rimane allo stato potenziale, pel principio di Pascal, si trasmette ugualmente in tutti i sensi; la parte allo stato dinamico, invece, deve ritenersi orientata, cioè si eserciterà nella direzione e nel senso che assumeranno i filetti tangenziali alla parete di ritenuta e quindi la componente orizzontale sarà una pressione od una trazione a seconda che la parete di ritenuta sarà inclinata contro corrente o nel senso della corrente.

La somma di tali due pressioni, statica e dinamica, io ho chiamato *reazione o resistenza della traversa*.

La resistenza della traversa alla base della lama stramazza e nella direzione orizzontale ⁽¹⁾ sarà data da una pressione idrostatica, misurata in altezza d'acqua da $\frac{2}{3}H$, più una pressione dinamica orientata, misurata da $\frac{1}{3}H \cos \alpha$, se α è l'angolo che la parete di ritenuta fa con la orizzontale ^(2a legge) ⁽²⁾.

Quindi, continuando a pensare la lama stramazza costituita da strati orizzontali, questa somma è la pressione che si esercita sullo straterello orizzontale dei filetti più bassi della lama stramazza quando, provenendo da monte, perviene contro al ciglio della traversa.

(1) Per ora continueremo ad occuparci delle sole forze orizzontali sulla traversa per poter fare senz'altro i confronti, che vedremo in una 2ª Nota, con le misure di portata offerte da Bazin e più perchè ci si offrirà così l'occasione di cominciare a veder chiaro in una questione di principio interessantissima. Vedremo pure, in seguito, gli effetti della reazione della traversa nella direzione verticale.

(2) Per la misura di questa pressione mi sono ispirato a un fatto e precisamente a quanto ci dice il tubo di Pitot e cioè che la pressione esercitata da un filetto liquido è equilibrata, e quindi misurata, dal peso d'una colonna d'acqua d'altezza uguale all'altezza generatrice della velocità.

Come si vede io ho messo da parte la questione dibattutissima dell'adesione dell'acqua alla parete ed ho considerato ivi una velocità finita, ci sia o no, poi, un velo liquido attaccato alla parete.

Determinata la reazione orizzontale alla base della lama stramazzone ho pensato che essa deve propagarsi nell'interno della vena ed ho fatto l'ipotesi che, per la vena costituita come s'è detto, essa si annulla sullo straterello superiore e va dal valore nullo al valore in cresta alla traversa con legge parabolica, cioè che *nell'interno della vena, considerata come formata da strati orizzontali, la resistenza deve variare proporzionalmente al quadrato della distanza dal pelo d'acqua (3^a legge).*

In una 2^a Nota mostrerò l'applicazione di queste tre leggi ed accennerò alle conseguenze che da esse derivano.

Meccanica. — *Sul teorema del massimo effetto cineto-dinamico in relazione col principio della direttissima dell'Hertz.* Nota di E. GUGINO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una recente Nota ⁽²⁾ abbiamo generalizzato il teorema del massimo effetto cineto-dinamico, estendendolo al moto di qualsivoglia sistema materiale di punti P_i ($i = 1, 2, \dots, N$) di masse m_i a legami unilaterali, privi di attrito ed indipendenti dal tempo, comunque sollecitati. Ferme restando le ipotesi intorno alla natura dei vincoli, vogliamo considerare il caso particolarmente notevole, che le forze attive, che sollecitano i punti P_i , siano tutte nulle, di guisa che il sistema, a partire da un atto di moto iniziale, si muova sottoposto esclusivamente all'influenza delle reazioni vincolari. Ci proponiamo di mostrare come il teorema indicato ci permetta, in tal caso, di stabilire una relazione alquanto espressiva, che involge le masse m_i e le velocità $v_i(t)$ e $v_i(t + \tau)$ dei punti P_i , rispettivamente in due istanti qualunque t e $t + \tau$, abbastanza vicini; inoltre da tale relazione faremo vedere, con opportuno procedimento, come sia possibile dedurre il principio della direttissima dell'Hertz ⁽³⁾, che notoriamente costituisce, pel moto dei sistemi che si considerano, una notevole interpretazione geometrica del principio della minima costringimento del Gauss ⁽⁴⁾.

(1) Nella seduta del 16 giugno 1929.

(2) Cfr. E. GUGINO, *Sulla estensione del teorema del massimo effetto cineto-dinamico, ecc.*, «Rend. Acc. Lincei», vol. IX, serie 6^a, 1^o sem. 1929, pp. 736-742.

(3) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale*, vol. II (2^a parte), pp. 489-492.

(4) Giova osservare che, avendo dedotto, come in precedenza abbiamo mostrato, il principio del Gauss dal teorema del massimo effetto cineto-dinamico, si può senz'altro prevedere come debba anche riuscire possibile, almeno in linea concettuale, dedurre dal medesimo teorema il principio della direttissima.

In generale, per ogni sistema a legami privi di attrito ed indipendenti dal tempo, comunque sollecitato, secondo le precedenti notazioni, indicando con:

- \mathbf{F}_i la risultante delle forze attive agenti sul punto P_i ;
- \mathbf{v}_i la distribuzione delle velocità dei punti P_i in un generico istante t ;
- \mathbf{a}_i la distribuzione delle accelerazioni, che realmente assumono i punti P_i allo istante t ;
- \mathbf{a}_i^* una qualunque distribuzione delle accelerazioni compatibile coi vincoli, a partire dalla configurazione e dall'atto di moto del sistema allo stesso istante;

E_N l'effetto cineto-dinamico relativo al moto naturale, nello intervallo di tempo τ , successivo allo istante t ;

E l'effetto cineto-dinamico virtuale, relativo ad un qualsivoglia movimento (virtuale) compatibile coi legami, durante lo stesso intervallo di tempo τ , a partire dalla configurazione e dall'atto di moto allo istante t , realizzato con l'introduzione dei vincoli privi di attrito ed indipendenti dal tempo comunque scelti;

abbiamo stabilito, che l'effetto cineto-dinamico E_N risulta espresso dalla relazione:

$$(1) \quad E_N = \sum_i^N m_i \left(\mathbf{v}_i \tau + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \tau^2 \right)^2 - \frac{\tau^4}{2} \sum_i^N \frac{m_i}{2} \left[\frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \mathbf{a}_i \right]^2$$

mentre l'effetto cineto-dinamico virtuale E si lascia esprimere per mezzo di una relazione analoga alla (1) con la sola sostituzione materiale delle \mathbf{a}_i con le \mathbf{a}_i^* .

Riguardando inoltre il secondo membro della (1) come funzione quadratica delle \mathbf{a}_i , con m_i , \mathbf{F}_i , \mathbf{v}_i , τ prefissate, abbiamo dimostrato, che tra tutte le determinazioni delle accelerazioni \mathbf{a}_i^* compatibili coi vincoli, la distribuzione delle accelerazioni \mathbf{a}_i , che assumono realmente i diversi punti P_i nel moto naturale, è quella che rende massima la funzione a secondo membro della (1); ciò equivale a dire (teorema del massimo effetto cineto-dinamico) che E_N risulta massimo tra tutte le possibili determinazioni dell'effetto cineto-dinamico virtuale E .

Nell'ulteriore ipotesi, che sia nulla la sollecitazione attiva \mathbf{F}_i , essendo i legami indipendenti dal tempo, ha luogo, come è noto, l'integrale delle forze vive, che, ove si indichi con T la forza viva del sistema, si traduce nella relazione:

$$(2) \quad 2T = \sum_i^N m_i v_i^2 = \text{cost}$$

e ciò qualunque sia l'istante t .

D'altra parte vi è luogo ad osservare che, a partire dalla configurazione e dall'atto di moto del sistema allo istante t , se si considera nel suc-

cessivo intervallo di tempo τ , un qualunque altro movimento virtuale, realizzato nelle circostanze sopra indicate, durante tale movimento, la forza viva del sistema, che dipende soltanto dall'atto di moto iniziale, si mantiene ancora costante, e, quel che più importa, conserva lo stesso valore che compete al corrispondente moto naturale (moto spontaneo).

Ciò premesso, nella nostra ulteriore ipotesi, la (1) diviene

$$E_N = \sum_i^N m_i v_i^2 \tau^2 - \frac{\tau^4}{2} \sum_i^N \frac{m_i}{2} a_i^2.$$

La già espressa condizione di massimo di E_N si traduce manifestamente nella condizione analoga, relativa però alla funzione

$$(3) \quad S' = \sum_i^N m_i \left[v_i^2 - \left(\frac{\tau}{2} a_i \right)^2 \right].$$

Se insieme all'atto di moto $v_i(t)$ all'istante generico t , si considera l'atto di moto $v_i\left(t + \frac{\tau}{2}\right)$ allo istante $t + \frac{\tau}{2}$ nel moto spontaneo del sistema, in virtù della (2) può scriversi

$$\sum_i^N m_i v_i^2(t) = \sum_i^N m_i v_i^2\left(t + \frac{\tau}{2}\right)$$

onde la (3) può mettersi sotto la forma:

$$S = \sum_i^N m_i \left[v_i^2\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \left(\frac{\tau}{2} a_i \right)^2 \right]$$

oppure nella forma equivalente

$$(4) \quad S = \sum_i^N m_i \left[v_i\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \frac{\tau}{2} a_i \right] \times \left[v_i\left(t + \frac{\tau}{2}\right) + \frac{\tau}{2} a_i \right].$$

D'altra parte per la formula di Taylor, arrestando lo sviluppo ai termini di primo grado in τ , si ha:

$$v_i\left(t + \frac{\tau}{2}\right) = v_i(t) + \frac{\tau}{2} a_i$$

$$v_i(t + \tau) = v_i(t) + \tau a_i.$$

Sostituendo in luogo di $v_i\left(t + \frac{\tau}{2}\right)$ il secondo membro della prima, tenendo conto della seconda, la (4) può in definitiva scriversi:

$$(I) \quad S = \sum_i^N m_i v_i(t) \times v_i(t + \tau).$$

Se a partire dallo istante t si considera un qualunque altro movimento virtuale, avente i caratteri superiormente espressi, indicando con $\mathbf{v}_i^*(t + \tau)$ la distribuzione delle velocità dei punti P_i allo istante $t + \tau$, nel moto virtuale che si considera, ove si indichi con S^* la funzione analoga ad S , con lo stesso procedimento si ottiene:

$$(I') \quad S^* = \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i(t) \times \mathbf{v}_i^*(t + \tau).$$

Pel teorema del massimo effetto cineto-dinamico, la funzione S risulta sempre maggiore di S^* ; si può quindi stabilire la seguente proposizione:

Per ogni sistema materiale a legami privi di attrito ed indipendenti dal tempo, non sollecitato da forze attive, il moto spontaneo, a partire da un generico atto di moto iniziale, è caratterizzato tra tutti i moti compatibili coi legami, come quello per il quale risulta massima la somma dei prodotti delle masse m_i per i prodotti scalari delle velocità $\mathbf{v}_i(t)$ e $\mathbf{v}_i(t + \tau)$ di ciascun punto P_i , in due istanti t e $t + \tau$ qualunque, purchè abbastanza vicini.

Stabilito ciò, sia V uno spazio euclideo ad $n = 3N$ dimensioni, ossia tale che il quadrato della distanza ds di due punti infinitamente vicini x_v e $x_v + dx_v$ ($v = 1, 2, \dots, n$) sia definito dalla forma quadratica euclidea

$$(5) \quad ds^2 = \sum_v^n dx_v^2.$$

Rappresentiamo le configurazioni del sistema di N punti P_i nello spazio V ponendo:

$$(6) \quad x_{3i-2} = \sqrt{m_i} \xi_i, \quad x_{3i-1} = \sqrt{m_i} \eta_i, \quad x_{3i} = \sqrt{m_i} \zeta_i \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

ove le ξ_i, η_i, ζ_i indicano le coordinate del punto P_i rispetto ad una terna galileiana ortogonale $\Omega \xi \eta \zeta$.

Allorchè il sistema in un generico moto, passa da una configurazione iniziale C ad una configurazione finale C' , tale moto, nello spazio V , verrà rappresentato da un arco PP' di curva, che congiunge i punti P e P' , rappresentativi delle configurazioni estreme; tale arco di curva, come sappiamo, prende il nome di traiettoria del sistema, ed ha per equazioni parametriche $x_v = x_v(t)$ le relazioni, che si deducono dalle (6) appena sia conosciuta la legge del movimento. Il quadrato dell'elemento lineare ds di tale traiettoria, risulta proporzionale al prodotto della forza viva T del sistema pel quadrato del tempuscolo dt . Infatti per la (5) può scriversi

$$ds^2 = dt^2 \sum_v^n \dot{x}_v^2$$

ed in base alle (6) si deduce

$$(7) \quad ds^2 = dt^2 \sum_i^N m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) = 2 T dt^2.$$

Il che prova l'asserto.

Ciò posto a partire dalla configurazione e dall'atto di moto del sistema allo istante generico t , insieme al moto spontaneo M , in un intervallo di tempo abbastanza piccolo τ , si consideri un qualunque altro movimento virtuale M^* , realizzato, durante lo stesso intervallo di tempo, con l'introduzione di vincoli comunque scelti. Supposta nulla la sollecitazione attiva, per la circostanza già messa in rilievo, che durante i due moti M ed M^* , la forza viva T del sistema si mantiene costante, in virtù della (7) si deduce, che nello spazio rappresentativo V , i due archi PP' e PP'' di traiettoria, relativi ai due moti M ed M^* , risultano di uguale lunghezza e sono percorsi con la stessa velocità costante; i due moti M ed M^* possono in conseguenza differire soltanto per elementi geometrici intrinseci delle loro traiettorie, non già per le rispettive leggi temporali di percorrenza.

D'altra parte la (I) esplicitata secondo gli assi diviene

$$S = \sum_i^N m_i [\dot{\xi}_i(t) \dot{\xi}_i(t + \tau) + \dot{\eta}_i(t) \dot{\eta}_i(t + \tau) + \dot{\zeta}_i(t) \dot{\zeta}_i(t + \tau)].$$

In base alla (6) siffatta relazione può scriversi

$$(8) \quad S = \sum_v^n \dot{x}_v(t) \dot{x}_v(t + \tau).$$

Poichè si ha:

$$\dot{x}_v = \frac{dx_v}{ds} \dot{s}$$

essendo per la (7) \dot{s} indipendente dal tempo, la (8) può mettersi sotto la forma

$$(9) \quad S = \dot{s}^2 \sum_v^n \left(\frac{dx_v}{ds} \right)_P \left(\frac{dx_v}{ds} \right)_{P'}$$

ove abbiamo indicato con $\left(\frac{dx_v}{ds} \right)_P$ e $\left(\frac{dx_v}{ds} \right)_{P'}$ rispettivamente i parametri direttori delle due tangenti ai punti estremi dell'arco PP' percorso, durante il tempo τ , nel moto spontaneo del sistema. Indicando con $\Delta\theta$ l'angolo di contingenza relativo all'arco PP' , comè è noto si ha:

$$\cos \Delta\theta = \sum_v^n \left(\frac{dx_v}{ds} \right)_P \left(\frac{dx_v}{ds} \right)_{P'}$$

onde la (9) diviene

$$(10) \quad S = s^2 \cos \Delta\theta.$$

Analogamente, ove si indichi con $\Delta\theta^*$ l'angolo di contingenza relativo all'arco PP^* con lo stesso procedimento dalla (I') si ottiene:

$$(10') \quad S^* = s^2 \cos \Delta\theta^*.$$

Essendo S massimo fra tutte le possibili determinazioni di S^* , assumendo s^2 lo stesso valore in entrambe le relazioni (10) e (10'), dovrà in conseguenza risultare:

$$\cos \Delta\theta > \cos \Delta\theta^*$$

quindi

$$\Delta\theta < \Delta\theta^*$$

per tutte le possibili determinazioni di $\Delta\theta^*$.

D'altra parte essendo:

$$|\text{arc } PP'| = |\text{arc } PP^{*'}|$$

si deduce:

$$(11) \quad \frac{\Delta\theta}{|\text{arc } PP'|} < \frac{\Delta\theta^*}{|\text{arc } PP^{*'}|}.$$

ossia la curvatura media dell'arco di traiettoria PP' , percorsa durante l'intervallo di tempo τ , nel moto spontaneo M , è sempre più piccola dell'analogica curvatura media dell'arco di traiettoria $PP^{*'}$, percorsa durante lo stesso intervallo di tempo, in un qualsivoglia movimento virtuale M^* .

Facendo tendere τ a zero dalla (II) si deduce infine il noto principio della direttissima dell'Hertz: ad ogni istante l'incurvamento della traiettoria relativa al moto spontaneo è minimo rispetto a tutte le altre traiettorie consentite dai vincoli.

Meccanica. — *Un nuovo risultato sperimentale sulla contrazione delle vene liquide.* Nota di M. LELLI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Il Polo galattico e la regione circumpolare galattica.* Nota di P. EMANUELLI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio A. BEM-PORAD.

1. — Le recenti ricerche di Astronomia siderale hanno messo in rilievo il fatto singolare della forte concentrazione delle nebulose spirali nella regione circumpolare boreale galattica.

Secondo alcune moderne vedute, queste nebulose si ritengono esterne al nostro sistema stellare, e situate alla distanza di qualche decina di milioni di anni-luce. Se esse siano dei sistemi stellari simili al nostro, ovvero coacervazioni stellari speciali, non si è potuto ancora stabilire.

Uno studio sistematico della distribuzione nello spazio di queste entità cosmiche si è potuto, or non è molto, eseguire, grazie specialmente al materiale fotografico celeste di cui oggi dispone l'Astronomia. L'atlante stellare di Franklin-Adams è utilissimo allo scopo. Esso comprende 206 carte le quali abbracciano tutto il cielo fino ad un limite di grandezza stellare che, in qualche caso, raggiunge la 18^a o la 19^a.

Hardcastle ha esaminato queste carte, ed ha catalogato tutte le nebulose superiori alle 13^m circa che in esse si trovano, formando così un elenco delle medesime che è molto adatto per studi statistici ⁽²⁾.

Se noi togliamo da questo elenco tutte le nebulose galattiche (planetarie e diffuse), gli ammassi e gli oggetti nelle Nubi di Magellano, rimangono 700 nebulose che possono essere considerate come extra-galattiche. Per controllo, noi possiamo paragonare questo materiale con quello di Holetschek ⁽³⁾, consistente nella osservazione di tutte le nebulose, da + 90° a — 10° di declinazione, e fino alla grandezza 12.5. Si può così istituire un confronto fra 400 nebulose extra-galattiche le quali sono comuni agli elenchi di Hardcastle e di Holetschek.

La classificazione di queste nebulose fu fatta da Hubble mediante il ricco materiale fotografico degli Osservatori americani del Mount Wilson e di Lick, in base a criteri formulati in seguito allo studio delle fotografie di parecchie migliaia di nebulose ⁽⁴⁾. I tre tipi della classificazione sono:

(1) Nella seduta del 5 maggio 1929.

(2) J. A. HARDCASTLE, *Nebulae seen on Mr. Franklin-Adams' Plates*; «Monthly Notices of the R. Astron. Soc.», 74 (1914) 699.

(3) J. HOLETSCHEK, *Beobachtungen über den Helligkeitseindruck von Nebelflecken und Sternhaufen*; «Annalen der Sternwarte in Wien», 20 (1907).

(4) E. HUBBLE, *Extra-galactic Nebulae*. «Contributions from the Mount Wilson Observatory», N. 324 (1926).

nebulose ellittiche, nebulose a sbarra, nebulose spirali normali; ciascun gruppo è suddiviso in tre sotto-classi: « early », « intermediate » e « late ». Le 400 nebulose extra-galattiche di Hardcastle ed Holetschek risultano così classificate: 93 ellittiche, 59 a sbarra, 237 spirali normali e 11 irregolari.

2. — È sembrato di qualche interesse vedere come queste nebulose extra-galattiche siano distribuite nella regione circumpolare galattica. Secondo i più attendibili risultati, il polo nord è situato in $AR = 12^h 44^m$, $D = + 26^{\circ}.8$, malgrado che altre determinazioni assegnino posizioni alquanto distanti da questo punto. Nella seguente tabella noi riportiamo alcune delle principali determinazioni del polo nord galattico, dalla prima di W. Herschel alla più recente, riferite all'equinozio del 1900 ⁽¹⁾.

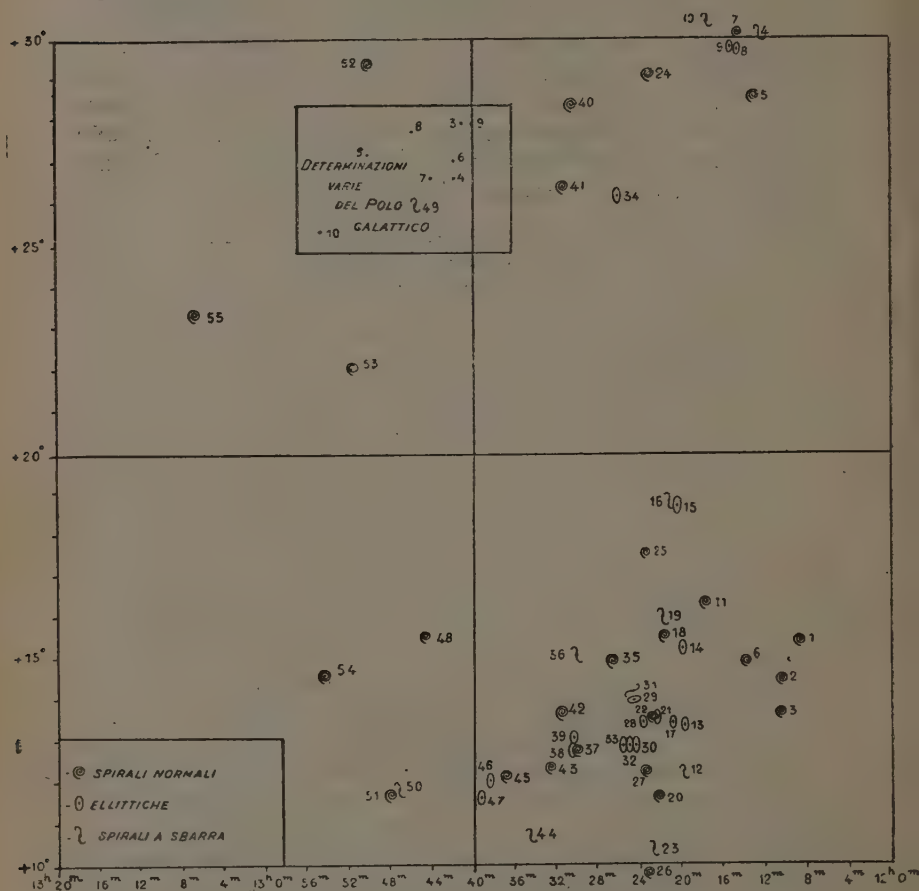
Numero	Polo Nord Galattico		Autore
	AR (1900)	D (1900)	
1	$12^h 30^m$	$+ 31^{\circ}.4$	Herschel W.
2	12 42	$+ 31.1$	Struve F.
3	12 41	$+ 28.0$	Argelander
4	12 42	$+ 26.8$	Heis
5	12 50	$+ 27.4$	Houzeau
6	12 42	$+ 27.2$	Gould
7	12 47	$+ 26.8$	Newcomb
8	12 46	$+ 27.9$	Kobold
9	12 40	$+ 28$	Pickering
10	12 55	$+ 25.5$	Van Rhijn

Queste determinazioni sono state dedotte da ricerche basate sulla distribuzione di stelle nella Via Lattea o su punti di massima luminosità, senza riguardo alla classe spettrale o ad altre particolarità fisiche. La loro concordanza è buona, se si pensa alla natura indeterminata del problema. Il valore medio delle 10 determinazioni è: $AR = 12^h 43^m$, $D = + 28^{\circ}.0$. L'accordo fra il polo di Heis e quello di Newcomb è notevole, essendovi fra le due posizioni una differenza di $0^{\circ}.5$, come fu posto in rilievo da Hagen ⁽²⁾.

(1) Nella introduzione alle nostre *Tavole di Trasformazione delle coordinate equatoriali in galattiche* (« Pubbl. della Specola Astron. Vaticana, XIV, p. XII e XIII ») noi abbiamo riportato un quadro di tutte le determinazioni del polo galattico fatte fino ad oggi, con la relativa indicazione bibliografica, e note illustrative; esso è il più completo che esista fino ad ora.

(2) J. G. HAGEN, *Die Lage der Milchstrasse nach Heis*. « Astron. Nachr. », 217 (1922.) n° 5197.

Nel disegno che accompagna la presente Nota, queste determinazioni del polo nord galattico (eccettuate le due prime) sono indicate da un punto, con a fianco un numero che corrisponde al numero d'ordine della tabellina sopra riportata.



3. — Consideriamo lo spazio di cielo limitato dai circoli paralleli a $+10^\circ$ e $+30^\circ$, e dai circoli di declinazione $12^h 0^m$ e $13^h 20^m$: è questa la regione circumpolare galattica che contiene le costellazioni della Chioma di Berenice e della Vergine, e che si estende da $+75^\circ$ a $+90^\circ$ di latitudine galattica. Delle 400 nebulose extra-galattiche classificate da Hubble, 55 (circa $\frac{1}{7}$) si trovano in questo limitato spazio di cielo: di esse, 25 sono spirali normali, 18 ellittiche e 12 spirali a sbarra. Alcune di queste 55

nebulose extra-galattiche, e cioè 14, furono osservate da Messier con il suo piccolo cannocchiale, il che dimostra che esse sono oggetti celesti abbastanza cospicui ⁽¹⁾.

Qui sotto ne riportiamo l'elenco completo: la 1^a colonna dà il numero d'ordine, e l'asterisco richiama alle Note; la 2^a dà il numero della nebulosa nel *New General Catalogue* del Dreyer; la 5^a, la latitudine galattica dedotta dalle nostre tavole di trasformazione; la 6^a indica il tipo della nebulosa secondo la classificazione di Hubble; la 7^a dà per alcune la distanza in anni-luce, espressa in milioni, secondo Lundmark ⁽²⁾; l'8^a riporta la velocità radiale dal *Second Catalogue of Radial Velocities* di J. Voûte. Parecchie di queste nebulose sono state fotografate, e le loro fotografie pubblicate, secondo risulta dalle note al seguente quadro.

TABELLA.

Numero d'ordine	NGC	Equin. 1900		b	Tipo	Distanza in anni-luce (in milioni)	V Km/sec.
		AR	D				
1*	4192	12 ^h 8 ^m .7	+ 15° 27'	+ 75°	Spirale normale, « intermediate »	8	
2*	4212	10 .6	14 28	75	Spirale normale, « late »	50	
3*	4216	10 .8	13 42	75	Spirale normale, « intermediate »	10	
4	4245	12 .6	30 10	82	Spirale a sbarra, « intermediate »		
5	4251	13 .1	28 44	83	Spirale normale, « early »		
6*	4254	13 .8	14 59	76	Spirale normale « late »	10	
7*	4274	14 .8	30 10	83	Spirale normale, « early »	20	
8	4278	15 .1	29 50	83	Ellittica		
9*	4283	15 .3	29 52	83	Ellittica		
10	4314	17 .5	30 27	84	Spirale a sbarra, peculiare		
11*	4321	17 .9	16 23	78	Spirale normale, « late »	15	

N. 1 = NGC 4192 = MESSIER 98. Fotografia in *Publ. Lick Obs.* 13 (1918) tav. 4.

• 2 = NGC 4212. Fotografia in *Publ. Lick Obs.* 13 (1918) tav. 5.

• 3 = NGC 4216. Fotografie in *Mount Wilson Contr.* 7 (1917) tav. 11, e in *Publ. Lick Obs.* 13 (1918) tav. 4.

• 6 = NGC 4254. = MESSIER 99. Fotografie in *Photographs of Stars, Star-Clusters and Nebulae* di ROBERTS II (1899) tav. 13, e in *Publ. Lick Obs.* 8 (1908) tav. 32.

• 7 = NGC 4274. Fotografia in *Publ. Lick Obs.* 13 (1918) tav. 5.

• 9 = NGC 4283, indicata come « stellar » in NGC.

• 11 = NGC 4321 = MESSIER 100. Fotografie in *Photographs of Stars, Star-Clusters and Nebulae* di ROBERTS II (1899) tav. 14, e in *Publ. Lick Obs.* 8 (1908) tav. 35.

(1) Il Catalogo di MESSIER fu pubblicato nel 1781 nella *Connaissance des Temps* per l'anno 1784 (p. 227). H. SHAPLEY e H. DAVIS hanno pubblicato nelle « *Publ. Astr. Soc. Pacific* », 29 (1917) 177 un quadro in cui sono dati i numeri del NGC degli oggetti del catalogo di MESSIER.

(2) KNUT LUNDMARK, *The Relations of the Globular Clusters and Spiral Nebulae to the Stellar System*. « *Kungl. Svenska Vetenskapsakademiens Handligar* », Band. 60, n° 8 (1920).

Segue: TABELLA.

Numero d'ordine	NGC	Equin. 1900		b	Tipo	Distanza in anni-luce (in milioni)	V Km/sec.
		AR	D				
12	4371	12 ^h 19 ^m .8	+ 12° 16'	+74°	Spirale a sbarra, «early»		
13*	4374	20 .0	13 27	75	Ellittica	4	
14	4377	20 .1	15 19	77	Ellittica		
15*	4382	20 .4	18 45	80	Ellittica	6	+ 500
16	4394	20 .9	18 46	80	Spirale a sbarra, «intermediate»	10	
17*	4406	21 .1	13 30	75	Ellittica	8	
18	4419	21 .8	15 36	77	Spirale normale, «late»		
19	4421	22 .0	16 1	78	Spirale a sbarra, «early»		
20*	4429	22 .4	11 40	74	Spirale normale, «early»	25	
21	4435	22 .6	13 38	76	Ellittica		
22	4438	22 .7	13 34	76	Spirale normale, «intermediate»	15	
23	4442	23 .0	10 22	73	Spirale a sbarra, «early»		
24	4448	23 .3	29 10	84	Spirale normale, «intermediate»	20	
25	4450	23 .4	17 38	79	Spirale normale, «intermediate»	15	
26	4451	23 .6	9 49	73	Spirale normale, «intermediate»		
27	4452	23 .7	12 19	75	Spirale normale, «early»		
28*	4459	23 .9	13 32	76	Ellittica peculiare		
29	4473	24 .8	13 59	76	Ellittica		
30	4476	24 .9	12 54	75	Ellittica		
31	4477	25 .0	14 11	76	Spirale a sbarra, «early»		
32	4478	25 .2	12 53	75	Ellittica		
33*	4486	25 .8	12 57	75	Ellittica	5	+ 800
34	4494	26 .4	26 20	86	Ellittica		
35*	4501	26 .9	14 59	77	Spirale normale, «late»	15	
36	4548	30 .4	15 3	78	Spirale a sbarra, «intermediate»	15	
37	4550	30 .5	12 46	76	Spirale normale, «early»		

N. 13 = NGC 4374 = MESSIER 84.

* 15 = NGC 4382 = MESSIER 85. HUBBLE in *Proceedings Nat. Acad. of Sciences* 15 (1929) 169 dà per la distanza 6 milioni di anni-luce.

* 17 = NGC 4406 = MESSIER 86.

* 20 = NGC 4429 = Fotografia in *Publ. Lick Obs.* 13 (1918) tav. 4.

* 28 = NGC 4459. All'apparenza si mostra come una nebulosa ellittica, con una sottile banda di assorbimento tra il nucleo e la periferia.

* 33 = NGC 4486 = MESSIER 87. Fotografia in *Publ. Lick Obs.* 8 (1908) tav. 36. HUBBLE in *Proceedings Nat. Acad. of Sciences* 15 (1929) 169 dà per la distanza 6 milioni di anni-luce.* 35 = NGC 4501 = MESSIER 88. Fotografia in *Publ. Lick Obs.* 8 (1908) tav. 37.

Segue: TABELLA.

Numero d'ordine	NGC	Equin. 1900		b	Tipo	Distanza in anni-luce (in milioni)	V Km/sec.
		AR	D				
38	4551	12 ^h 30 ^m .6	+ 12° 49'	+ 76°	Ellittica		
39*	4552	30 .6	13 7	76	Ellittica		
40*	4559	31 .0	28 31	86	Spirale normale, «late»	15	
41*	4565	31 .4	26 32	87	Spirale normale, «intermediate»	7	+1100
42*	4569	31 .8	13 43	76	Spirale normale, «late»		
43*	4579	32 .7	12 22	75	Spirale a sbarra, «late»	4	
44*	4596	34 .9	10 44	74	Spirale a sbarra, «early»		
45*	4621	37 .0	12 12	75	Ellittica		
46*	4649	38 .6	12 6	75	Ellittica	6	+1090
47*	4660	39 .5	11 43	75	Ellittica		
48*	4710	44 .7	15 42	79	Spirale normale, «early»	20	
49*	4725	45 .6	26 3	89	Spirale a sbarra, «intermediate»	5	
50	4754	47 .3	11 51	75	Spirale a sbarra, «early»		
51	4762	47 .9	11 46	75	Spirale normale, «early»	15	
52	4793	47 .8	29 29	87	Spirale normale, «late»		
53*	4826	51 .8	22 13	85	Spirale normale, «intermediate»	5	+150
54	4866	12 54 .5	14 43	78	Spirale normale, «early»		
55	5012	13 6 .8	23 27	84	Spirale normale, «late»		

N. 39 = NGC 4552 = MESSIER 89.

» 40 = NGC 4559. Fotografie in *Photographs of Stars, Star-Clusters and Nebulae*, di ROBERTS II (1899) tav. 14, e in *Publ. Lick Obs.* 8 (1908) tav. 39.» 41 = NGC 4565. Il suo assorbimento è molto cospicuo, HUBBLE dà per la distanza 7 milioni anni-luce in *Proceedings Nat. Acad. of Sciences*, 15 (1929) 171.

» 42 = NGC 4569 = MESSIER 90.

» 43 = NGC 4579 = MESSIER 58.

» 44 = NGC 4596. Indicata come «stellar» in NGC.

» 45 = NGC 4621 = MESSIER 59. Fotografia in *Mount Wilson Contr.* 14 (1926) tav. 14.» 46 = NGC 4649 = MESSIER 60. Fotografia in *Mount Wilson Contr.* 11 (1922) tav. 2. La distanza (6 milioni di anni-luce) è stata calcolata da HUBBLE, *Proceedings Nat. Acad. of Sciences*, 15 (1929) 169.

» 47 = NGC 4660, indicata come «stellar» in NGC.

» 48 = NGC 4710. Fotografia in *Publ. Lick Obs.* 13 (1918) tav. 4.» 49 = NGC 4725. Fotografie in *Photographs of Stars, Star-Clusters, and Nebulae* di ROBERTS II (1899) tav. 14, e in *Publ. Lick Obs.* 8 (1908) tav. 42.» 53 = NGC 4826 = MESSIER 64. Fotografie in *Photographs of Stars, Star-Clusters and Nebulae* di ROBERTS II (1899) tav. 15, in *Publ. Lick Obs.* 8 (1908) tav. 45 e 13 (1918) tav. 5, e in *Mitt. Heidelberg*, 30 (1912). La distanza di questa nebulosa, secondo HUBBLE, è di 3 milioni di anni-luce. *Proceedings of the National Acad. of Sciences*, 15 (1929) 169.

4. — La posizione di queste 55 nebulose ritenute extra-galattiche è riportata nell'unito disegno. La loro forte concentrazione fra $12^h 20^m$ e $12^h 32^m$, e fra $+12^\circ$ e $+16^\circ$ è sorprendente. Queste nebulose sono di grandezza superiore alla 14^a , ed è intuitivo che il loro numero aumenterebbe con il diminuire della grandezza. A conferma di questo, vediamo ora con piacere annunziato da Shapley che ben 2775 nebulose, che egli ritiene esterne al nostro sistema stellare, si vedono su 4 fotografie di questa stessa regione, prese con il telescopio Bruce ad Arequipa ⁽¹⁾. La quantità è quindi 77 volte più grande. Il limite inferiore di queste nebulose è circa la 18^a grandezza. In questa densa agglomerazione vi sono quattro o cinque gruppi di massima condensazione che si mostrano come nubi di nebulose, una delle quali sembra costituire un sistema fisico distinto dall'aggregazione accidentale del campo nebulare in genere.

Questa condensazione nebulare nella zona polare galattica è importante sia per i rapporti che essa potrebbe avere con il nostro sistema stellare, come per la distribuzione delle entità cosmiche nelle lontane regioni dell' Universo. Essa richiede pertanto più dettagliate investigazioni le quali pongano, innanzi tutto, in migliore certezza la reale ubicazione extra-galattica di questi interessanti oggetti cosmici.

Fisica. — *Sulla distribuzione longitudinale dei fotoelettroni.*
Nota di A. CARRELLI, presentata ⁽²⁾ dal Socio M. CANTONE.

La nuova teoria ondulatoria permette di trattare con metodi rigorosi tutti i fenomeni aperiodici che prima erano passibili soltanto di una trattazione approssimata. Il problema dell'effetto fotoelettrico ha avuto la giusta interpretazione appunto nel nuovo ordine d'idee, e molte sue particolarità sono state interpretate con la nuova teoria quantistica.

Una quistione importante che si presenta sulla teoria della fotoemissione eccitata dai raggi X è la distribuzione spaziale dei fotoelettroni.

Era già noto da tempo che con raggi di lunghezza d'onda di qualche \AA o decimi di \AA il numero di fotoelettroni emessi nelle direzioni facenti angolo acuto con la direzione di propagazione dei raggi eccitatori è maggiore di quelli emessi nelle direzioni facenti angolo ottuso, e gli studi sperimentali accuratissimi compiuti con i mezzi moderni d'indagine (metodo della nebbia di Wilson, camera di ionizzazione) hanno prima d'ogni altro stabilito che la legge di distribuzione longitudinale è del tipo $\sin^2 \theta$, ma che vi è inoltre

(1) « Harvard Bulletin », 865; « Proceedings National Academy of Sciences », 15 (1929) 177.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1929.

uno spostamento del massimo dai 90° verso angoli minori, man mano che aumenta la frequenza delle radiazioni eccitatrici (Bothe ⁽¹⁾, Augie ⁽²⁾, Williams Nuttal e Barlow) ⁽³⁾.

Prima della comparsa della teoria ondulatoria questa particolarità fu interpretata ammettendo che il quanto incidente $h\nu$, assorbito dall'atomo, comunichi al fotoelettrone il suo impulso $\frac{h\nu}{c}$ diretto parallelamente al fascio dei raggi eccitatori. In tal modo vi è una componente uguale a $\frac{h\nu}{c}$ dell'impulso totale dei vari fotoelettroni in quella direzione; trascurando il lavoro d'estrazione l'energia cinetica del fotoelettronico è

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu$$

l'impulso totale è dato da

$$I = mv = \sqrt{2 h\nu m}$$

e l'angolo ϑ formato da questo I con la direzione di propagazione è dato da

$$I \cos \vartheta = \frac{h\nu}{c} \quad \text{cioè} \quad \cos \vartheta = \sqrt{\frac{h\nu}{2 mc^2}} = \frac{1}{2} \frac{v}{c}$$

quindi in luogo di $\cos \vartheta = 0$ si ha un valore più grande e ne deriva che $\vartheta < 90^\circ$. Ma con questa interpretazione si prevede una sola direzione di fuoriuscita mentre sperimentalmente si osserva una grande dispersione, data appunto dalla legge $\sin^2 \vartheta$.

Il fenomeno fotoelettrico invece in meccanica quantica può essere perfettamente spiegato. In effetti non solo si ritrova la relazione di Einstein, ma si ricava appunto la legge di distribuzione osservata, con lo spostamento del massimo in avanti al crescere della frequenza della luce eccitatrice. I risultati così ottenuti in teoria ondulatoria (Wentzel, Beck, Sommerfeld) ⁽⁴⁾ valgono solo in prima approssimazione, e cioè soltanto per lunghezze d'onda molto grandi rispetto alle dimensioni atomiche.

Lo scopo di questa Nota è di ricercare la legge di distribuzione dei fotoelettroni senza limitazioni per la lunghezza d'onda.

Per risolvere il problema in generale noi procederemo analogamente a quanto è stato fatto da Wentzel e Sommerfeld. Bisogna quindi calcolare coi metodi della meccanica quantica l'intensità I della corrente dei fotoelettroni, o, limitatamente, la parte di I variabile con l'angolo ϑ . Per otte-

(1) BOTHE, « Zeitschr. für Phys. », 26, 59, 1924.

(2) AUGIER, « Journal de Phys. », 8, 85, 1927.

(3) « Nature », mai, 1929.

(4) WENTZEL, « Zeitschr. für Phys. », 40, 574, 1926; BECK, « id. », 41, 443, 1927; SOMMERFELD, *Atombau ecc., Wellenmechanischer. Ergänzungsband*, p. 211.

nere I bisogna come al solito calcolare il quadrato del modulo della funzione ψ caratteristica di questo speciale fenomeno, e per quello che ora si è detto basta calcolare solo la parte variabile con ϑ .

Sia quindi x la direzione di propagazione dei raggi eccitatori, y la direzione del vettore elettrico e ψ_k l'autofunzione dell'atomo di numero atomico z nello stato iniziale che supporremo lo stato K, dato che l'effetto fotoelettrico è prevalentemente dipendente da elettroni del livello K. Nello stato finale l'atomo sotto l'azione della radiazione ha perduto un elettrone che si è allontanato dall'atomo con un'energia cinetica E . L'autofunzione caratteristica sarà una autofunzione dello spettro continuo. Ora

$$\psi_k = C e^{-\frac{z}{a} r}$$

dove C è una costante che non interessa in questo problema, a è il raggio del primo cerchio di Bohr per l'H ($a = 0,53 \cdot 10^{-8}$ cm.); l'autofunzione $\psi(E)$ dello spettro continuo è data da

$$(1) \quad \psi(E) = \frac{C'}{r} e^{-i(kr - \alpha)} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi},$$

dove C' ed α sono due costanti che non hanno interesse, k è dato da

$$(2) \quad k = \frac{2\pi}{h} mv = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE}.$$

e P_l^m è la funzione sferica a due indici m e l . Per la presenza di questa funzione converrà quindi specificare con due indici l'autofunzione dello spettro continuo e scrivere $\psi_{lm}(E)$ in luogo di $\psi(E)$. Sia inoltre λ la lunghezza d'onda dei raggi eccitatori, allora la parte di ψ che ci interessa è data da

$$(3) \quad \psi = \dots \sum_m \sum_l A_{lm}(E) \psi_{lm}(E)$$

in cui

$$(4) \quad A_{lm} = \int \frac{\partial \psi_k}{\partial y} e^{-2\pi i \frac{x}{\lambda}} \psi_{lm}^r(E) d\tau.$$

L'integrazione è fatta a tutto lo spazio e ψ_{lm}^r è la quantità complessa coniugata di ψ_{lm} .

Sostituendo nella (4) i valori ricavati dalla (1) e dalla (2), poichè

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial y} = -C \frac{z}{a} e^{-\frac{z}{a} r} \frac{y}{r}$$

si ottiene

$$A_{lm} = -\frac{cr}{a} \int e^{-\frac{z}{a} r - 2\pi i \frac{x}{\lambda} + i(kr - \alpha)} \frac{1}{r} P_l^m(\cos \vartheta) \frac{y}{r} e^{-im\varphi} d\tau.$$

Scegliamo un sistema di coordinate polari nelle quali l'asse polare è l'asse delle x , allora

$$\begin{aligned}x &= r \cos \vartheta & y &= r \sin \vartheta \cos \varphi & z &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\d\tau &= r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi\end{aligned}$$

la quantità A_{lm} diventa

$$A_{lm} = \dots \int_0^\infty e^{-\frac{\chi}{a}r + i(kr - \alpha)} r dr \int_0^\pi e^{-2\pi i \frac{r \cos \vartheta}{\lambda}} P_l^m(\cos \vartheta) \sin^2 \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} \cos \varphi \, d\varphi.$$

L'integrazione rispetto a φ si fa subito e risulta che A_{lm} è diversa da zero solo quando $m = 1$.

Si ha dunque

$$A_{11} = \dots \int_0^\infty e^{-\frac{\chi}{a}r + ik(r - \alpha)} r dr \int_0^\pi e^{-2\pi i \frac{r \cos \vartheta}{\lambda}} P_1^1(\cos \vartheta) \sin^2 \vartheta \, d\vartheta.$$

A noi basta calcolare soltanto i primi termini A_{11} e A_{21} , perchè già il secondo termine, come si vedrà dà un piccolissimo contributo alla legge di distribuzione dei fotoelettroni.

Poichè

$$P_1^1 = \sin \vartheta \quad \quad P_2^1 = 3 \sin \vartheta \cos \vartheta$$

se si pone

$$\frac{2\pi}{\lambda} r = x$$

otteniamo che

$$A_{11} = \dots \int_0^\infty e^{-\frac{\chi}{a}r + i(kr - \alpha)} r dr a_{11} \quad ; \quad A_{21} = \dots \int_0^\infty e^{-\frac{\chi}{a}r + i(kr - \alpha)} r dr b_{11}$$

con

$$a_{11} = \int_0^\pi \sin^2 \vartheta e^{-ix \cos \vartheta} \sin \vartheta \, d\vartheta \quad ; \quad b_{11} = \int_0^\pi 3 \sin^2 \vartheta e^{-ix \cos \vartheta} \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta$$

e cioè facendo i calcoli

$$a_{11} = 4 \frac{1}{x^2} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) \quad ; \quad b_{11} = 12 i \frac{1}{x^2} \left[\sin x - \frac{3}{x} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) \right].$$

Se poniamo

$$\frac{\chi}{a} \frac{\lambda}{2\pi} - ik \frac{\lambda}{2\pi} = R$$

si ha:

$$A_{11} = \dots \frac{\lambda^2}{4\pi^2} e^{-i\alpha} \int_0^\infty e^{-Rx} \frac{1}{x} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) dx = \dots \int_0^\infty e^{-Rx} \frac{1}{x} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) dx$$

$$\begin{aligned} A_{21} &= \dots 3i \frac{\lambda^2}{4\pi^2} e^{-i\alpha} \int_0^\infty e^{-Rx} \frac{1}{x} \left[\sin x - \frac{3}{x} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) \right] dx = \\ &= \dots 3i \int_0^\infty e^{-Rx} \frac{1}{x} \left[\sin x - \frac{3}{x} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) \right] dx. \end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-Rx} \frac{1}{x} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) dx &= - \int_0^\infty e^{-Rx} \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right) dx = \\ &= - \left(e^{-Rx} \frac{\sin x}{x} \right)_0^\infty - R \int_0^\infty e^{-Rx} \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned}$$

e facendo i calcoli risulta

$$\int_0^\infty e^{-Rx} \frac{1}{x} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) dx = 1 - \frac{R}{2i} \lg \frac{R+i}{R-i}.$$

D'altra parte

$$\int_0^\infty e^{-Rx} \frac{\sin x}{x} dx - 3 \int_0^\infty e^{-Rx} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) dx = \frac{1}{2i} \lg \frac{R+i}{R-i} - 3\varphi(R)$$

indicando con $\varphi(R)$ l'espressione

$$\varphi(R) = \int_0^\infty e^{-Rx} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) dx$$

ma

$$\frac{d\varphi(R)}{dR} = - \int_0^\infty e^{-Rx} \frac{1}{x} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) dx = - \int_0^\infty e^{-Rx} \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right) dx = -1 + \frac{R}{2i} \lg \frac{R+i}{R-i}$$

quindi

$$\varphi(R) = -R + \int \frac{R}{2i} \lg \frac{R+i}{R-i} dR + \text{cost.}$$

Facendo i calcoli si ottiene

$$(5) \quad \varphi(R) = -\frac{R}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2i} \lg \frac{R+i}{R-i} (R^2 + 1) + \text{cost.}$$

Per la determinazione della costante procederemo nel modo seguente: per $R = 0$ si ha

$$\varphi(0) = \int_0^\infty \frac{1}{x^2} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) dx = \frac{\pi}{4}$$

ma dalla (5) per $R = 0$ si ottiene

$$\varphi(0) = \frac{1}{4i} \lg \frac{+i}{-i} + \text{cost} = \frac{1}{4i} \lg (-1) + \text{cost} = \frac{\pi}{4} + \text{cost},$$

concludiamo che $\text{cost} = 0$.

Definitivamente si ha dunque indicando con K un fattore di proporzionalità

$$A_{11} = K \left[1 - \frac{R}{2i} \lg \frac{R+i}{R-i} \right];$$

$$A_{21} = K 3i \left[\frac{1}{2i} \lg \frac{R+i}{R-i} + \frac{3}{2} R - \frac{3}{2} \frac{1}{2i} \lg \frac{R+i}{R-i} \cdot (R^2 + 1) \right].$$

La funzione che c'interessa, la funzione ψ diventa

$$\begin{aligned} \psi = & \dots A_{11} \psi_{11} + \dots A_{21} \psi_{21} = \dots \left[1 - \frac{R}{2i} \lg \frac{R+i}{R-i} \right] P'_1(\cos \vartheta) \cos \varphi + \\ & + \dots 3i \left[\frac{3}{2} R \left(1 - \frac{R}{2i} \lg \frac{R+i}{R-i} \right) - \frac{1}{2} \frac{1}{2i} \lg \frac{R+i}{R-i} \right] P'_2(\cos \vartheta) \cos \varphi \end{aligned}$$

e cioè

$$(6) \quad \psi = \dots \left\{ 1 + i9 \left[\frac{3}{2} R - \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2i} \lg \frac{R+i}{R-i}}{1 - \frac{R}{2i} \lg \frac{R+i}{R-i}} \right] \cos \vartheta \right\} \sin \vartheta \cos \varphi.$$

Il quadrato del modulo di ψ ci dà la legge di variazione di I , intensità della corrente di fotoelettroni, in funzione sia dell'angolo ϑ che dell'angolo φ . Per quest'ultimo si ottiene la legge $\cos^2 \varphi$, verificata sperimentalmente da Kirchner, per l'angolo ϑ otteniamo in prima approssimazione la legge $\sin^2 \vartheta$, ma la presenza del termine in $\cos \vartheta$ nella (6) modifica la legge di distribuzione longitudinale nel senso che il massimo d'intensità si ha per un $\vartheta < 90^\circ$. La legge di distribuzione senza alcuna limitazione per la lunghezza d'onda qualora si ricordi che

$$R = \frac{\tilde{\chi}}{a} \frac{\lambda}{2\pi} - i \frac{2\pi}{b} m\nu \frac{\lambda}{2\pi} = \left(\frac{\tilde{\chi}}{a} - ik \right) \frac{\lambda}{2\pi}$$

diventa

$$(7) \quad |\psi|^2 = \dots \left\{ 1 + i9 \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\lambda}{a} - ik \right) \frac{\lambda}{2\pi} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2i} \lg \frac{\left(\frac{\lambda}{a} - ik \right) \frac{\lambda}{2\pi} + i}{\left(\frac{\lambda}{a} - ik \right) \frac{\lambda}{2\pi} - i}}{1 - \frac{\left(\frac{\lambda}{a} - ik \right) \frac{\lambda}{2\pi}}{2i} \lg \frac{\left(\frac{\lambda}{a} - ik \right) \frac{\lambda}{2\pi} + i}{\left(\frac{\lambda}{a} - ik \right) \frac{\lambda}{2\pi} - i}} \right] \cos \vartheta \right\}^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta.$$

È molto difficile dalla (7) ricavare qualche indicazione sull'andamento del massimo di ϑ al variare di λ o di ϑ .

Notiamo che se si sostituisce a $\frac{\lambda}{a}$ ed a k il valore che si ricava dalla teoria di Bohr e se si tien conto della relazione di Einstein sull'effetto foto-elettrico si ricava che

$$\text{mod } R = \left\{ \left(\frac{\lambda^2}{a^2} + k^2 \right) \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{8\pi^2 m}{h} \frac{c}{\lambda} \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{2mc}{h} \lambda \right\}^{\frac{1}{2}}$$

e passando ai numeri

$$\text{mod } R = \left\{ \frac{\lambda}{0.0121} \cdot 10^8 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Per raggi X non eccessivamente duri risulta sempre $\text{mod } R > 1$, però per lunghezza d'onda dell'ordine di grandezza di 0.1 \AA il $\text{mod } R$ non è tanto grande da poter ritenere trascurabile le potenze superiori. Ora

$$\frac{1}{2i} \lg \frac{R+i}{R-i} = \frac{1}{2i} \lg \frac{1 + \frac{i}{R}}{1 - \frac{i}{R}} = \frac{1}{R} - \frac{1}{3} \frac{1}{R^3} + \frac{1}{5} \frac{1}{R^5} + \dots$$

e sostituendo nella (6) se ci si ferma al primo termine dello sviluppo si ritrova la formola di Sommerfeld

$$(8) \quad |\psi|^2 = \dots \left\{ 1 + \frac{18}{5} \frac{v}{c} \cos \vartheta \right\} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta$$

ma se si continua lo sviluppo si ha

$$\psi = \dots \left\{ 1 + \left[\frac{18}{5} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{k - i \frac{\chi}{a}}{\frac{\chi^2}{a^2} + k^2} - \frac{81}{14} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^3 \frac{\left(3 \frac{\chi^2}{a^2} k - k^3 \right) - i \left(\frac{\chi^3}{a^3} - 3 \frac{\chi}{a} k^2 \right)}{\left(\frac{\chi^2}{a^2} + k^2 \right)^3} \cos \vartheta \right] \right\} \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi.$$

Ora

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{k}{\frac{\chi^2}{a^2} + k^2} = \frac{1}{2} \frac{v}{c} \quad ; \quad \frac{\frac{\chi^2}{a^2}}{\left(\frac{\chi^2}{a^2} + k^2 \right)^2} \frac{4\pi^2}{\lambda^2} = \frac{R h}{m c^2} \chi^2$$

facendo quindi il quadrato del modulo di ψ e trascurando il termine molto piccolo in $\cos^2 \vartheta$ otteniamo

$$(9) \quad |\psi|^2 = \dots \left\{ 1 + \frac{18}{5} \frac{v}{c} \left[1 - \frac{135}{56} \frac{R h \chi^2}{m c} + \frac{45}{112} \frac{v^2}{c^2} \right] \cos \vartheta \right\} \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi.$$

Il coefficiente di $\frac{v}{c} \cos \vartheta$ nella (9) è diverso da quello calcolato in prima approssimazione da Sommerfeld, e precisamente per un dato valore di $\frac{v}{c}$ esso diminuisce al crescere del numero atomico χ e per χ costante cresce con la velocità del fotoelettrone. Passando ai numeri si ha

$$(9') \quad |\psi|^2 = \dots \left\{ 1 + \frac{18}{5} \frac{v}{c} \left[1 - 6.41 \times 10^{-5} \chi^2 + 0.40 \frac{v^2}{c^2} \right] \cos \vartheta \right\} \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi$$

e per fare il confronto coi dati sperimentali conviene riferirsi ad una quantità introdotta da Williams⁽¹⁾. Questo A. nota che in base alla primitiva teoria l'impulso acquistato dal fotoelettrone nella direzione di propagazione dei raggi è $\frac{h\nu}{c}$; dalla teoria ondulatoria di Sommerfeld invece si ha che l'impulso medio μ è dato da

$$\mu = \sigma \frac{h\nu}{c}$$

con

$$\sigma = \frac{18}{5} \frac{4}{10} = 1.44.$$

(1) WILLIAMS, « Nature », 121-134, 1928.

Convieni quindi calcolare in base alla (9') i valori di σ per vari elementi e per varie velocità. Si ottiene

$$\sigma = \frac{4}{10} \cdot \frac{18}{5} \left(1 - 6.41 \cdot 10^{-5} \lambda^2 + 0.40 \frac{v^2}{c^2} \right).$$

La seguente tabella contiene alcuni risultati

Elemento	λ	$\frac{v}{c}$	σ
N ₂	0.6 Å	0.28	1.44
Ar	2.14 Å	0.10	1.40
	0.10 Å	0.68	1.61
Kr	0.76 Å	0.10	1.33
	0.10 Å	0.66	1.53

Risulta dunque che in opportune condizioni l'influsso del numero atomico e della durezza dei raggi è misurabile.

Esperienze accurate di Williams Nuttal Barlow hanno mostrato che per $\lambda = 0.60$ in N₂ e O₂ $\sigma = 1.40$ in buon accordo col risultato teorico, sia con la (8) che con la (9) perchè in tal caso λ e $\frac{v}{c}$ non sono molto grandi.

Per atomi molto pesanti e per raggi molto duri non si hanno molti dati. Augier trova per l'Ar un valore troppo basso [$\sigma = 1.30$ per $\lambda = 0.71$ e $\lambda = 0.21$].

Ricerche ulteriori potranno mostrare quest'influsso dipendente dal numero atomico e dalla velocità del fotoelettrone.

Chimica. — *Un altro contributo agli studi sulla Mummificazione degli antichi Egiziani: analisi chimica di una Mummia vaticana.*
Nota di A. TULLI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Per apportare un contributo ulteriore agli studi sulla *Mummificazione* degli antichi Egiziani, abbiamo voluto esaminare un'altra Mummia del Museo Egizio Vaticano; ed abbiamo sottoposto così ad una rigorosa analisi chimica il cadavere contenuto nella cassa antropoide N. 1, solo recentemente esposta nella *III^a Sala dei Papiri* ⁽²⁾.

Si tratta dunque di un novello risultato, del quale dovrà tener conto chi vorrà formulare delle conclusioni quando saranno note le indagini eseguite su tutte le Mummie del Museo suddetto; noi vi abbiamo già fatto studi in proposito ⁽³⁾, condotti anche sulle polveri di preservazione ⁽⁴⁾.

In questi ultimi tempi, come è noto, le ricerche dei Chimici e dei Fisiologi si sono esercitate non solo sul problema fondamentale dello essiccamento somatico, ma anche per la soluzione dei quesiti collaterali: il Sehart ⁽⁵⁾ si è occupato della fermentazione dei muscoli; il Ruffer ⁽⁶⁾ ha studiato le lesioni arteriose; il Lo Monaco ⁽⁷⁾ ha tentato la conservazione con i gas asfissianti; e il Boldrini ⁽⁸⁾ ha studiato l'attività enzimica.

Naturalmente, sono poi classici, diremo così, i lavori eseguiti dallo Schmidt ⁽⁹⁾ sulle ricerche chimiche e biologiche e quelli dello Elliot Smith sia sul processo mummificatorio ⁽¹⁰⁾, sia sul cuore e sulle reni ⁽¹¹⁾. L'Erbell

(1) Nella seduta del 1° giugno 1929.

(2) MARUCCHI, *Guide du Musée égyptien du Vatican*, p. 70, Roma 1927.

(3) TULLI, *Sessione IV* del 18 marzo 1928 in « Atti P. Accademia delle Scienze », p. 251 e segg.; « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei », classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, vol. IX, serie 6^a, 1° sem., fasc. 3°.
Roma, febbraio 1929 - VII.

(4) TULLI, *Analisi delle polveri delle « bandelettes » di una Mummia del Museo Egizio Vaticano* in « Atti P. Acc. delle Scienze », 19 febbraio 1928, anno LXXXI.

(5) SEHRT, *Zur Fermentwirkung der Mumien muskels*, Berlin, 1904.

(6) RUFFER, *On arterial lesions found in egyptian Mummies* in « Cairo Scient. Journal », gennaio 1910.

(7) LO MONACO, *Su un nuovo metodo per la conservazione delle sostanze animali e vegetali con i gas asfissianti* in « Arch. Farm. Sper. », vol. XXIV, 1917.

(8) BOLDRINI, *Sull'attività enzimatica dei muscoli di alcune mummie* in ZACCHIA, « Rassegna di Studi medico-legali », vol. I, 1921.

(9) SCHMIDT, *Chemische und biologische Untersuchungen von ägyptischem Mumienmaterial, nebst Betrachtungen über das Einbalsamierungsverfahren der alten Aegypter* in « Zeitschrift für allgemeine Physiologie », Bd. VII, pp. 369-92, 1907.

(10) ELLIOT SMITH, *History of Mummification in Egypt* in « Proceed. R. Philosophical Society of Glasgow », 1910.

(11) ELLIOT SMITH, *Heart and Reins in Mummification* in « Journ. Manch. Oriental Society », p. 77, 1911-12.

in questi ultimi tempi ha ricercato accuratamente i nomi delle malattie note agli Egiziani ⁽¹⁾; e perciò si comprende quanto questi studi siano oggi estesi.

Abbiamo esaminato dunque la Mummia vaticana suaccennata; ma, prima di procedere oltre, ci preme di ringraziare pubblicamente, per il valido e prezioso aiuto datoci, il prof. Nicola Parravano, illustre *Accademico d'Italia*, e il prof. Sergio Berlingozzi della R. Università di Napoli.

REGIONE DI SAGGIO.

Per giungere a conclusioni solide in studi come questi, bisogna preoccuparsi della scelta della *regione di saggio*, perchè altrimenti i reagenti potrebbero condurre a risultati chimicamente veri, ma *mummilogicamente incerti o falsi*; la scelta, perciò, non può essere indifferente, chè deve essere fatta tenendo presenti le conoscenze che, almeno fin qui, abbiamo sulla mummificazione medesima.

D'altra parte, abbiamo voluto fare l'analisi dei tessuti interni, anche perchè non abbiamo riscontrato *natron* cosperso ⁽²⁾ o comunque stratificato ⁽³⁾; ma la presenza di una specie di colore sordo ci ha dato una maggiore curiosità scientifica.

Non abbiamo scelto una zona cutanea, perchè l'esame di essa lascia nel dubbio sia per una maggiore combinazione dei grassi col *natron*, se c'è, sia per la frequente assenza della epidermide ⁽⁴⁾: l'azione chimica dell'elemento è giunta talvolta a lasciar cadere le sopracciglia ⁽⁵⁾.

La vaticana, invece, delle sopracciglia conserva una tenue striscia; ma i capelli, giallo-rossastri, sono a posto in tutta la regione capelluta.

Il natronamento giungeva anche a far cadere le unghie sia degli arti superiori sia di quelli inferiori; per questo gli imbalsamatori assicuravano le unghie con cordicelle avvoltole intorno alle estremità in modo che lo scorticamento epidermico non trascinasse seco anche le unghie ⁽⁶⁾.

La nostra Mummia, invece, conserva tutte le unghie con un colorito tipico: la pelle è a posto.

Abbiamo, però, riscontrato la deformazione della regione nasale e la compressione delle regioni mammellari; l'una e l'altra si attribuiscono al

(1) ERBELL, *Die ägyptischen Krankheitsnamen* in « Zeitschrift für Aegyptische Sprache und Altertumskunde » dello Steindorff, 1924-29.

(2) MASPERO, *The Struggle of the Nations*, London, 1896.

(3) MATHEY, *Note sur une momie anonyme de Deir-el-Bahari* in « Bull. Inst. Egypt. », Le Caire, 1887.

(4) WOOD JONES, *The Arch. Survey of Nubia*, vol. II, Cairo, 1910.

(5) ELLIOT SMITH, *A Contribution to the Study of mummification* in « Mém. Inst. », Egypt, vol. V, fasc. I, Le Caire, 1906.

(6) ELLIOT SMITH, loc. cit.

prosciugamento delle bende, come è stato osservato, per citare qualche caso, nella Mummia del *Royal College of Surgeons* (1).

Abbiamo scelto i tessuti interni presso una delle vertebre del collo, perchè quivi essi, mentre erano protetti dalla epidermide, comunque deteriorata, risentivano, altresì, più direttamente del processo mummificatorio: il bagno influiva non solo esternamente, ma anche internamente per via della glottide e della trachea; è una delle regioni più felici e più promettenti per gli studi nostri.

D'altra parte, abbiamo potuto agevolmente asportare la piccola zona accennata, perchè la Mummia ha il capo staccato dal busto; ma ciò non si avverte, perchè con cura l'uno e l'altro sono stati ravvicinati.

L'ANALISI.

Sono state eseguite svariate prove, perchè in analisi come queste bisogna tener conto dell'alta antichità della materia sottoposta ai reagenti chimici; e perciò ben si comprende la cautela da usare in tali operazioni.

Prove preliminari:

Estrazione con acqua: l'estratto acquoso ha dato reazione praticamente neutra.

Trattamento con acido cloridrico: non si è notato svolgimento gassoso che denoti anidride carbonica.

Ricerca dell'arsenico: ha dato esito negativo.

Indagine dei metalli pesanti: la prova ha dimostrato che non se ne può ammettere la presenza altro che in tracce minime; e ciò non può essere in relazione col materiale adoperato per la mummificazione.

Concludiamo, perciò, sulla base di queste prove che nei tessuti si riscontra *assenza del natron*, dei metalli pesanti e dell'arsenico.

Trattandosi di una Mummia che ancora non era stata analizzata, abbiamo qui un altro contributo da apportare agli studi mummiologici: essa ci dimostra di non essere stata sottoposta al *processo natronatorio* per la mummificazione.

È ben questa una conclusione di notevole interesse, sia perchè è l'indice di un referto chimicamente nuovo per la Mummia, non essendo essa mai stata analizzata, sia perchè ci parla chiaramente ed inequivocamente del *processo anatronatorio* di un altro cadavere.

Eppure, l'opinione maggiormente seguita oggi è che i cadaveri prevalentemente fossero sottoposti dagli antichi Egiziani all'azione del *natron*: le cavità venivano riempite di trona (carbonato di sodio, poi saponificato con

(1) ELLIOT SMITH, *Egyptian Mummies* in «The Journal of Egyptian Archaeology», 1904.

soda); ma l'essiccamento somatico all'aria e l'avviluppiamento nelle bende compivano il resto.

Prove di solubilità con diversi solventi:

Sono state fatte adoperando etere di petrolio in ebullizione; poi a parte impiegando prima alcool caldo, poi - nei residui di queste estrazioni - acqua pure calda.

I risultati sono stati i seguenti:

Materiale	Solubilità in		
	Etere di Petr. ‰	Alcool ‰	Acqua (rif. alla sost. princ.) ‰
Tessuti del collo	6,2	12,0	23,6

Si è notata sensibile solubilità in acqua, maggiore di quella in alcool; e ciò fa pensare all'impiego di sostanze *gommo-resine*.

I tessuti per riscaldamento svolgono anche un leggero odore balsamico.

Sicchè si è indotti ad accettare, come più verosimile, l'impiego di balsami naturali nelle operazioni di mummificazione: la *stiracina* vi dovette avere parte non indifferente.

L'analisi chimica delle bende ci ha dato i medesimi risultati!

Chimica. — *Melanine dall'adrenalina* ⁽¹⁾. Nota di P. SACCARDI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. D. LO MONACO.

In una mia precedente Nota ⁽³⁾ dimostrai come l'adrenalina, per ossidazione con acqua di cloro, desse origine ad una sostanza che da tutti i caratteri fisici e chimici si poteva riferire alle melanine naturali, e, più precisamente, alla melanina di corioidea, data la sua particolare solubilità in alcali. Questi neri furono altra volta isolati e studiati nel loro comportamento in vitro ed in vivo ⁽⁴⁾.

Era utile a questo punto di vedere se anche questa sostanza nera reagisse intraorganicamente come le melanine naturali e quelle di tumori mel-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Organica e Farmaceutica dell'Università di Camerino.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1929.

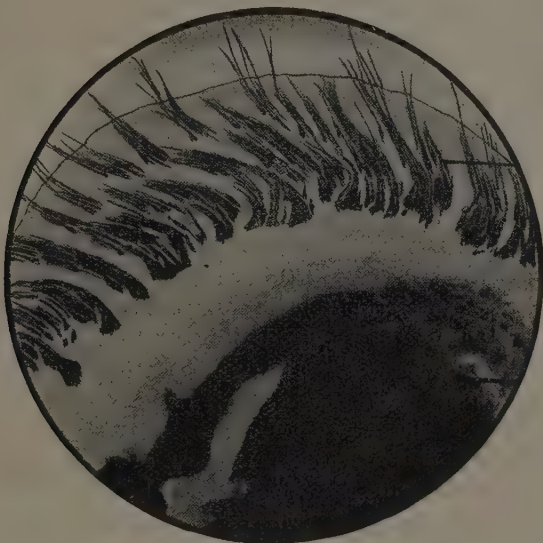
(3) P. SACCARDI, *Ueber Melanine, die aus Adrenalin hervorgehen*. « Bioch. Zeitschr. » Bd. 132, Heft 4, giugno 1922, e « Boll. Soc. Eustach. », XX, n. IV, 1922.

(4) P. SACCARDI, *Pirrolo e Melanuria*. Questi « Rendiconti », XXVIII, 5, 2°, fasc. 3, 1919.

notici già altra volta studiati e presentasse quindi le stesse reazioni fisiologiche e chimiche di queste. A tal uopo ho iniettato sotto cute a diversi conigli dal pelame bruno una sospensione acquosa lievemente alcalina di nero di adrenalina per un periodo di circa venti giorni. La brevità di questa Nota - cui seguirà più ampia descrizione del metodo - non mi consente di entrare in particolari. Mi limito quindi ai soli risultati ottenuti.

Gli animali iniettati hanno presentato:

1° Melanuria decisa, con tutti i caratteri di questa già più volte descritta ⁽¹⁾ dopo iniezioni sottocutanee di composti pirrolici, di melanine



naturali, di nero di seppia e di corioidea e di nero estratto tumuri melanotici e cioè: Arrossamento ed imbrunimento dei bordi del filtro contenente le urine da analizzare, le quali imbruniscono all'aria e soprattutto per azione degli ossidanti. Diazoreazione positiva e positiva, in molti casi, la reazione di Thormählen più volte citata ed adoperata da altri Autori ⁽²⁾ e da me ⁽¹⁾ in simili ricerche.

2° Melanodermia e tricodermia caratteristica.

(1) P. SACCARDI, *Pirrolo e Melanuria*, « Gazz. Chim. Ital. » XLIX, 1 fasc. V; *Pirrolo e Melanuria*, questi « Rendiconti » XXVIII, 5, 1°, 8°, 1919; *Sul comportamento intraorganico di alcuni derivati del Pirrolo*, « Boll. Soc. Eust. », XX, V°, 1922; *Melanine aus Pyrrolderivaten*. « Bioch. Zeitschr. », 132 Bd., Heft 4-6, 1922.

(2) A. ANGELI, *I neri di Pirrolo e le melanine*, questi « Rendiconti », XXVIII, 5°, 1, 6°, 1919.

3° Le aree della pelle iniettata presentano il connettivo sottocutaneo colorato in bruno. All'esame istologico risulta che il nero di Adrenalina ha agito in parte come corpo estraneo, incapsulandosi, in parte si è solubilizzato e diffuso. Solo in prossimità del bulbo pilifero si ha zona più chiara. Ivi il nero si è trasformato in melanogeno, incolore, che poi colorerà il pelo. In altro mio lavoro ⁽¹⁾ ho potuto dimostrare la esistenza e la localizzazione di melanogeno nelle aree dei tessuti melanogenici, anche fisiologici. Vedi figura.

Tutto questo dimostra che per iniezioni di nero di adrenalina si è formato un melanogeno come quello già nei suddetti precedenti casi riscontrato, e che quindi l'adrenalina è capace, a conferma delle ipotesi di Jager ⁽²⁾ e di Angeli ⁽³⁾ di dare per ossidazione — chiusura della catena ossietilmetilamminica e rottura dell'anello benzolico — dei composti pirrolici.

Recentemente anzi il Macciotta ⁽⁴⁾ per ossidazione dell'adrenalina col metodo di Visco ⁽⁵⁾ ha ottenuto una sostanza che per ossidazione dà pirolo. Ciò è del massimo interesse fisiologico e patologico.

Inoltre ho notato che il cloridrato di adrenalina può fornire dei neri poco solubili anche per ossidazione con raggi ultravioletti. Per azione dei medesimi, ma in ambiente alcalino invece, questi si solubilizzano ben presto e la soluzione si decolora. È da attendersi che in tal modo si abbiano a formare i classici prodotti di scissione del pirrolo quali la succinimide e l'acido ossalico.

È notevole inoltre che l'acqua di cloro ed i raggi ultravioletti colorino in rosso la soluzione di adrenalina prima di dare colorazione e precipitato nero. La colorazione rossa — già da molto tempo nota anche dopo esposizione all'aria ed alla luce del cloridrato di adrenalina — è dovuta a sostanze molto instabili, perchè facilmente ossidabili e quindi di difficile isolamento allo stato libero. Ciò non ostante, ho osservato che a questo punto tale soluzione rossa presenta le reazioni dell'indolo. Infatti sperimentando su aldeidi e fenoli ⁽⁶⁾ ho constatato che la paradimetilaminobenzaldeide, che reagisce con colorazione rossa con l'indolo (violetto con i pirroli) in presenza di acido cloridrico, dà nettissima questa colorazione. Mentre la metanitrobenzaldeide non dà colorazione coll'indolo, ma si colora in rosso

(1) P. SACCARDI, *Su di una reazione cromatica della pelle relativa alla genesi delle melanine*. Questi « Rendiconti » VI, 6°, 1°, fasc. 3, 1926; *idem*, Nota 2ª « Arc. Ital. de Biologie », tome LXXVIII, fasc. 2.

(2) JÄGER, « Virchows Arch », 198, 62, 1909.

(3) A. ANGELI, *I neri di pirrolo e le melanine*. Questi « Rendiconti », XXVII, 5, 1, fasc. 6, 1918; *Sulla trasformazione biochimica della tirosina in derivati del pirrolo*. « Ibid », VI, 6°, 2°, fasc. 3-4, 1927.

(4) SANNA, MACCIOTTA E SANNA, *Adrenalina e melanine*. « Boll. Soc. Ital. di Biol. », vol. III, fasc. 8°, 1928.

(5) S. VISCO, Questi « Rendiconti » (S. V) 1919-28.

(6) P. SACCARDI, *Sopra alcune reazioni cromatiche delle aldeidi con i fenoli* « Boll. Soc. Eustach », XXII, fasc. VI, 1924.

col pirrolo, in presenza di acido cloridrico, non reagisce affatto con il suddetto liquido rosso.

Se l'adrenalina viene, con questi metodi, ulteriormente ossidata fornisce una soluzione che portata a secco a b. m. dà, per distillazione secca dei vapori che intensamente colorano in rosso il bastoncino di abete intriso di acido cloridrico.

Le soluzioni suddette, portate a secco, in ambiente di anidride solforosa oppure evaporata nel vuoto, forniscono nettissima la reazione di Thormählen suddetta, comune agli indoli e pirroli.

È palese quindi che fra l'adrenalina ed in nero finale si formano dei prodotti indolici intermedi. Tali prodotti indolici rossi sono stati riscontrati da H. S. Raper ⁽¹⁾ per ossidazione della tirosina con tirosinasi (anche la tirosina, infatti, come l'adrenalina, come la diossifenilalanina o [«dopa»] ha nel nucleo benzenico una catena laterale azotata con un ossidril in para rispetto a questa) il che, come è noto, fornisce la possibilità di chiusura della catena laterale sull'anello benzolico. Fatto questo già da Angeli previsto fino dal 1918 ⁽²⁾. [Vedi anche A. Angeli] ⁽³⁾.

Il fatto che il nero di adrenalina fornisce melanuria e malanodermia, essendo capace di trasformarsi in melanogeno, attesta l'analogia di costituzione fra pirroli e melanine naturali e nero di adrenalina e dimostra anche che l'adrenalina in determinate condizioni fisiologiche e patologiche può dar luogo alle melanine secondo l'ipotesi di Jeger ⁽⁴⁾ ed Angeli ⁽⁵⁾.

Che poi essa, per ossidazione, dia preventivamente luogo a composti indolici, che tenterò di isolare, conferma le ricerche di H. S. Raper suddetto e concilia la teoria di Angeli, della genesi pirrolica delle melanine coll'indolica di Quattrini ⁽⁶⁾ e soprattutto con la fenolica di Bloch ⁽⁷⁾.

Ciò è della massima importanza perchè riporta le ricerche di questo ramo della biochimica su di un'unica via riferendole allo stesso composto capostipite delle melanine, il pirrolo, e costituisce un'importante tappa nella storia e nello sviluppo delle ulteriori conoscenze relative alla genesi ed alla natura delle melanine.

(1) H. S. RAPER, *The Tyrosinase-Tyrosine Reaction*. «Bioch. Journ.», vol. XXI, 1927, e «Zent», Bd. I, 15, 1928.

(2) Vedi nota (3) alla pagina precedente.

(3) A. ANGELI, *Sulla trasformazione biochimica della tirosina in derivati del pirrolo*. Questi «Rendiconti», VI, 6°, 2°, fasc. 3-4, 1927.

(4) JÄGER, loc. cit.

(5) A. ANGELI, loc. cit.

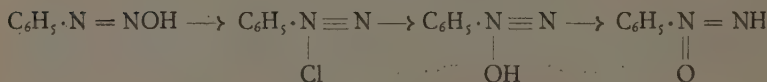
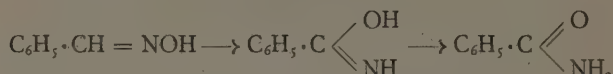
(6) M. QUATTRINI, *Sulla genesi delle melanine dai benzopirroli*. «Giorn. Ital. Malatt. Ven.» fasc. I, 1923.

(7) B. BLOCH. «Bioch. Zeitschr.», Bd. 126, Heft 3-6.

Chimica. — *Reazioni dei diazoidrati* ⁽¹⁾. Nota di D. BIGIAVI, presentata ⁽²⁾ dal Socio A. ANGELI.

La recentissima polemica circa le formule di struttura dei diazoidrati, mi richiama alla mente una considerazione a proposito del passaggio da isodiazoidrato al diazoidrato normale.

Con le formule di Angeli-Cambi bene si spiega l'andamento di questa trasformazione, che a me sembra abbia molta somiglianza con la trasposizione di Beckmann, perchè consiste nella migrazione dell'atomo di ossigeno da azoto a azoto, nello stesso modo che nel passaggio da ossime ad anilidi si ha migrazione dell'ossigeno da azoto al carbonio. E come in quest'ultima reazione si formano probabilmente dei termini clorurati intermedi, l'isomerizzazione dall'isodiazoidrato al normale p. es. mediante acido cloridrico, si compie attraverso il cloruro di diazonio:



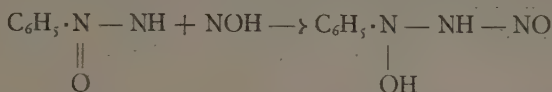
Una notevole differenza nel comportamento fra diazotato normale e l'isodiazotato (in soluzione alcalina) si ha nell'azione del sale sodico dell'acido nitroidrossilamminico, come ho constatato in esperienze eseguite col dott. Jolles. Mentre l'isodiazotato in ambiente alcalino rimane inalterato anche a bagnomaria, il normale subito reagisce dando origine ad una fugacissima colorazione violacea, forte sviluppo di gas e separazione di resine. Questa reazione è dovuta probabilmente al nitrossile ⁽³⁾ che si libera nella scissione

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Organica della R. Università degli Studi di Firenze.

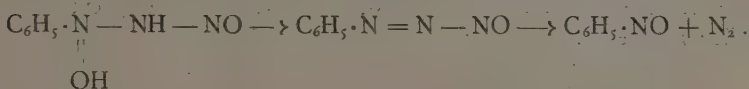
(2) Nella seduta del 16 giugno 1929.

(3) In soluzione fortemente alcalina il sale $\text{Na}_2\text{N}_2\text{O}_3$ non agisce sul diazotato; occorre diluire e tosto si manifesta lo sviluppo gassoso. Ora in soluzione fortemente alcalina il sale della nitroidrossilamina è però scisso in $\text{NaNO} + \text{NaNO}_2$.

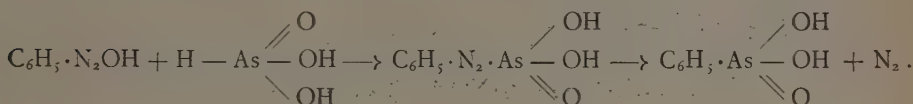
del sale $\text{Na}_2\text{N}_2\text{O}_3$; la fugace colorazione violacea può spiegare l'andamento del processo con un'addizione del nitrossile al diazoidrato ⁽¹⁾:



Successivamente si elimina acqua a cui segue lo sviluppo di azoto e formazione di nitrosobenzolo, che si riscontra in notevole quantità:



Questo schema ricorda il probabile andamento della reazione fra diazotati normali e arsenito, in cui si ha una colorazione fugace rossa, formazione di azoto e di acido fenilarsonico (H. Schmidt) ⁽²⁾:

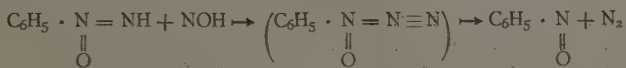


Inoltre, come è noto, l'arsenito ⁽³⁾ al pari del sale sodico dell'acido nitrodirossilamminico, non ha azione, sopra l'isodiazotato, in soluzione alcalina. Bart ⁽⁴⁾ invece sostiene che gli isodiazoidrati (antidiazotati) reagiscono con arsenito; senonchè egli prescrive come condizione necessaria affinchè la reazione si compia, l'introduzione o di acido carbonico o di bicarbonato nella soluzione.

A me sembra che si tratti di una ragione di questo genere: il sale sodico dell'isodiazoidrato *non* reagisce nè con β -naftolo, nè con arsenito ecc.; è sufficiente spostare anche con CO_2 dal suo sale sodico l'isodiazoidrato perchè questo *reagisca* come fa il diazo-normale.

Così, secondo quanto riferisce Bart, reagisce l'arsenito; secondo mie esperienze anche il β -naftolo subito si copula con l'isodiazotato, non appena si introducano piccole quantità di CO_2 o di bicarbonato nella soluzione del sale sodico di quest'ultimo.

(1) Un'altra interpretazione più verosimile che può darsi della reazione è la seguente:



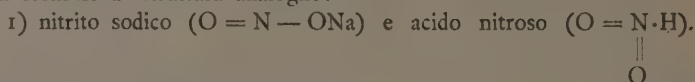
e ricorda il comportamento del nitrossile sopra le ammine secondarie.

(2) « Ann. », 421, 163, 1920.

(3) GUTMANN, « B. », 45, 824, 1912; H. SCHMIDT, « Ann. », 421, 167, 1920.

(4) « Ann. », 429, 106, 1922.

Questa differenza di comportamento del composto allo stato di sale e allo stato libero, trova riscontro in molti altri casi fra cui ricordo per le possibili formule di struttura analoghe:

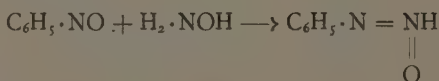


L'acido reagisce con i fenoli, ecc., mentre il sale non ha alcuna azione sopra gli stessi composti⁽¹⁾.

2) benzaldossima e suo sale sodico. La prima, secondo esperienze di Passerini⁽²⁾, con cianuro di potassio dà il benzonitrile, mentre il sale sodico rimane inerte.

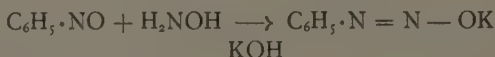
Siamo ora probabilmente in grado di comprendere la reazione descritta da Bamberger⁽³⁾ fra nitrosobenzolo e idrossilammina, con la formazione dell'isodiazotato, come ossima del nitrosobenzolo, secondo quanto dice questo autore:

1) nitrosobenzolo, cloridrato idrossilammina, carbonato sodico in quantità da neutralizzare l'HCl del sale, danno l'isodiazoidrato che subito si copula con il β -naftolo.



(formula di Cambi dell'isodiazoidrato, a doppi legami cumulati simile a quella dell'acido nitroso)

2) nitrosobenzolo, cloridrato idrossilammina, idrato potassico in quantità lievemente eccedente rispetto all'HCl del cloridrato, danno il sale dell'isodiazotato, che non si copula con β -naftolo:



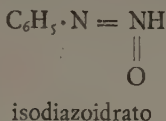
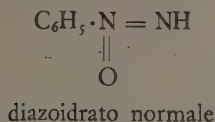
Come rileva anche Bamberger, in base a precise esperienze, la quantità di alcali presente non è tale da isomerizzare il diazotato normale (se esso fosse presente) in iso-sale; per cui si deve concludere che la differenza fra

(1) ANGELI, « B. », 59, 1402, 1926.

(2) « Gazz. Chim. Ital. », 56, 123, 1926.

(3) « B. », 28, 1218, 1895. Contrariamente a quanto asserisce Bamberger, vedasi HANTZSCH, « B. », 38, 2056, 1905; H. EULER, « B. », 39, 1035, 1906; BAMBERGER, BAUDISCH, « B. », 42, 3582, 1909. Riguardo alla recente interessante interpretazione data da Angeli alla reazione nitrosobenzolo + idrossilammina vedi ANGELI, « Rendiconti Accad. Lincei », V, 733, 1927.

i due composti (che si copulano entrambi facilmente con fenoli, con arsenito, ecc.):



sta in questo; per aggiunta di idrati alcalini in eguali condizioni di concentrazione, ecc., l'isodiazoidrato, come del resto è logico pensare, dà prima del normale il sale $\text{C}_6\text{H}_5 \cdot \text{N} = \text{NOK}$ che più non reagisce con i fenoli.

Chimica-fisica. — *L'Azéotropisme dans les systèmes binaires contenant une substance hydroxylée* ⁽¹⁾. Nota di M. LECAT, presentata ⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Basée sur la connaissance de plus de 1400 azéotropes ⁽³⁾ contenant un alcool, un phénol ou un acide ⁽⁴⁾, cette Note compare entre eux les com-

(1) Travail effectué dans le laboratoire privé de l'auteur.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1929.

(3) Sous pression fixe, tout individu chimique, bouillant inaltéré, distille isothermiquement. La réciproque n'a pas lieu et l'*Azéotropisme* (écrivons Az.) est la fixité du p. éb. *t* durant la distillation isobare de certains mélanges homogènes de corps, en proportions convenables. Ces mélanges sont les *azéotropes* (soit az.). Le système étant binaire, soit C la concentration d'un constituant. En général, un mélange, C étant déterminé, ne peut être az. que pour une seule pression *p*; et si C est arbitraire, l'Az. ne peut exister que dans un certain intervalle de *p* (dépendant des constituants). Sur l'*isobare* — courbe (C, *t*) — comme sur l'*isotherme* (C, *p*), le point azéotrope est d'ordonnée extrême. Suivant que (C, *t*) a un minimé — cas le plus fréquent — ou un maximé (le contraire ayant lieu pour l'isotherme), l'Az. est positif ou négatif [« C.-R. », 183, 880 (15 nov. 1926)]. L'*écart azéotropique* δ , respectivement *abaissement* ou *élévation*, est la distance des p. éb. de l'az. et du constituant le plus ou le moins volatil. La *démixtion* d'un az. a lieu à $\xi < 1$, par définition; mais un *eutectique* comporte deux phases liquides à l'ébullition, qu'il y ait miscibilité partielle ou nulle. Pour l'*eutexie* (fréquente en présence de glycol ou d'acide formique), $\delta > 0$; l'Az., dans son sens large, la comprend.

(4) Résultats publiés dans 14 listes de *Nouveaux azéotropes binaires* [pour référence, voir « Ann. Soc. sc. Bruxelles », 49, B., 17 (1929)], ensuite complétés et classés dans: *L'Azéotropisme dans les systèmes binaires alcools-halogénures*, « A. S. sc. B. », 47, B., 2^e pt., 39-62 (1927); *L'Azéotropisme dans les systèmes binaires contenant une amide*, « A. S. sc. B. », 47, B., 2^e pt., 87-97, partic. 89-90; *L'Azéotropisme dans les systèmes binaires alcools-esters*, « A. S. sc. B. », 48 B., 2^e pt. 1-18 (1928); *L'Azéotropisme dans les systèmes binaires alcools-hydrocarbures*, « A. S. sc. B. », 48, B., 2^e pt., 105-120; *L'Azéotropisme dans les systèmes binaires contenant un acide*, « A. S. sc. B. », 49, B., 28-46 (1929); *L'Azéotropisme dans les systèmes binaires contenant un phénol*, « A. S. sc. B. », 49, B. (sous presse); *L'Azéotropisme dans les systèmes binaires contenant un alcool et une amine, un nitrure ou un oxyde*, « Recueil Trav. chim. », 48 (sous presse).

portements azéotropiques de ces trois sortes de substances, dans les systèmes binaires dont le second constituant est un hydrocarbure, un halogénure, un ester, une amine, une cétone, un nitrure ou un oxyde. La distillation sera supposée faite sous 760 mm.

Soient δ l'écart az. et Δ la distance des p. éb., E_y et E_x , des constituants, X et Y. Etant donnée une famille de substances Y_1, Y_2, \dots , toutes d'une même fonction chimique et donnant lieu chacune à Az. avec X, l'expérience constate que, dans les système cartésien (Δ, δ) , les points (Δ_i, δ_i) , représentatifs des az. XY_i , sont souvent voisins d'une parabole (fictive), de degré 2 ou 3, suivant l'approximation⁽¹⁾. Si ce fait n'a pas été envisagé thermodynamiquement⁽²⁾, il n'en est pas moins important pour le laboratoire et l'industrie. Car, X et Y étant définis, les « courbes des deux delta » — disons *courbes* δ — prédisent s'il y a Az. (ou eutxie) et, le cas échéant, assignent δ . De plus, elles sont à la base d'une méthode d'analyse fonctionnelle.

Les deux points les plus intéressants d'un tel arc δ sont Δ_0 et δ_0 sur les axes. Δ_0 correspond à l'Az. évanouissant et marque donc son domaine d'existence. Le rapport $\delta_0 : \Delta_0$ est, en quelque sorte, l'inclinaison moyenne de l'arc δ sur l'axe Δ . L'allure de ces courbes ne varie guère; *grosso modo* δ_0 est souvent voisin du quart et il est rare qu'il ne soit compris entre le sixième et le tiers de Δ_0 .

Ceci suppose inopérant le signe de Δ . Or, quand X n'est pas parfaitement soluble dans les Y, ce signe influe, en général, sur la miscibilité (qui a, elle-même, un effet considérable sur la tension de vapeur)⁽³⁾ et δ a deux « branches », une inférieure δ_B et une supérieure δ_H ⁽⁴⁾, issues de δ_0 (point anguleux). Le plus souvent, Δ_0 est assignable pour δ_B , non pour δ_H , qui est pratiquement asymptotique à l'axe Δ ; et il y a eutxie au moins sur une portion de δ_H . Ici, δ_H correspondra à $E_X < E_Y$, si X est le corps hydroxylé.

La courbe de concentration (Δ, C) a évidemment toujours deux « branches », C_B et C_H , correspondant aux deux signes de Δ . Ici C sera, en p. c., la concentration simple, en poids, de X (celle de Y serait 100 — C) et C_0 sera celle pour Δ nul (la plus intéressante)⁽⁵⁾.

(1) « C.-R. », 184, 816 (28 mars 1927).

(2) Nous espérons pouvoir, dès l'achèvement du cycle de nos recherches expérimentales, entreprendre une étude thermodynamique complète de l'Az. en relation avec divers autres phénomènes physico-chimiques.

(3) Nous réservons à un autre travail l'étude mathématique des relations entre ξ , δ et C (température de démixtion, abaissement az., concentration).

(4) Pour commodité, les Δ des deux signes sont portés dans le même sens, ce qui justifie la terminologie du texte.

(5) Quelques remarques sur C. L'arc C_B joint Δ_0 et C_0 . La branche C_H va de C_0 à $(\Delta_0, 100)$ ou à $(\infty, 100)$, suivant que δ a une ou deux branches (dont l'une asymptotique). Dans le premier cas, C est presque toujours convexe vers l'axe Δ ; mais la courbe, croissante de $(\Delta_0, 0)$ à $(\Delta_0, 100)$ est souvent négligeable sur C_B ; parfois on considère

Considérons les arcs δ pour les fonctions chimiques annoncées et consignons, entre parenthèses, respectivement ces 3 nombres : Δ_0 , $R \equiv 1000 \delta_0$: Δ_0 , et C_0 . L'astérisque * signifie « assez grossièrement approximatif ». Pour éviter les décimales, posons $\Delta_1 = \Delta : 100$ (l'unité de Δ_1 étant 100°).

1. Dans le cas des HYDROCARBURES, l'az. est ici ⁽¹⁾ toujours positif.

a) Pour les alcools, voici les expressions de δ :

méthanol	$15,8 - 46,2 \cdot \Delta_1 + 46,5 \cdot \Delta_1^2 - 16 \cdot \Delta_1^3$	(102*; 155*; 26)
éthanol	$13,6 - 48 \cdot \Delta_1 + 60,6 \cdot \Delta_1^2 - 28 \cdot \Delta_1^3$	(70*; 194*; 30)
propanols	$12 - 42,5 \cdot \Delta_1 + 37,5 \cdot \Delta_1^2$	(55; 218; 35)
butanols	$9,7 - 41,7 \cdot \Delta_1 + 47 \cdot \Delta_1^2 - 5 \cdot \Delta_1^3$	(45; 215; 40)
isobutylcarbinol	$7,5 - 35 \cdot \Delta_1 + 40 \cdot \Delta_1^2$	(37,5; 200*; 43)
glycol	$\delta_B = 23 - 53 \cdot \Delta_1 + 36 \cdot \Delta_1^2 - 6 \cdot \Delta_1^3$ ⁽²⁾	(100*; 230*; 36)
	$\delta_{H. as.} = 23 - 46 \cdot \Delta_1 + 25 \cdot \Delta_1^2$, pour $\Delta_1 < 1,2$;	
glycérine *	$\delta_B = 26,8 - 57,3 \cdot \Delta_1 + 3,7 \cdot \Delta_1^2 - 6 \cdot \Delta_1^3$ (pour $\Delta_1 < 1$; $C_0 = 37$) ⁽³⁾	

On voit que pour le méthanol ⁽⁴⁾, Δ_0 est bien $>$ et $R <$ que pour les autres monols. Cela s'explique, le carbinol dissolvant les hydrocarbures moins bien, à cause de son faible alkyle ($t - \xi$ est souvent assez petit). Dans le cas d'un seul OH, les δ et Δ_0 réels: pour les hydrocarbures aromatiques sont $<$, pour les polyméthylènes $>$ que les δ et Δ_0 calculés. Avec les polyols, fort associés, δ_0 est très élevé et il y a le plus souvent eutxie.

b) Pour les phénols, l'abaissement a pour expressions:

phénol	$11 - 47 \cdot \Delta_1 + 54 \cdot \Delta_1^2 - 10 \cdot \Delta_1^3$	(44*; 250*; —)
crésols	$7,2 - 46 \cdot \Delta_1 + 68 \cdot \Delta_1^2$	(25; 288; —)
pyrocatechine	$10,2 - 49 \cdot \Delta_1 + 75 \cdot \Delta_1^2 - 50 \cdot \Delta_1^3$	(36; 283; —)
résorcine	$13,3 - 51 \cdot \Delta_1 + 60 \cdot \Delta_1^2 - 20 \cdot \Delta_1^3$	(55*; 242*; —),

mais les deux premières ne sont guère applicables qu'aux terpènes.

c) Dans le cas des acides, on a pour δ :

ac. formique	$20 - 45,9 \cdot \Delta_1 + 30,7 \cdot \Delta_1^2 - 5,7 \cdot \Delta_1^3$	(80*; 250*; 47)
ac. acétique	$10 - 39,2 \cdot \Delta_1 + 54 \cdot \Delta_1^2 - 40 \cdot \Delta_1^3$	(43; 232; 43)
ac. en C_3 , C_4 , C_5	$8 - 38,2 \cdot \Delta_1 + 55,5 \cdot \Delta_1^2 - 35 \cdot \Delta_1^3$	(34*; 235*; 37*);

même C_H comme rectiligne. La courbe se rapproche fort de la droite si c'est la concentration moléculaire C' que l'on prend. En cas d'asymptotisme, l'allure de C est naturellement tout différente; il y a souvent 1, parfois 2 inflexions.

(1) L'az. (mésitylène, pentachloréthane) est négatif, ce qui est très remarquable.

(2) Cette expression n'est garantie que pour $\Delta_1 < 0,8$.

(3) Le tracé de δ_H , même seulement pour $\Delta_1 < 1,1$, obligerait à aller jusqu'à 400°; or, bien en deça il y aurait altération chimique du système.

(4) Sa courbe δ comporte 2 branches, mais suffisamment rapprochées pour que pratiquement il ne vaille guère la peine de se départir de l'unique formule donnée. *A fortiori* pour les monols suivants.

l'ac. formique seul donne l'eutexie, et souvent; c'est le cas avec le benzène, qui, malgré cela, donne — à cause de son caractère purement aromatique — un $\delta <$ de 2° que δ calculé.

2. Les HALOGÉNURES se comportent à peu près comme les hydrocarbures [cf. n. 1].

a) Dans le cas des alcools, l'abaissement a pour expressions:

méthanol	$13,6 - 52 \cdot \Delta_1 + 50 \cdot \Delta_1^2$	(55; 247; 18)
éthanol	$12,3 - 65,6 \cdot \Delta_1 + 138 \cdot \Delta_1^2 - 112 \cdot \Delta_1^3$	(50; 246; 20).
propanols *	$8,8 - 36 \cdot \Delta_1 + 36,2 \cdot \Delta_1^2$	(43,4*; 203*; 26)
butanols	$8,5 - 43 \cdot \Delta_1 + 53,5 \cdot \Delta_1^2$ (x)	(37*; 230*; 28)
isobutylcarbinol	$7,5 - 42,4 \cdot \Delta_1 + 56 \cdot \Delta_1^2$	(28; 268; 33)
diméthyléthylcarbinol	$4,5 - 43 \cdot \Delta_1 + 100 \cdot \Delta_1^2$ (x)	(21*; 214*; 30)
cyclohexanol *	$5 - 60 \cdot \Delta_1 + 180 \cdot \Delta_1^2$	(17*; 278*; 40*)
glycol	$\delta_B = 22,7 - 57 \cdot \Delta_1 + 44,3 \cdot \Delta_1^2 - 10 \cdot \Delta_1^3$	(95*; 239*; 36),

s'accordant, en général, avec l'expérience, à $0,3$ près; il n'y a divergence sérieuse que pour des polyhalogénures, p. ex. pour CHCl_3 en deça, pour CCl_4 au delà (3).

Plus inclinées qu'en 1, a), les courbes sont ici d'allure peu différentes (4); les deux premières sont même presque parallèles ($R = 247$ et 246) et leurs Δ_0 sont voisins (55 et 50) [opp. 1, a)]; c'est que le méthanol dissout parfaitement les halogénures.

b) Pour les phénols, l'abaissement azéotropique a pour expressions:

phénol	$7,5 - 60 \cdot \Delta_1 + 160 \cdot \Delta_1^2 - 150 \cdot \Delta_1^3$	(30*; 250*; 40)
crésols	$4,8 - 50 \cdot \Delta_1 + 130 \cdot \Delta_1^2$	(20*; 240*; 36)
pyrocatechine	$13 - 61 \cdot \Delta_1 + 71 \cdot \Delta_1^2$	(40*; 325*; 42);

le phénol est à comparer à l'isobutyl-, les crésols au diméthyléthylcarbinol [2, a)]. Au surplus, pour ces monophénols, les courbes δ sont à peu près parallèles à celles des alcools. Pour la résorcine, elle serait parallèle à celle de l'isomère 1.2, avec δ_0 encore $>$ de $2,5$. Le thymol — ceci est général — donne des isobares peu courbées, souvent même rectilignes.

c) Les acides fournissent les abaisssements azéotropiques suivants:

formique	$20 - 58,9 \cdot \Delta_1 + 45 \cdot \Delta_1^2 - 2,4 \cdot \Delta_1^3$	(70; 286; 36)
acétique	$10 - 61 \cdot \Delta_1 + 134 \cdot \Delta_1^2 - 110 \cdot \Delta_1^3$	(40; 250; 35)
en $\text{C}_3, \text{C}_4, \text{C}_5^*$	$7 - 56,2 \cdot \Delta_1 + 185 \cdot \Delta_1^2 - 233 \cdot \Delta_1^3$	(35* (5); 200*; 34);

(1) Applicable au moins pour les deux butanols primaires. Cfr. note suivante.

(2) Constatons que les pentanols n'ont pas tous la même courbe δ .

(3) Cfr. «C.-R.», 184, 816 (1927); «A. S. sc. B.», 47 B., 2^e pt., 42 et suiv. (1927). Une anomalie de δ en fournit une quantitativement correspondante pour C (d'après les courbes δ et C).

(4) Les propanols s'en écarteraient pour Δ petit; mais ceci demanderait confirmation.

(5) D'après nos dernières déterminations, 35 serait trop fort.

entre les deux derniers peuvent se placer les acides benzoïque et phénylacétique. L'acide formique, qui donne souvent l'eutexie, est à comparer au glycol; l'acétique a une courbe parallèle à celles des monols et, par ses valeurs de δ_0 et Δ_0 , se rapproche des propanols. Certains polyhalogénures sont aberrants — p. ex., avec l'acide formique, CHCl_3 , en deça, CCl_4 au delà — et ils le sont parallèlement à ce qui a lieu dans le cas des alcools (1).

3. a) Dans les systèmes (ESTERS, alcools), l'Az. est positif et δ vaut :

méthanol	$9 - 85 \cdot \Delta_1 + 330 \cdot \Delta_1^2 - 485 \cdot \Delta_1^3$	(30*; 300*; 37)
éthanol	$7 - 63 \cdot \Delta_1 + 154 \cdot \Delta_1^2 - 50 \cdot \Delta_1^3$	(25*; 280*; 33)
propanols	$5 - 56 \cdot \Delta_1 + 170 \cdot \Delta_1^2 - 40 \cdot \Delta_1^3$	(20*; 250*; 42)
butanols	$3,5 - 47,5 \cdot \Delta_1 + 150 \cdot \Delta_1^2$	(12*; 292*; —)
glycérine	$\delta_B = 21 - 40 \cdot \Delta_1 + 14 \cdot \Delta_1^2$	(70*; 300*; —);

d'allures parallèles, ces courbes sont plus inclinées que celles de 2, a) et *a fortiori* de 1, a). Les esters d'acides inorganiques donnent des δ réels trop forts; p. ex., pour le nitrate d'éthyle, de 1,5 à 4; pour les borates, guère moins. Dans le cas de l'eau (alcool sans carbone):

$$\begin{aligned} \delta_B &= 18,3 - 58 \cdot \Delta_1 + 40 \cdot \Delta_1^2 & (47,5; 385; 11,5) \\ \delta_{H_{2O}} &= 18,3 - 37 \cdot \Delta_1 + 19,7 \cdot \Delta_1^2 & \text{pour } \Delta_1 \leq 1 \\ * &= 2,3 - 1,5 \cdot \Delta_1 & \text{pour } 1 \leq \Delta_1 \leq 1,5 \text{ (2).} \end{aligned}$$

b) Dans les couples (phénols, esters), l'Az. est négatif. Ici, c'est l'ester qui jouerait le rôle az. prédominant et, pour un seul OH, δ serait :

oxalates *	$5,1 - 40 \cdot \Delta_1 + 70 \cdot \Delta_1^2$	(19; 268; 47)
acétates *	$4,5 - 40 \cdot \Delta_1 + 70 \cdot \Delta_1^2$	(15; 300; 45)
benzoates *	$3,5 - 40 \cdot \Delta_1 + 70 \cdot \Delta_1^2$	(11; 318; 43).

c) Dans les systèmes (acides, esters), l'Az. est positif (comme en a)); mais il serait prématuré de parler de courbes δ .

4. Le cas des AMINES est curieux: l'Az. y a les deux signes.

a) Il est positif avec les alcools. Excluons les amines aliphatiques (3). Avec les monols, $\delta_0 < 4$ et $\Delta_0 < 18$; p. ex., pour les octanols, $\delta_0 = 2,7$ et $\Delta_0 = 14^*$. Avec le glycol, δ s'élève, surtout quand la basicité de l'amine s'accroît, p. ex. par alkylation de NH_2 (ce qui rapproche du cas 1, a). Ainsi, pour la toluidine o., $\delta = 10,95$; mono- et diméthylanilines, 14,5 et 18,5; avec la diméthyltoluidine o. et la diéthylaniline, il y a eutexie.

(1) Cfr. « A. S. sc. B. », 49 B., 37 (1929). Ici aussi, une anomalie de δ en fournit pour C une quantitativement correspondante, d'après les courbes δ et C.

(2) C présente deux inflexions: sur CH_3 , pour $\Delta_1 = 0,5^*$; sur CB , pour $\Delta_1 = 0,4^*$.

(3) A l'ébullition, beaucoup réagissent avec les alcools, d'une manière sensible.

b) En présence des phénols, l'alkylation de NH_2 peut transformer l'Az. négatif en positif (en passant par l'euzéotropisme)⁽¹⁾. Par ex., les az. (phénol ou crésol *o.*, aniline), (crésols, toluidines) sont négatifs, alors que la diméthyltoluidine *o.* en donne des positifs; mais pour tous [cfr. n. 8], l'écart absolu est*

$$\delta = 2,8 - 40 \Delta_1 \quad (7; 400; -);$$

l'isobare est idéale pour les couples (crésols, diméthylaniline).

c) Les systèmes (acides, amines) sont, le plus souvent, réactionnels et l'on ne connaît d'autres az. que (aniline, HCl), qui est négatif.

5. Passons aux CÉTONES, en général défavorables à l'Az., mais pouvant en donner les deux espèces.

a) Avec les alcools, l'Az. est positif. Pour les monols, $\delta_0 < 5$ et $\Delta_0 < 15$; mais pour le glycol:

$$\begin{aligned} \delta_B &= 13,2 - 41 \cdot \Delta_1 + 30 \cdot \Delta_1^2 & (67^*; 197^*; 50) \\ \delta_{H.as.} &= 13,2 - 35 \cdot \Delta_1 + 27 \cdot \Delta_1^2 & (\text{au moins jusque } \Delta_1 = 1); \end{aligned}$$

avec l'eau, on ne connaît qu'un az., donné par la méthyléthylcétone (l'acétone bout trop bas): il est positif; les cétones moins volatiles donnent l'eutexie. $C_0 = 13$.

b) L'Az. est, au contraire, négatif avec les phénols. S'ils sont monovalents, les cétones non terpéniques donnent

$$\delta = 6,5 - 58 \cdot \Delta_1 + 30 \cdot \Delta_1^2 \quad (23; 283; 46);$$

les autres: $\delta_0 = 7,6$, $\Delta_0 = 25$ ($R = 304$). Pour les diphenols, δ_0 et Δ_0 sont plus grands.

c) Avec les acides, l'Az., rare, est négatif. L'acide benzoïque donne cependant des isobares sensiblement rectilignes.

6. Les DÉRIVÉS NITRÉS d'hydrocarbures ne donnent que l'Az. positif.

a) Pour le nitrométhane associé aux alcools⁽²⁾, on a (sans Δ_1^2):

$$\delta = 8,9 - 33 \cdot \Delta_1 + 67 \cdot \Delta_1^3 \quad (39; 228; 47),$$

courbe à peu près parallèle à celles du n. 2, a). Avec les monols, le nitrobenzène fournit: $\delta_0 = 5,2$, $\Delta = 11^*$ ($R = 470^*$); les nitrotoluènes: $\delta_0 = 2,6$ et $\Delta_0 = 15^*$ ($R = 173^*$). Dans les deux cas, $C_0 = 48$. Avec les polyols, $\delta_0 = 16^*$ et $\Delta = 78^*$ ($R = 206^*$).

b, c) Avec les phénols, l'Az. est rare: on ne connaît que le cas (nitrotoluène *p.*, pyrocatechine) [0,2]. Pour les acides, dans les 6 cas connus, δ est faible.

(1) Pour une raison analogue, l'influence de l'hydroxyle est beaucoup moindre avec le thymol qu'avec les monophénols plus volatils [cf. 2, b].

(2) Le diméthyléthylcarbinol serait aberrant, avec δ réel trop bas de 0,5.

7. a) Passons aux couples (OXYDES, alcools). Pour les monols en C_1, C_2, C_3 ,

$$\delta = 7,2 - 38,3 \cdot \Delta_1 + 43 \cdot \Delta_1^2 \quad (27^*; 267^*; 25 \text{ à } 32);$$

pour les hexanols et heptanols, cycliques ou non,

$$\delta = 4,1 - 40 \cdot \Delta_1 + 85 \cdot \Delta_1^2 \quad *(15; 273; 45),$$

courbes à peu près parallèles à celles du n. 2, a). Pour le glycol :

$$\delta_B = 24,2 - 70 \cdot \Delta_1 + 51 \cdot \Delta_1^2 \quad (68,5^*; 353^*; 30),$$

$$\delta_{H.as.} = 24,2 - 58,5 \cdot \Delta_1 + 40 \cdot \Delta_1^2 \quad \text{au moins jusque } \Delta_1 = 0,7.$$

Pour l'eau, avec les oxydes et les acétals [cfr. 3, a)], $\Delta_0 = 70^*$ et

$$\delta_{H.as.} = 19 - 41,9 \cdot \Delta_1 + 33,1 \cdot \Delta_1^2 - 9 \cdot \Delta_1^3 \quad \text{jusque } \Delta_1 = 1,5^{(1)}.$$

b) Les monophénols donnent de rares az. Ils sont : positifs, ex. (pyrocatechine, safrol) [2,35], ou négatifs, ex. (phénol, cinéol) [— 0,65].

c) Les acides ne donnent que l'Az. positif. Pour les oxydes « mixtes »,

$$\delta = 5,6 - 67 \cdot \Delta_1 + 200 \cdot \Delta_1^2 \quad (15; 373; —);$$

les autres fournissent, en général, des δ trop forts.

8. Considérons enfin le cas de DEUX SUBSTANCES HYDROXYLÉES. Les systèmes (acides, alcools) sont réactionnels. L'az. semble très rare pour les couples (acides, phénols); on n'y a encore constaté que deux cas, douteux : (ac. benzoïque, pyrocatechine), (ac. phénylacétique, résorcine). Dans les systèmes (alcools, phénols), l'Az. est négatif, sauf pour les couples (glycol⁽²⁾, crésols *o.*, *m.*, *p.*) où δ vaut : + 1,5 ; + 2,2 ; + 2,2. L'écart absolu [cfr. 4, b)] est⁽³⁾ :

$$4 - 47 \cdot \Delta_1 + 130 \cdot \Delta_1^2 \quad *(14; 286 \text{ [cfr. 3, a)]; } —).$$

(1) Il y a eutexie. Les deux branches de C sont de faible courbure; C_B est convexe vers l'axe Δ ; C_H (asymptotique) coïncide pratiquement, du point C_0 , de coordonnées (0,13), au point d'abscisse 140, avec la droite (0, 13)–(150, 100).

(2) Avec le phénol, Δ étant trop grand, il y a entzétropisme; mais l'isobare est sensiblement concave vers l'axe C. Moins associée que le glycol, la pinacone (tétraméthylglycol) donne, avec le phénol, un az. négatif, et fort prononcé ($\delta = -3,3$).

(3) Il y a aberration pour les couples (phénol, pinacone ou cyclohexanol), δ dépassant beaucoup δ calculé; c'est le contraire pour l'az. (thymol [cf. 2, b], décanol *n.*).

9. On ne connaît pas d'az. constitué par deux phénols, ni par deux acides ⁽¹⁾, mais bien par deux alcools ⁽²⁾. L'Az. est alors positif. Pour deux monols, $\delta_0 < 1,5$ et $\Delta_0 < 10$; avec le glycol, δ atteint 10,8 (octanol 1^{re} n.) et même 15,2 (linalool), etc. Dans aucun cas, il ne se dessine de courbe δ . Mais si l'eau remplace un alcool, on a nettement ⁽³⁾:

$$\begin{aligned}\delta_B &= 12 - 80 \cdot \Delta_1 + 120 \cdot \Delta_1^2 & (23; 522; 30,0) \text{ [vrai az.],} \\ \delta_{H-as.} &= 12 - 30,6 \cdot \Delta_1 + 29 \cdot \Delta_1^2 - 10 \cdot \Delta_1^3 & (\text{pour } \Delta_1 < 1,05) \text{ [eutexie].}\end{aligned}$$

Chimica oceanografica. — *Di alcune caratteristiche del Mar Rosso sui riguardi del ciclo dell'azoto*⁽⁴⁾. Nota di G. BINI, presentata ⁽⁵⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Mentre è compito della oceanografia generale quello di studiare le caratteristiche generali fisico-chimiche delle acque dell'oceano, è compito dell'oceanografia speciale quello di mettere in evidenza le caratteristiche peculiari dei mari chiusi. Ciò che sappiamo dell'Ostsea, del Mar Nero e del Mar Rosso ci addita già l'importanza di questo-paragone. In vista di ciò il prof. Brunelli mi incaricò di studiare le caratteristiche del Mar Rosso nei riguardi del ciclo dell'azoto, essendo le notizie su tale argomento poco soddisfacenti e rendendo questo problema più interessante la mancanza di grandi tributi di sostanze nitrogenate da parte di fiumi affluenti di notevole e costante portata.

Si trova l'azoto nelle acque del mare combinato nelle forme di nitrati nitriti, e ammoniaca.

Pare ormai assodato che il mare contenga dei batteri nitrificanti e denitrificanti che posseggono la proprietà di trasformare, ossidando o ridu-

(1) Pour le système (acides acrylique, propionique), l'Az. est douteux.

(2) L'az. a été constaté aussi dans les cas: a) d'amines, ex.: (aniline, diméthyltoluidine o.) [$\delta = 3,8$]; b) d'hydrocarbures, ex.: (benzène, cyclohexane) [2,7*], (heptane n., méthylcyclohexane) [0,15*]; c) d'oxydes, ex.: (ox. d'isoamyle, phénétol ou crésolméthyléther p.) [1,3; 0,9]. Il est assez fréquent dans les cas: d) d'esters, ex.: (borate d'éthyle, acétate d'isobutyle ou butyrate d'éthyle) [0,35; 1,05], (malonate d'éthyle, benzoate méthyle) [0,7], (acétate bornyle, phénylacétate d'éthyle) [1,0]; e) d'halogénures, ex.: (chlorbenzène, bromure d'éthylène) [1,75*], (brombenzène, trichlorhydrine) [0,5], (dibrombenzène p., phénylchloroforme) [0,65], (dichlorbromméthane, bromure d'isobutyle) [— 0,4*]. Sauf ce dernier, tous ces az. sont positifs.

(3) C_B est concave vers l'axe Δ ; il y a 2 inflexions, voisines de C₀ et du point d'abscisse 45.

(4) Lavoro eseguito nel R. Laboratorio di Idrobiologia di Roma.

(5) Nella seduta del 16 giugno 1929.

cendo, le sostanze azotate provenienti da residui animali e vegetali, facendole passare attraverso gli stati di ammoniaca, nitriti, nitrati e viceversa.

Il mare riceve inoltre dell'azoto fissato nelle precedenti forme anche dalla pioggia, ma in realtà si tratta di quantità così piccole che non possono influire sensibilmente sulla quantità totale dell'azoto contenuto nel mare stesso, specialmente nel nostro caso, trattandosi del Mar Rosso, regione di piogge assai scarse.

Considerando ora separatamente questi tre diversi composti dell'azoto e cercando di stabilirne la provenienza e le origini e la funzione che essi hanno per la vita animale e vegetale, arriveremo così a concepire il ciclo dell'azoto anche per il mare, e dai risultati delle analisi eseguite sulle acque del Mar Rosso potrò trarre delle deduzioni riguardanti il metabolismo animale e vegetale del Mar Rosso stesso.

Ammoniaca. — L'ammoniaca si trova nel mare allo stato di sali d'ammonio, e proviene quasi totalmente dalla composizione e scissione batterica delle sostanze azotate provenienti dalla putrefazione di organismi vegetali e animali.

Non si trova in grande quantità nelle acque marine e spesse volte manca del tutto. Questo fatto potrebbe spiegarsi ammettendo che essa venga ossidata dall'azione degli organismi vegetali, ossidazione che sarebbe dovuta al fenomeno della respirazione delle piante, le quali emettendo ossigeno verrebbero così indirettamente a far compiere la trasformazione dell'ammoniaca in nitriti.

Questa ipotesi è stata sostenuta dal Daniell Smith⁽¹⁾, che ha dimostrato con esperienze la diminuzione dell'ammoniaca in un campione d'acqua nel quale vivevano delle alghe. L'ammoniaca quindi non è che uno stato di passaggio dei composti azotati e che, come abbiamo già detto, si trova solo occasionalmente nel mare. I valori piuttosto elevati riscontrati nelle analisi eseguite sulle acque del Mar Rosso (vedi tabella) si possono spiegare facilmente attribuendole alla putrefazione degli animali marini che sono abbondantissimi, e che vanno rapidamente in decomposizione a causa della maggiore alcalinità del mare e delle temperature molto elevate dell'acqua e dell'aria che favoriscono grandemente i processi putrefattivi.

Infine possiamo ammettere un'altra causa di importanza non minore. Abbiamo già visto come debbasi attribuire alle piante la trasformazione dell'ammoniaca in composti dell'azoto ossigenati: ora essendo il Mar Rosso, almeno nei paraggi da me visitati, relativamente povero di vegetazione, specialmente fissa, se ne deduce che questa scarsezza debba influire sulla quantità dell'ammoniaca contenuta nel mare; fatto che viene in un certo qual modo ad essere di riprova alle esperienze del Daniell Smith.

Nitriti. — La presenza dei nitriti nelle acque del mare non si può spiegare come dovuta direttamente alla vita animale, poiché essi non sono un prodotto normale del metabolismo degli organismi marini.

(1) « Journal of Marine Biological Association », III, 1893-5, 304.

Pur tuttavia possiamo chiaramente stabilire la loro provenienza attribuendola ad azione batterica; o per meglio dire ad un potere ossidante che posseggono speciali batteri rispetto ai sali di ammonio che si originano dai prodotti del ricambio organico e dai prodotti azotati provenienti dai corpi in putrefazione.

Questa ossidazione trasforma i sali d'ammonio in nitrati facendoli però passare attraverso lo stato intermedio di sali dell'acido nitroso.

La presenza di questi batteri nitrificanti è oggi universalmente accettata, benchè sia stata messa in dubbio la loro azione sul metabolismo dell'azoto nel mare. (A. P. Orr.).

Le variazioni del contenuto dei nitriti nel mare possono essere attribuite a diverse cause⁽¹⁾.

Possiamo dividerle in due classi: cause che influiscono sull'aumento dei nitrati, e cause che tendono a farne diminuire la quantità. Tra queste ultime dobbiamo mettere in prima linea il proseguimento dell'azione ossidante dei batteri nitrificanti che li trasforma in nitrati, in seconda linea Moore e Webster dimostrarono che la loro diminuzione può anche essere attribuita all'azione del plankton vegetale che ha la proprietà di assorbirli. D'altra parte, come fu anche osservato e dimostrato dall'esperienze del Thiele, una causa che influisce sul loro aumento pare sia dovuta al potere riducente che esercitano i raggi ultravioletti, e quindi i raggi solari, a spese dei nitrati trasformandoli in parte in sali dell'acido nitroso.

Come si vede da quanto è stato detto, le cause che influiscono sulla diminuzione dei nitriti sono in preponderanza rispetto a quelle che ne favoriscono la formazione, ed è perciò che in generale la quantità dei nitriti nel mare è piccolissima.

I valori piuttosto elevati che ho ottenuto in alcune analisi come quelle, per esempio, eseguite nelle vicinanze dell'isola di Isra-tu, possono attribuirsi alla putrefazione animale più abbondante, essendo quella zona, come è risultato dagli esperimenti di pesca, assai pescosa, e si può attribuire inoltre più in generale all'azione più sviluppata dei batteri denitrificanti sui nitrati, azione di cui parlerò più ampiamente in seguito.

Nitrati. - Nelle acque del mare è stata osservata una certa quantità di nitrati che abbiamo già detto provenienti dal metabolismo animale e dagli afflussi di acqua dolce; però questa quantità è variabile e precisamente è maggiore nei mari aperti, e minore in taluni chiusi come nel nostro caso il Mar Rosso⁽²⁾.

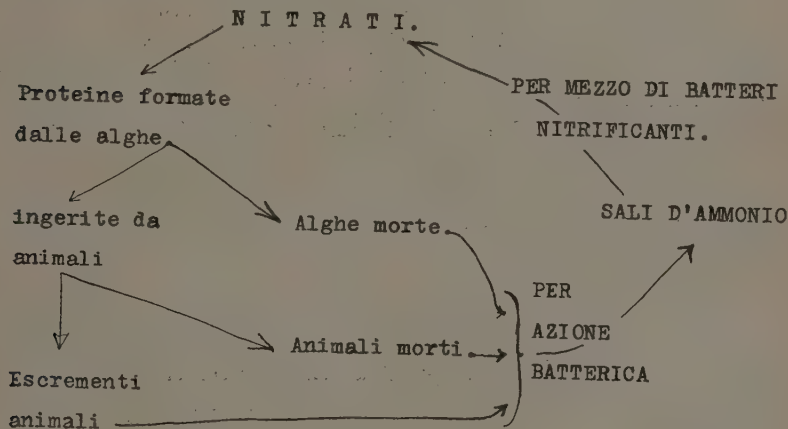
Vediamo di stabilire un po' più chiaramente questa origine dei nitrati e la funzione che essi hanno per la vita animale e vegetale. Essi hanno una importanza capitale per la vita delle piante, in maniera che ci si dovrebbe

(1) «Journal of Marine Biological Association», XIV, 61.

(2) KRÜMMEL, *Handbuch der Oceanographie*, I, 319.

aspettare di ritrovarne una discreta quantità disciolta nel mare; mentre invece l'analisi si è dimostrata negativa in molti casi. Si può quindi spiegare la maggior quantità di questi nitrati nei mari aperti e nei mari chiusi con potenti afflussi fluviali, ammettendo che gli organismi vegetali non siano sufficienti a trasformare l'enorme quantità di nitrati contenuta negli oceani, e che ne rimanga sempre piccola quantità fissa allo stato di NO_3 ; cosa che non avverrebbe in taluni mari chiusi dove gli organismi vegetali sarebbero sufficienti a trasformare in proteine tutta la quantità dei nitrati presente. Si è venuti così a stabilire l'esistenza di un ciclo chiuso dell'azoto nel mare; infatti i nitrati assorbiti dalle alghe sono convertiti in proteine ed altri prodotti organici; queste alghe servono di nutrimento ad alcuni animali marini, altre muoiono; queste ultime con la putrefazione danno origine a sali d'ammonio, le altre sono ingerite da alcune specie di pesci i quali, alla loro volta, sono cibo di altri pesci che segregano i prodotti del loro ricambio e quindi muoiono. Dagli escrementi e dalla putrefazione dei loro corpi si originano per azione batterica sali d'ammonio che, insieme a quelli formati con la putrefazione delle sostanze vegetali, vengono nuovamente trasformati in nitrati per mezzo dei batteri nitrificanti.

Abbiamo così il seguente ciclo chiuso:



Come mai quindi nel Mar Rosso non si trovano nitrati?

Si deve dunque supporre la presenza di una maggior quantità di batteri denitrificanti, presenza favorita dalla temperatura più elevata dell'acqua, condizione favorevole per lo sviluppo e la moltiplicazione di detti batteri.

Possiamo quindi trarre questa conclusione riguardo all'assenza dei nitrati nel Mar Rosso: essendo piuttosto scarsa la vita vegetale sia planctonica che fissa, che favorirebbe l'assorbimento dei nitrati, dobbiamo per forza ammettere la presenza di una quantità maggiore di questi batteri denitrificanti,

presenza molto discussa da alcuni autori, ma ora generalmente accettata; da questa prima deduzione si può passare ad un'altra forse più interessante: questi batteri denitrificanti, assorbendo per la massima parte i nitrati contenuti nel mare, limitano la vita delle piante e vengono così a formare la causa forse più importante della limitazione della vegetazione nel Mar Rosso (per es. scarsità di alghe frondose).

Espongo ora brevemente i diversi metodi adottati per le diverse determinazioni dei nitrati, nitriti e dell'ammoniaca, riservandomi in un altro lavoro di esaminare più in particolare i metodi usati per la determinazione dei nitrati nelle acque clorate, metodi ancora imperfetti o di troppo difficile attuazione.

Il metodo adoperato per la determinazione dell' NH_3 era il seguente: in un cilindrico graduato a collo largo e munito di tappo smerigliato si versano 50 cc. dell'acqua in esame, previamente filtrata, a cui si aggiungeva 2 cc. di una soluzione di Seignette al 50 % esente di NH_3 e un cc. del reattivo di Nessler. In altri cilindri graduati si mettevano rispettivamente cc. 0,1, 0,2, 0,3, ecc. di una soluzione di $\text{NH}_4 \text{ Cl}$ contenente mgr. 0,01 di NH_4 per litro e si portava il vol. a 50 cc. con acqua distillata. In ultimo si aggiungeva a ciascuno di essi un cc. del reattivo di Nessler. Le colorazioni così ottenute si comparavano dapprima con quella dell'acqua in esame osservando i cilindri dall'alto in basso, e quindi una comparazione più accurata tra le due colorazioni più somiglianti veniva eseguita con il colorimetro di Leitz.

Il metodo da me adoperato per il dosaggio quantitativo dei nitriti è il solito metodo basato sull'impiego del reattivo di Griess Ilosvai.

Credo perfettamente inutile dilungarmi sulla spiegazione del conoscitissimo metodo; dirò solamente che per la comparazione della colorazione dell'acqua in esame con i tubi campione mi sono servito per maggior sicurezza del colorimetro del Leitz.

Riguardo al metodo adoperato per la determinazione dei nitrati mi sono trovato di fronte a delle difficoltà di non poca entità, e ho finalmente deciso di adoperare il metodo proposto da Denigès⁽¹⁾ con la stricnina ridotta che si è dimostrato il migliore ed il più adatto per analisi che dovevano essere eseguite a bordo di una nave che per quanto attrezzata non poteva certo possedere le comodità di un vero e proprio laboratorio. Ho dovuto inoltre eseguire le reazioni su acqua di mare diluita con acqua dist. perchè la quantità eccessiva di cloruri disciolti impediva lo svolgersi della reazione.

Tutti i campioni d'acqua di mare sono stati prelevati con una bottiglia tipo Ekman interamente costruita dal Laboratorio dell'Istituto Idrografico della R. Marina.

(1) « Compt. Rend. de l'Acad. des Sc. », t. 171, 802, 1920.

TABELLA DELLE ANALISI

*eseguite a bordo della R. Nave Idrografica « Amm. Magnaghi », nell'arcipelago delle Dahalak
Mar Rosso.*

Località	Ore	Fondo	Giorno	Tempo	T°	T'	NH ₃	NO ₂	NO ₃
Enta-idel	19.45	M. 3	6-3-29	Buono	28	27.4	0.45	0.035	—
Enta-idel	21.30	» 15	6-3-29	»	28	27.3	0.40	0.035	—
Isra-tu	19.15	» 2	10-3-29	»	27.8	27.2	0.60	0.30	—
Isra-tu	19.15	» 30	10-3-29	»	27.8	27	0.50	0.10	—
Isra-tu (laguna)	11.15	» 1	14-3-29	»	32	28	0.09	—	—
Wusta	18	» 1	20-3-29	»	30	28	0.18	—	—
Fandira-Wusta	17.30	» 120	20-3-29	»	30	27	0.20	0.18	—
Wusta-Fand. Wusta . .	17.45	» 60	20-3-29	»	30	27.4	0.19	0.08	—
Wusta-Fand. Isra-tu. .	16.30	» 40	22-3-29	»	30	27.6	0.15	0.21	—
Enta-entor	15.35	» 14	4-4-29	»	31	27.8	0.09	Tracce	—
Enta-entor	16	» 1	4-4-29	»	31	28.5	0.35	»	—
Entuvedul	18	» 6	7-4-29	»	29.7	27.3	0.28	»	—
6 miglia ad est Harmil .	11.45	» 1	18-4-29	»	32	28.5	0.15	»	—
» » » » »	11.45	» 16	18-4-29	»	32	27.1	0.12	»	—
Tra Harmil e Ukale. .	14.30	» 1	19-4-29	»	33	28.4	0.20	»	—
» » » » »	15	» 15	19-4-29	»	33	27.2	0.18	»	—
1 miglio a W. Enta-entor	19	» 19	19-4-29	»	32.4	27.6	0.10	0.08	—
» » » » »	19.10	» 1	19-4-29	»	31.4	30	0.13	Tracce	—
1 miglio a S. Enta-entor	12	» 1	20-4-29	Copert.	34	28.5	0.12	0.05	—
» » » » »	11.45	» 12	20-4-29	»	34	27.5	0.12	0.06	—
Ukale	17.50	» 15	22-4-29	Piovos.	26.8	29.3	0.10	Tracce	—
Ukale	17.55	» 1	22-4-29	»	26.8	29.5	0.15	»	—
Ukale	15	» 6	22-4-29	Sereno	31.8	28.4	0.13	»	—

T° = Temperatura in centigradi dell'aria.

T' = » » » dell'acqua.

I valori delle analisi dell'NH₃ e dell'NO₂ sono espressi in mg. per litro.

Cristallografia. — *La struttura cristallina dei bromuri di metalli bivalenti*⁽¹⁾. Nota di A. FERRARI e F. GIORGI, presentata⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

L'importanza della grandezza relativa dei diversi atomi o ioni che costituiscono la molecola di un composto quale fattore determinante della forma cristallina è stato dimostrato da diversi autori. Ricordiamo fra gli altri i lavori di V. M. Goldschmidt⁽³⁾ nei quali sono discussi i risultati dell'esame röntgenografico di molte strutture cristalline e le relazioni fra il tipo di struttura e i raggi delle particelle che costituiscono il reticolo. Dei seguenti metalli bivalenti sono noti i reticoli di un buon numero di composti semplici che permettono di stabilire l'ordine di grandezza dei loro ioni: Ni^{++} , Co^{++} , Mg^{++} , Fe^{++} , Zn^{++} , Mn^{++} , Cd^{++} , Ca^{++} , Sr^{++} , Pb^{++} , Ba^{++} .

Prendendo in considerazione i composti bivalenti di questi metalli corrispondenti allo stesso acido si osserva come essi si dividano in due serie a struttura cristallina diversa. Il passaggio dall'una all'altra che non avviene però sempre in corrispondenza allo stesso metallo, è dovuto al variare della grandezza dell'ione metallico.

L'esempio più completo è dato dai carbonati; la prima serie di essi è romboedrica e comprende i carbonati di nichelio, cobalto⁽⁴⁾, magnesio, ferro, zinco, manganese, cadmio e calcio; mentre la seconda è rombica e costituita dai carbonati di calcio, stronzio, piombo e bario. Il carbonato di calcio che costituisce il termine di passaggio fra le due serie, appartiene ad entrambe essendo dimorfo. Nei fluoruri il passaggio dalla prima serie alla seconda avviene tra il fluoruro di manganese e quello di cadmio; sono così tetragonali tipo « rutilo » i fluoruri di nichelio, cobalto, magnesio, ferro, zinco, manganese; monometrici tipo « fluorite » quelli di cadmio, calcio, stronzio, piombo⁽⁵⁾ e bario.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Chimica Fisica della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 5 maggio 1929.

(3) *Geochemische Verteilungsgesetze der Elemente VI, VII e VIII*. « Norske Vid. Akad. », Oslo, 1926 e 1927.

(4) Sulla struttura dei carbonati di cobalto e nichelio è in corso un lavoro di A. Ferrari e C. Colla, che conferma per il primo composto una struttura romboedrica tipo « calcite » colle dimensioni della cella elementare: $a = 5,87 \text{ \AA}$ e $\alpha = 103^\circ 20'$; per il carbonato di nichelio non è stato invece fino ad ora ottenuto un prodotto neutro che dia un fotogramma calcolabile.

(5) Del fluoruro di piombo esisterebbe secondo N. H. KOLDERUP (« Bergens Museums Aarbok », 1924-25, Nat. R. Nr. 2, Oslo) anche una modificazione esagonale non ben definita.

Nei cloruri abbiamo la prima serie *romboedrica* che comprende i cloruri di nichelio, cobalto, magnesio, ferro, manganese, cadmio e forse quello di zinco ⁽¹⁾. La seconda serie è meno regolare perchè la struttura del cloruro di calcio non è ancora conosciuta, il cloruro di stronzio è cubico tipo « fluorite » (struttura presentata probabilmente anche dal cloruro di bario nella sua forma stabile sopra i 923°, mentre a temperatura ordinaria sarebbe monoclini), il cloruro di piombo è rombico.

Molti dei reticoli dei fluoruri e dei cloruri dei metalli bivalenti sono stati studiati da uno di noi (A. Ferrari) e pubblicati in questi atti. Riferiamo nella presente Nota lo studio röntgenografico di alcuni bromuri bivalenti.

Abbiamo esaminato i bromuri di tutti i metalli bivalenti sopra ricordati ad eccezione di quelli di zinco e di piombo già descritti come rombici ⁽²⁾. I bromuri di calcio, stronzio e bario non hanno dato finora che fotogrammi estremamente deboli non sicuramente calcolabili; gli altri hanno dato invece ottimi risultati. I bromuri di cui trattiamo sono stati ottenuti trasformando i carbonati in bromuri con acido bromidrico, disidratandoli e fondendoli poi in corrente gassosa dello stesso acido. Le analisi di questi bromuri e i loro punti di fusione sono sotto elencati:

	calcolato		trovato		
NiBr ₂	{ Ni	26.86	Ni	26.96	{ infusibile
	{ Br	73.14	Br	72.70	
CoBr ₂	{ Co	26.95	Co	25.28	{ punto di fusione 687°
	{ Br	73.05	Br	74.75	
FeBr ₂	{ Fe	25.83	Fe	26.07	{ punto di fusione 684°
	{ Br	74.17	Br	74.40	
MgBr ₂	{ Mg	13.21	Mg	13.08	{ punto di fusione 711°
	{ Br	86.79	Br	87.11	
MnBr ₂	{ Mn	25.57	Mn	25.50	{ punto di fusione 698°
	{ Br	74.43	Br	74.50	
CdBr ₂	{ Cd	41.28	Cd	41.28	{ punto di fusione 576°
	{ Br	58.78	Br	58.98	

(1) In un precedente lavoro (« Rend. Acc. Lincei », IV [1926], 11) A. FERRARI in collaborazione con G. BRUNI ha tentato di dare del fotogramma del cloruro di zinco un ordinamento del tipo degli altri cloruri; questa interpretazione è però già stata data come dubbia; essa è in contraddizione con alcuni dati sperimentali.

(2) ZnBr₂ $a:b:c = 0.924:1:1.265$ (NORDENSKIÖLD, « Bihang, K. Sv. Vet. Akad. Handl. », 1874, 2, N. 2), PbBr₂ $a:b:c = 0.5883:1:1.1833$ (NORDENSKIÖLD, loc. cit. e HJORTDAHL, « Forhandl. Vid. Selsk. », Kristiania, 1878, N. 9). Quest'ultimo bromuro è stato studiato col metodo röntgenografico da H. BRÄKKEN e L. HARANG (« Zeitschr. Kristallogr. Mineral. », 68, 123-38). Per la cella elementare contenute quattro molecole di PbBr₂ i detti autori danno le dimensioni $a = 4.706 \text{ Å}$, $b = 7.989 \text{ Å}$, $c = 9.475 \text{ Å}$; $a:b:c = 0.589:1:1.186$. La struttura di questo bromuro è la stessa del cloruro di piombo.

I fotogrammi di Debye di questi bromuri sono stati ottenuti usando una radiazione X proveniente da un tubo ad anticatodo di ferro.

Il primo di questi bromuri, quello di nichelio, si potrebbe ordinare con l'ipotesi di un reticolo romboedrico tipo «cloruro di magnesio». Il bromuro di nichelio avrebbe così un reticolo diverso di quelli di cobalto, ferro, magnesio e manganese che come diremo presentano una struttura tipo «ioduro di cadmio». Il presentare un composto di nichelio un reticolo diverso da quello dei corrispondenti composti di ferro e cobalto, particolarmente dal secondo, è un fatto così inatteso, da indurci a soprassedere su tale conclusione. La grandezza degli atomi non giustifica un tale comportamento e anche una diversità di ionizzazione che porterebbe ad un diverso diametro degli stessi, non è facilmente comprensibile per le strettissime analogie chimiche che legano cobalto e nichelio.

TABELLA I

Bromuro di cobalto		Bromuro di ferro		Indici $h_1 \ h_2 \ h_3$	Costante reticolare	
Distanze reticolari	Intensità osservate	Distanze reticolari	Intensità osservate		CoBr ₂ ($c/a = 1,66$)	FeBr ₂ ($c/a = 1,65$)
3.005	<i>m</i>	3.005	<i>m</i>	0 0 2	3.630	3.640
2.781	<i>ff</i>	2.825	<i>f</i>	1 0 1	3.623	3.680
2.188	<i>mf</i>	2.210	<i>mf</i>	1 0 2	3.650	3.700
1.836	<i>m</i>	1.867	<i>m</i>	1 1 0	3.670	3.734
1.717	<i>ff</i>	1.730	<i>f</i>	1 0 3	3.680	3.730
—	—	1.636	<i>d</i>	1 1 2	—	3.730
1.530	<i>mf</i>	1.540	<i>mf</i>	0 0 4	3.685	3.735
1.417	<i>m</i>	1.427	<i>m</i>	2 0 2	3.690	3.722
1.258	<i>md</i>	1.272	<i>md</i>	2 0 3	3.690	3.735
1.184	<i>f</i>	1.200	<i>f</i>	1 2 1	3.685	3.735
				1 1 4	3.705	3.770
1.144	<i>m</i>	1.154	<i>m</i>	1 1 5	3.685	3.740
1.125	<i>m</i>	—	—	1 2 2	3.688	—
1.067	<i>d</i>	1.083	<i>d</i>	3 0 0	3.690	3.740
1.039	<i>mf</i>	1.054	<i>m</i>	1 2 3	3.685	3.745
1.021	<i>m</i>	1.030	<i>md</i>	0 0 6	3.690	3.750

TABELLA II

Bromuro di magnesio		Bromuro di manganese		Indici $h_1 \ h_2 \ h_3$	Costante reticolare	
Distanze reticolari	Intensità osservate	Distanze reticolari	Intensità osservate		MgBr ₂ ($c/a = 1,64$)	MnBr ₂ ($c/a = 1,62$)
3.066	<i>m</i>	3.049	<i>m</i>	0 0 2	3.730	3.765
2.875	<i>f</i>	2.873	<i>ff</i>	1 0 1	3.757	3.765
2.249	<i>md</i>	2.248	<i>md</i>	1 0 2	3.780	3.800
2.073	<i>mf</i>	—	—	0 0 3	3.797	—
1.897	<i>m</i>	1.907	<i>f</i>	1 1 0	3.794	3.810
1.760	<i>m</i>	1.755	<i>f</i>	1 0 3	3.810	3.830
—	—	1.662	<i>md</i>	2 0 0	—	3.830
1.627	<i>m</i>	—	—	1 1 2	3.810	—
1.597	<i>md</i>	—	—	2 0 1	3.810	—
1.562	<i>d</i>	1.558	<i>mf</i>	0 0 4	3.810	3.820
1.478	<i>f</i>	—	—	—	—	—
1.462	<i>md</i>	1.454	<i>m</i>	2 0 2	3.818	3.810
1.293	<i>d</i>	—	—	2 0 3	3.810	—
1.222	<i>m</i>	1.230	<i>m</i>	1 2 1	3.805	3.815
1.207	<i>ff</i>	1.207	<i>ff</i>	1 1 4	3.805	3.830
—	—	1.165	<i>m</i>	1 0 5	—	3.830
				1 2 2		
1.101	<i>md</i>	—	—	3 0 0	3.815	—
1.071	<i>m</i>	—	—	1 2 3	3.815	—
1.045	<i>m</i>	—	—	0 0 6	3.825	—
1.040	<i>md</i>	—	—	3 0 2	3.820	—

Nella tabella prima e seconda sono dati l'ordinamento dei fotogrammi dei bromuri di cobalto, ferro, magnesio e manganese secondo una cella esagonale del tipo di quella trovata per primo da Bozorth per lo ioduro di cadmio.

Come è ben noto il prisma ortogonale a base romba, che costituisce la terza parte di questa cella, contiene una molecola del composto i cui atomi presentano le coordinate:

$$\text{Me } (0, 0, 0) \quad \text{Br } \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} ; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{4} \right)$$

(1) Non ci è stato possibile ordinare questa linea.

Il calcolo è stato fatto nel sistema esagonale. Le costanti che si deducono per le celle elementari sono:

CoBr ₂	$a = 3.685 \pm 0.005 \text{ \AA}$	$c = 6.120 \text{ \AA}$	$c/a = 1.66$
FeBr ₂	$a = 3.740 \pm 0.005 \text{ »}$	$c = 6.171 \text{ »}$	$c/a = 1.65$

Le densità calcolate per questi due bromuri e per i successivi risultano un po' superiori a quelle sperimentali:

CoBr ₂	densità calcolata	5.072	densità sperimentale	4.91 ⁽¹⁾
FeBr ₂	»	4.790	»	4.624 ⁽²⁾

Le costanti delle celle di questi due bromuri sono:

MgBr ₂	$a = 3.815 \pm 0.005 \text{ \AA}$	$c = 6.256 \text{ \AA}$	$c/a = 1.64$
MnBr ₂	$a = 3.820 \pm 0.001 \text{ »}$	$c = 6.188 \text{ »}$	$c/a = 1.62$

Le densità:

MgBr ₂	densità calcolata	3.876	densità sperimentale	3.72 ⁽³⁾
MnBr ₂	»	4.549	»	4.385 ⁽⁴⁾

Il calcolo dell'intensità non si accorda bene con quelle osservate; probabilmente una migliore concordanza si avrebbe variando alquanto la terza coordinata degli atomi di bromo.

Il fotogramma del bromuro di cadmio non si ordina in un reticolo tipo «ioduro di cadmio», bensì con la supposizione di una struttura tipo «cloruro di magnesio». La tabella III ne dà infatti l'interpretazione secondo una cella romboedrica avente un angolo α di $61^\circ, 40'$ pari ad un rapporto assiale nell'esagonale di 2.36.

Il valore dell'angolo del romboedro è quasi identico a quello del cloruro di manganese $61^\circ, 25'$ ⁽⁵⁾. Ciò trova una ragione nel fatto che i due composti presentano un rapporto, raggio del metallo / raggio del metalloide assai vicino.

$$(\text{MnCl}_2 = 0.503 \quad ; \quad \text{CdBr}_2 = 0.525)$$

Anche le intensità delle linee debbono essere simili perchè il rapporto fra le grandezze relative dei numeri atomici attribuibili agli ioni Mn^{++} , Cl e Cd^{++} , Br , sono molto vicini. Infatti le linee che compaiono nei fotogrammi dei due prodotti sono del tutto parallele per posizione ed intensità.

(1) CLARK, BUCKNER, « Journ. Am. Chem. Soc. », 44, 1922, 230.

(2) BILTZ, BIRK, « Zeitschr. anorg. Chem. », 134, 1923, 132.

(3) BILTZ, « Zeitschr. anorg. Chemie », 115, 1921, 241.

(4) BAXTER e HINES, « Journ. Am. chem. Soc. », 28, 1906, 1574.

(5) Questi « Rendiconti », fasc. 9, 1929, pp. 782-789.

TABELLA III

N.	θ osserv.	Int.	θ corr.	$\sin \theta'/2$	K	$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta'/2}$	$h_1 \ h_2 \ h_3$	d_{100}
1	19.4	<i>f</i>	18.91	0.1640	α	5.904	1 1 1	6.380
2	41.9	<i>ff</i>	41.46	0.3540	α	2.732	0 2 2	6.370
3	54.9	<i>d</i>	54.50	0.4570	β	1.919	2 2 4	6.407
4	56.0	<i>d</i>	55.61	0.4667	α	2.071	3 3 3	6.420
5	59.2	<i>mf</i>	58.82	0.4913	α	1.967	0 $\bar{2}$ 2	6.405
6	60.8	<i>ff</i>	60.43	0.5030	α	1.920	2 2 4	6.408
7	69.0	<i>dd</i>	68.66	0.5640	β	1.555	4 4 4	6.436
8	74.3	<i>m</i>	73.98	0.6018	α	1.607	0 0 4	6.428
9	77.1	<i>ff</i>	76.80	0.6218	α	1.555	4 4 4	6.436
10	79.0	<i>d</i>	78.70	0.6345	β	1.382	0 4 4	6.442
11	89.1	<i>mf</i>	88.85	0.6990	α	1.383	0 4 4	6.443
12	91.7	<i>d</i>	91.45	0.7160	β	1.225	2 4 6	6.455
13	101.8	<i>f</i>	101.60	0.7750	α	1.247	$\bar{2}$ 2 4	6.440
14	104.5	<i>ff</i>	104.31	0.7890	α	1.225	2 4 6	6.455
15	117.1	<i>d</i>	116.96	0.8520	α	1.135	2 2 $\bar{4}$	6.400
16	121.6	<i>f</i>	121.48	0.8730	α	1.107	4 6 6	6.470

L'ordinamento delle linee è fatto usando la formula:

$$d_{100} = d_{h_1 h_2 h_3} \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 - 2(h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_1 h_3) \cos \Sigma}$$

dove è $\cos \Sigma = \frac{\cos \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 0.322$.

Dalla tabella III si ricava il valore della distanza reticolare:

$$d_{100} = 6.44 \pm 0.01 \text{ \AA}$$

Lo spigolo a del romboedro elementare avente l'angolo α di $61^\circ, 40'$ sarà allora:

$$a = \frac{d_{100}}{\sin \alpha \sin \Sigma} = 7.72 \pm 0.01 \text{ \AA}$$

e il volume della cella elementare 337.5 \AA^3 .

Se supponiamo che in questo romboedro siano contenute 4 molecole, come è nel reticolo tipo « cloruro di magnesio », si calcola per il bromuro di cadmio la densità 5.36 che coincide abbastanza col valore sperimentale 5.192⁽¹⁾.

Lo studio dei reticoli dei bromuri dimostra l'esistenza di una serie di composti a struttura tipo « ioduro di cadmio » che comprende i bromuri di cobalto, ferro, magnesio e manganese. Il bromuro di nichelio non farebbe parte di questa serie; il bromuro di cadmio presenta invece la struttura del cloruro di magnesio.

Non avendo potuto fino ad ora definire la struttura dei bromuri alcalino-terrosi, non siamo in grado di affermare se il bromuro di cadmio sia il primo termine della seconda delle due serie in cui si suddividono spesso i sali di questi metalli.

Riassumendo:

a) Si dimostra per i bromuri di cobalto, ferro, magnesio e manganese una struttura cristallina tipo « ioduro di cadmio » con le seguenti caratteristiche.

CoBr ₂	$a = 3.685 \pm 0.005 \text{ \AA}$	$c = 6.120 \text{ \AA}$	$c/a = 1.66$	dens. = 5.072
FeBr ₂	$a = 3.740 \pm 0.005 \text{ »}$	$c = 6.171 \text{ »}$	$c/a = 1.65$	« = 4.790
MgBr ₂	$a = 3.815 \pm 0.005 \text{ »}$	$c = 6.256 \text{ »}$	$c/a = 1.64$	» = 3.876
MnBr ₂	$a = 3.820 \pm 0.01 \text{ »}$	$c = 6.188 \text{ »}$	$c/a = 1.62$	» = 4.549

b) Il bromuro di cadmio presenta invece una cella romboedrica tipo « cloruro di magnesio » con le dimensioni:

$$a = 7.72 \pm 0.01 \text{ \AA} \quad \alpha = 61^\circ, 40'$$

Questa cella contiene 4 molecole da cui si calcola la densità 5.36.

(1) BAXTER e HINES, « Amer. Chem. Journ. », 31, 1904, 220.

Petrografia. — *Studi petrografici sulla Zona del Canavese. Il granito di Belmonte*⁽¹⁾. Nota preliminare di M. FENOGLIO, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. A. STELLA.

È risaputo che la « Zona del Canavese » presenta un notevole interesse dal punto di vista geologico, per una serie di problemi che ad essa si ricollegano, e che non hanno per anco a tutt'oggi avuto una soluzione esauriente.

Geologi insigni nostri e d'oltre Alpe si occuparono di questa interessante zona, e di essa si parla in buon numero di pubblicazioni sia generali che particolari. Ad onta però del numero non piccolo di queste pubblicazioni non si potrebbe affermare che da esse scaturisca una conoscenza geologica-petrografica adeguata alla grande importanza della zona in questione.

Se non vi può essere ombra di dubbio che tettonicamente la « Zona del Canavese » costituisce un'unità a sè, e che ci troviamo in presenza di una zona fortemente disturbata, intensamente laminata, con alterazione profonda di molte delle rocce costituenti gli affioramenti, sembrano tuttavia ancora degni di studio le relazioni tra questa zona e la serie precarbonifera dioritico-kinzigitica da una parte e dall'altra la serie dei gneis Sesia-Val di Lanzo.

Discrepanze notevoli esistono poi sull'interpretazione della così detta « serie del Canavese ». E senza per ora entrare in dettagli su questa questione, che esorbiterebbero dallo scopo prefissomi in questa Nota preliminare, accennerò subito che non del tutto chiari sono i rapporti tra la formazione sedimentare, costituita essenzialmente da calcari dolomitici, scisti argillosi e marnosi e da arenarie (con anageniti e puddinghe) e la formazione eruttiva costituita da granito, porfidi e relativi tufi.

Scarse poi e presso che nulle sono le notizie petrografiche che a tutt'oggi possediamo sulle rocce della formazione eruttiva, il cui studio offre difficoltà non comuni, tra cui non ultima è il grado avanzatissimo di alterazione in cui si trovano generalmente le rocce agli affioramenti.

Pensai quindi che un'esame diligente e minuto fatto sul terreno con particolare riguardo alla formazione eruttiva, seguito da uno studio petrografico di dettaglio, potesse con molta probabilità contribuire a farci meglio conoscere i rapporti tra questa singolare massa intrusiva granitica con i

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Torino.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1929.

porfidi che l'accompagnano e la formazione sedimentare, ed eventualmente i rapporti tra la stessa « Zona del Canavese » e le circostanti formazioni cristalline.

A tale scopo ho da tempo iniziato una serie di escursioni, che per ora ho limitato al tratto Levone-Cuornè, e che sto estendendo sino ad Ivrea.

Le osservazioni fatte sul terreno, e le considerazioni generali di carattere geologico che da questo studio derivano, mi riprometto di esporle a studio ultimato della classica « Zona del Canavese », contenuta nei limiti or ora accennati, e dopo avere espletato lo studio petrografico dei tipi litologici eruttivi più caratteristici, che sia per varietà come per composizione si presentano non privi di interesse.

Riservandomi poi di pubblicare per esteso in un prossimo lavoro i risultati delle ricerche intraprese sul granito, voglio ora limitarmi ad una esposizione, affatto sommaria e sintetica, delle osservazioni di carattere chimico-petrografico, riferentisi alla facies più comune del granito della zona studiata, noto ai geologi ed ai petrografi sotto il nome di granito di Belmonte.

*
* *

All'esame macroscopico, la roccia a tessitura apparentemente massiccia, rivela la tipica struttura granulare, caratteristica dei comuni graniti.

L'elemento ortoclasico, di color roseo intenso, predomina sugli altri elementi, impartendo alla roccia una tinta prevalentemente rosea vivace; in ordine di importanza viene subito il quarzo, il cui aspetto granulare e vetroso ci permette di distinguerlo dai plagioclasti riconoscibili ad occhio nudo e meglio alla lente per la loro evidente sfaldatura e per la geminazione. Si scorgono qua e là chiazze di colore verde-scuro, costituite da laminette di mica cloritizzata e da clorite.

All'esame microscopico la roccia rivela generalmente la struttura normale o presso che normale dei comuni graniti, ancorchè non manchino talvolta accenni a struttura cataclastica, in cui gli effetti del dinamometamorfismo sono abbastanza evidenti. Qui i segni di deformazione meccanica appaiono manifesti in tutti i componenti della roccia con frequenti casi di frattura e risaldata dei vari individui.

I componenti essenziali della roccia sono: micropertite ortoclasica, quarzo e un plagioclasio; gli elementi accessori sono la biotite, la muscovite, gli ossidi di ferro, lo zirconio, la fluorina, l'apatite e la pirite; secondarii clorite, epidoto.

Per quanto riguardo il feldspato potassico è non privo di interesse il rilevare che l'ortoclasio tipico è raro e presso che eccezionale nel granito

di Belmonte; siamo per lo più in presenza di una associazione micropertitica ortoclasio-plagioclasio.

Gli individui di tipica micropertite ortoclasica risultanti dall'interclusione finissima dei due feldspati hanno di solito dimensioni notevoli, irregolarmente sviluppati e costituiscono di gran lunga l'elemento predominante fra i componenti della roccia.

Qua e là nella roccia appaiono elementi con struttura di tipo micro-clinico.

Il plagioclasio è costantemente subordinato alla micropertite ortoclasica. È rappresentato anch'esso da individui per lo più regolari, sia per forma che per sviluppo. La determinazione eseguita coi metodi soliti e confermata applicando i vari metodi fondati sull'impiego del tavolino universale di Federow, porta a concludere per un termine albite-oligoclasio.

Sovente si osservano strutture complesse ed interessanti da ascrivere alle strutture mirmechitiche in senso lato; tali strutture si notano specialmente a contatto tra due individui di micropertite ortoclasica, non che a contatto tra plagioclasio e micropertite ortoclasica.

Il quarzo è un componente indubbiamente abbondantissimo nel granito di Belmonte. Include frequentemente laminette di muscovite. Si notano inoltre sciami e file delle consuete, minutissime inclusioni goccioliformi.

I componenti micacei sono dati dalla biotite e dalla muscovite; e per quanto molto scarse tutte e due, predomina generalmente la biotite, che raramente si presenta bella fresca, mentre appare sovente intensamente colorata in verde per alterazione in clorite, talvolta con granuli di epidoto.

La muscovite è generalmente in quantità subordinata alla biotite. Scarsa soprattutto quella originaria, poichè per la maggior parte le poche laminette sono dovute all'alterazione dei feldspati.

Gli ossidi di ferro sono in gran parte riferibili a magnetite, ancorchè vi siano rappresentate anche l'ematite e l'ilmenite.

Degna di nota è la presenza della fluorina, non molto frequente nei graniti; essa è di solito disseminata in certe facies regolarmente nella roccia come uno dei componenti ordinari.

Pure singolare è il fatto della grandissima scarsità dell'apatite, che, come è noto, è minerale accessorio quasi costante dei graniti.

Lo zirconio, in granuli, con tipiche aureole pleocroiche nella biotite.

Pure non molto frequente è la pirite in granuli, talvolta già alterata in limonite.

L'analisi, eseguita su del materiale fresco, proveniente da cave recentemente aperte nei dintorni di Valperga, ha dato i seguenti risultati:

Si O ₂	69.91	1.159	}	1.166	}	0.133
Ti O ₂	0.51	0.006				
Zr O ₂	0.04	0.001				
Al ₂ O ₃	15.20	0.148	}	0.168		
Cr ₂ O ₃	—	—				
Fe ₂ O ₃	3.24	0.020				
Fe O	0.39	0.005	}	0.016		
Mn O	0.06	0.001				
Mg O	0.44	0.010				
Ca O	1.21	0.021	}	0.023		
Sr O	0.04	0.001				
Ba O	0.05	0.001				
Na ₂ O	2.77	0.044	}	0.094		
K ₂ O	4.79	0.050				
H ₂ O +	0.76					
H ₂ O —	0.08					
P ₂ O ₅	tracce					
F	0.08					
S	0.21					
Somma		99.78				

È singolarmente notevole la corrispondenza di composizione tra il granito di Belmonte e il granito di El Capitan in Yosemite Valley, descritto da H. W. Turner ed analizzato da W. Valentine⁽¹⁾, contenente quarzo, plagioclasio, ortoclasio, biotite, magnetite, titanite, apatite e zircone.

Infatti se calcoliamo per il granito di Belmonte (I) e di El Capitan (II) i rapporti proposti da Osann⁽²⁾ si ottengono i seguenti valori:

	S.	Al	F.	Al.	C.	AlK.	NK.	MC.
I	25.1	3.2	1.7	16.7	2.6	10.7	4.7	3.0
II	24.9	3.3	1.8	15.5	4.5	10.0	5.7	2.2

(1) H. W. TURNER, W. F. MILLEBRAND, H. N. STOKES and W. VALENTINE, *Some Rock-forming Biotites and Amphiboles*. « The American Journal of Science », vol. VII, 1899, p. 294: SiO₂ = 71.08; TiO₂ = 0.22; ZrO₂ = 0.08; Al₂O₃ = 15.90; Fe₂O₃ = 0.62; FeO = 1.31; MnO = 0.15; CaO = 2.60; SrO = 0.02; BaO = 0.04; MgO = 0.54; K₂O = 4.08; Na₂O = 3.54; H₂O = 0.30; P₂O₅ = 0.10; Cl = 0.02; somma 100.65.

(2) A. OSANN, *Petrochemische Untersuchungen*, Heidelberg, 1913.

Tra gli elementi che figurano in piccole quantità è non privo di interesse la presenza del fluoro, nonostante che la anidride fosforica sia stata riscontrata solo in tracce. Ciò del resto non ci deve affatto sorprendere e trova la sua naturale spiegazione nella diagnosi microscopica, poichè fu riscontrata la fluorite, mentre di apatite se ne osservò appena qualche granello, e su una serie di sezioni sottili fu riscontrata appena in due.

Petrografia. — *Appunti petrografici sulla regione delle Alpi Aurine e delle Vedrette Giganti (Alto Adige).* Nota I di A. BIANCHI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. DAL PIAZ.

Per incarico della Sezione Geologica del R. Magistrato alle Acque, negli anni 1927 e 1928, da me e dal dott. Giambattista Dal Piaz fu eseguito il rilevamento geologico dell'Alta e media *Valle Aurina*: da Vetta d'Italia (m. 2911), al Gruppo del Sasso Nero (3370); dal Picco dei Tre Signori (3500), alla Punta Rossa (3496) ed alla Cima Dura (3130); e fu pure iniziato lo studio della *Valle di Riva di Tures*, dominata a settentrione dallo stesso Gruppo di Cima Dura e chiusa a mezzogiorno dall'imponente massiccio delle Vedrette Giganti (Sasso Lungo, m. 3237).

Contemporaneamente il dott. Antonio Cavinato si è occupato di ricerche mineralogiche sulle stesse Alpi Aurine.

Mentre si sta preparando una memoria illustrativa sulla regione, e in attesa che sia pronta la nuova base topografica per la pubblicazione del foglio *Vetta d'Italia della Carta Geologica delle Tre Venezie*, si è ritenuto utile dare subito notizia di alcuni risultati dei nostri studi.

Una prima Nota di A. Cavinato, sull'Apatite di *Valle Aurina*, è di recentissima pubblicazione ⁽²⁾.

Uno studio particolare, chimico-petrografico sulla natura di alcuni lembi minori di *ortogneiss*, da noi rilevati, fu affidato in questi ultimi mesi a G. Semerano, e la relativa Nota è ora in corso di stampa ⁽³⁾.

Dirà, in altre Note successive, G. B. Dal Piaz della *geomorfologia* e della *tettonica* di questa nostra interessante regione di confine.

Io tratto qui ora, brevemente, dei tipi petrografici fondamentali ed accenno alle condizioni litologiche regionali, riservandomi di riprendere poi particolarmente in esame i rapporti fra le rocce di queste e di altre simili formazioni alpine.

(1) Nella seduta del 16 giugno 1929.

(2) CAVINATO A., *Apatite di Valle Aurina* in « Riv. Studi Trentini di Sc. Nat. », Trento, 1929, vol. X.

(3) SEMERANO G., *Sulla natura di alcuni gneiss della regione fra Alpi Aurine e Vedrette Giganti* in « Atti Accad. Scient. Ven. Trent. Istriana », Padova, 1929, vol. XX.

1° PENNIDI:

a) *Serie del Gran Veneziano: Ortogneiss dei Tauri e sue differenziazioni.* — La catena di confine, che divide la Valle Aurina dalla Zillertal, è costituita dalla parte meridionale della gran massa di ortogneiss dei Tauri che si estende dalle Alpi del Brennero fino a tutto il gruppo del Gran Veneziano. Massa, che ha la sua continuazione, più ad oriente, nel gruppo dell'Hochalm e nella quale R. Staub⁽¹⁾ trova motivi petrografico-stratigrafici e tettonici di corrispondenza col gruppo Tambò-Suretta e quindi col ricoprimento M. Rosa-Gran Paradiso.

Sono note, soprattutto per i lavori di F. Becke⁽²⁾, le caratteristiche petrografiche fondamentali dell'ortogneiss dei Tauri, nelle sue diverse facies granitica e tonalitica, con prevalente tessitura granulare nelle parti centrali e scistosa, laminata, od occhiatina alla periferia e con le numerose differenziazioni aplitiche e lamprofiriche.

Come rappresentante del tipo normale, più comune per il versante italiano delle Alpi Aurine, può essere assunto il gneiss che predomina nell'Alto Vallone del Conio, sopra Cadipietra (versante destro di Valle Aurina). Presenta color bianco-grigio, struttura granulare molto evidente, talora senza tessitura scistosa, talora con più o meno chiara scistosità. In ogni caso però l'esame microscopico rivela nettamente la *ricristallizzazione* della roccia e la sua nuova *struttura cristalloblastica* (a differenza di quanto si osserva, come vedremo, nel più recente massiccio tonalitico delle Vedrette Giganti).

Elementi essenziali sono: quarzo; ortoclasio, associato talvolta a microclino; plagioclasio albitico, con frequente geminazione polisintetica e con rara o appena percettibile zonatura; miche, con prevalenza di biotite sulla muscovite. Granuli numerosi di epidoto sono ordinariamente presenti, costituendo così un elemento caratteristico del gneiss; contengono talvolta un nucleo bruno, pleocroico, di ortite. Più rari sono elementi di orneblenda verde (che è comune nei tipi più basici) e lamelle di clorite (in intima associazione genetica con la biotite).

Accessori ordinari sono: apatite e zirconio; meno frequenti titanite, rutilo, granato, magnetite; occasionale calcite.

Non mancano associazioni micropegmatitiche e micropertitiche. Tipica e interessante è la frequenza di minutissimi individui idiomorfi di clinozoisite, annidati in maggiori individui di albite. Fatto che sembra esprimere *ricristallizzazione secondaria*, con scissione di un originario feldispato alcali-

(1) STAUB R., *Der Bau der Alpen*. « Beitr. Geol. Karte der Schw. », 520, Berna, 1924.

(2) BECKE F., *Granitgneissmasse des Zillertal-Hauptkammes* in « Anzeig. Akad. Wiss. Wien », 1897; *Chemische Analysen von krystallinen Gesteinen der Zentralkette der Ostalpen* in « Denkschr. Akad. Wiss. », Wien, 1913, LXXV, 153; *Differentiationserscheinungen in Zentralgneis d. H. Tauern* in « Miner. Ges. », Lipsia, 1922.

calcico. Come inclusi nel feldispato sodico di rigenerazione metamorfica, tettonica, si notano anche piccolissime lamelline di muscovite, o di clorite; che sono probabilmente *relitti della primitiva struttura*.

La composizione chimica di questo tipo medio normale di gneiss è rappresentata dalla seguente analisi, che ho eseguita su un esemplare raccolto poco sopra la Palude di Conio:

SiO ₂ = 67.47	
TiO ₂ = 0.42	
Al ₂ O ₃ = 16.04	
Fe ₂ O ₃ = 1.05	Formula sec. Niggli:
FeO = 2.21	si = 281; ti = 1.3
MnO = 0.03	al = 39.4
MgO = 1.34	fm = 19.5; mg = 0.43
CaO = 4.06	c = 18.1
K ₂ O = 3.01	alc = 23.0; k = 0.35
Na ₂ O = 3.71	
H ₂ O = 0.40	
P ₂ O ₅ = 0.21	
<hr/>	
Somma = 99.95	

Si tratta evidentemente, per la facies più comune, di un *ortogneiss di composizione granodioritica*.

Dove la roccia passa a *gneiss di tipo tonalitico*, talora a grana vistosa (Rio Franco), talora a minuta scistosità (Vetta d'Italia-Sasso Nero ecc.), si nota grande prevalenza del plagioclasio fra i feldispati e della biotite fra le miche, abbondanza di epidoto e costante presenza di orneblenda verde. Il plagioclasio varia fra miscele albitiche ed oligoclasiche, presentando talora una leggera, ma evidente, *zonatura inversa* (con nucleo più sodico della periferia). Plagioclasio, biotite ed orneblenda, assumono talvolta sviluppo e carattere di porfiroblasti, disseminati di granoblasti di quarzo, epidoto, ecc.

D'altra parte invece, con diminuzione di biotite, clorite, epidoto, scomparsa di orneblenda, aumento di muscovite e quarzo, predominio di ortose e microclino su albite, frequenza di micro-implicazioni pegmatitiche e perititiche, si passa a *gneiss di tipo granitico* (Rifugio Dalmer, Malga Fileger, Malga Alta dei Tauri, ecc.).

Questo tipo, con *facies muscovitica, scistosa, laminata*, o qua e là con evidente tendenza a *tessitura occhiadina*, prevale al margine meridionale della massa, cioè alla base dei contrafforti e allo sbocco dei valloni sulla destra di Valle Aurina.

Differenziazioni aplitiche vere e proprie, e concentrazioni di originario tipo pegmatitico si notano qua e là (Vallone di Rio Rosso, Rio di Mezzo, Rio del Conio, ecc.) e in esso trovansi talora bei cristalli tabulari di fluoro-apatite (A. Cavinato). Notevoli sono in alcuni punti (sopra S. Pietro, presso Forcella del Picco, ecc.) le alternanze di banchi di gneiss aplitico e di gneiss micaceo o cloritico, scistoso, a costituire la facies periferica, laminata, più acida, della massa.

Ben più frequenti sono però le *differenziazioni lamprofiriche*. Sono banchi di gneiss minuti, arricchiti di biotite, o di clorite, di anfibolo, di epidoto (Vetta d'Italia, Forcella di Rio Torbo, ecc.); sono alternanze ripetute e concordanti di differenziazioni aplitiche e lamprofiriche (Val delle Frane); sono anche lenti o filoni strati di *amfiboliti gneissiche* compatte (sotto Cima di Campo), *scisti amfibolico cloritici* (Costone Val delle Frane), di *amfiboliti epidotiche*, con feldispato di tipo oligoclasico-andesinico, zonato (a sud di Vetta d'Italia).

Parascisti della serie del Gran Veneziano. — Nel gneiss dei Tauri, sulle Alpi Aurine, si trovano pure varie intercalazioni di *filladi sericitiche*, di *micascisti cloritici*, di *paragneiss* molto ricchi di biotite.

Si tratta in genere di banchi poco potenti e concordanti con quelli, quasi verticali, dell'ortogneiss. Per alcune almeno di queste pararocce si possono trovare all'esame microscopico (soprattutto per la presenza di elementi accessori comuni nell'ortogneiss), indizi che permettano l'ipotesi di una derivazione secondaria dalla stessa massa dei Tauri.

Più potente intercalazione, è la massa di parascisti, che si incontra sulla cresta di Rio Torbo, poco a sud dello stesso Rifugio Vittorio Veneto (Sasso Nero). In questa si alternano straterelli di *filladi sericitiche* e di *micascisti cloritici a cianite*, che rivestono lenti di quarzite, presso le quali si concentra la cianite. Da notare la mancanza di epidoto, mentre si osservano, come accessori, apatite, zircone e rutilo.

Quasi al limite meridionale della massa dei Tauri, nella « facies » periferica muscovitica, scistosa od ochiadina, presso lo sbocco dei valloni di Rio Rosso, Rio Franco, Rio del Conio, si trovano banchi di *calcarei saccaroidi*, accompagnati da *quarziti* fortemente laminate con rari, finissimi straterelli lucenti di sericite. Ad essi si associano anche sottili banchi di *filladi quarzifere carboniose*, o di *micascisti sericitici*. La più completa di questa serie di intercalazioni, si può osservare presso l'Alpe Franco, sopra S. Giovanni, là, dove il torrente balza, con bella cascata, dal gneiss dei Tauri in un potente banco di calcare saccaroide e prosegue in una gola a rapide fra le quarziti e le filladi quarzifere lucenti, biancastre, giallognole, grige.

Anche la *Forcella del Picco*, che trovasi all'origine di Valle Aurina, sulla cresta fra la Vetta d'Italia e il Picco dei Tre Signori, è incisa in corrispondenza di intercalazioni filladiche e calcaree, al limite meridionale della massa del gneiss dei Tauri.

I roccioni a nord della Forcella sono costituiti da lastroni dell'ortogneiss, che si ergono in banchi molto raddrizzati (inclin. 80° circa a S; direz. ENE — OSO), con facies scistosa, alternatamente aplitico-muscovitica, cloritica, biotitica, epidotica. Fra questi banchi si nota, pochi metri a N della Forcella una intercalazione di un *paragneiss* grigio micaceo-cloritico-granatifero, cosparso di sostanza carboniosa. Sul passo della Forcella affiorano *scisti lucenti biancastri*, in alternanza con *micascisti filladici carboniosi*.

Immediatamente a S della Forcella, fra il passo e la quota 2720, si trovano, in fitta alternanza coi micascisti, *banchi gneissici* con facies aplitico-muscovitica, o biotitico-epidotica, talora con orneblenda e granato, che ritengo riferibili ancora all'ortogneiss dei Tauri. Fra queste rocce s'intercalano, in concordanza, anche lame di *calcari triasici*, che in alcuni punti sono ridotti a *calcefiri* (con elementi di clinozoisite, quarzo, albite, actinoto, biotite) e in altri fanno passaggio a forme di *parascisti anfibolici*, di *epidositi*, di *prasiniti*, ricche di calcite. Troviamo qui forme di contatto primario della massa intrusiva dei Tauri, o non piuttosto ci troviamo in presenza di contatto e metamorfismo tettonico, con ripetizioni a scaglie delle due formazioni, orto e para, dei Tauri e del Picco? È la seconda ipotesi che mi sembra più attendibile pur non escludendosi che il fenomeno tettonico possa aver in parte mascherato anche un originario contatto eruttivo. E un'altra domanda s'impone? Troviamo qui serrati, assieme a lame di trias e pretriasico, anche lembi ridottissimi nelle formazioni ofiolitiche mesozoiche, che dominano più ad occidente, nella serie dei calcescisti, sul versante meridionale di Valle Aurina? Anche ciò sembra probabile.

È questo, ad ogni modo, uno dei punti più complessi ed importanti per la geologia della regione e che richiederà quindi una illustrazione ben più completa e dettagliata di quanto non si possa fare ora, in queste brevi note.

b) *Serie del Picco dei Tre Signori*. — A sud della regione di Forcella del Picco ora descritta e su tutto il versante sinistro di Valle Aurina fino alla confluenza di Val del Vento, si sviluppa, con notevole potenza, la serie di *paragneiss* e *micascisti* del Picco dei Tre Signori, con ripetute intercalazioni di banchi calcarei e di anfiboliti.

La roccia predominante su tutta la cresta che sale da quota 2720 di Forcella fino alla cima del Picco è un *paragneiss albitico*, *scistoso*, caratterizzato dal fatto di essere molto *micaceo*, con prevalenza di muscovite su biotite, *granatifero* e *tormalinifero*, di contenere quasi sempre diffusa un po' di sostanza carboniosa, e di presentare spesso, sulle superfici lucenti bianco-grigiastre, parallele alla scistosità, poche chiazze verdognole dovute a maggiori lamelle di clorite. Da questo *paragneiss* si passa gradatamente a tipi simili ai *micascisti muscovitici*, più o meno *granatiferi* e *tormaliniferi*, più o meno *cloritici*. Da notare, in tutte queste rocce, la mancanza di epidoto, così caratteristico nei gneiss dei Tauri, dove è invece affatto eccezionale e localizzata la presenza di tormalina.

Come intercalazioni troviamo: strati di *filladi* micaceo-quarzifere, grige, carboniose e tormalinifere; banchi di *calcari saccaroidi* e lenti di *calcari dolomitici* con rivestimenti di *scisti cloritici* e *talcosi*; lenti di *amfiboliti prasinitiche*, granatifere, verde scure e molto compatte.

Anche presso la cima del Picco dei Tre Signori (paragneiss cloritico-granatifero a due miche), a quota 3418, ho ritrovato rocce verdi, rappresentate da *amfiboliti granatifere* e da *prasiniti orneblendico-biotitiche* (ad albite).

Più caratteristica la massa verde nerastra, compattissima di *amfibolite granatifera glaucofanica*, che costituisce la quota 3335 della cresta orientale del Picco, fra il Ghiacciaio di Umbal e la Vedretta Lana. Interessante è la presenza, in mezzo al feltro compatto di orneblenda, clorite e biotite, di maggiori elementi di granato e di amfibolo sodico glaucofanico, poco ferrifero (*gastaldite*), circondato da un bordo di numerosi, minuti elementi di orneblenda verde. Questo tipo di roccia ricorda in modo singolare certe amfiboliti granatifere glaucofaniche osservate e descritte da G. B. Dal Piaz per la regione della Grivola⁽¹⁾.

Più a SO, presso Bocchetta Val del Vento di dentro, prevalgono forme di micascisti lucenti muscovitici, tormaliniferi, con fenomeni marcatissimi di cataclasi nei granuli di quarzo, e ricompaiono i calcari e le prasiniti orneblendiche-epidotiche a biotite.

È da notare ancora, che a poche centinaia di metri a NE della stessa Bocchetta, presso quota 2899 ho trovato un piccolo affioramento di *gneiss occhiadino*, a due miche, albitico, con ghiandole maggiori di un aggregato d'ortoclasio, albite e quarzo. Per questa roccia lo studio di E. Semerano (op. cit.) ha rivelato una composizione di ortogneiss granitico.

Un tipo analogo di gneiss occhiadino ricompare a SO del Rifugio Gogo Lungo, fra i roccioni che dominano il fianco destro del Ghiacciaio della Rossa, nella regione cioè dove la serie del Picco si protende nella serie mesozoica di valle Rossa con numerose digitazioni e ripetute alternanze, che offrono un particolare interesse per la tettonica della regione.

A sud dei *calcescisti* di Valle Rossa, alternanti con questi, troviamo infatti banchi di *micascisti muscovitici* con sostanza carboniosa. Segue una roccia chiara, muscovitica, con facies di *ortogneiss*, per la quale G. Semerano ha determinato la composizione di un granito alcalino, sodico. S'incontrano poi *micascisti* e *paragneiss* cloritici e tormaliniferi con *filladi quarzifere carboniose a granato*. Dopo banchi di *calcari dolomitici* triasici e di *quarziti*, ricompaiono le formazioni ofiolitiche mesozoiche, con *prasiniti* a facies epidotica, amfibolica, o cloritica, e si riprende infine la serie dei *paragneiss* del Picco. Qui si nota l'affioramento del ricordato gneiss occhiadino.

Come per la Forcella del Picco, così anche per questa complicata regione di Gogo Lungo, è necessario naturalmente uno studio di grande dettaglio.

(1) DAL PIAZ G. B., *Geologia della Catena Herbetel-Grivola-Grand Nomenon* in « Mem. Ist. Geologico di Padova », vol. VII, Padova, 1928.

Biologia. — *Durata di sopravvivenza dei vari tessuti di embrioni di pollo nei quali l'incubazione fu interrotta* ⁽¹⁾. Nota di L. BUCCIANTE, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. LEVI.

È di dominio comune che, se l'incubazione delle uova di pollo viene interrotta per un periodo di tempo relativamente lungo e le uova sono successivamente riportate nell'incubatrice, lo sviluppo o non riprende affatto o procede in modo abnorme. Io stesso ho constatato questo dato di fatto; se le uova vengono tolte dall'incubatrice e tenute per più di 4-6 ore alla temperatura ambiente e poi riportate a quella d'incubazione, gli embrioni regrediscono; lo stesso si verifica se le uova sono conservate per breve tempo in ghiacciaia.

D'altra parte molteplici osservazioni dimostrano che organi isolati o frammenti di organi anche di animali a sangue caldo, mantenuti per lungo tempo a temperatura ambiente od a bassa temperatura, conservano le manifestazioni vitali (contrattilità, movimento di ciglia vibratili). Warren Lewis e Mc Coy dimostrarono col metodo della colorazione vitale col Rosso Neutro su frammenti di alcuni organi di Ratto che singoli elementi (macrofagi, cellule dell'epitelio renale) si palesano viventi sin 240 ore dopo la morte dell'organismo. Bianchini ed Evangelisti hanno studiato sui tessuti fetali di Cavia, Coniglio e Gatto per quanto tempo essi sopravvivano alla morte dell'organismo. Gli AA. si servirono del metodo delle colture in vitro fondandosi sulla presenza di elementi migrati per giudicare della vitalità del frammento in esame; essi trovarono che il periodo di sopravvivenza è diverso, ma assai breve per tutti i tessuti; il massimo è raggiunto dagli elementi epiteliali della cornea (72 ore), mentre il cuore ed il fegato non danno segni di migrazione oltre 26 ore dalla morte. Gandolfo ha confermato questi dati con esperienze su animali adulti.

Sopra un materiale molto diverso Albert Fischer dimostrò una sopravvivenza anche più lunga. Culture di tessuti di embrioni di pollo cresciute per 24 ore a 39°, se lasciate per oltre un mese a temperatura ambiente (circa 20°) sopravvivono, e riportate in condizioni adatte si accrescono ulteriormente.

Esiste adunque una divergenza fra questi due ordini di fatti; sembra che l'embrione integro non sia suscettibile di ulteriore sviluppo, mentre i suoi tessuti, o più esattamente alcuni di essi sopravvivono.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto anatomico della R. Università di Torino.

(2) Nella seduta 1° giugno 1929.

Io ho voluto rintracciare se i tessuti dell'embrione, di cui fu interrotta l'incubazione, e che è incapace di ulteriore sviluppo, si dimostrino, e per quanto tempo, sopravviventi; mi sono servito della tecnica seguente: interrompevo lo sviluppo dell'embrione, mantenendo uova, già incubate per un periodo di tempo vario, a bassa temperatura oppure a temperatura ambiente, e successivamente ricercavo quali organi dell'embrione o quali tessuti erano tuttora viventi e quali no; il mezzo più esatto e più sicuro per saggiare la persistenza della vitalità da parte degli organi dell'embrione era evidentemente quello di coltivarli «in vitro»; ed è questo il metodo a cui mi attenni. In tal caso adunque il metodo della coltivazione dei tessuti doveva servire di reattivo biologico per rintracciare la persistenza della vitalità da parte dei singoli elementi costitutivi dell'embrione. La sola ricerca compiuta con questo metodo è quella di Strangeways, il quale ricorda fugacemente di aver avuto delle colture viventi da embrioni prelevati dall'uovo e posti in ghiacciaia per 14 giorni. L'A. però non dà alcuna notizia sulla natura dei tessuti coltivati, nè sui caratteri delle colture.

Mi son servito per le mie ricerche di embrioni di pollo da 6 a 12 (la massima parte 7-8) giorni d' incubazione; dopo aver riconosciuto in modo certo nelle uova, all'esame per trasparenza, la presenza dell'embrione vivo ponevo le uova stesse in ghiacciaia oppure in una cassetta alla temperatura del laboratorio (15-20°). Dopo un numero vario di giorni, limitato nelle prime esperienze e poi via via maggiore, aprivo le uova e prelevavo gli embrioni, eseguendo colture dei vari organi colla tecnica abituale del nostro Istituto. Le uova già poste in ghiacciaia venivano sempre gradualmente riportate alla temperatura ambiente, e le colture non venivano fatte prima di 12-24 ore dal momento in cui le uova erano tolte dalla ghiacciaia; è ben noto infatti che il disgelo brusco uccide inevitabilmente i tessuti.

Fino ad ora ho coltivato organi di 178 uova mantenute in maggioranza in ghiacciaia per vario periodo di tempo; da ciascun embrione furono allestite numerosissime culture. Dirò subito che il comportamento dei vari organi è molto diverso, ed ha anche influenza il fatto che l'embrione abbia subito la temperatura di ghiacciaia o sia stato lasciato a temperatura ambiente.

Gli organi coltivati furono i seguenti: cute, cuore, fegato, mesonefro, milza, muscoli scheletrici, vasi, meningi, amnios, mesencefalo. I risultati ottenuti risultano dalla tabella annessa, nella quale è indicato quale sia il massimo periodo di permanenza dell'embrione in ghiacciaia od a temperatura ambiente, dopo di cui frammenti dei diversi organi posti in coltura abbiano dato migrazione e figure mitotiche, dimostrandosi così viventi e capaci di ulteriore accrescimento.

Organi coltivati		Ghiacciaia (0°-1°)	Temperatura ambiente (15°-20°)
Cute . . .	epitelio	28 giorni	24 giorni
	fibrociti	28 »	24 »
Meninge		25 »	21 »
Muscoli scheletrici (mioblasti)		18 »	21 »
Amnios . . .	epitelio	17 »	7 »
	cellule muscolari	10 »	5 »
Milza . . .	fibrociti	12 »	6 »
	istiociti, leucociti	5 »	2 »
Cuore		10 »	5 »
Fegato . . .	endoteli	10 »	5 »
	cellule epatiche	5 »	2 »
Mesonefro . .	fibrociti	10 »	5 »
	epiteli	5 »	2 »
Mesecefalo . .	accrescimento di neuriti	10 »	5 »
	migrazione di neuroblasti	10 »	5 »
Aorta e arteria polmonare		10 »	5 »

È evidente dai dati suesposti che esistono notevoli differenze di comportamento fra i vari organi: la cute infatti si dimostra sopravvivenente e capace di essere coltivata ancora dopo 28 giorni di permanenza dell'embrione in ghiacciaia e dopo 24 giorni a temperatura ambiente, mentre per le cellule epatiche e per le cellule dei tubuli del mesonefro, come pure per gli elementi istiocitari e per i leucociti della milza non si dimostrano segni di vita oltre il 5° giorno di ghiacciaia od il 2° giorno a 15-20°.

In più i diversi elementi costitutivi di uno stesso organo non hanno tutti eguale capacità di sopravvivenza: mentre per la cute dopo 28 giorni dacchè l'embrione era stato posto in ghiacciaia, e dopo 24 giorni a 15-20°, ho ottenuto colture con larghe lamine epiteliali e pure con estesa migrazione di fibrociti; per converso nel fegato, nel mesonefro, nella milza, nell'amnios, i vari tipi cellulari godono di un diverso grado di sopravvivenza. È soprattutto caratteristico quanto si osserva per le colture di milza: frammenti di quest'organo, coltivati dopo che l'embrione fu tenuto in

ghiacciaia per un tempo superiore a 5 giorni od a temperatura ambiente per più di 2 giorni, in luogo di presentare l'alone tanto caratteristico (soprattutto nel primo e secondo passaggio) delle normali culture di milza, formato da una folla densa di linfociti, leucociti e soprattutto istiociti, non mostrano che una delicata raggiera di elementi affusati, aventi i caratteri dei comuni fibrociti e qualche cellula molto allungata ed appiattita, che ritengo di origine endoteliale; mi sembra lecito dedurne che soltanto questi ultimi elementi siano stati capaci di sopravvivenza.

Parimenti nelle colture di fegato e di mesonefro non si ottiene migrazione di lamine epiteliali oltre 5 giorni di permanenza dell'embrione in ghiacciaia o al di là di due giorni a temperatura ambiente, mentre estesa migrazione di endoteli nelle prime e di fibrociti nelle seconde si osserva ancora dopo 10 giorni di ghiacciaia e rispettivamente 5 giorni a temperatura di 15-20°.

Si rileva inoltre dai miei risultati che la permanenza dell'uovo in ghiacciaia permette una durata nella sopravvivenza dei suoi tessuti notevolmente maggiore che a temperatura ambiente. Tale differenza è meno spiccata per la cute, mentre è assai più forte per il cuore, fegato, amnios, mesencefalo, ecc., che a temperatura ambiente sopravvivono circa la metà tempo consentito dalla temperatura di ghiacciaia. Una piccola eccezione è rappresentata a tal riguardo dai mioblasti di frammenti di muscoli scheletrici, divergenza che ricerche ulteriori, che ho in corso, potranno meglio spiegare.

Dalle colture allestite con tutti i tessuti menzionati ho eseguito larga serie di trapianti successivi che, salvo alcune eccezioni di cui dirò, si sono dimostrati regolarmente viventi.

Va però notato che quanto minore è la permanenza degli embrioni in ghiacciaia od a temperatura ambiente, tanto più rigogliose sono le colture che se ne ottengono, e per converso al limite estremo che ho riferito per i vari tessuti, parecchi espianti non manifestano attività di sorta, mentre la maggior parte di-essi presenta un alone piuttosto scarso con elementi distribuiti a larghi intervalli, con rare mitosi: i trapianti di queste colture mi hanno dato frequenti insuccessi. Mi sembra da ciò poter arguire che la capacità di sopravvivenza vari oltre che per gli elementi di diverso tipo di un dato organo, anche per quelli di uno stesso tipo. Fanno in certo modo eccezione a tale comportamento le colture di cute, che sino all'estremo limite esposto nella tabella, hanno mostrato rigoglioso accrescimento; queste stesse colture erano sempre trapiantabili con successo.

La rapidità con cui dal frammento espiantato si effettua la migrazione presenta pure qualche diversità in rapporto con la permanenza più o meno lunga degli embrioni nelle condizioni ambientali abnormi; e precisamente quanto più tale permanenza si protrae, con tanta maggior lentezza gli elementi fuoriescono dall'espianto nel coagulo, sì che molte volte nelle prime

24 ore non si ritrovano che scarsissimi elementi, mentre pure essi sono assai numerosi alla 48^a ora di coltura ed oltre; credo che questo fatto sia da attribuire, oltre che alla morte di una parte degli elementi degli espianti, alla circostanza che un numero di cellule molto maggiore di quello solito, per aver subito i tessuti il raffreddamento e l'allontanamento dalle condizioni abituali di vita, risenta dei danni inevitabili nelle manipolazioni tecniche per la preparazione dei frammenti. Mi è risultato infatti che i tessuti degli embrioni tenuti per un periodo prolungato in ghiacciaia od a temperatura ambiente perdono molto della loro consistenza e si spappolano con facilità. Il tessuto nervoso risente in alto grado le influenze dannose suddette; dopo 6 giorni dacchè l'embrione fu posto a 15-20° e dopo 12 giorni di ghiacciaia è molto difficile il trasferire i frammenti di mesencefalo sul porta-oggetti perchè essi, quasi immancabilmente, si disgregano alla superficie del coltellino o sulla goccia di plasma, in una poltiglia formata da minutissimi detriti.

Per quanto riguarda i caratteri citologici delle cellule migrate, mi è sembrato che mentre un breve periodo di permanenza degli embrioni in ghiacciaia od a temperatura ambiente non abbia influenza sull'aspetto delle cellule, che si dimostrano del tutto normali, ciò non può più dirsi, quando tale periodo si fa maggiore: allora assai presto nelle cellule migrate si scorgono grossi accumoli di granuli e di vacuoli e molte gocce di grasso.

Anche a tal riguardo i frammenti di cute hanno mostrato una speciale resistenza: in culture di 48 ore da embrioni mantenuti per 27 giorni in ghiacciaia e per 21 giorni a 15-20°, ho visto aloni molto estesi di fibrociti e larghe membrane di cellule epiteliali; gli uni e le altre erano integri o quasi.

Ulteriori problemi, che si affacciano, ed in particolare se il grado di resistenza vari in relazione al grado di sviluppo dell'embrione, sono in corso di studio. Mi sono limitato attualmente alla pura esposizione dei fatti, che nella loro essenza dimostrano quanto segue: se lo sviluppo di un'embrione fu interrotto col portarlo a temperatura più bassa di quella normale d'incubazione, il suo sviluppo, com'era già noto, non riprende ulteriormente, ma i suoi tessuti non solo sopravvivono, ma riportati in condizioni adatte sono capaci di accrescimento ulteriore; il fatto più importante da me posto in luce è che il periodo di sopravvivenza dei vari elementi costitutivi dell'embrione varia molto.

Ricerche ulteriori dovranno stabilire se questa dissociazione nella persistenza della vitalità da parte dei vari elementi costitutivi dei tessuti possa essere in nesso causale col costante arresto nello sviluppo e nell'accrescimento degli embrioni, il cui sviluppo fu per qualche tempo interrotto.

Biologia. — *Correlazione di numero e di grandezza di singoli tipi di neuroni retinici in animali di differente mole somatica* ⁽¹⁾.
Nota di L. BUCCIANTE e di E. DE LORENZI, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. LEVI.

È nozione ben acquisita che le cellule nervose multipolari (o gangliari) della retina sono in connessione coll'intermezzo delle cellule bipolari con le cellule dei coni e dei bastoncelli. Ed è pure dimostrato che, se si accetta la zona corrispondente alla « macula lutea », a ciascuna delle dette cellule multipolari, formanti un unico piano e tra di loro alquanto distanziate, viene a far capo un numero più o meno grande di cellule dei coni e bastoncelli, i nuclei delle quali sono assai fittamente assiegate e si trovano a costituire parecchi piani sovrapposti.

Non è stato tuttavia studiato finora quale rapporto numerico esista fra le cellule multipolari e quelle dei coni e bastoncelli e mancano pure ricerche che ci informino se tale rapporto sia identico o si modifichi nei diversi animali in rapporto alla mole somatica, dato che negli animali più grossi la superficie retinica è manifestamente più estesa e quindi sono assai più numerose sia le cellule dei coni e dei bastoncelli che le cellule multipolari.

Dalle ricerche di Levi e dei suoi allievi è stato dimostrato in modo certo che la grandezza delle cellule nervose varia in funzione diretta della mole corporea; questo dato di fatto è convalidato anche per gli elementi retinici dai risultati di Krause e di altri Autori, dai quali risulta che la grandezza delle cellule multipolari è maggiore negli animali di gran mole; orbene, per tal fatto, una volta determinato quale rapporto numerico esista fra le cellule sensoriali e le cellule multipolari e precisato come tale rapporto si comporti negli animali di diversa mole somatica, un altro problema si prospetta, ed è quello di stabilire se esista una relazione fra il comportamento del rapporto suddetto e le variazioni di volume delle cellule multipolari negli animali di diversa mole.

Abbiamo scelto quale materiale di studio occhi di animale di mole somatica molto diversa e cioè da una parte il *Bos taurus* e dall'altra il *Mus musculus*.

Per quanto riguarda il bue abbiamo eseguito preparati di retina isolata con molta accuratezza dalla corioidea; alcuni frammenti furono fissati in Flemming, inclusi in celloidina-paraffina e colorati; di tali preparati ci

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto anatomico della R. Università di Torino.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1929.

siamo serviti soprattutto per il conteggio degli elementi; d'altra parte per studiare la forma e per poter calcolare la superficie esatta delle cellule multipolari su altri frammenti di retina abbiamo eseguito il metodo di Cajal colle modificazioni consigliate per lo studio della retina⁽¹⁾.

Per quanto riguarda il topo, essendo praticamente impossibile di ottenere buoni preparati dalla retina isolata, abbiamo lavorato su occhi « in toto »; essi vennero fissati in Flemming, inclusi in celloidina ed in celloidina-paraffina e colorati; alcuni occhi furono colorati col metodo di Cajal. In tutti gli occhi di topo demolivamo piuttosto largamente la superficie anteriore, cercando anche di portar via il cristallino, perchè ciò ci ha dato il miglior risultato, sia per la fissazione e per l'affettamento, che per l'impregnazione col metodo di Cajal. Sarebbe stato certamente utile ottenere delle fette perfettamente parallele alla superficie della retina, che ci fornissero la possibilità di seguirne l'uno dopo l'altro i vari strati costitutivi, e di poter calcolare così in modo diretto quale sia il numero dei coni e bastoncelli pertinenti alle cellule gangliari di una data area. Vi si oppone però una difficoltà pratica, il pieghettamento molteplice che il foglietto retinico dell'occhio di bue subisce all'atto della fissazione e soprattutto nei successivi passaggi e che rende impossibile anche per un'area assai piccola l'affettare tutti gli strati con un taglio perfettamente parallelo alla superficie. Perciò siamo ricorsi abitualmente a fette di profilo in cui sono colpiti contemporaneamente tutti gli strati dell'organo. Per calcolare il numero delle cellule visive, sia per il bue che per il topo, abbiamo eseguito il conteggio dei loro nuclei, procedimento di certo assai più agevole ed esente da errori di quello del computo dei coni e bastoncelli medesimi.

Le fette tagliate perpendicolarmente alla superficie servono molto bene allo scopo di delimitare singole aree di retina e permettono in tal modo di riferire alle cellule multipolari ritrovate in una data area tutti i nuclei delle cellule sensoriali situati entro i limiti di quell'area medesima. Le fette eseguite per i conteggi avevano lo spessore di 10μ , sia per l'uno che per l'altro animale.

Dobbiamo ora notare che mentre i nuclei dei coni e dei bastoncini (granuli esterni), sia per il bue che per il topo, rientrano per il loro diametro nello spessore di una fetta, diversamente avviene nei riguardi delle cellule gangliari: mentre nel topo esse risultano quasi sempre comprese col loro massimo diametro nello spessore di una fetta (10μ), nel bue ogni cellula multipolare può di regola essere seguita in tre fette successive. A riguardo del bue ci è sembrato perciò erroneo attribuire alle cellule multipolari comprese in una data fetta soltanto i granuli della fetta medesima, in quanto certamente a quelle fanno capo anche parte dei granuli situati

(1) La reazione migliore si è avuta immergendo direttamente i pezzetti di retina di bue, e così pure gli occhi di topo « in toto », in una soluzione al 2% di AgNO_3 in H_2O , oppure in una soluzione di AgNO_3 al 2% in alcool a 70% (formula di Giulio Ascoli).

nelle fette contigue. Onde evitare il più possibile cause di errore abbiamo preferito perciò eseguire un gran numero di conteggi su gruppi di fette disposte in serie, sì da poter attribuire a *tutte* le cellule multipolari di quelle fette susseguentesi serialmente, *tutti* i granuli in esse ritrovabili. E sempre allo scopo di evitare ripetizioni erronee nei conteggi dei singoli elementi, abbiamo preferito da un canto ricostruire graficamente tutte le cellule gangliari (il che ci ha chiaramente persuaso dell'essere esse comprese nel bue quasi sempre in tre sezioni successive e nel topo in una sola); dall'altra abbiamo disegnato coll'aiuto di un oculare a reticolo tutti i granuli, non tenendo conto di quelli appena sfiorati dal taglio, sicuramente annoverati nel conteggio delle sezioni contigue.

Il nostro studio si è limitato per il momento a quella parte della retina compresa nel terzo posteriore dell'occhio, escludendone però la regione maculare, il cui comportamento è tutto speciale; di essa, come della regione della retina più prossima all'equatore, ci occuperemo in appresso.

Esponiamo ora il procedimento ed i risultati dei nostri conteggi:

In 18 fette di retina di bue (4 gruppi rispettivamente di 4, 4, 5, 6 fette in serie) abbiamo ritrovato previa ricostruzione grafica un numero totale di 60 cellule gangliari; notiamo che abbiamo scelto per ciascuna fetta una determinata zona entro i limiti della quale le cellule gangliari venivano ricostruite e conteggiate: naturalmente per *tutte* le fette di un dato gruppo i limiti della zona in esame erano eguali, i punti di « repere » essendo rappresentati generalmente da un vaso con evidenti caratteristiche di calibro o di decorso. Il numero totale dei granuli situati entro i limiti di quelle stesse zone e che noi abbiamo disegnato e conteggiato coll'aiuto dell'oculare con reticolo ⁽¹⁾, è risultato di 27.640.

Perciò nella retina di bue il rapporto fra il numero dei coni e dei bastoncelli ed il numero delle cellule gangliari è

$$\frac{27624}{60} = 460,4,$$

vale a dire per ogni cellula multipolare esistono nel bue 460 cellule dei coni e bastoncelli, che ad essa fanno capo.

Nel topo con lo stesso procedimento abbiamo contato in 24 fette (5 serie rispettivamente di 4, 4, 5, 5, 6 fette) 288 cellule gangliari e 25.656 granuli; il rapporto fra gli uni e gli altri elementi è dunque

$$\frac{25.656}{288} = 89,08,$$

(1) Il margine laterale del reticolo stesso collocato a prolungamento del punto di repere posto dall'uno e dall'altro lato nel piano delle cellule multipolari ci permetteva, a riguardo dei nuclei dei coni e dei bastoncelli, una demarcazione molto precisa dei limiti della zona in esame.

vale a dire per ogni cellula multipolare esistono nel topo 89 cellule dei coni e bastoncelli, che con quella contraggono rapporto.

Prendendo sia per il bue che per il topo un'unità di superficie di egual estensione abbiamo contato quanti granuli vi siano contenuti, sia nell'uno che nell'altro animale; abbiamo ripetuto tale conteggio per 60 di tali superfici e ne abbiamo dedotto una cifra media.

La superficie unità era rappresentata dall'area compresa in 30 quadratini dell'oculare 2 con reticolo, su di un campo microscopico fornito dall'obbiettivo 1/12 Koristka ed è risultata pari a μ^2 1687. Nel bue la media dei granuli in quella contenuti è pari a 117, nel topo a 115.8.

Da comuni preparati colorati con l'ematossilina ferrica abbiamo disegnato con la camera lucida 120 cellule gangliari di bue; misuratane la superficie col planimetro polare, essa in media è risultata di μ^2 608.

Da frammenti di retina trattati col metodo di Cajal e tagliati parallelamente alla superficie (è noto che l'arborizzazione dendritica di tali cellule si espande prevalentemente in tal senso) 25 cellule ottimamente impregnate furono disegnate con la camera lucida e poi misurate col planimetro polare: la superficie media di esse è risultata di μ^2 2165.

Nel topo la misurazione di 120 cellule gangliari colorate con l'ematossilina ferrica ha dato una media di μ^2 109; 28 cellule gangliari coi rispettivi dendriti disegnati da preparati col metodo Cajal misuravano in media una superficie di μ^2 440.

Dai dati suesposti risulta innanzi tutto con somma evidenza che il rapporto numerico fra cellule gangliari e cellule visive è assai diverso nel bue in confronto al topo: nella retina del bue ad ogni cellula multipolare fanno capo 460 cellule dei coni e bastoncelli, nel topo soltanto 89: ogni cellula multipolare di bue ha rapporto, adunque, con un numero di cellule sensoriali 5 volte più grande che nel topo (5.16).

Il conteggio dei granuli esterni (nuclei dei coni e bastoncelli) in superfici di egual estensione dà invece una cifra press'a poco eguale nei due animali: ciò sta ad indicare che se nel bue in confronto al topo esiste un numero assoluto di cellule visive molto maggiore, il numero relativo di esse rispetto alla superficie retinica è sensibilmente costante nei due animali, e da ciò risulta in modo indubbio che la diversità del rapporto numerico fra cellule multipolari ed elementi visivi nei due animali dipende dal fatto che nel bue il numero delle cellule gangliari, indubbiamente maggiore in via assoluta, è invece minore a quello del topo, se considerato relativamente alla superficie retinica ⁽¹⁾; dato che le cellule visive si trovano in un numero relativamente eguale nei due animali, ogni cellula multipolare nel bue deve dunque necessariamente contrarre rapporto con un numero maggiore di elementi visivi.

(1) Anche ad un semplice esame dello strato delle cellule multipolari si può rilevare che nel bue esse si trovano scaglionate a distanza molto maggiore che nel topo.

Le cellule multipolari del bue sono peraltro assai più voluminose di quelle del topo: la misurazione della superficie delle prime e delle seconde trattate col metodo di Cajal, ha dato una media di μ^2 2165, rispettivamente di μ^2 440; quella dei pirenofori è risultata di μ^2 608, rispettivamente μ^2 109. Il rapporto che esiste tra la superficie media delle cellule multipolari nel bue e quella delle medesime nel topo è dunque pari a 4.92 (5.57 se si raffrontano le superfici dei soli pirenofori).

È ora assai interessante il fatto che tale rapporto è quasi identico a quello che intercede fra le cellule multipolari nei due animali, riguardo al numero delle cellule vive che ad esse fanno capo, rapporto che sopra abbiamo indicato pari a

$$5.16 \left(\frac{460.4}{89.08} \right).$$

Se d'altra parte calcoliamo nella retina di bue quale rapporto esista fra la superficie media di una cellula multipolare ed il numero medio delle cellule sensoriali ad essa pertinenti, noi troviamo che tale rapporto è uguale a

$$0.21 \left(\frac{460.4}{2165} \right); \text{ lo stesso rapporto nel topo è pari a } 0.20 \left(\frac{89.08}{440} \right).$$

Appare dunque evidente che nel bue in confronto del topo è molto maggiore il numero delle cellule vive, che fanno capo ad una cellula gangliare ed è pure assai più grande il volume di ogni cellula gangliare medesima; è da notarsi che in questi due animali di così differente mole somatica, essendo il volume delle cellule gangliari rispettive correlativo alla mole, mentre la grandezza delle cellule vive è uguale nei due casi, il rapporto, che intercede tra volume della cellula gangliare e numero delle cellule vive ad essa pertinenti, è approssimativamente lo stesso.

Istogenesi. — *Ricerche sulla Istogenesi delle isole del Langerhans in « Ovis aries L. ».*⁽¹⁾ Nota di G. LENTATI, presentata ²⁾ dal Socio E. GIACOMINI.

In una Nota precedente⁽³⁾ ho esposto i risultati di ricerche compiute sul valore morfologico delle isole del Laguesse e dei complessi simpatici-insulari, e sui rapporti genetici che dette isole presentano con quelle del Langerhans, in materiale fetale ed immediatamente post-natale di *Cavia cobaya*, *Mus musculus* e *M. decumanus*. Ho in seguito esteso tali osservazioni in *Ovis aries*, prendendo inoltre in considerazione il problema dell'esistenza di isole del Langerhans che con quelle del Laguesse non presentassero alcuna dipendenza genetica.

Riassumo in questa Nota le ricerche eseguite sul montone, riserbandomi di ampiamente descriverle, unitamente a quelle compiute sui roditori, in un prossimo lavoro in cui pure esporrò i risultati dello studio sull'ulteriore sviluppo delle isole del Langerhans.

È stato Camphenhout a mettere in evidenza come nel montone le isole del Laguesse siano inizialmente costituite da cellule piccole, che solo in seguito, « ipertrofizzandosi » vengono ad assumere il caratteristico aspetto: nucleo grosso e chiaro, citoplasma voluminoso e fortemente colorabile (cellule torbide).

In feti di 10 cm. ho trovato le isole del Laguesse già da tempo perfettamente differenziate. Come ho già descritto nei roditori, anche nel montone le più voluminose, ampiamente circondate da connettivo, hanno contratto rapporti con gangli simpatici, e tali rapporti sono particolarmente intimi ed evidenti in questa specie, mentre le isole più piccole, circondate dagli acini, sono lontane da elementi gangliari nervosi. Tutte queste formazioni insulari si mantengono per un determinato periodo di vita fetale coi caratteri strutturali sovra descritti. In feti già assai sviluppati e nei neonati il volume e la colorabilità del citoplasma degli elementi costituenti diminuiscono leggermente.

Tutte le isole del Laguesse, indipendentemente dai loro rapporti topografici, subiscono questa trasformazione, che si verifica colle medesime modalità, se non colla medesima imponenza, di quella già descritta nei roditori. Anche nel montone si ha quindi, sebbene entro limiti assai più ristretti, una modificazione dell'isola del Laguesse verso il tipo dell'isola del

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Anatomia comparata della R. Univ. di Torino.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1929.

(3) Questi « Rendiconti », vol. VII, f. II, 1928.

Langerhans. In un montone di un mese infatti tanto le isole pure, quanto quelle che concorrono a formare i complessi simpatici-insulari, sono, per intimi caratteri strutturali, delle vere isole del Langerhans.

Non è però questo l'unico processo formativo delle isole secondarie.

Mentre si compie l'evoluzione del tessuto pancreatico esocrino (che iniziata in feti di 15-20 cm., continua fin nell'adulto) nuove isole endocrine si formano in modo assolutamente indipendente dalle isole del Laguesse. Come pure Campenhout aveva notato, esse presentano inizialmente elementi piccoli, che evolvendosi in seguito, costituiscono nel pancreas dell'individuo adulto quelle entità endocrine che il Laguesse aveva definito come uniche isole del Langerhans. Nascono nelle regioni degli acini esocrini, nelle gemme apicali delle più lontane ramificazioni del tubo pancreatico primitivo, le quali, gradualmente evolvendosi, danno origine ai dotti escretori, a nuovi elementi endocrini ed esocrini. Sono evidenti i rapporti di tali isole coi dotti escretori, specialmente nei giovani feti; gli elementi cellulari che li costituiscono presentano inizialmente il medesimo aspetto delle cellule dei dotti, mentre sono del tutto differenti dalle cellule acinose. Le une infatti sono piccole, scure, con scarso citoplasma, le altre molto voluminose, dal citoplasma abbondante, con nucleo chiaro, grosso e leggermente eccentrico. Il tessuto insulare e l'acinoso sono sovente compenetrati, senza che mai si possa osservare continuità fra l'uno e l'altro essendo gli elementi rispettivi ben distinguibili, mentre appare chiarissima la piena simiglianza fra le cellule dei dotti e quella delle isole.

Verso la fine della vita fetale, e con più evidenza nei neonati, questi elementi endocrini accrescono le loro dimensioni: il nucleo diventa più chiaro e più grosso ed il citoplasma aumenta di volume. In un montone di un mese non esiste più, almeno apparentemente, alcun carattere differenziale fra queste isole e le prime formate: tutte, sebbene con un processo evolutivo diverso, tendono infatti verso il medesimo tipo strutturale.

I rapporti col simpatico non risultano eguali e costanti per tutte le formazioni primarie; le isole secondarie possono anch'esse, sebbene raramente, essere contigue con elementi gangliari; numerosissimi poi sono i gangli liberi ancora nel connettivo. Un breve accenno sui rapporti delle isole secondarie col simpatico fu già fatto dal Campenhout, che li aveva considerati rapporti privi di qualsiasi valore perchè l'elemento insulare ed il nervoso sono semplicemente vicini e non strettamente compenetrati, come si osserva nei complessi simpatici-insulari primitivi. Lo studio comparativo in altre specie ha però dimostrato che i rapporti nei complessi simpatici-insulari sono sempre di sola esclusiva contiguità.

Io non voglio con questo infirmare il valore di una possibile influenza esercitata dal sistema nervoso simpatico sulla ghiandola endocrina, che il Campenhout ebbe il merito di porre per primo in discussione. L'A. però identifica le isole del Laguesse coi complessi simpatici-insulari attribuendo

ad essi un unico valore morfologico tanto nel feto quanto nell'adulto; in tal modo si verrebbe però a non prospettare alcuna importanza all'isola torbida, che coi suoi speciali intimi caratteri strutturali rappresenta la ghiandola endocrina in un periodo della vita fetale determinato per ogni singola specie. Gli elementi ghiandolari del complesso simpatico-insulare non posseggono caratteri peculiari propri, ma, a seconda del momento dell'evoluzione dell'individuo, sono o a tipo del Laguesse o a tipo del Langerhans.

Dalle mie ricerche risulterebbe poi che le isole del Langerhans, sebbene nate in un'epoca posteriore, non hanno un'origine fondamentale diversa da quella delle isole primarie, perchè tutte, non dipendenti geneticamente dagli acini esocrini, si differenziano insieme a questi ed insieme ai dotti escretori nella graduale evoluzione del tessuto pancreatico.

Nulla sappiamo sul valore funzionale dell'isola del Laguesse, e nulla sull'influenza che il simpatico esercita su di questa e poi sull'isola del Langerhans. Nell'adulto le isole che concorrono a formare i complessi simpatici-insulari appaiono, solamente pei loro speciali rapporti, morfologicamente diverse dalle isole del Langerhans.

Lo studio, che io ho già riassunto nella precedente Nota, mi ha dimostrato che nello sviluppo dei roditori si ha in un primo tempo l'esistenza di sole isole del Laguesse (e complessi simpatici-insulari) ed in seguito la loro trasformazione verso il tipo del Langerhans.

Nel *Mus musculus* l'isola torbida si mantiene, colla sua tipica struttura, fin verso il termine della vita fetale: nel feto a termine e nel neonato il parenchima endocrino non possiede più cellule torbide. Le quali hanno già subito una prima trasformazione, sebbene siano ancora lontane dall'assumere l'aspetto di quelle del Langerhans (che, come ebbi a dire, compaiono verso la fine del primo mese).

Un recente studio di susseguenti momenti post-natali della stessa specie (in continuazione con quello riferito nella Nota precedente) ha confermato questi fatti, ed inoltre mi ha dimostrato che, contemporaneamente alla trasformazione strutturale delle isole primarie, compaiono nuove isole endocrine che non presentano mai, neppure inizialmente, i caratteri delle isole torbide; nascono nelle due prime settimane di vita post-natale con un aspetto del tutto simile a quello che nello stesso preciso momento presentano le isole primarie che si vanno trasformando. Alla fine del primo mese di vita ed in seguito (le mie osservazioni continuano fino al terzo mese) già all'insorgenza, tali nuove isole sono costituite da elementi del Langerhans. Sono geneticamente indipendenti dagli acini esocrini.

Il processo evolutivo della ghiandola endocrina nel montone concorda, nelle linee fondamentali, con quello che ho descritto nel topo, come appare da quest'ultima brevissima esposizione; a confermare quindi i risultati delle ricerche sopra riassunte, prospettando il problema dell'istogenesi delle isole del Langerhans, in modo diverso, almeno in molti punti, da quello finora trattato.

Fisiologia. — *Di un preparato centrale plurisegmentale di « Bufo vulgaris »*⁽¹⁾. Nota di G. D'ANNEO, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

I fecondi risultati ottenuti col preparato centrale di S. Baglioni, che ho avuto modo di eseguire in numerose esperienze nel laboratorio di Fisiologia Umana della R. Università di Roma, mi avevano indotto a pensare come non priva di importanza un'ulteriore amplificazione dello stesso preparato, che essenzialmente consiste nell'isolamento dell'intero asse cerebro-spinale da tutto il resto del corpo, ad eccezione dei plessi o nervi sciatici, con l'ultima porzione degli arti posteriori. Operazione possibile completamente solo nel *Bufo vulgaris*, giovandosi della lunghissima *cauda equina* e dell'ampiezza dello speco.

Dopo numerosi tentativi giunsi a risolvere il compito, mediante una tecnica che mi propongo di esporre in questa Nota, riserbandomi di riferire in altra Nota successiva i risultati sperimentali sinora ottenuti.

Nelle prime esperienze ho preferito femmine del *Bufo vulgaris*, a causa delle loro grandi dimensioni cui corrisponde uno speco, relativamente al volume midollare dell'asse cerebro-spinale, d'assai più ampie misure che non quello di maschi.

Fisso l'animale sul ventre, secondo il metodo indicato da S. Baglioni, attorcigliando intorno a ciascuno dei quattro arti, immediatamente all'inizio del tarso per i posteriori, dell'avambraccio per gli anteriori, un'ansa di pieghevole filo metallico, il cui capo assicuro ad un robusto spillo conficcato nel lato di una tavoletta di sughero (cm. 15 × 20), stirando ed estendendo bene gli arti in modo da impedirne i movimenti. Ugualmente, per questa ragione, è necessario fermare il capo e vi provvedo fissando con uno spillo il muso al sughero. Incido allora, con le forbici, la pelle degli arti, amputandola a collare al di sopra delle legature, tutt'intorno all'arto stesso; e proseguendo con un taglio lungo l'asse longitudinale raggiungo la cute del dorso. La seziono dall'ano all'occipite, dopo di che con manovre miste di trazione e di scollamento provvedo ad allontanarla celermente dal campo di esperimento.

Resta così scuoiato interamente il tronco, e degli arti viene risparmiata quella cute che ricopre le parti più distali, che è indispensabile, come territorio di stimolazione, a provocare movimenti riflessi. In questa manovra evito di premere le numerose ghiandole cutanee del loro secreto lattescente, acido, dannosissimo alla vitalità dei nervi, e come precauzione, che l'esperienza mi ha dimostrato non inutile, detergo con un batuffolo imbevuto di soluzione fisiologica, il dorso e quelle porzioni degli arti che sono rimaste nude di pelle. Inoltre nel distaccare la cute al di sotto di quei grossi pacchetti ghiandolari che son situati ai lati e posteriormente al capo, procedo con cautela, rispettando arterie e vene cutanee, che disimpegnano la respirazione cutanea di questi anfibi e che anzi scopro e lego

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 3 marzo 1929.

e poi recido esternamente alla legatura. Lo scopo così facilmente raggiungibile, è quello di eliminare i danni di una copiosa emorragia nell'inizio di un atto operatorio che non è troppo breve. Malgrado la grande resistenza dei centri del *Bufo vulgaris* alla deficienza di O_2 , il cimentarli fin da principio con un profondo turbamento del circolo è un volerli sfinare e compromettere il risultato dell'esperienza. Di poi servendomi del bisturi, asporto la fascia dorsale, il muscolo depressore della mascella e tutti gli altri muscoli della spalla. Dopo di che sollevata l'omoplata pel margine mediale, con un tratto di forbici, la recido vicino all'omero senza ledere gli organi sottostanti.

Tolta la scapola si riconosce il nervo brachiale che decorre insieme ai vasi. Distacco quindi all'inserzione omerale i muscoli della spalla e del petto che vi prendono attacco, e disarticolando con accortezza la testa dall'omero (vedremo nel seguito della preparazione a che possa questa servire) non compromettendo l'integrità anatomica e la efficienza del nervo brachiale, e poi isolo quest'ultimo fino in vicinanza della sua origine spinale. Recisi i legami muscolari ed i vincoli legamentosi e capsulari della articolazione scapolo-omerale, l'arto resta affidato al suo nervo soltanto, lungo cui continuano a giungere ai muscoli del braccio eccitamenti motori. Cosicchè ad evitare che movimenti repentini, disordinati, impediscano l'andamento felice della operazione strappando le radici spinali, libero l'arto dell'ansa di filo metallico e l'assicuro altrimenti all'assicella di sughero, legando un filo al di sotto della testa omerale conservata ed annodandone ancora i capi o a spilli a grossa testa, o allo occhiello ottenuto ripiegando per la capocchia quelli comuni e lunghi. Lo spillo, s'intende, si conficca nel sughero (senza tirare sul nervo brachiale) determinando al braccio un nuovo punto d'appoggio. Il nervo, perchè non si imbratti di secreto ghiandolare che inevitabilmente è sul sughero, s'adagia su di un batuffolo di ovatta con soluzione fisiologica.

Ripeto analogo procedimento per l'altro arto, e poi passo a scarnire in tutta la sua estensione, la faccia dorsale della colonna vertebrale, dai muscoli che ne colmano le doccie, nettando particolarmente le prime tre o quattro vertebre anche dai muscoli intervertebrali. È questo il momento di liberare le radici e il ganglio del nervo brachiale dal foro intervertebrale e dai rapporti con la dura meninge. I metodi adottabili possono essere due: agevolmente si può fare così: sorreggere saldamente tra le branche della pinza, tenuta dalla mano sinistra, l'apofisi trasversa della seconda vertebra ed insinuandosi in senso rostrocaudale e senza arrecare lesioni, nello speco lateralmente al midollo con la lama d'una forcipe piccola ma robusta, spezzare la detta apofisi ed allontanarla dal campo operatorio.

Questa manovra può condurre facilmente, a lesioni del nervo brachiale o del ganglio invertebrale corrispondente o dei centri. Se si bada, nel troncato il processo trasverso, ad insinuarsi in senso rostrocaudale e a non superarne, con la lama delle forbici, l'altezza, ganglio e nervo son certo risparmiati.

Si riconosce allora la sottoposta dura meninge, bianca ed opaca, che talvolta si strappa con l'osso mettendo a nudo senz'altro il ganglio che spicca pel suo colorito gialliccio.

In genere però bisogna incidere la dura e ciò faccio staccando momentaneamente l'arto dal sughero, e tenendolo saldamente pel braccio tra le dita della mano sinistra, mentre la destra armata di aguzze forcicine recide tutt'intorno al ganglio la meninge.

Altro mezzo di cui mi servo nell'isolamento del ganglio dal forame intervertebrale e dai rapporti con la dura ad un tempo è questo. Esso è più semplice:

Con la punta di un bisturino affilato e ben diretto, appoggiandomi sempre al contorno osseo, recido tutto intorno al foro intervertebrale la dura. Facendolo con mano ferma e sicura e mantenendosi sul contorno osseo non si lede nulla. Se mai maggiore accortezza è utile nello eseguire la manovra lungo la parte ventrale del forame per la vicinanza immediata delle radici anteriori al contorno osseo.

Il ganglio ed il nervo restano liberi da rapporti durali e son connessi solo col midollo, e la parte ossea che vien recisa col primo procedimento, in quest'ultimo rimane, per cadere insieme a tutta la parete posteriore dello speco in un tempo successivo della operazione.

Anche in questo caso distacco l'arto dal sughero e l'assicuro tra le dita della mano sinistra manovrando in modo da facilitarmi il compito. Di poi ritorno a fissare l'arto, connesso ormai debolmente ai centri per le sole radici spinali.

In queste condizioni la tecnica ulteriore si riduce quasi completamente e quella praticata da S. Baglioni per il suo preparato centrale. Aperta mediante la suddetta forbice a lame piccole e robuste un varco tra l'ottava e nona vertebra, si recidono a destra e sinistra, alternativamente, con colpi di forbici decisi e diretti in senso orizzontale e lateralmente, tutti gli anelli vertebrali, con cura in corrispondenza del secondo, fino all'occipite.

Quindi distaccata la testa dall'assicella e ripiegatala alquanto in avanti ed in basso dopo averla un poco sollevata dal piano, s'introduce, senza premere sul bulbo, una branca delle forbici sotto il tetto cranico, che reciso con pochi colpi ai due lati, si può distaccare completamente sulla regione olfattiva.

Si presenta ciò fatto in tutta la sua estensione l'asse cerebro-spinale ricoperto di quello strato grigio calcareo che ricopre come nella rana le membrane protettrici dei centri (la dura meninge viene via facilmente insieme con le apofisi) e che tolto delicatamente con l'aiuto di piccole pinze da microscopia e minuscoli batuffoli di ovatta, scopre la faccia dorsale dei centri.

Allora con celerità provvedo all'isolamento dei due nervi sciatici, preparando i medesimi dal ginocchio fino alla loro emergenza della colonna vertebrale, seguendoli dalla coscia nel bacino e recidendo i rami nervosi che essi inviano nel loro passaggio ai muscoli ed alla pelle della coscia e del bacino. Provvedo ancora all'amputazione dei femori e delle masse carnose delle coscie nel terzo inferiore, alla resezione dei processi trasversi dell'ultima vertebra, della maggior parte dell'orostilo, al taglio dei filuzzi nervosi che il midollo invia ventralmente e dei vasi che dalla soggiacente aorta giungono al midollo stesso, distaccando la colonna vertebrale dal resto del corpo.

Quindi adoperando un piccolo ago di Deschamps, lo passo con attenzione dopo averle raccolte pian piano con l'estremo stesso dell'ago, e quanto più è possibile caudalmente, al di sotto delle radici spinali del *filum terminale*, senza farne sfuggire alcuna. Sollevo un po' l'ago, con esso la cauda equina e prendendo tra le branche delle forbici la parte ventrale della colonna vertebrale, con un sol colpo distacco dal resto le ultime due vertebre (8ª lombare e 9ª sacrale) che contengono i gangli annessi ai nervi sciatici.

Giungo così all'ultimo tempo dell'operazione, compito delicato, quale quello di finire di isolare i centri con gli organi che vi si son lasciati connessi, per poi portarli su ovatta. Vi riesco agevolmente disponendo tra pollice ed indice della mano sinistra i monconi recisi degli arti inferiori cominciando a sollevare il midollo dalla sua doccia ossea e recidendo con punte di forbici a destra ed a sinistra le radici spinali, sino a livello di quelle destinate agli arti anteriori, che naturalmente rispetto. A tal punto prendo e sostengo tra le falangi dell'anulare e del mignolo della stessa mano sinistra i due arti anteriori e continuando a sollevare, ma in modo che la tensione si eserciti sempre a sole spese dei nervi sciatici e del *filum terminale*, recido ancora le radici del primo paio dei nervi spinali, quelle dei nervi cranici e finalmente per ultimo i lobi olfattivi.

Otengo così il preparato quale ce lo rappresenta l'annessa immagine fotografica (fig. 1). L'adagio su falda di cotone imbevuta di soluzione fisiologica per batraci (0,7 % NaCl) sul fondo d'ampia capsula di vetro, lasciando alquanto in riposo acciocchè si ristori dalla grave operazione subita.

Si ha il sistema nervoso completamente staccato dal resto del corpo; adesso sono uniti ancora i due nervi brachiali e i due nervi sciatici, i quali pongono in normale relazione i centri con le gambe e con i piedi rimasti normali. In altre parole si ha il midollo perfettamente a nudo, che funziona

ancora come tale perchè tuttora in connessione con gli organi terminali sensitivi e motori. Infatti se l'operazione è riuscita bene e non si sono lesi direttamente i centri spinali, si possono avere dei riflessi toccando o pizzicando le dita o altra parte, per es., dell'arto posteriore destro. Questo vien ritirato e se lo stimolo è abbastanza forte si comunica all'altra gamba (di

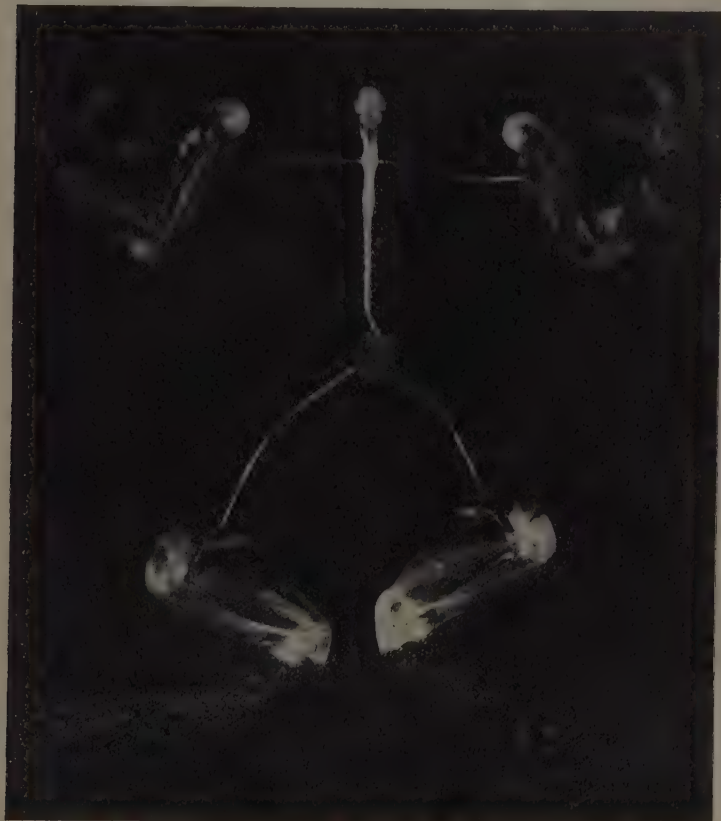


Fig. 1.

sinistra) ed eventualmente anche agli altri segmenti mobili sopravvivenenti del treno anteriore.

I centri sopravvivenenti e funzionanti sono assolutamente staccati da ogni circolo sanguigno e da qualsiasi altra influenza che gli altri organi e sistemi del corpo hanno normalmente su essi. Cosicchè artificialmente abbiamo dinanzi a noi unità viventi nervose, corrispondenti all'arco riflesso, unità

che mantengono sempre tra di loro normali e fisiologiche connessioni e dipendenze ma pur lontane da ogni altra influenza e condizione.

Nell'adagiare il preparato sull'ovatta è necessario disporlo in modo che solo centri e tronchi nervosi, e non gli arti ricoperti dalla pelle vi riposino; per impedire movimenti del braccio sull'avambraccio con seguito di traumi delle esili radici spinali o del midollo, è utile e sufficiente ripiegare un lembo d'ovatta sulla testa omerale, così che ne rimanga fissata.

È indispensabile inoltre, per la sopravvivenza, osservare le condizioni (S. Baglioni) di ossigenazione dei centri e di isotonia della soluzione.

Ricordo ancora che il plesso brachiale è costituito nel Bufo dal concorso del II e III spinale, cosicchè potrebbe sembrare necessario l'isolare anche quest'ultimo col ganglio che lo concerne.

Avendolo così preparato, ma avendo anche avuto agio di constatare come, non preoccupandosi affatto della integrità del III ganglio e nervo spinale corrispondente, la attività del preparato non venga, almeno apparentemente menomata, ne ho sempre tralasciato la preparazione. Omettendola s'ha notevole vantaggio nell'economia del tempo che è fattore importante per la riuscita dell'esperimento.

Ancora poche notizie di tecnica intorno ad un altro tentativo, anch'esso riuscito, per conservare in connessione ai centri organi del dominio dei nervi cranici.

Ho specialmente considerato il trigemino, ed è facile conservarlo (come ancora altri nervi cranici) se contentandosi di una preparazione sommaria si vorrà procedere in questo modo:

Si prosegue l'operazione fino al punto in cui passati a sollevare il midollo ed a recidere le radici, si giunge al tratto prebulbare. Allora si recide nuovamente la colonna vertebrale con un colpo di forbici dato trasversalmente al limite tra scatola cranica e vertebre.

Sarà stata preparata prima la porzione della faccia voluta mantenere, distaccando dal resto dello scheletro di questa la mascella, scuoiandola solo parzialmente, e privandola delle parti molli ed ossee non necessarie.

Senonchè, menomato lo scambio dell'ossigeno che avviene attraverso le pareti della scatola ossea, c'è da aspettarsi una sopravvivenza limitata dai tratti nervosi in essa racchiusi, inconvenientemente eliminabile solo a prezzo di una completa liberazione degli elementi del sistema nervoso dalla custodia ossea.

Fisiologia. — *Ulteriori ricerche sul valore alimentare della patata nei ratti albin.* Nota di A. GALAMINI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Continuando lo studio sul valore alimentare della patata nei ratti albin si è sperimentato su uno di essi maschio adulto e su una femmina in accrescimento. Si somministrò loro a volontà patata più burro nella proporzione di gr. 50 a 4, seguendo la tecnica distinta in una Nota precedente sull'argomento. Alla miscela del ratto in accrescimento si aggiunsero per un certo tempo, in due periodi distinti, fibrina di sangue e proteine di patate, ottenute queste ultime sottoponendo la poltiglia di patata cotta alla corrente di acqua fino a tanto che non si ottenesse più la reazione dello iodio coll'acqua di lavaggio. Al ratto adulto si somministrò, sempre in due periodi distinti, oltre alla miscela alcool a 95, gocce 30 diluite a parti uguali con acqua e la miscela salina di Osborne (cloruro di sodio gr. 100, fosfato tricalcico gr. 150, citrato di magnesio gr. 65, cloruro di potassio gr. 15, citrato di ferro gr. 10, iodio gr. 0.05, ioduro di potassio gr. 0.10) i risultati ottenuti furono i seguenti:

Ratto F. — Dal peso iniziale di gr. 106, femmina fu tenuta in esperimento dal 16 novembre 1927 al 6 maggio 1928. Gli si dettero ogni giorno a volontà patata cotta gr. 50 e burro gr. 4 con aggiunta di 1 gr. di cloruro di sodio. Nella prima settimana di esperimento l'animale diminuì di gr. 13.4. Ingerì cibo pari a calorie 0.46 per gr. di peso e per giorno, bevve in media cm^3 5 di acqua, emise gr. 1.22 di feci e cm^3 4.8 di urine. Negli ultimi giorni le feci furono diarroiche, le urine ematiche con albumina e nel sedimento emazie leucociti e cilindri granulosi e jalini. Al 14° giorno di esperimento l'urina tornò normale. Contemporaneamente il ratto aumentò di peso, raggiungendo in pochi giorni il valore iniziale. Le urine dapprima acide a poco a poco divennero neutre e, dopo 27 giorni di esperimento, nettamente alcaline.

Dal 26 novembre 1928 al 21 dicembre 1928 il ratto variò da gr. 103 a gr. 105 ingerì cibo pari a calorie 0.48 per gr. di peso e per giorno; acqua cm^3 4.7; emise feci in media gr. 1.30, urine cm^3 6.5. Per una settimana dal 21 al 28 gennaio 1928 si sospese la solita alimentazione e si somministrarono al ratto pane, burro, uovoalbumina e formaggio. Il ratto crebbe da gr. 104 a 112 in 6 giorni. Passando di nuovo alla dieta con patata e burro in 7 giorni diminuì da gr. 123 a 106 e poi di nuovo riprese il peso iniziale, che mantenne invariato per circa tre mesi dal 18 dicembre 1927 al 22 marzo 1928. In questo periodo ingerì in media cibo pari a calorie 0.45 e acqua in proporzione di 7 cm^3 per giorno; emise in media feci gr. 1.3 e urine cm^3 6.5. Il 22 marzo 1928 si cominciò ad aggiungere nella miscela di patate più burro fibrina, che variò da gr. 0.5 fino a gr. 2.5 per giorno. Ad ogni aumento della somministrazione di fibrina corrispose un aumento del peso del ratto. Esso in 19 giorni salì da gr. 115 a 156. In questo periodo ingerì cibo pari

(1) Nella seduta del 7 aprile 1929.

a calorie 0.41 per grammo di peso e per giorno, ed acqua in proporzione di cm³ 14. Emise in media feci gr. 1.5 e urine cm³ 10. Il 3 aprile 1928 si sostituirono alla fibrina le proteine della patata, gr. 2,5. L'animale fino all'11 maggio 1928 diminuì da gr. 153 a gr. 145 ingerì cibo pari a 0.47 calorie per giorno e per grammo di peso e acqua in proporzione di cm³ 11. Emise feci gr. 1.4 e urine cm³ 9.7. L'11 maggio 1928 si tolse il burro dalla miscela e si sostituì con gr. 5.5 di proteine delle patate. Dall'11 maggio 1928 al 21 maggio 1928 il ratto aumentò da gr. 148 a gr. 157 e poi per altri 26 giorni mantenne invariato il proprio peso. Ingerì cibo in proporzione di calorie 0.4 per gr. di peso e per giorno emise feci gr. 1.24 urine cm³ 7.

Ratto A secondo, maschio adulto sano. — Del peso gr. 255. Fu alimentato con patata gr. 50, burro gr. 4, alcool etilico a 95 gocce 30 somministrate in 3 volte. Solo nei primi 15 giorni il ratto mostrò intolleranza per l'alcool. Dopo ogni somministrazione era irrequieto, mordace e presentava sensibile dispnea, che compariva dopo mezz'ora dall'ingestione della sostanza e si manteneva per circa un'ora.

Dal 27 gennaio 1928 al 12 febbraio 1928 il ratto ingerì cibo pari a calorie 0.26 per gr. di peso e per giorno e bevve acqua in proporzione di cm³ 14. Emise gr. 2.04 di feci e cm³ 12 di urine. Dal 13 febbraio 1928 al 3 marzo 1928 ingerì cibo pari a calorie 0.19 per gr. di peso e per giorno e acqua in proporzione di cm³ 13. Emise urine cm³ 9 in media e feci gr. 1.3. Dal 5 febbraio 1928 al 30 marzo 1928 il ratto, per 55 giorni visse bene e aumentò gradatamente da gr. 255 a gr. 288. Nell'urine non si osservò mai presenza né di albumina né di zucchero. Dal 4 marzo 1928 al 1° aprile 1928 l'animale ingerì cibo pari a calorie 0.23 per gr. di peso e per giorno ed acqua pari a cm³ 19. Emise in media feci gr. 1.37, urine cm³ 18. Il 4 gennaio 1928 si sottrasse l'alcool alla dieta e il ratto cominciò subito a perdere di peso. Il 5 maggio 1928 era diminuito di gr. 59 da 290 a 231. Aveva ingerito cibo pari a calorie 0.33 per grammo di peso e per giorno ed acqua cm³ 20. Aveva emesso in media urine cm³ 15 e feci gr. 1.7, il 5 maggio 1928 si aggiunsero alla dieta gr. 0.01 di sale di Osborne. In 12 giorni il ratto aumentò di peso da gr. 231 a gr. 264. Ingerì cibo pari a calorie 0.24 per grammo di peso e per giorno ed acqua pari a cm³ 9.38, emise urina cm³ 9 in media e feci gr. 1.5.

Il giorno 18 maggio 1928 si sottrassero alla dieta i sali di Osborne e l'animale in 20 giorni diminuì da gr. 264 a gr. 248. In questo periodo esso ingerì cibo pari a calorie 0.24 per gr. di peso e per giorno e acqua in media di cc. 11. Emise ogni giorno circa 10 cc. di urine e gr. 1.3 di feci.

Dall'esame dei risultati su esposti risulta che la patata cotta, con aggiunta di burro nella proporzione di gr. 50 : 4 ha consentito di vivere a lungo, 102-202 giorni, ai due ratti in esperimento. Non ha consentito invece un normale accrescimento al ratto in via di sviluppo. L'aggiunta di 1-2.5 gr. di fibrina per gr. 54 di miscela lo fece aumentare di peso per 19 giorni, dopo una sosta di 120 giorni, con ritmo normale di accrescimento.

L'aggiunta di alcool o della miscela dei sali di Osborne ha migliorato il valore alimentare della dieta su detta, consentendo al ratto adulto di aumentare di peso. Sottratte le dette sostanze l'animale perdé il peso guadagnato.

Fisiologia dell'embrione. — *L'accrescimento embrionale dei Cefalopodi*⁽¹⁾. Nota preventiva di S. RANZI, presentata⁽²⁾ dal Cor-risp. F. RAFFAELE.

Dopo il lavoro di Davenport⁽³⁾, che stabilì che l'accrescimento degli organismi è in rapporto ad assorbimento di acqua, non poche ricerche furono eseguite sull'accrescimento embrionale degli animali. Tra queste, particolare interesse hanno quelle eseguite su animali le cui ova si sviluppano fuori del corpo materno, poichè in questo caso il sistema embrione + tuorlo non assorbe sostanza organica ed il suo accrescimento è dovuto ad assorbimento di acqua⁽⁴⁾, come risulta dalle ricerche di Gray⁽⁵⁾, che in *Salmo* studiò l'accrescimento embrionale e postembrionale (delle larve prima che comincino a nutrirsi), e di Fauré-Fremiet e Dragoiu⁽⁶⁾, che in *Rana* studiarono l'accrescimento embrionale e postembrionale (di larve tenute a digiuno); mentre anche lo sviluppo larvale di questo animale in condizioni normali (dando cioè nutrimento alle larve) è in gran parte in rapporto a presa di acqua, fatto ampiamente studiato da Schaper⁽⁷⁾.

Una quistione di carattere generale queste ricerche lasciavano ancora in sospeso: è la sostanza minerale, che si trova nei tessuti embrionali e forma le parti scheletriche dell'embrione, presente nell'ovo p. d. appena deposto, o è presa dall'ambiente? A questo soggetto due soli fatti erano noti:

(1) Ricerche eseguite nella Stazione Zoologica di Napoli.

(2) Nella seduta del 16 giugno 1929.

(3) DAVENPORT C. B., *The Role of Water in Growth*. «Proc. Boston Soc. Nat. Hist.», vol. 28, 1897.

(4) Fanno eccezione le ova di uccelli nelle quali l'albume è assorbito per mezzo dell'allantoide.

(5) GRAY J., *The Growth of Fish. I. The relationship between Embryo and Yolk in Salmo fario*. «Brit. Journ. of Exp. Biol.», vol. 4, 1926.

(6) FAURÉ-FREMIET E. et DRAGOIU J., *Le premier cycle de croissance du têtard de Rana temporaria*. «Arch. Intern. de Physiol.», vol. 21, 1923.

(7) SCHAPER A., *Beiträge zur Analyse des thierischen Wachstums (Eine kritische und experimentelle Studie) I Th.: Quellen, Modus und Lokalisation des Wachstums*. «Arch. f. Entw. Mech.», Bd. 14, 1902.

Nell'ovo di pollo del CaO , che si trova nel pulcino al momento della nascita, solo 0.0354 gr. preesistono nell'ovo propriamente detto al momento della deposizione, gli altri 0.1406 gr. sono presi dal guscio (Delezenne e Fournau) ⁽¹⁾.

Dalle ricerche di Ephrussi e Rapkine ⁽²⁾ si sa che la percentuale di ceneri nelle prime 12 ore dello sviluppo degli Echinodermi (*Paracentrotus*) aumenta dal 1.5 % al 9.1 % del peso della sostanza secca e, sebbene gli embrioni di 12 ore siano già liberamente natanti nell'acqua di mare, l'aumento di ceneri non può essere in rapporto a presa di cibo da parte delle larve.

Questi due reperti non permettevano però di essere generalizzati a tutte le ova, perchè frutto ambedue di particolari condizioni. L'embrione di pollo in via di sviluppo dispone di uno speciale organo assorbente, formatosi in rapporto all'allantoide, organo che assorbe non solo la quasi totalità della sostanza minerale prelevata dal guscio, ma anche sostanza organica (assorbimento dell'albume); queste sostanze assorbite, proveniendo dagli involucri dell'ovo, si trovano già legate all'ovo p. d. al momento della sua uscita dal corpo materno; inoltre lo sviluppo delle ova (involucri compresi) di pollo presenta, dal punto di vista biochimico, delle particolarità abbastanza spiccate tra cui la perdita, non solo di sostanza organica (carattere di tutte le ova) ma anche di acqua (Tangl e Mituch) ⁽³⁾, fatto probabilmente generale, o quasi, nelle ova di animali terrestri. Nelle prime 12 ore di sviluppo di *Paracentrotus* è compreso un notevole periodo di vita libera degli embrioni e, sebbene essi ancora non si nutrano, le loro condizioni di vita, quindi del metabolismo, sono alquanto diverse da quelle di un embrione contenuto nell'ovo.

Tali essendo le nostre conoscenze, giudicai necessario affrontare il problema della provenienza delle sostanze minerali necessarie alla formazione degli embrioni e mi sembrò che l'animale più adatto fosse la *Sepia officinalis* L., che ha embrioni relativamente grandi, nei quali a poco a poco va differenziandosi un guscio (osso di seppia) che è abbastanza sviluppato al momento della schiusa dell'ovo.

Una simile ricerca portava con sè uno studio dell'accrescimento embrionale, che non mi parve fuori proposito poichè, solo per analogia a quanto avviene in altri tipi animali, poteva, nei Cefalopodi, ammettersi un accrescimento in relazione con assorbimento di acqua, essendomi sconosciute

(1) DELEZENNE C. et FOURNEAU E., *Sur la part que prend la chaux de la coquille de l'œuf de poule à la formation du squelette du poussin pendant l'incubation*. « Ann. Inst. Pasteur », vol. 32, 1918.

(2) EPHRUSSI B. et RAPKINE L., *Composition chimique de l'œuf d'ourcin (Paracentrotus lividus Lk.) et ses variations au cours du développement*. « Ann. de Physiol. et de Physicochem. Biol. », t. 4, 1928.

(3) TANGL F. und v. MITUCH A., *Beiträge zur Energetik der Ontogenese. V. Mitt. Weitere Untersuchungen über die Entwicklungsarbeit und den Stoffumsatz im bebrüteten Hühnerei*. « Arch. f. ges. Physiol. », Bd. 121, 1908.

ricerche, secondo questo indirizzo, sull'accrescimento embrionale dei Molluschi. Parecchi fatti potevano quindi emergere dalle mie ricerche tra cui la quantità di sostanza organica spesa durante lo sviluppo embrionale in rapporto ai processi respiratori, escretori, secretori (secrezione delle cellule ectodermiche versata nel liquido perivitellino) dell'embrione in via di sviluppo.

Ho a questo fine sistematicamente, su gruppi di 10-40 ova deposte insieme da una medesima femmina, determinato: il peso totale dell'ovo (compresi gli involucri), il peso dell'ovo p. d. o dell'embrione da esso sviluppatosi⁽¹⁾, il peso della corrispondente sostanza secca (determinato dopo essiccamento a 105°-120°), il peso delle ceneri di questa (incenerimento all'aria). I due ultimi pesi risultano quindi leggermente erronei per difetto, dati i noti difetti dei metodi usati (metodi più precisi erano al caso mio inapplicabili). Ho però, in tutte le esperienze, agito nella stessa maniera e, ripetute le esperienze su due gruppi di ova di un medesimo lotto, trovato sempre differenze trascurabili, per cui posso concludere che i metodi usati danno valori perfettamente comparabili.

Dai dati dell'esperimento determinavo poi:

$$\text{peso acqua} = \text{peso totale} - \text{peso sostanza secca}$$

$$\text{peso sostanza organica} = \text{peso sostanza secca} - \text{peso ceneri}$$

I dati raccolti per i pesi delle ova p. d. (= embrione + sacco del tuorlo) sono riportati nella tabella, nella quale sono espressi in milligrammi e nella quale sono pure calcolate le percentuali riferite per l'acqua e la sostanza organica al peso totale, per le ceneri al peso della sostanza secca.

Prescindendo da una leggera variabilità del peso assoluto dei singoli componenti — che, raramente e quasi sempre per variazioni minori dell'unità (fanno eccezione i soli dati dell'analisi n. 4) da quanto è prevedibile dalle analisi dello stadio precedente e seguente, interessa le percentuali — i dati riportati nella tabella dimostrano che *l'accrescimento ponderale degli embrioni di seppia in via di sviluppo è in rapporto ad assorbimento di acqua la cui percentuale sale dal 52.5 % al 75.8 % e che durante lo sviluppo vi è anche una presa di sostanze minerali per cui la percentuale di ceneri (rispetto alla sostanza secca) sale da 2.2 % a 10.2 %.*

Al fine di precisare meglio i dati dell'accrescimento e di stabilire la perdita di sostanza organica nel corso dello sviluppo, le analisi nn. 1 e 16 sono state eseguite su ova del medesimo lotto ed ambedue ripetute due volte su due gruppi di 20 ova, per l'analisi n. 1, di 15, per l'analisi n. 16. In base a queste due analisi posso stabilire le variazioni nel corso dello sviluppo: aumento in peso totale mg. 56.89; aumento acqua mg. 60.21; aumento

(1) Negli stadi avanzati frequentemente isolavo l'embrione p. d. dal sacco vitellino esterno e analizzavo separatamente: dalla somma, dei pesi delle due analisi, ricavo il peso totale dei componenti.

TABELLA.

Numero dell'analisi	Numero delle ova analizzate	Età giorni	Stadio	Peso totale	Peso acqua		Peso sostanza organica		Peso ceneri	
					Assoluto	Percentuale	Assoluto	Percentuale	Assoluto	Per 100 di sostan. secca
1	40*	1	Primo solco di segmentazione . .	76,91	40,39	52,5	35,72	46,4	0,80	2,2
2	25*	5	blastoderma . . .	75,63	41,59	54,9	33,34	44,1	0,76	2,2
3	30*			77,85	43,36	55,7	33,53	43,1	0,96	2,9
4	20			85,61	46,19	54,0	38,50	45,0	0,92	2,2
5	25	30	stadio 13 di Naef (1)	81,09	49,09	60,5	30,98	38,1	1,02	3,2
6	35*			82,35	49,86	60,5	31,38	38,1	1,11	3,4
7	32*	40	stadio 14 » .	84,16	51,98	61,8	31,08	36,9	1,10	3,4
8	33*	50	stadio 15 » .	83,74	51,37	61,3	31,26	37,3	1,11	3,4
9	18		stadio 15 » .	83,27	52,07	62,5	30,16	36,2	1,04	3,3
10	30*	55	stadio 16 » .	88,49	56,58	63,9	30,57	34,5	1,34	4,2
11	25*	60	stadio 16 » .	91,62	59,18	64,6	31,03	33,9	1,41	4,3
12	10	65	stadio 16 » .	93,00	62,00	66,7				
13	20	75	stadio 18 » .	105,67	75,53	71,5	27,94	26,4	2,20	7,1
14	10	87	stadio 19 » .	129,39	94,35	72,9	32,03	24,8	3,01	8,6
15	30*			126,10	92,69	73,5	30,19	23,9	3,22	9,9
16	30*	90		132,80	100,60	75,8	28,90	21,8	3,30	10,2

I numeri di ova seguiti dall'asterisco * indicano che l'analisi fu eseguita sulle ova divise in due lotti e che i valori indicati nella tabella rappresentano le medie.

Le analisi 1 e 16 sono eseguite sulle ova della stessa deposizione allevate in laboratorio.

ceneri mg. 2.50; diminuzione di sostanza organica mg. 6.82. Questi cambiamenti sono graficamente indicati nella figura 1 e, in base ai dati raccolti, riportando a 1 gr. il peso dell'ovo al momento della deposizione, può scriversi la seguente equazione, che dà un'idea dei cambiamenti ponderali osservati nel corso dello sviluppo:

$$\begin{array}{rclclcl}
 \text{Tuorlo} & + & \text{Acqua} & + & \text{Cenere} & = & \text{Embrione} & + & \text{Sostanza organica} \\
 \text{peso totale} & & & & & & \text{peso totale} & & \text{spesa durante lo sviluppo} \\
 1 \text{ gr.} & + & 0.783 \text{ gr.} & + & 0.033 \text{ gr.} & = & 1.727 \text{ gr.} & + & 0.089 \text{ gr.}
 \end{array}$$

(1) NAEF A., *Die Cephalopoden I. T. 2. Bd. Embryologie.* « Fauna e Flora del Golfo di Napoli », 35. Monogr., 1928.

Le variazioni osservate interessano i tessuti dell'embrione e non il sacco vitellino esterno; le analisi di questo mostrano infatti come, tra lo stadio 13 e 18 di Naef (durante la massima parte cioè del periodo nel

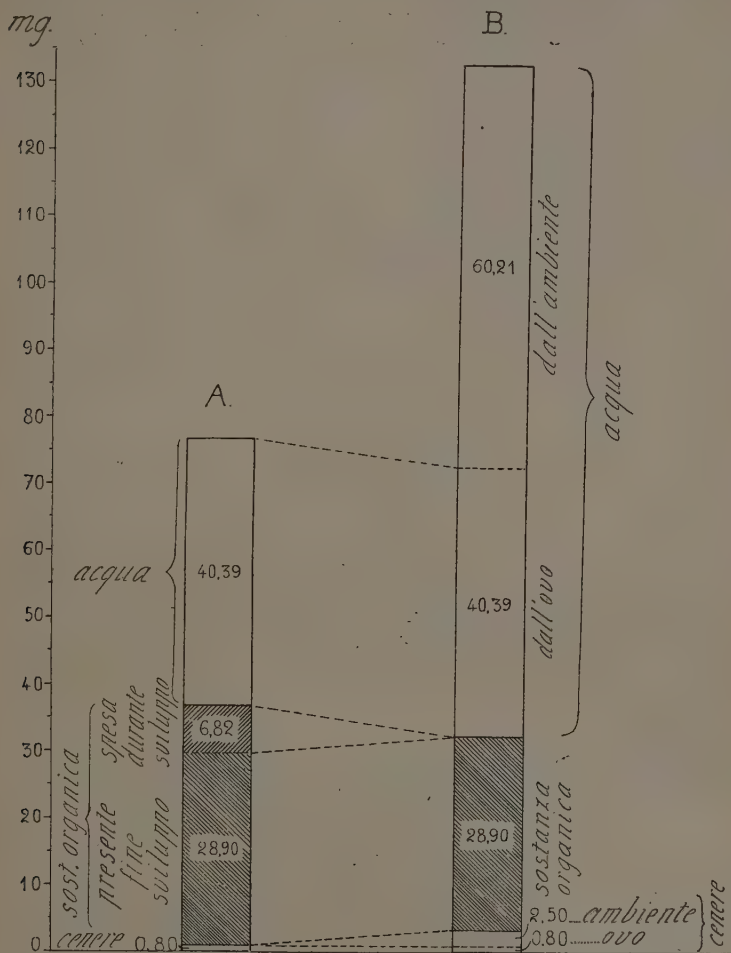


Fig. 1. - Diagramma illustrante le differenze tra la costituzione dell'ovo (A) e quella dell'embrione al momento della schiusa (B). Sull'ordinata è rappresentato il peso in mg. ed i numeri rappresentano i pesi dei singoli componenti espressi in mg.

quale è osservabile), la sua costituzione si mantiene praticamente costante: acqua 56.4 %-58.5 %; sostanza organica 42.6 %-40.5 %; ceneri 2.8-2.3 (per 100 di sostanza secca), fatto che indica come il tuorlo (di cui il sacco vitellino esterno è quasi esclusivamente composto) mantiene la sua co-

stituzione (rispetto ai costituenti analizzati) praticamente costante durante 45 giorni, dall'epoca cioè nella quale l'embrione è nettamente sollevato sul sacco vitellino esterno fino all'epoca nella quale si inizia il rapido passaggio del tuorlo del sacco vitellino esterno nell'interno dell'embrione. Nei primi stadi dello sviluppo si osserva una leggera idratazione del tuorlo (l'acqua costituisce il 52.5 % dell'ovo appena deposto che risulta composto quasi esclusivamente da tuorlo) e un'altra idratazione, unita ad assorbimento di sostanza minerale, si osserva durante gli stadi di rapida riduzione del sacco vitellino esterno perchè, negli embrioni di 87 giorni, trovo nel sacco vitellino esterno una media del 59.9 % di acqua, del 38.95 % di sostanza organica, del 3.1 % di ceneri (riportata a 100 parti di sostanza secca).

Si affacciava a questo punto la questione: se l'ovo p. d. prima, l'embrione poi, assorbono l'acqua e le sostanze minerali prelevandole da sostanze preesistenti negli involucri, come avviene nell'ovo di pollo: bisognava quindi vedere se la quantità di acqua e di sostanze minerali degli involucri dell'ovo diminuisce, man mano che l'embrione si accresce, ovvero se resta costante o aumenta.

Il peso degli involucri aumenta notevolmente nel corso dello sviluppo e mentre nelle ova appena deposte è eguale a 464-754 facendo eguale a 100 il peso dell'ovo p. d. verso la fine dello sviluppo raggiunge 991 facendo 100 il peso del corrispondente embrione. Vi è quindi un forte aumento del peso degli involucri dell'ovo in rapporto alla formazione e all'aumento del liquido perivitellino.

Alcune analisi eseguite mettono in evidenza un aumento delle ceneri negli involucri, aumento alquanto rilevante, per cui la percentuale di queste sale dal 3.1 % (del peso totale all'inizio dello sviluppo) al 4.3 %, verso la fine del medesimo.

Nel corso dello sviluppo quindi gli involucri dell'ovo, dall'ambiente, oltre ad assorbire acqua (il cui aumento è indicato dal forte incremento del loro peso) prendono anche sostanze minerali.

Un altro fatto risulta quindi dalle mie ricerche: *l'acqua e le sostanze minerali, di cui l'embrione di seppia in via di sviluppo si arricchisce, non sono tolte dagli involucri* - come avviene nelle ova di pollo - poichè anche questi nel corso dello sviluppo embrionale si arricchiscono di acqua e di sali che prendono dall'ambiente.

N. P.

ERRATA CORRIGE.

A pp. 90 e 91, nelle tabelle III, IV e V, tutte le cifre della colonna sovraindicata con la notazione ΔB corrispondono, invece, alla notazione $\frac{\Delta B}{\Delta pH}$ e viceversa.

Nelle righe 11, 13 e 15 della p. 381 si legga:

$$\lim_{x_3 \rightarrow x_2} \int_{x_3}^{x_1} \varphi_1(x) dx$$

in luogo di

$$\lim_{x_3 \rightarrow x_2} \int_{x_3}^{x_1} \varphi_1(x) dx.$$

P. 524, rigo sesto dall'alto, in entrambe le equazioni invece di $\sum_{b=0}^n$, leggasi $\sum_{b=0}^n (-1)^b$.

P. 526, rigo secondo dall'alto, invece di Rietz, leggasi Ritz.

A p. 674, nella formula (4) l'ultimo simbolo di Christoffel dev'essere di prima specie, anzichè di seconda specie, come risulta stampato. La formula esatta è dunque la seguente:

$$(4) \quad K_{hik} = a_{ii} \left\{ \begin{matrix} h & k \\ i \end{matrix} \right\} - \partial_{hi} \left[\begin{matrix} h & k \\ i \end{matrix} \right].$$

A p. 739, rigo quinto, invece di non può essere nullo, leggasi non può essere negativo.

INDICE DEL VOLUME IX, SERIE VI. — RENDICONTI

1929

INDICE PER AUTORI

A

- ALOSI B. — « I veleni emolitici e le alterazioni del fegato ». 338.
ALMANSI E. — « Sul moto di un corpo di massa variabile ». 1055.
ALTSCHUL R. — « Nuovo metodo d'impregnazione aurea ». 74.
AMADORI M. — « Prodotti di condensazione tra glucosio e p-fenetidina ». 68.
ID. — « Prodotti di condensazione tra glucosio e p-anisidina ». 226.
AMALDI E. — « Sulla teoria quantistica dell'effetto Raman ». 876.
AMERIO A. — « Nuovo metodo per misurare la velocità del suono nei liquidi ». 262.
ANGELI A. — « Sopra la costituzione e le reazioni dei diazoidrati ». 933.
ANTONIANI C. e FONIO G. — « Ricerche sullo scambio dell'acido fosforico nel terreno con acido arsenico ». 344.
ARPELLINI G. — « Saggio sopra la rifrazione astronomica a Roma ». 30.
ID. — Commemora il Socio *A. Abetti*. 113.
ID. — Presenta in omaggio il « Calendario dell'Osservatorio Astronomico del Campidoglio per l'anno 1929 ». 113.
ID. — « Il diametro orizzontale del Sole nel 1927 e 1928 ». 368.
ID. — Fa voti che il prezioso disegno del Viviani venga al più presto pubblicato. 579.

ARPELLINI-CONTI G. — « Osservazioni colorimetriche eseguite durante l'eclisse totale di Sole del 29 giugno 1927 ». 400.

B

- BACCHI G. — « Sulla decomposizione delle iperomografie vettoriali ». 718.
BAGLIONI S. — Anche a nome del Corrisp. Lo MONACO D., legge la relazione con la quale si propone la stampa della Nota di *M. Mitolo*: « Sulla natura dell'azione biologica degli alcoli ». 113.
ID. — Presenta in omaggio i primi due fascicoli del suo trattato « Elementi di fisiologia umana ». 250.
BARBIERI G. A. — « Di un nuovo tipo di sali delle terre rare ». 906.
ID. — « Sui ferro-ciano-molibdati e suoi composti analoghi del rutenio dell'osmio ». 1015.
BARBIERI U. — « Determinazione radiotelegrafica di longitudine, e attrazione locale nel vertice di 1° ordine Monte Colma di Mombarone ». 747.
BARONI A. — Vedi LEVI G. R.
BARRECA P. — Deduzione della legge sperimentale delle durate dei colori crepuscolari delle nuvole e probabile discriminazione tra la teoria di uno schermo diffrangente macroscopico (globo terracqueo) e quella di schermi microscopici (pulviscolo). 54.

- BEDARIDA A. M. — «Sopra i sistemi di progressioni aritmetiche». 154.
- ID. — «Sopra gli ideali primi di un corpo quadratico». 720.
- BELLUIGI A. — «Sulla forma delle masse profonde gravimetricamente perturbanti». 60.
- ID. — «Semplici e rapidi procedimenti di correzione topografica». 645.
- BEMPORAD G. — «Posizione fotografica del pianetino (1036)». 456.
- ID. e GENOVESE L. — «Ricerche sugli errori sistematici del "Draper Catalogue"». 682.
- BERGAMASCHI M. — «Sull'assorbimento del biossido di carbonio per opera delle radici e sulla sua utilizzazione nella fotosintesi clorofilliana». 238.
- BIANCHI A. — «Appunti petrografici sulla regione delle Alpi Aurine e delle Vedrette Giganti (Alto Adige)». 1145.
- BIGIARI D. — «Reazione di diazoidrati». 1118.
- ID. e STEFANIC O. F. M. — «Azione dei diazotati sopra gli azossifenoli». 326.
- BINI G. — «Di alcune caratteristiche del Mar Rosso sui riguardi del ciclo dell'azoto». 1128.
- BOGGIO T. — «L'omografia di Riemann per le ipersuperficie di uno spazio curvo». 278.
- ID. — «Le ipersuperficie degli spazi a curvatura costante». 460.
- BOMPIANI E. — «Determinazioni varie delle normali proiettive di una superficie». 39.
- ID. — «Sugli elementi di 2° ordine delle curve di una superficie». 288.
- ID. — «Le superficie iperspaziali con un doppio sistema coniugato». 847.
- BORDONI U. — «Sulla misura della conduttività termica di campioni di forma non regolare». 692.
- ID. — Anche a nome del Socio T. LEVICIVITA, legge la relazione con la quale si propone la stampa della Memoria di G. Bazzani: «Sui fenomeni della caduta in massa e della sedimentazione». 437.
- BORTOLOTTI E. — «Stelle di congruenze e parallelismo assoluto: basi geometriche di una recente teoria di Einstein». 530.
- BRACALONI L. — Vedi Cassinis U.
- BRUNETTI R. — «Teoria del paramagnetismo per joni soggetti ad azione molecolare forte». 754.
- BUCCIANTE L. — «Durata di sopravvivenza dei vari tessuti di embrioni di pollo nei quali l'incubazione fu interrotta». 1151.
- ID. e DE LOERNZI E. — «Correlazione di numero e di grandezza di singoli tipi di neuroni retinici in animali di differente mole somatica». 1156.
- BUSI M. — Vedi LEVI M. G. e PADOVANI C.

C

- CABRAS A. — «Sulle operazioni funzionali della fisica matematica che si presentano come funzioni razionali del simbolo di derivazione». 312.
- ID. — Vedi GIORGI G.
- CAGLIOTTI V. — «Ricerche sui polialogenuri. I. Sull'acido clorojodico $HJCl_4 \cdot 4H_2O$ ». 563.
- CAMBI L. e CLERICI A. — «Le relazioni fra composti ferrosi ed ossido d'azoto». 519.
- CARPANESE T. — «La proclorite del Monte Rosso di Verra (gruppo del Monte Rosa)». 77.
- CARRELLI A. — «Sul nuovo fenomeno di diffusione: effetto Raman». 165.
- ID. — «Sull'allargamento delle righe per risonanza». 222, 309.
- ID. — «Sulla distribuzione longitudinale dei fotoelettroni». 1102.
- CASSINA U. — «Sul concetto di vettore». 962.
- CASSINIS U. e BRACALONI L. — «Sulla curva idrenica normale nel riposo, nella marcia e nella corsa». 355.
- ID. e ID. — «Alcoolemia negli esercizi fisici». 806.
- CASTELNUOVO G. — Anche a nome del Socio LEVI CIVITA T., legge la relazione con la quale si propone la stampa della Memoria di B. De-Finetti: «Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio». 113.

- CASTELNUOVO G. — Vedi SEVERI F.
- ČECH E. — « Sur une propriété caractéristique des surfaces F de M. Fubini ». 975.
- CECIONI F. — « Sulla rappresentazione conforme delle aree pluriconnesse appartenenti a superficie di Riemann ». 149.
- CELERI A. — Vedi FERRARI A. e GIORGI F.
- CHERUBINO S. — « Sulle decomposizioni in somme di quadrati dei polinomi definiti o semidefiniti ». 283.
- ID. — « Sui polinomi definiti e semidefiniti ». 708.
- CHIARUGI G. — Presenta in omaggio il suo « Trattato di Embriologia ». 1051.
- CIMMINO G. — « Estensione dell'identità di Picone alla più generale equazione differenziale lineare ordinaria autoaggiunta ». 524.
- CISOTTI U. — « Sopra alcuni integrali di campo nel piano complesso ». 12.
- ID. — « Il tensore triplo di Christoffel ». 128.
- ID. — « Il secondo tensore triplo di Christoffel e la derivazione intrinseca ». 673.
- CLEMENTI A. — « Ricerche sull'arginasi. — VII. Carattere ureotelico del metabolismo azotato dei cheloni ». 505.
- CLERICI A. — Vedi CAMBI L., FERRARI A. e GIORGI F.
- COLOMBO B. — « Alcuni teoremi riguardanti le trasformazioni di Darboux generalizzate ». 217.
- COMEL M. — « Sull'azione fisiologica dello stronzio ». 663.
- COMESSATTI A. — « Sulle curve di Galois ». 272, 372.
- CROCCO G. A. — « Considerazioni sulla guida dell'aeroplano nella nebbia ». 25.

D

- D'ARCHIARDI G. — « Sul modo di formazione dei gruppi mimetici di dachiaridite ». 182.
- ID. — Commemora il Socio Corrispondente L. Brugnatelli. 437.
- DAL PIAZ G. — « Nuove osservazioni sull'Oligocene italiano ». 910.
- D'ANNEO G. — « Di un preparato centrale plurisegmentale di "Bufo vulgaris" ». 1164.

- DA RIOS L. S. — « Tubazioni ricurve ed ali ». 729.
- ID. — « Ali ed eliche ». 978.
- DE ANGELIS G. — Vedi TIZZONI G.
- DE CARLI F. — « Il carbonato doppio di cobalto e potassio ». 417.
- DE CARO L. — « Il punto isoelettrico della mioproteina e il potere regolatore del succo muscolare ». 87.
- ID. — « Peso molecolare della mioproteina (determinato col metodo della tensione superficiale secondo Lecompe du Nouÿ) ». 1025.
- DE FAZI R. — « Sintesi in chimica organica con l'energia raggiante. III. Acenastene ed aldeide benzoica ». 1004.
- DE LORENZI E. — Vedi BUCCIANTE L.
- DE MIRA FERNANDES A. — « Transports superficiels ». 203.
- ID. — « Tensori associati ad un'ennupla vettoriale ». 858.
- ID. — « Le tenseur quadruple de Christoffel et le tenseur de Riemann ». 1074.
- DI FRANCO S. — « Natrolite di Viagrande (Etna) ». 657.
- DIONISI A. — Commemora il Socio A. Peroncio. 1051.
- DOGLIOTTI G. C. — Vedi LEVI G.

E

- EMANUELLI P. — « Il Polo galattico e la regione circumpolare galattica ». 1096.

F

- FANO G. — « Un esempio di trasformazione birazionale cubica inerente a un complesso lineare ». 16.
- ID. — Ricorda che il 12 gennaio ricorre il secondo Centenario della nascita di Spallanzani e ne parla. 114.
- ID. — Presenta in omaggio il suo volume: « Un fisiologo intorno al mondo ». 437.
- FANTAPPIÈ L. — « Gli operatori funzionali e il calcolo delle matrici infinite nella teoria dei quanti ». 197.
- ID. — « Le equazioni funzionali lineari nel campo complesso ». 603.

- FEDERICI M. — «Sull'impedenza di un trasduttore quadripolare». 893.
- FENOGLIO M. — «Studi petrografici sulla zona del Canavese». 1141.
- FERMI E. — «Sopra l'elettrodinamica quantitativa». 881.
- ID. — «Sul moto di un corpo di massa variabile» (Estratto di lettera). 984.
- FERNANDES L. — «Ricerche sui solfosali. — VIII. Persolfosali». 409.
- FERRARI A., CELERI A. e GIORGI F. — «Sulla importanza della forma cristallina nella formazione di soluzioni solide. — V. Analisi termica e röntgenografica dei sistemi $\text{CoCl}_2 - \text{FeCl}_2$ e $\text{MnCl}_2 - \text{FeCl}_3$ anidri». 782.
- ID. e GIORGI F. — «La struttura cristallina dei bromuri di metalli bivalenti». 1134.
- FINIKOFF S. — «Sur les congruences de M. Demoulin». 493.
- FONIO G. — Vedi ANTONIANI C.
- FORTI C. — Ulteriori ricerche sull'azione di alcuni alcaloidi sui leucociti isolati dall'organismo». 800.
- FRANCHI S. — «Il riaffioramento lontano e a grande altezza della sinclinale nummulitica capovolta di Valdieri». 35.
- ID. «La inesistenza delle grandi falde dette "nappe du Mont Rose" e "nappe du Grand St. Bernard" nelle Alpi Occidentali». 134.
- ID. «Sull'importanza dei fogli "San Remo" e "Imperia" della carta geologica d'Italia al 100.000, per la soluzione di grandi quesiti di geologia alpina ed appenninica». 265.
- FUBINI G. — «Un problema della teoria delle congruenze di rette con applicazioni al problema della rappresentazione sferica di una superficie non euclidea ed a un teorema di Bianchi e di Blaschke». 19.
- ID. — «Sul fascio canonico». 365, 922.
- ID. — Commemora il Socio L. Bianchi. 821.
- GALAMINI A. — «Ulteriori ricerche sul valore alimentare della patata nei ratti albi». 1169.
- GARBASSO A. (Vice-Presidente). — Dà inizio alla prima Seduta del nuovo anno formulando auguri per i Soci e per le fortune dell'Accademia. Invia pure vive felicitazioni ai Colleghi recentemente nominati Senatori. 113.
- ID. — Rivolge particolari felicitazioni al Socio prof. F. Millosevich. 113.
- ID. — Ringrazia il Socio Armellini per la commemorazione del Socio A. Abetti. 113.
- ID. — Comunica la morte del Socio Aldo Perroncito e della grave sciagura che ha colpito il Socio O. M. Corbino. 250.
- ID. — Ringrazia il Socio Pincherle per la relazione sul Congresso internazionale dei matematici, tenutosi a Bologna. 250.
- ID. — Ringrazia il Socio Majorana per la relazione sui lavori e risultati del Congresso internazionale dei fisici, tenutosi a Como. 250.
- ID. — Ringrazia il Socio G. D'Achiardi per la commemorazione del Corrisp. L. Brugnatelli. 437.
- ID. — Ringrazia il Socio B. Morpurgo per la commemorazione del Socio straniero F. Marchand. 437.
- ID. — Invia felicitazioni della Classe a tutti i Soci che sono stati chiamati a far parte dell'Accademia d'Italia. 579.
- ID. — Annuncia che nelle carte dell'Accademia del Cimento è stato ritrovato un disegno del Viviani. 579.
- ID. — Presenta un plico suggellato di G. Gallo. 580.
- ID. — Comunica la presentazione di due Note di Corbetta e Licciardi. 580.
- ID. — Ringrazia il Corrisp. G. Fubini per la commemorazione del Socio L. Bianchi. 821.
- ID. — Ringrazia il Corrisp. A. Dionisi per la commemorazione del Socio A. Perroncito. 1051.
- GENOVESE L. — «Saggio di confronto fra le grandezze fotografiche di varie zone del Catalogo astrografico». 640.

G

GALAMINI A. — «Sul valore alimentare dei legumi studiato nei ratti albi». 809.

- GENOVESE L. — Vedi BEMPORAD A.
- GINORI-CONTI P. — Ricorda che nel corrente mese sarà inaugurata a Firenze la Esposizione di Storia della Scienza. 579.
- GIORGI F. — Vedi FERRARI A., CLERICI A. e CELERI A.
- GIORGI G. — « Sulla propagazione delle onde nei mezzi con assorbimento selettivo ». 8.
- ID. e CABRAS A. — « Questioni relativistiche sulle prove della rotazione terrestre ». 513.
- ID. e PORCU-TORTRINI E. — « Sui moti di deformazione nello spazio, rappresentati mediante il calcolo delle matrici ». 122.
- GLIVENKO V. — « Sur quelques formes générales de la loi des grands nombres ». 466.
- ID. — « Sur les formes générales de la loi des grands nombres dans les espaces fonctionnels ». 830.
- GOLDBERGER S. — « L'azione del pH sui muscoli striati ». 812.
- GRAFFI D. — « Alcune applicazioni degli invarianti adiabatici alla elettricità ». 867.
- ID. — « Dimostrazione della formula dei potenziali ritardati col metodo degli operatori funzionali ». 997.
- GRANDORI R. — « Microorganismi simbiotici nell'uovo di "Pieris brassicae L." ». 433.
- GUARESCHI C. — « L'otocisti degli anfibi anuri considerata come sistema a mosaico ». 666.
- GUIDI C. — Si associa alla commemorazione del Corrisp. C. Segrè fatta dal Corrisp. Stella. 250.
- ID. — Fa omaggio di una breve Nota. 579.
- GUGINO E. — « Sulla estensione del massimo effetto cineto-dinamico al moto dei sistemi a legami unilaterali ». 736.
- ID. — « Sul teorema del massimo effetto cineto-dinamico in relazione col principio della diretissima dell' Hertz ». 1090.

K

- KAHANOVICZ M. — « Una nuova serie nello spettro del ferro, prodotto con scariche fortemente condensate ». 761.

- KANITANI J. — « Sur une forme quadratique intrinsèque par rapport à l'hypersurface dans l'espace projectif à plusieurs dimensions ». 50.
- KAUCKY J. — « Sur les surfaces dont une droite canonique passe par un point fixe ». 147.
- KOLMOGOROFF A. — « Sur la loi des grands nombres ». 470.
- KOURENSKI M. — « Sur l'équation de Riccati ». 950.
- KRALL G. — « Limitazioni superiori per lo spostamento dinamico nei sistemi elastici ». 157.
- ID. — « Limitazioni locali del cimento dinamico ». 382.

L

- LACCHINI G. B. — « Sul limite di visibilità con refrattori di piccole dimensioni ». 304.
- LAMBERTI F. — « Intorno a due particolari equazioni dinamiche di un sistema materiale vincolato ». 395.
- LA ROSA M. — « Sull'interpretazione del comportamento di Algol e sulla variabilità della velocità della luce ». 686.
- LECAT M. — « L'Azéotrofisme dans les systèmes binaires contenant une substance hydroxylée ». 1121.
- LENTATI G. — « Ricerche sulla Istogenesi delle isole del Langherhans in "Ovis aries L." ». 1161.
- LEVI G. — « Sulla differenziazione delle cellule nervose ». 942.
- ID. — « Sui presunti caratteri citologici specifici del citoplasma delle cellule sessuali ». 1063.
- ID. e DOGLIOTTI G. C. — « La struttura delle cellule adipose ». 946.
- LEVI G. R. e BARONI A. — « Pentasolfuri dietilici ». 772, 903.
- ID. — « Triseleniuro, solfodiseleniuro e selenidossolfo dietilici ». 1019.
- LEVI M. G., PADOVANI C. e BUSI M. — « Sintesi di idrocarburi da gas d'acqua a pressione ordinaria ». 181.
- LEVI T. G. — « Sull'acido ditioformico ». 170.

- LEVI T. G. — « La ditioazina — 1.3.5 (Formotialdina) ». 424.
- ID. — « Una nuova classe di basi organiche ». 790.
- LEVI-CIVITA T. — Illustra due volumi degli « Scritti Scientifici di Francesco Siacci », giunti in dono all'Accademia. 821.
- ID. — Vedi CASTELNUOVO G., BORDONI U.
- LICINI R. — « Sulla forma F_2 del Fubini ». 144.
- LOMBARDI L. — Presenta in omaggio due libri del Socio G. Grassi. 579.
- ID. e LOMBARDI P. — « Comportamento del Trasformatore a spirale mobile nei circuiti per corrente costante ». 929.
- LOMBARDI P. — Vedi LOMBARDI L.
- LOMBARDINI M. — « Attrito interno dell'aria e costante di attrito superficiale alla stazione sperimentale di Vigna di Valle ». 63.
- ID. — « Sul calcolo della turbolenza nei bassi strati atmosferici ». 898.
- LO MONACO D. — Vedi BAGLIONI S.
- LORIA G. — Gli « Scritti scientifici » di Francesco Siacci. 596.

M

- MADDALENA L. — « Risultati geologici dell'attraversamento dell'Appennino toscobolognese colla grande Galleria della direttissima Bologna-Firenze ». 1030.
- MAGGI G. A. — « Sulla funzione potenziale di un doppio strato ». 677.
- MAJORANA Q. — Presenta in omaggio i due volumi degli « Atti del Congresso internazionale dei fisici » tenutosi a Como nel settembre 1927. 250.
- ID. — « A proposito di cellule fotoelettriche ». 517.
- ID. — « Telefonìa ottica mediante radiazioni ultraviolette od ultrasosse ». 924.
- ID. — « Sull'assorbimento delle radiazioni ultraviolette od ultrasosse da parte della nebbia ». 1056.
- MALQUORI G. — « Conduttività di soluzioni miste di nitrato di piombo e nitrato di ammonio ». 231.

- MALQUORI G. — « Il sistema $Fe(NO_3)_3 - KNO_3 - HNO_3 - H_2O$ a 25° ». 324, 414.
- ID. — « I sistemi: $Al(NO_3)_3 - Fe(NO_3)_3 - H_2O$ e $KNO_3 - Fe(NO_3)_3 - H_2O$ a 0° e 40° ». 569.
- MAMBRIANI A. — « Su una particolare equazione differenziale ». 142.
- ID. — « Su un teorema relativo alle equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine ». 620.
- MAMMANA G. — « La decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in fattori simbolici di primo ordine ». 538.
- ID. — « Alcune applicazioni della teoria della decomposizione delle espressioni differenziali lineari e omogenee allo studio delle equazioni differenziali lineari omogenee ». 608.
- MAMOLI L. — « Il tessuto adenoide nella ghiandola lacrimale umana normale ». 96.
- MANARINI M. — « Intorno al moto di due masse variabili che si attirano con la legge di Newton ». 499.
- MARCOLONGO R. — « Le ricerche geometrico-meccaniche di Leonardo da Vinci ». 259.
- ID. — Presenta in omaggio due suoi opuscoli e un volume in collaborazione con C. Burali-Forti. 1051.
- MARGARIA R. — « La riserva alcalina dell'acqua di mare ». 816.
- MARTINEZ G. — « Heulandite di Monastir ». 428.
- MARTINO G. — « Sul comportamento del fosfogeno nel tetano muscolare ». 1038.
- MARTINOZZI L. — « Sulle caratteristiche elettriche dei meteoriti (nell'ipotesi di una origine elettrica della loro luminosità) ed un valore limite per la densità degli ioni nell'alta atmosfera ». 403.
- MARTIS in BIDDAU S. — « Ricerca di un'espressione razionale per le potenze di una matrice del 3° ordine ». 206.
- MASOTTI A. — « Sulle azioni dinamiche in un sistema di vortici rettilinei ». 301.
- MAZZONE-SANGIORGI G. — « I primi elementi d'una nuova teoria generale per

il moto delle acque e degli altri fluidi ».

1085.

- MEZZADROLI G. e VARETON E. — « Azione esercitata da un circuito metallico oscillante sulla germinazione dei semi ». 350.
 MINEO C. — « Relazione fra i parametri dell'Ellissoide terrestre e i valori della gravità ». 650.
 MINETTI S. — « Sul raggio di convergenza degli sviluppi tayloriani ». 703.
 MONTEROSSO B. — « Studi cirripedologici. — V. Anabiosi e reviviscenza nei Ctamalinii ». 92.
 MONTORO V. — « Il supposto sesquisolfuro di molibdeno ». 331.
 MORPURGO B. — *Commemora il Socio Straniero F. Marchand*. 437.
 MOUSKHELICHVILI N. — « Sur le problème de torsion des cylindres élastiques isotropes ». 295.

N

- NALLI P. — « Sul valore principale di un integrale ». 488.
 ID. — « Parallelismo e coordinate geodetiche ». 526.
 ID. — « Derivazione di un tensore lungo una linea ». 616.
 ID. — « Sopra uno spostamento generalizzato negli spazi di Riemann ». 958.
 NATTA G. e PASSERINI L. — « Spinelli del tipo $Mc_2^{II} Mc_2^{IV} O_4$ ». 557.
 NERI F. — « Sulla autoeccitazione delle macchine asincrone autocompensate ». 1001.

O

- OCCHIALINI A. — « La lunghezza delle righe nello spettro di una scintilla in rapporto alla concentrazione dell'elemento ». 573.
 ID. — « La carica dei centri di emissione posta in evidenza dalla polarità degli elettrodi ». 652.
 ONOFRI L. — « Serie di potenze che ammettono la circonferenza di convergenza come linea singolare ». 551, 724.

P

- PACE E. — « Condensazione del piperonalio con alcune pinacoline ». 778.
 PADOVANI C. — Vedi LEVI M. G. e BUSI M.
 PALATINI A. — « Intorno alla nuova teoria di Einstein ». 633.
 PALAZZO L. — *Fa omaggio di una sua Memoria*. 1051.
 PARRAVANO N. (Segretario). — Presenta i libri giunti in dono all'Accademia. 113.
 ID. — Presenta i libri giunti in dono all'Accademia, segnalando il « Dizionario di merceologia e di chimica applicata » di V. Villavecchia. 251.
 ID. — Presenta i libri giunti in dono all'Accademia, segnalandone alcuni. 437, 579, 821, 1051.
 PASSERINI L. — « Ricerche sugli spinelli ». 338.
 ID. — Vedi NATTA G.
 PASQUINI P. — « Fenomeni di regolazione e di riparazione nello sviluppo dell'occhio degli Anfibi (risultati di nuovi esperimenti di asportazione e trapianto della vescicola ottica in Pleurodeles, Axoloti e Rana) ». 99.
 PASTORE S. — « Su uno speciale metodo di colorazione dei parassiti della malaria ». 669.
 PASTORI M. — « Commutazione totale e parziale relativa ai tensori derivati ». 474.
 ID. — « Sulla rappresentazione parzialmente intrinseca dei tensori ». 834.
 PETRI L. — « Comportamento dell'olivo sotto l'influenza delle radiazioni dell'uranio e della ionizzazione dell'aria ». 188.
 ID. — « Alterazione del fusto dei papiri prodotta da protozoi ». 701.
 PICONE M. — « Aggiunta alla Nota "Dimostrazione di un teorema d'analisi di cui è fatto uso in fisica piana" ». 544.
 PIERANTONI U. — « L'organo simbiotico di "Silvanus surinamensis (L)" ». 451.
 PIERONI A. — « Sopra i naftofenoxantoni ». 420.
 ID. — Vedi FOÀ C.

PIERUCCI M. — «A proposito di recenti esperienze sopra sottili pellicole metalliche». 990.

PINCHERLE S. — «Riferisce sul Congresso internazionale dei matematici tenutosi a Bologna». 250.

ID. — «Operazioni funzionali lineari e sviluppi dello zero». 679.

PINI E. — «Sull'esistenza degli integrali delle equazioni differenziali ordinarie». 625.

PIROTTA P. — Presenta in omaggio il suo trattato di «Fisiologia vegetale». 437.

POMPEIU D. — «Sur l'unicité du prolongement des fonctions harmoniques». 631.

PORCU-TORTRINI E. — Vedi GIORGI G.

PREVIATTA BORTOLOZZI M. — «Sopra l'equivalenza di due equazioni che si presentano nella determinazione della terna principale del Vitali per una superficie generica dello spazio hilbertiano». 48.

PRINCIPI P. — «Intorno ad alcuni affioramenti di "argille scagliose" nell'Umbria settentrionale». 84.

Q

QUAGLIARIELLO G. — «Ricerche sul meccanismo di formazione della linfa». 243.

ID. — «Na, K, Ca, e Mg nel succo muscolare e nel suo ultrafiltrato». 1029.

R

RANZI I. — «Fenomeni di resistenza negativa in un diodo sottoposto a un campo magnetico». 652.

ID. — «L'accrescimento embrionale dei Cefalopodi». 1171.

RESTAINO S. — Vedi ZAMBONINI F.

RICCA V. — Vedi TIERI L.

RIVERA V. — «Cicatrizzazione sperimentale di fusto di "Ricinus communis", determinata da "Pseudomonas fluorescens" (FLÜGGE) Migula». 510.

RODOLICO F. — «Ricerche cristallografiche sul cinabro di Idria». 176.

ROSSI B. — «L'effetto Raman e l'assorbimento negativo». 319.

ROVERETO G. — «Gli insegnamenti tetto-

nici di una nuova galleria ferroviaria della Costa Ligure». 696.

S

SACCARDI P. — «Melanine dall'adrenalina». 1114.

SACCO F. — Presenta in omaggio una sua breve Nota dal titolo: «La grande foglia del M. Rocchetta». 250.

ID. — Presenta in omaggio la sua Nota «Variazioni fluviali in Piemonte». 437.

SACILOTTO I. — «I Simboli di Riemann nel calcolo differenziale assoluto generalizzato». 213.

SANNIA G. — «Nuovi enti proiettivi nella stella che ha per centro un punto di una superficie». 1081.

SANZO L. — «Uova e larve di tonno ("Orcinus thynnus Ltkn.")». 104.

SBRANA F. — «Parallelismo e curvatura geodetica sopra una superficie». 1075.

SCARPA O. — «Pile di concentrazione, interamente metalliche funzionanti in contrasto con la legge di Volta». 1007.

SCORZA G. — «Sulle matrici di Riemann». 253.

ID. — Anche a nome del Socio SEVERI F., legge la relazione con la quale si propone la stampa della Memoria di G. Migonzi dal titolo: «Equazione algebriche risolubili per radicali in un corpo finito». 1051.

SCORZA-DRAGONI G. — «Sugli integrali dell'equazione $y' = f(x, y)$ ». 378.

ID. — «Sulla dipendenza continua degli integrali dell'equazione $y' = f(x, y)$ dai valori iniziali». 481.

ID. — «Su un'equazione differenziale particolare». 623.

SEGRE B. — «Costruzione di una curva semplice sghebra di Jordan, incontrata da tutte le semirette uscenti da un punto esterno». 136.

ID. — «Sui sistemi continui di curve piane con tacnodo». 970.

ID. — Vedi SEVERI F.

SEGRE E. — «Sulla teoria dell'effetto Raman». 407.

SEGRÈ E. — «Sulla teoria quantistica della fluorescenza». 887.

SEVERI F. — «Sull'insieme dei punti singolari di una funzione analitica di più variabili». 915.

ID. — Anche a nome del Socio CASTELNUOVO G., legge la relazione con la quale si propone la stampa della Memoria di A. Comessatti dal titolo: «Le involuzioni sulle curve algebriche e il teorema generale di diramazione per le funzioni fuchsiane». 1051.

ID. — Vedi SCORRA G.

ID. e SEGRE B. — «Un paradosso topologico». 3, 117.

SIGNORINI A. — «Interpretazione elettrostatica del teorema di Kutta-Joukowski». 192.

SOLER E. — «Seconda campagna gravimetrica sul Carso». 447.

SPIRITO A. — «Osservazioni sui processi regolativi in relazione allo sviluppo degli emisferi cerebrali negli embrioni Anuri». 797.

STEFANIC O. F. M. — Vedi BIGIAMI D.

STELLA A. — Commemora il Socio Corrispondente Claudio Segrè. 250.

STRAMPELLI B. — «Sul significato dei corpi di Heinz-Ehrlich e sui rapporti tra apparato macrofagico e mieloplastico». 107.

STRANEO S. L. — «Sulla risoluzione funzionale dei problemi lineari di propagazione del calore». 765.

T

TIERI L. e RICCA V. — «Sulla emissione elettronica in un tubo a vuoto». 872.

TIRELLI M. — «Fenomeni tropici nelle larve di "Bombyx Mori"». 1043.

TIZZONI G. e DE ANGELIS G. — «L'immunità contro il cancro conferita agli animali con autovaccino fenolato». 940.

TONOLO A. — «Classificazione delle superficie dello spazio hilbertiano, in cui spazio 2-tangente è a quattro dimensioni». 598, 713, 853.

TOSCANO L. — «Formule duali di Newton». 547.

TULLI A. — «Analisi chimica di una Mummia: contributo agli studi sulla mummificazione». 233.

ID. — «Un altro contributo agli studi sulla mummificazione degli antichi Egiziani: analisi chimica di una Mummia vaticana». 1111.

V

VARETON E. — Vedi MEZZADROLI G.

VINASSA DE REGNY P. — Presenta in omaggio un suo volume dal titolo: «Antagonismo». 250.

ID. — «La legge dei rapporti parametrici semplici e le distanze dei componenti il sistema solare». 443.

ID. — «Joni, numero elettronico e simmetria». 825.

VIOLA G. — «Curva di luce e periodo di "W Ursae majoris"». 743.

ID. — «Elementi ellittici del sistema di "W Ursae majoris"». 861.

ID. — «Oscillazioni pendolari negli elementi ellittici della variabile "W Ursae majoris"». 986.

VITALI G. — «Sul principio di Hamilton». 44.

ID. — «Le identità di Bianchi per i simboli di Riemann nel calcolo assoluto generalizzato». 190.

ID. — «Sui centri di curvatura delle geodetiche di una varietà». 391.

VOLTERRA V. — «Alcune osservazioni sui fenomeni ereditari». 585.

VRANCEANU G. — «Sopra certi problemi di equivalenza». 840.

W

WUNDHEILER A. — «Sur un déplacement généralisé dans les espaces riemanniens». 387.

Z

ZAMBONINI F. e RESTAINO S. — «I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. — XII. Solfati di cerio (ceroso) e cesio». 131.

INDICE PER MATERIE

A

Analisi. — « Sulla dipendenza continua degli integrali dell'equazione $y' = f(x, y)$ dai valori iniziali ». SCORZA DRAGONI G. 481.

— « Operazioni funzionali lineari e sviluppi dello zero ». PINCHERLE S. 679.

— « Sull'insieme dei punti singolari di una funzione analitica di più variabili ». SEVERI F. 915.

Analisi matematica. — « Alcuni teoremi riguardanti le trasformazioni di Darboux generalizzate ». COLOMBO B. 217.

Astrofisica. — « Deduzione della legge sperimentale delle durate dei colori crepuscolari delle nuvole e probabile discriminazione tra la teoria di uno schermo diffrangente macroscopico (globo terracqueo) e quella di schermi microscopici (pulviscolo) ». BARRECA P. 54.

Astronomia. — « Saggio sopra la rifrazione astronomica a Roma ». ARMELLINI G. 30.

— « Il diametro orizzontale del Sole nel 1927 e 1928 ». Id. 368.

— « Sul limite di visibilità con refrattori di piccole dimensioni ». LACCHINI G. B. 304.

— « Osservazioni colorimetriche eseguite durante l'eclisse totale di Sole del 29 giugno 1927 ». ARMELLINI-CONTI G. 400.

— « Sulle caratteristiche elettriche dei meteoriti (nell'ipotesi di una origine elettrica della loro luminosità) ed un valore limite per la densità degli ioni nell'alta atmosfera ». MARTINOZZI L. 403.

Astronomia. — « La legge dei rapporti parametrici semplici e le distanze dei componenti il sistema solare ». VINASSA DE REGNY P. 443.

— « Posizione fotografica del pianetino (1036) ». BEMPORAD G. 456.

— « Ricerche sugli errori sistematici del "Draper Catalogue" ». GENOVESE L. 682.

— « Saggio di confronto fra le grandezze fotografiche di varie zone del Catalogo astrografico ». GENOVESE L. 640.

— « Curva di luce e periodo di "W Ursae majoris" ». VIOLA G. 743.

— « Elementi ellittici del sistema di "W Ursae majoris" » Id. 861.

— « Oscillazioni pendolari negli elementi ellittici della variabile "W Ursae majoris" ». Id. 986.

— « Il Polo galattico e la regione circumpolare galattica ». EMANUELLI P. 1096.

Astronomia Fisica. — Sull'interpretazione del comportamento di Algol e sulla variabilità della velocità della luce ». LA ROSA M. 686.

B

Biologia. — « Studi cirripedologici - V. Anabiosi e reviviscenza nei Ctamalini ». MONTEROSSO B. 92.

— « Uova e larve di tonno ("Orcinus thynnus Ltkn") ». SANZO L. 104.

— « Azione esercitata da un circuito metallico oscillante sulla germinazione dei semi ». MEZZADROLI G. e VARETON E. 350.

— « L'organo simbiotico di "Silvanus surinamensis (L)" ». PIERANTONI U. 451.

Biologia. — « Sull'azione fisiologica dello stronzio ». COMEL M. 663.

— « L'otocisti degli anfibii anuri considerata come sistema a mosaico ». GUARESCHI C. 666.

— « Osservazioni sui processi regolativi in relazione allo sviluppo degli emisferi cerebrali negli embrioni di Anuri ». SPERRIO A. 797.

— « L'immunità contro il cancro conferita agli animali con autovaccino fenolato ». TIZZONI G. e DE ANGELIS G. 940.

— « Sulla sdifferenziazione delle cellule nervose ». LEVI G. 942.

— « Sui presenti caratteri citologici specifici del citoplasma delle cellule sessuali ». Id. 1063.

— « Durata di sopravvivenza dei vari tessuti di embrioni di pollo nei quali l'in-cubazione fu interrotta ». BUCCIANTE L. 1151.

— « Correlazione di numero e di grandezza di singoli tipi di neuroni retinici in animali di differente mole somatica ». BUCCIANTE L. DE LORENZI E. 1156.

Botanica. — « Sull'assorbimento del biossido di carbonio per opera delle radici e sulla sua utilizzazione nella fotosintesi clorofilliana ». BERGAMASCHI M. 238.

C

Calcolo funzionale. — « Gli operatori funzionali e il calcolo delle matrici infinite nella teoria dei quanti ». FANTAPPIÈ L. 197.

— « Le equazioni funzionali lineari nel campo complesso ». Id. 603.

Chimica. — « Prodotti di condensazione tra glucosio e p-fenetidina ». AMADORI M. 68.

— « Prodotti di condensazione tra glucosio e p-anisidina ». Id. 226.

— « Nuovo metodo d'impregnazione aurea ». ALTSCHUL R. 74.

— « I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. — XII. Solfati di cerio (ceroso) e cesio ». ZAMBONINI F. e RESTAINO S. 131.

— « Conduttività di soluzioni miste di nitrato di piombo e nitrato di ammonio ». MALQUORI G. 231.

Chimica. — « Il sistema $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 - \text{KNO}_3 - \text{HNO}_3 - \text{H}_2\text{O}$ a 25° ». Id. 324, 414.

— « I sistemi: $\text{Al}(\text{NO}_3)_3 - \text{Fe}(\text{NO}_3)_3 - \text{H}_2\text{O}$ e $\text{KNO}_3 - \text{Fe}(\text{NO}_3)_3 - \text{H}_2\text{O}$ a 0° e 40° ». Id. 569.

— « Analisi chimica di una Mummia: contributo agli studi sulla mummificazione ». TULLI A. 233.

— « Un altro contributo agli studi sulla mummificazione degli antichi Egiziani: analisi chimica di una Mummia vaticana ». Id. 1111.

— « Azione dei diazotati sopra gli azossifenoli ». BIGIARI D. e STEFANIC O. F. M. 326.

— « Il supposto sesquisolfuro di molibdeno ». MONTORO V. 331.

— « Ricerche sugli spinelli ». PASSERINI L. 338.

— « Ricerche sui solfosali. — VIII. Persolfosali ». FERNANDES L. 409.

— « Il carbonato doppio di cobalto e potassio ». DE CARLI F. 417.

— « Sopra i naftofenoxantoni ». PIERONI A. 420.

— « Le reazioni fra composti ferrosi ed ossido d'azoto ». CAMBI L. e CLERICI A. 519.

— « Spinelli del tipo $\text{Me}_2^{\text{II}} \text{Me}^{\text{IV}} \text{O}_4$ ». NATTA G. e PASSERINI L. 557.

— « Ricerche sui polialogenuri. — I. Sull'acido cloroiodico $\text{HJCl}_4 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ ». CAGLIOTI V. 563.

— « La lunghezza delle righe nello spettro di una scintilla in rapporto alla concentrazione dell'elemento ». OCCHIALINI A. 573.

— « Pentasolfuri dietilici ». LEVI G. R. e BARONI A. 772, 903.

— « Triseleniuro, solfodiseleniuro e selendisolfuro dietilici ». Id. e Id. 1019.

— « Condensazione del piperonalio con alcune pinacoline ». PACE E. 778.

— « Di un nuovo tipo di sali delle terre rare ». BARBIERI G. A. 906.

— « Sui ferro-ciano-molibdati e sui composti analoghi del rutenio dell'osmio ». Id. 1015.

— « Sopra la costituzione e le reazioni dei diazoidrati ». ANGELI A. 933.

— « Sintesi in chimica organica con l'ençer

- gia raggiante. III. Acenastene ed aldeide benzoica». DE FAZI R. 1004.
- Chimica.** — «Pile di concentrazione, interamente metalliche funzionanti in contrasto con la legge di Volta». SCARPA O. 1007.
- «Melanine dell'adrenalina». SACCARDI P. 1114.
- «Reazione di diazoidrati». BIGIARI D. 1118.
- Chimica agraria.** — «Ricerche sullo scambio dell'acido fosforico nel terreno con acido arsenico». ANTONIANI C. e FONIO G. 344.
- Chimica biologica.** — «Peso molecolare della mioproteina (determinato col metodo della tensione superficiale secondo Lecompe du Noüy)». DE CARO L. 1025.
- «Na, K, Ca e Mg nel succo muscolare e nel suo ultrafiltrato». QUAGLIARIELLO G. 1029.
- Chimica-fisica.** — «Sulla importanza della forma cristallina nella formazione di soluzioni solide. — V. Analisi termica e röntgenografica dei sistemi CoCl_2 — FeCl_2 e MnCl_2 — FeCl_3 anidri». FERRARI A., CELERI A. e GIORGI F. 782.
- «Joni, numero elettronico e simmetria». VINASSA DE REGNY P. 825.
- «L'Azéotropisme dans les systèmes binaires contenant une substance hydroxilée». LECAT M. 1121.
- Chimica oceanografica.** — «Di alcune caratteristiche del Mar Rosso sui riguardi del ciclo dell'azoto». BINI G. 1128.
- Chimica organica.** — «Sull'acido ditioformico». LEVI T. G. 170.
- «La ditioazina—1.3.5 (Formotialdina)». Id. 424.
- «Una nuova classe di basi organiche». Id. 790.
- Comunicazioni varie.** 114.
- Cristallografia.** — «La struttura cristallina dei bromuri di metalli bivalenti». FERRARI A. e GIORGI F. 1134.
- Elettrotecnica.** — «Comportamento del Trasformatore a spirale mobile nei circuiti per corrente costante». LOMBARDI L. e LOMBARDI P. 929.
- «Sulla autoeccitazione delle macchine asincrone autocompensate». NERI F. 1001.
- Embriologia.** — «Microrganismi simbiotici nell'uovo di "Pieris brassicae L."». GRANDORI R. 433.
- Embriologia sperimentale.** — «Fenomeni di regolazione e di riparazione nello sviluppo dell'occhio degli Anfibi (risultati di nuovi esperimenti di asportazione e trapianto della vescicola ottica in Pleurodeles, Axolotl e Rana)». PASQUINI P. 99.

F

- Fisica.** — «Sul nuovo fenomeno di diffusione: effetto Raman». CARRELLI A. 165.
- «Sull'allargamento delle righe per risuonanza». Id. 222, 309.
- «Sulla distribuzione longitudinale dei fotoelettroni». Id. 1102.
- «Nuovo metodo per misurare la velocità del suono nei liquidi». AMERIO A. 262.
- «Sulla teoria dell'effetto Raman». SEGRÉ E. 407.
- «Sulla teoria quantistica della fluorescenza». Id. 887.
- «A proposito di cellule fotoelettriche». MAJORANA Q. 517.
- «Telefonia ottica mediante radiazioni ultraviolette od ultrasosse». Id. 924.
- «Sull'assorbimento delle radiazioni ultraviolette od ultrasosse da parte della nebbia». Id. 1056.
- «Fenomeni di resistenza negativa in un diodo sottoposto a un campo magnetico». RANZI I. 652.
- «La carica dei centri di emissione posta in evidenza dalla polarità degli elettrodi». OCCHIALINI A. 655.
- «Sulla misura della conduttività termica di campioni di forma non regolare». BORDONI U. 692.
- «Teoria del paramagnetismo per joni soggetti ad azione molecolare forte». BRUNETTI R. 754.

Fisica. — «Una nuova serie nello spettro del ferro prodotto con scariche fortemente condensate». KAHANOVICZ M. 761.

— «Sulla risoluzione funzionale dei problemi lineari di propagazione del calore». STRANEO S. L. 765.

— «Sulla emissione elettronica in tubo a vuoto». TIERI L. e RICCA V. 872.

— «Sopra l'elettrodinamica quantistica». FERMI E. 881.

— «Sulla teoria quantistica dell'effetto Raman». ARNALDI E. 876.

— «A proposito di recenti esperienze sopra sottili pellicole metalliche». PIERUCCI M. 990.

Fisica-matematica. — «Sulla propagazione delle onde nei mezzi con assorbimento selettivo». GIORGI G. 8.

— «Interpretazione elettrostatica del teorema di Kutta-Joukowski». SIGNORINI A. 192.

— «Sulle operazioni funzionali della fisica matematica che si presentano come funzioni razionali del simbolo di derivazione». CABRAS A. 312.

— «Intorno alla nuova teoria di Einstein». PALATINI A. 633.

— «Alcune applicazioni degli invarianti adiabatici alla elettricità». GRAFFI D. 867.

— «Dimostrazione della formula dei potenziali ritardati col metodo degli operatori funzionali». Id. 997.

Fisica-teorica. — «L'effetto Raman e l'assorbimento negativo». ROSSI B. 319.

Fisiologia. — «Il punto isoelettrico della mioproteina e il potere regolatore del succo muscolare». DE CARO L. 87.

— «Ricerche sul meccanismo di formazione della linfa». QUAGLIARIELLO G. 243.

— «Sulla curva idremica normale nel riposo, nella marcia e nella corsa». CASINIS U. e BRACALONI L. 355.

— «Alcoolemia negli esercizi fisici». Id. e Id. 806.

— «Ricerche sull'arginasi. - VII. Carattere ureotelico del metabolismo azotato dei cheloni». CLEMENTI A. 505.

— «Ulteriori ricerche sull'azione di alcuni alcaloidi sui leucociti isolati dall'organismo». FORTI C. 800.

— «Sul valore alimentare dei legumi studiato nei ratti albin». GALAMINI A. 809.

Fisiologia. — «Ulteriori ricerche sul valore alimentare della patata nei ratti albin». Id. 1169.

— «L'azione del pH sui muscoli striati». GOLDBERGER S. 812.

— «La riserva alcalina dell'acqua di mare». MARGARIA R. 816.

— «Sul comportamento del fosfogeno nel tetano muscolare». MARTINO G. 1038.

— «Di un preparato centrale plurisegmentale di "Bufo vulgaris"». D'ANNEO G. 1164.

Fisiologia degli insetti. — «Fenomeni tropici nelle larve di "Bombyx Mori"». TIRELLI M. 1043.

Fisiologia dell'embrione. — «L'accrescimento embrionale dei Cefalopodi». RANZI S. 1171.

G

Geodesia. — «Seconda campagna gravimetrica sul Carso». SOLER E. 447.

— «Semplici e rapidi procedimenti di correzione topografica». BELLUIGI A. 645.

— «Determinazione radiotelegrafica di longitudine, e attrazione locale nel vertice di 1° ordine Monte Colma di Mombarone». BARBIERI U. 747.

Geofisica. — «Sulla forma delle masse profonde gravimetricamente perturbanti». BELLUIGI A. 60.

— «Relazione fra i parametri dell'Ellissoide terrestre e i valori della gravità». MINEO C. 650.

Geologia. — «Il riaffioramento lontano e a grande altezza della sinclinale nummulitica capovolta di Valdieri». FRANCHI S. 35.

— «La inesistenza delle grandi falde dette "nappe du Mont Rose" e "nappe du Grand St. Bernard" nelle Alpi Occidentali». Id. 134.

— «Sull'importanza dei fogli "San Remo" e "Imperia" della carta geologica di Italia al 100.000, per la soluzione di grandi quesiti di geologia alpina ed appenninica. Id. 265.

— «Intorno ad alcuni affioramenti di "argille scagliose" nell'Umbria settentrionale». PRINCIPI P. 84.

— «Gli insegnamenti tettonici di una nuova

galleria ferroviaria della Costa Ligure ». ROVERETO G. 696.

Ceologia. — « Nuove osservazioni sull'Oligocene italiano ». DAL PIAZ G. 910.

Geologia applicata. — « Risultati geologici dell'attraversamento dell'Appennino Tosco-Bolognese colla grande Galleria della direttissima Bologna-Firenze ». MADDALENA L. 1030.

Geometria. — « Un paradosso topologico ». SEVERI F. e SEGRE B. 3, 117.

— « Un esempio di trasformazione birazionale cubica inerente a un complesso lineare ». FANO G. 16.

— « Un problema della teoria delle congruenze di rette con applicazioni al problema della rappresentazione sferica di una superficie non euclidea ed a un teorema di Bianchi e di Blaschke ». FUBINI G. 19.

— « Sul fascio canonico ». Id. 365, 922.

— « Determinazioni varie delle normali proiettive di una superficie ». BOMPIANI E. 39.

— « Sugli elementi di 2° ordine delle curve di una superficie ». Id. 288.

— « Sur une forme quadratique intrinsèque par rapport à l'hypersurface dans l'espace projectif à plusieurs dimensions ». KANITANI J. 50.

— « Costruzione di una curva semplice sghemba di Jordan, incontrata da tutte le semirette uscenti da un punto esterno ». SEGRE B. 136.

— « Sui sistemi continui di curve piane con tacnodo ». Id. 970.

— « Sur les surfaces dont une droite canonique passe par un point fixe ». KAUCKÝ J. 147.

— « Le ricerche geometrico-meccaniche di Leonardo da Vinci ». MARCOLONGO R. 259.

— « Sui centri di curvatura delle geodetiche di una varietà ». VITALI G. 391.

— « Sur les congruences de M. Demoulin ». FINIKOFF S. 493.

— « Sur une propriété caractéristique des surfaces F de M. Fubini ». ČECH E. 975.

— « Nuovi enti proiettivi nella stella che ha per centro un punto di una superficie ». SANNIA G. 1081.

I

Idrodinamica. — « Sulle azioni dinamiche in un sistema di vortici rettilinei ». MASOTTI A. 301.

Istogenesi. — « Ricerche sulla Istogenesi delle isole del Langherhans in "Ovis aries L.". LENTATI G. 1161.

Istologia. — « La struttura delle cellule adipose ». LEVI G. e DOGLIOTTI G. C. 946.

M

Matematica. — « Sopra alcuni integrali di campo nel piano complesso ». CROSOTTI U. 12.

— « Il tensore triplo di Christoffel ». Id. 128.

— « Il secondo tensore triplo di Christoffel e la derivazione intrinseca ». Id. 673.

— « Sopra l'equivalenza di due equazioni che si presentano nella determinazione della terna principale del Vitali per una superficie generica dello spazio hilbertiano ». PREVIATTI BORTOLOZZI M. 48.

— « Le identità di Bianchi per i simboli di Riemann nel calcolo assoluto generalizzato ». VITALI G. 190.

— « Su una particolare equazione differenziale ». MAMBRIANI A. 142.

— « Su un teorema relativo alle equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine ». Id. 620.

— « Sulla forma F_2 del Fubini ». LICENI R. 144.

— « Sulla rappresentazione conforme delle aree pluriconnesse appartenenti a superficie di Riemann ». CECIONI E. 149.

— « Transports superficiels ». DE MIRA FERNANDES A. 203.

— « Tensori associati ad un'ennupla vettoriale ». Id. 858.

— « Le tenseur quadruple de Christoffel et le tenseur de Riemann ». Id. 1074.

— « Ricerca di un'espressione razionale per le potenze di una matrice del 3° ordine ». MARTIS in BIDDAL S. 206.

— « I Simboli di Riemann nel calcolo differenziale assoluto generalizzato ». SACCIOTTO I. 213.

— « Sulle Matrici di Riemann ». SCORZA G. 253.

Matematica. — «Sulle curve di Galois».

- COMESSATTI A. 272, 372.
- «L'omografia di Riemann per le ipersuperficie di uno spazio curvo». BOGGIO T. 278.
- «Le ipersuperficie degli spazi a curvatura costante». ID. 460.
- «Sulle decomposizioni in somme di quadrati dei polinomi definiti o semidefiniti». CHERUBINO S. 283.
- «Sui polinomi definiti e semidefiniti». ID. 708.
- «Sugli integrali dell'equazione $y' = f(x, y)$ ». SCORZA-DRAGONI G. 378.
- «Su un'equazione differenziale particolare». ID. 623.
- «Sur un déplacement généralisé dans les espaces riemanniens». WUNDHEILER A. 387.
- «Sur quelques formes générales de la loi des grands nombres». GLIVENKO V. 466.
- «Sur les formes générales de la loi des grands nombres dans les espaces fonctionnels». ID. 830.
- «Sur la loi des grands nombres». KOLMOGOROFF A. 470.
- «Commutazione totale e parziale relativa ai tensori derivati». PASTORI M. 474.
- «Sulla rappresentazione parzialmente intrinseca dei tensori». ID. 834.
- «Sul valore principale di un integrale». NALLI P. 488.
- «Parallelismo e coordinate geodetiche». ID. 526.
- «Derivazione di un tensore lungo una linea». ID. 616.
- «Sopra uno spostamento generalizzato negli spazi di Riemann». ID. 958.
- «Estensione dell'identità di Picone alla più generale equazione differenziale lineare ordinaria autoaggiunta». CIMMINO G. 524.
- «Stelle di congruenze e parallelismo assoluto: basi geometriche di una recente teoria di Einstein». BORTOLOTTI E. 530.
- «La decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in fattori simbolici di primo ordine». MAMMANA G. 538.

Matematica. — «Alcune applicazioni

- della teoria della decomposizione delle espressioni differenziali lineari e omogenee allo studio delle equazioni differenziali lineari omogenee». ID. 608.
- «Aggiunta alla Nota "Dimostrazione di un teorema d'analisi di cui è fatto uso in fisica piana"». PICONE M. 544.
- «Formule duali di Newton». TOSCANO L. 547.
- «Alcune osservazioni sui fenomeni ereditari». VOLTERRA V. 585.
- «Gli "Scritti scientifici" di Francesco Siacci». LORIA G. 596.
- «Classificazione delle superficie dello spazio hilbertiano, il cui spazio 2-tangente è a quattro dimensioni». TONOLO A. 598, 713, 853.
- «Sull'esistenza degli integrali delle equazioni differenziali ordinarie». PINI E. 625.
- «Sur l'unicité du prolongement des fonctions harmoniques». POMPEIU D. 631.
- «Sulla funzione potenziale di un doppio strato». (Estratto da una lettera al prof. T. Levi-Civita). MAGGI G. A. 677.
- «Sul raggio di convergenza degli sviluppi tayloriani». MINETTI S. 703.
- «Sulla decomposizione delle iperomografie vettoriali». BACCHI G. 718.
- «Sopra certi problemi di equivalenza». VRANCEANU G. 840.
- «Le superficie iperspaziali con un doppio sistema coniugato». BOMPIANI E. 847.
- «Sur l'équation de Riccati». HOURENSKY M. 950.
- «Sul concetto di vettore». CASSINA U. 962.
- «Parallelismo e curvatura geodetica sopra una superficie». SBRANA F. 1075.
- Meccanica.** — «Considerazioni sulla guida dell'aeroplano nella nebbia». CROCCO G. A. 25.
- «Sul principio di Hamilton». VITALI G. 44.
- «Sui moti di deformazione nello spazio, rappresentati mediante il calcolo delle matrici». GIORGI G. e PORCU-TORTRINI E. 122.
- «Limitazioni superiori per lo sposta-

mento dinamico nei sistemi elastici». KRALL G. 157.

Meccanica. — «Limitazioni locali del cimento dinamico». ID. 382.

— «Sur le problème de torsion des cylindres élastiques isotropes». MOUSKHELICHVILI N. 295.

— «Intorno a due particolari equazioni dinamiche di un sistema materiale vincolato». LAMBERTI F. 395.

— «Intorno al moto di due masse variabili che si attirano con la legge di Newton». MANARINI M. 499.

— «Tubazioni ricurve ed ali». DA RIOS L. S. 729.

— «Ali ed eliche». ID. 978.

— «Sulla estensione del teorema del massimo effetto cineto-dinamico al moto dei sistemi a legami unilaterali». GUGINO E. 736.

— «Sul teorema del massimo effetto cineto-dinamico in relazione col principio della direttissima dell'Hertz». ID. 1090.

— «Sul moto di un corpo di massa variabile (Estratto di lettera)». FERMI E. 984.

— «Sul moto di un corpo di massa variabile». ALMANZI E. 1055.

— «I primi elementi d'una nuova teoria generale per il moto delle acque e degli altri fluidi». MAZZONE-SANGIORGI G. 1085.

Meccanica astronomica. — «Questioni relativistiche sulle prove della rotazione terrestre». GIORGI G. e CABRAS A. 513.

Meteorologia. — «Attrito interno dell'aria e costante di attrito superficiale alla stazione sperimentale di Vigna di Valle». LOMBARDINI M. 63.

— «Sul calcolo della turbolenza nei bassi tratti atmosferici». ID. 898.

Mineralogia. — «La proclorite del Monte Rosso di Verra (gruppo del Monte Rosa)». CARPANESE T. 77.

— «Sul modo di formazione dei gruppi mimetici di dachiardite». D'ACHIARDI G. 182.

— «Ricerche cristallografiche sul cinabro di Idria». RODOLICO F. 176.

— «Heulandite di Monastir». MARTINEZ G. 428.

Mineralogia. — «Natrolite di Viagrande (Etna)». DI FRANCO S. 657.

N

Necrologia. — Commemorazione del Socio ABETTI A. 113.

— Annunzio della morte del Socio A. PERONCITO. 250, 1051.

— Commemorazione del Corrisp. C. SEGRÈ. 250.

— Commemorazione del Corrisp. L. BRUGNATELLI. 437.

— Commemorazione del Socio straniero F. MARCHAND. 437.

— Commemorazione del Socio L. BIANCHI. 821.

O

Oculistica. — «Il tessuto adenoide nella glandola lacrimale umana normale». MAMOLI L. 96.

Opere pervenute in dono all'Accademia. 115, 251, 438, 581, 823, 1053.

P

Patologia. — «Sul significato dei corpi di Heinz-Ehrlich e sui rapporti tra apparato macrofagico e mieloplastico». STRAMPELLI B. 107.

— «I veleni emolitici e le alterazioni del fegato». ALÓSI B. 358.

— «Su uno speciale metodo di colorazione dei parassiti della malaria». PASTORE S. 669.

Patologia vegetale. — «Comportamento dell'olivo sotto l'influenza delle radiazioni dell'uranio e della ionizzazione dell'aria». PETRI L. 188.

— «Alterazione del fusto dei papiri prodotta da protozoi». ID. 701.

— «Cicatrizzazione sperimentale di fusto di "Ricinus communis", determinata da "Pseudomonas fluorescens" (Flügge) Migula». RIVERA V. 510.

Petrografia. — «Studi petrografici sulla zona del Canavese». FENOGLIO M. 1141.

— «Appunti petrografici sulla regione delle Alpi Aurine e delle Vedrette Giganti (Alto Adige)». BIANCHI A. 1145.

Personale accademico. — 113, 250,

437, 579, 821, 1051.

Presentazione di libri. — 113, 250,

437, 579, 821, 1051.

Presentazione di plichi suggellati.
580.

R

Relazioni di commissioni. — 113,

437, 1051.

T

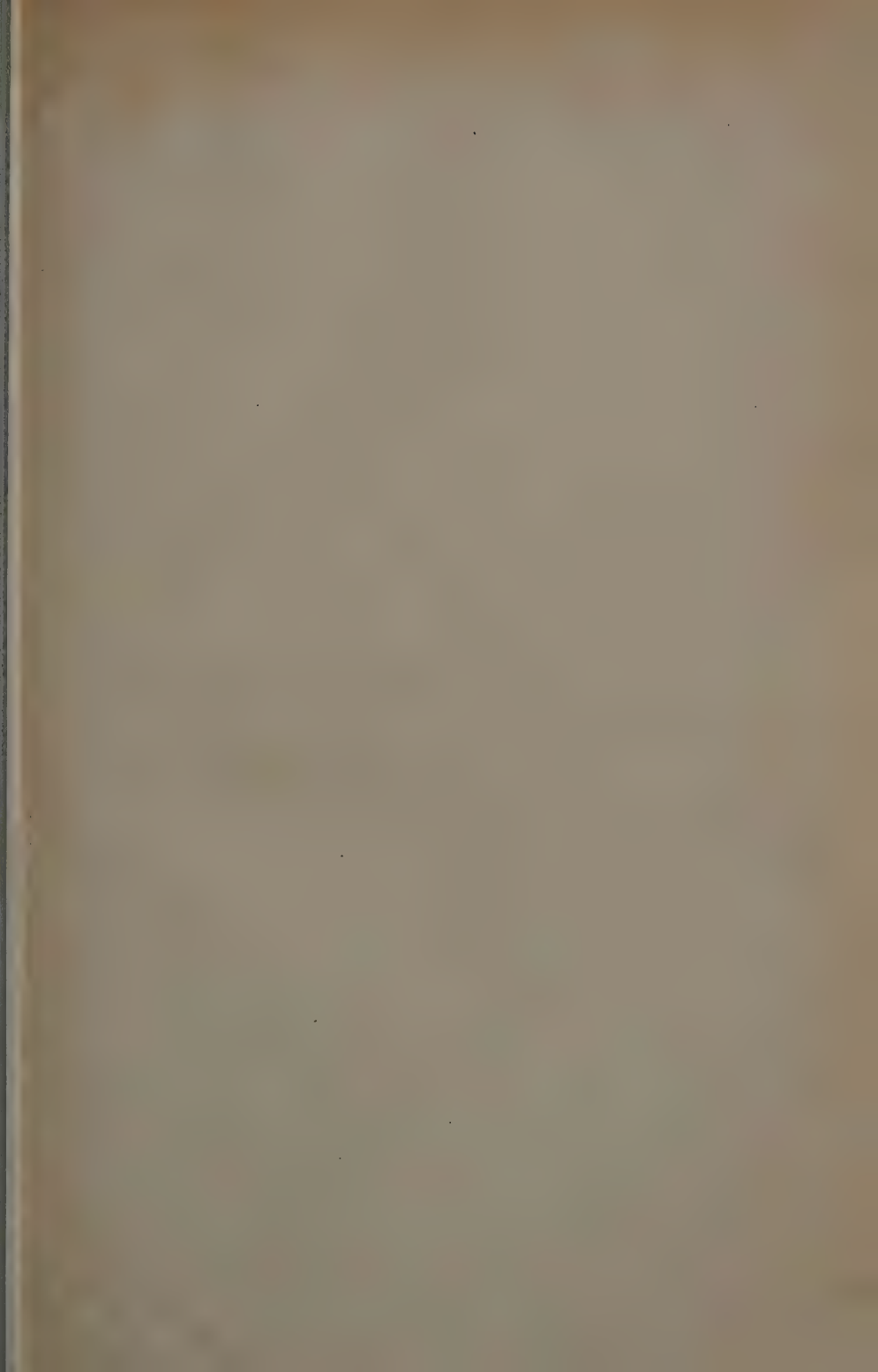
Teoria dei numeri. — «Sopra i sistemi di progressioni aritmetiche». BEDARIDA A. M. 154.

— «Sopra gli ideali primi di un corpo quadratico». Id. 720.

Teoria delle funzioni. — «Serie di potenze che aumentano la circonferenza di convergenza come linea singolare». ONOFRI L. 551, 724.











628

30

[illegible]

PRINTED IN U.S.A.



3 8198 307 180 628

THE UNIVERSITY OF ILLINOIS AT CHICAGO

